ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

Mohamed Bouali

Application des théorèmes de Minlos et Poincaré à l'étude asymptotique d'une intégrale orbitale

Tome XVI, nº 1 (2007), p. 49-70.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2007_6_16_1_49_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XVI, n° 1, 2007
pp. 49–70

Application des théorèmes de Minlos et Poincaré à l'étude asymptotique d'une intégrale orbitale[(*)]

Mohamed Bouali [(1)]

Résumé. — On va étudier le comportement asymptotique d'une intégrale de type intégrale de Itzykson-Zuber et on va donner une formule pour sa limite. On va obtenir ce résultat en utilisant un théorème de Poincaré et un théorème de Minlos.

Abstract. — In this paper we discuss the asymptotic behavior of the Itzykson-Zuber integral and by the use of a Poincaré theorem and a Minlos theorem we'll give a formula for its limit.

1. Introduction

L'objet de cet article est l'étude asymptotique de l'intégrale de Itzykson-Zuber ;

$$I_n(x^{(n)}, y^{(n)}) = \int_{K_n} e^{-i\mathrm{tr}(x^{(n)}uy^{(n)}u^*)}\alpha^{(n)}(du),$$

où $x^{(n)}$, $y^{(n)}$ sont des matrices hermitiennes $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, $K_n = U(n, \mathbb{F})$ est le groupe des matrices unitaires à coefficients dans $\mathbb{F}$, et $\alpha^{(n)}$ est la mesure de Haar normalisée du groupe unitaire K_n.

On considère ici le cas où $x^{(n)}$ est une matrice fixée $x \in Herm(m, \mathbb{F})$ complétée en une matrice hermitienne infinie,

$$x^{(n)}_{ij} = x_{ij} \ \text{ si } \ i \text{ et } j \leqslant m, \ = 0 \ \text{ si } \ i \text{ ou } j > m,$$

et $y^{(n)}$ est une matrice $n \times n$. En raison de l'invariance de la mesure de Haar $\alpha^{(n)}$, cette intégrale ne dépend que des valeurs propres de x et de $y^{(n)}$. On

(*) Reçu le 25 avril 2005, accepté le 24 novembre 2005
(1) Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Pierre et Marie Curie, 175 rue de chevaleret, 75013 Paris.
bouali@math.jussieu.fr

peut donc supposer que x et $y^{(n)}$ sont des matrices diagonales :

$$x = diag(\lambda_1, ..., \lambda_m),\ y^{(n)} = diag(a_1^{(n)}, ..., a_n^{(n)}).$$

Le principal résultat de cet article est le théorème suivant.

Théorème 1.1. — *On suppose que pour tout k,*

$$(1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_k^{(n)}}{n} = \alpha_k.$$

De plus on suppose que la suite $\alpha = \{\alpha_k\}$ est sommable et que

$$(2)\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{(n)}}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k; (3)\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k^{(n)}}{n}\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2.$$

Alors,

$$\lim_{n\to\infty} I_n(x, y^{(n)}) = \prod_{j=1}^{m} \varphi(\lambda_j),$$

où,

$$\varphi(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + i\frac{2}{d}\lambda\alpha_k)^{-\frac{d}{2}}.$$

($d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F} = 1, 2$ *ou* 4)*, la convergence est uniforme sur tout compact de* $V_m = Herm(m, \mathbb{F})$.

Lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, ce théorème est établi par Olshanski et Vershik sous des hypothèses plus fortes. La méthode consiste à faire un développement en série de fonctions de Schur de l'intégrale $I_n(x, y^{(n)})$ (Voir [4]). Ils démontrent que si

$$(1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_k^{(n)}}{n} = \alpha_k,$$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{(n)}}{n} = \beta,$$

$$(3)\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k^{(n)}}{n}\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 + \gamma,$$

et si pour tout $m \geqslant 3$,

$$(4)\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k^{(n)}}{n}\right)^m = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^m,$$

alors $I_n(x, y^{(n)})$ convergent uniformément sur tout compact de V_m vers la fonction
$$\varphi(x) = e^{-i\beta \mathrm{tr}(x)} e^{-\frac{\gamma}{2}\mathrm{tr}(x^2)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_k \mathrm{tr}(x)}}{\det(1 + i\alpha_k x)},$$
où $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$.

A l'aide de ce résultat, Olshanski et Vershik ont déterminé dans ([4]) toutes les mesures ergodiques définies sur l'espace des matrices hermitiennes infinies H_∞ à coefficients dans $\mathbb{C}$ et qui sont invariantes (par conjugaison) par le groupe unitaire infini $U(\infty)$ (i.e. la limite inductive des groupes unitaires $U(n)$).

Remarquons que si on suppose que $\beta = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ et $\gamma = 0$, alors le résultat du théorème 1.1 généralise le résultat ci-dessus dans le cas où $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{H}$.

En considérant des développements en série des polynômes de Jack, il est possible de généraliser la méthode de Olshanski et Vershik dans le cas où $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{H}$ pour montrer un résultat analogue au résultat ci-dessus et par suite pour déterminer toutes les mesures ergodiques définies sur l'espace des matrices hermitiennes infinies V_∞ à coefficients dans $\mathbb{F}$ et qui sont invariantes par le groupe unitaire infini K_∞ (i.e. la limite inductive des groupes unitaires K_n à coefficients dans $\mathbb{F}$). Cette généralisation est l'objet d'un article actuellement en préparation. Dans notre cas (théorème 1.1), nous utilisons une méthode différente qui s'appuie sur un théorème de Poincaré et un théorème de Minlos, c'est la motivation essentielle de ce travail.

L'intégrale I_n peut s'écrire comme une intégrale sur la variété de Stiefel $S_{m,n}$:
$$S_{m,n} = \big\{ v \in M(m, n; \mathbb{F}) \mid vv^* = I_m \big\}.$$
En effet,
$$I_n(x, y^{(n)}) = \int_{S_{m,n}} e^{-i\mathrm{tr}(xvy^{(n)}v^*)}\ \sigma_m^{(n)}(dv),$$
où $\sigma_m^{(n)}$ est la mesure de probabilité uniforme sur $S_{m,n}$ invariante par $K_m \times K_n$.

Notons $\widetilde{\sigma}_m^{(n)}$ la mesure normalisée sur la variété
$$\widetilde{S}_{m,n} = \sqrt{n} S_{m,n} = \big\{ v \in M(m, n; \mathbb{F}) \mid vv^* = nI_m \big\},$$

invariante par $K_m \times K_n$, autrement dit l'image de $\sigma_m^{(n)}$ par l'application qui à une matrice $v \in M(m,n;\mathbb{F})$ associe la matrice $\sqrt{n}\,v$. Nous montrerons que, pour m fixé, la mesure $\widetilde{\sigma}_m^{(n)}$ considérée comme une mesure sur $M(m,\infty;\mathbb{F})$ converge faiblement vers une mesure gaussienne γ_m sur $M(m,\infty,\mathbb{F})$ quand n tend vers l'infini.

Nous montrerons ensuite, à l'aide du théorème de Minlos, que

$$\lim_{n\to\infty} I_n(x,y^{(n)}) = \int_{M(m,\infty;\mathbb{F})} \exp(-i\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\lambda_j|v_{jk}|^2)\gamma_m(dv).$$

(Nous verrons que la série qui figure en exposant est définie presque partout, relativement à γ_m). Le calcul de l'intégrale précédente conduit au résultat annoncé.

2. Théorème de Poincaré généralisé

La mesure uniforme $\widetilde{\sigma}_n$ sur la sphère $\widetilde{S}_n$ de centre 0 et de rayon $\sqrt{n}$ dans $\mathbb{R}^n$, considérée comme une mesure sur $\mathbb{R}^\infty$, converge faiblement, quand n tend vers l'infini vers une mesure gaussienne. C'est un résultat classique attribué à Poincaré (voir à ce sujet l'article de Diaconis et Freedman [3].) Nous allons établir une généralisation de ce résultat.

Soit $S_{m,n}$ la variété de Stiefel définie par si $m \leqslant n$,

$$S_{m,n} = \{v \in M(m,n;\mathbb{F}) \mid vv^* = I_m\},$$

où $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. On note $K_n = U(n,\mathbb{F})$, c'est-à-dire $K_n = O(n)$ si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $K_n = U(n)$ si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ et $K_n \simeq Sp(n)$ si $\mathbb{F} = \mathbb{H}$. Le groupe $K_m \times K_n$ opère transitivement sur $S_{m,n}$. Soit $\sigma_m^{(n)}$ la mesure uniforme normalisée sur $S_{m,n}$ qui est invariante par $K_m \times K_n$. Sa transformée de Fourier s'exprime à l'aide de la fonction de Bessel multivariée, associée à l'algèbre de Jordan euclidienne $V_m = Herm(m,\mathbb{F})$ des matrices hermitiennes $m\times m$ à coefficients dans $\mathbb{F}$.

Rappelons quelques notations et définitions. Pour $x \in V_m$, on note $\Delta_j(x)$ le j-ième déterminant mineur principal de la matrice x. Si $j = m$, $\Delta_m(x) = \Delta(x)$ est le déterminant de x, et

$$\Delta_{\mathbf{p}}(x) = \Delta_1(x)^{p_1-p_2}\Delta_2(x)^{p_2-p_3}...\Delta_m(x)^{p_m},$$

où $\mathbf{p} = (p_1,...,p_m) \in \mathbb{N}^m$, $p_1 \geqslant ... \geqslant p_m \geqslant 0$. La fonction $\Delta_{\mathbf{p}}$ est un polynôme de degré $|\mathbf{p}| = p_1 + ... + p_m$.

Le polynôme sphérique $\Phi_{\mathbf{p}}$ est défini par

$$\Phi_{\mathbf{p}}(x) = \int_{K_m} \Delta_{\mathbf{p}}(uxu^*)\, \alpha^{(m)}(du),$$

où $\alpha^{(m)}$ désigne la mesure de Haar normalisée de K_m.

Soit Ω_m le cône des matrices $x \in V_m$ qui sont définies positives. La fonction gamma du cône Ω_m est définie par

$$\Gamma_m(\mathbf{p}) = \int_{\Omega_m} e^{-\mathrm{tr}(x)} \Delta_{\mathbf{p}}(x) \Delta(x)^{-\frac{\delta(m)}{m}}\, dx,$$

où $\delta(m) = \dim_{\mathbb{R}} V_m = m + \frac{d}{2} m(m-1)$, $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F} = 1$, 2 ou 4.

Pour $x \in \Omega_m$, $\Delta_j(x) > 0$ et la fonction $\Delta_{\mathbf{p}}$ est définie pour $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_m) \in \mathbb{C}^m$. La fonction Γ_m est définie pour $\Re(p_j) > \frac{d}{2}(j-1)$; $(j = 1, ..., m)$ et elle vaut

$$\Gamma_m(\mathbf{p}) = (2\pi)^{\frac{\delta(m)-m}{2}} \prod_{j=1}^{m} \Gamma(p_j - \frac{d}{2}(j-1)),$$

où $\Gamma\, (= \Gamma_1)$ est la fonction gamma usuelle.

La fonction de Bessel $\mathcal{J}_\nu^{(m)}$ est définie par la série sphérique

$$\mathcal{J}_\nu^{(m)}(x) = \sum_{\mathbf{p}} (-1)^{|\mathbf{p}|} \frac{d_{\mathbf{p}}}{(\frac{\delta(m)}{m})_{\mathbf{p}}} \frac{1}{(\nu)_{\mathbf{p}}} \Phi_{\mathbf{p}}(x),$$

où la sommation est étendue aux $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_m) \in \mathbb{N}^m$ vérifiants $p_1 \geqslant ... \geqslant p_m$, $(\nu)_{\mathbf{p}}$ est le symbole de Pochhammer généralisé

$$(\nu)_{\mathbf{p}} = \frac{\Gamma_m(\mathbf{p} + \nu)}{\Gamma_m(\nu)},$$

$(\nu \in \mathbb{C},\ \alpha + \nu = (\alpha_1 + \nu, ..., \alpha_m + \nu))$ et $d_{\mathbf{p}}$ est la dimension de l'espace des polynômes engendré par le polynôme $\pi(g)\Delta_{\mathbf{p}}$ quand g d'écrit $GL(m, \mathbb{F})$ avec π la représentation de $GL(m, \mathbb{F})$ dans l'espace des fonctions polynômes sur V_m définies par $(\pi(g)p)(x) = p(gxg^{-1})$.

Pour $m = 1$, $\mathcal{J}_\nu^{(1)}(x) = \Gamma(\frac{\nu}{2})(\frac{2}{x})^{\frac{\nu}{2}-1} J_{\frac{\nu}{2}-1}(x)$, $\nu \in \mathbb{N}$,
où J_ν est la fonction de Bessel ordinaire. (Voir [2], section 2 du chapitre XV).

Sur l'espace $M(m,n;\mathbb{F})$ on considère le produit scalaire euclidien défini par

$$\langle \xi, \eta \rangle = \Re\, \mathrm{tr}(\xi \eta^*).$$

La transformée de Fourier d'une mesure bornée μ sur $M(m,n;\mathbb{F})$ est définie par

$$\widehat{\mu}(\eta) = \int_{M(m,n;\mathbb{F})} e^{-i\langle \xi,\eta\rangle} \mu(d\xi), \qquad \eta \in M(m,n;\mathbb{F}).$$

Proposition 2.1. — *La transformée de Fourier de la mesure $\sigma_m^{(n)}$ est donnée par*

$$\widehat{\sigma_m^{(n)}}(\eta) = \int_{S_{m,n}} e^{-i\langle \xi,\eta\rangle}\ \sigma_m^{(n)}(d\xi) = \mathcal{J}^{(m)}_{\frac{nd}{2}}\Big(\frac{\eta\eta^*}{4}\Big).$$

C'est un cas particulier de la proposition XVI.2-3 de [2].

Soit $\widetilde{\sigma}_m^{(n)}$ la mesure normalisée sur la variété

$$\widetilde{S}_{m,n} = \big\{ v \in M(m,n;\mathbb{F}) \,|\, vv^* = nI_m \big\},$$

invariante par le groupe compact $K_m \times K_n$. Autrement dit, pour toute fonction f continue sur $\widetilde{S}_{m,n}$,

$$\int_{\widetilde{S}_{m,n}} f(v)\widetilde{\sigma}_m^{(n)}(dv) = \int_{S_{m,n}} f(\sqrt{n}\, v)\sigma_m^{(n)}(dv).$$

Théorème 2.2. — *Pour m fixé, la mesure $\widetilde{\sigma}_m^{(n)}$ considérée comme une mesure sur $M(m,\infty;\mathbb{F})$ converge faiblement quand n tend vers l'infini vers la mesure gaussienne γ_m sur $M(m,\infty;\mathbb{F})$ dont la transformée de Fourier est égale à*

$$\psi(\xi) = e^{-\frac{\rho^2}{2d}}, \quad \rho^2 = \mathrm{tr}(\xi\xi^*) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{jk}|^2,$$

où $\xi \in M(m,(\infty);\mathbb{F})$.

L'espace $M(m,\infty;\mathbb{F}) \simeq (\mathbb{F}^m)^\infty$ est muni de la topologie produit et son dual

$$M(m,(\infty);\mathbb{F}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} M(m,n;\mathbb{F}),$$

est muni de la topologie de la limite inductive, la dualité étant définie par la forme bilinéaire

$$\langle \xi, \eta \rangle = \Re \mathrm{tr}(\xi\eta^*).$$

La fonction ψ est définie et continue sur $M(m,(\infty);\mathbb{F})$.

Démonstration. — Nous allons appliquer le théorème de Lévy-Crámer, c'est-à-dire nous allons montrer que la transformée de Fourier ψ_n de la mesure $\widetilde{\sigma}_m^{(n)}$ converge vers ψ. Pour cela nous utiliserons le développement en série sphérique suivant : pour $x \in V_m$

$$e^{\mathrm{tr}(x)} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{d_{\mathbf{p}}}{(\frac{\delta(m)}{m})_{\mathbf{p}}} \Phi_{\mathbf{p}}(x),$$

($\mathbf{p} = (p_1, ..., p_m) \in \mathbb{N}^m , p_1 \geqslant ... \geqslant p_m$). La convergence est uniforme sur tout compact de V_m (voir [2] proposition XII.1.3) donc,

$$\psi(\xi) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{d_{\mathbf{p}}}{(\frac{\delta(m)}{m})_{\mathbf{p}}} \Phi_{\mathbf{p}}(-\frac{1}{2d}\xi\xi^*).$$

On peut toujours supposer que $n \geqslant 2(m-1)$, puisqu'on va faire tendre n vers l'infini.

Soit ψ_n la transformée de Fourier de $\widetilde{\sigma}_{m,n}$. Pour $\xi \in M(m, (\infty); \mathbb{F})$,

$$\psi_n(\xi) = \int_{\widetilde{S}_{m,n}} e^{-i\langle \xi, x\rangle}\ \widetilde{\sigma}_m^{(n)}(dx).$$

D'après la proposition 2.1,

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \sum_{\mathbf{p}} (-1)^{|\mathbf{p}|} \frac{d_{\mathbf{p}}}{(\frac{\delta(m)}{m})_{\mathbf{p}}} \frac{1}{(\frac{nd}{2})_{\mathbf{p}}} \Phi_{\mathbf{p}}(\frac{n}{4}\xi\xi^*) \\ &= \sum_{\mathbf{p}} \frac{d_{\mathbf{p}}}{(\frac{\delta(m)}{m})_{\mathbf{p}}} \frac{(\frac{nd}{2})^{|\mathbf{p}|}}{(\frac{nd}{2})_{\mathbf{p}}} \Phi_{\mathbf{p}}(-\frac{1}{2d}\xi\xi^*). \end{aligned}$$

De la définition du symbole de Pochhammer généralisé, pour n assez grand, on a

$$\begin{aligned} (\frac{nd}{2})_{\mathbf{p}} &= \prod_{j=1}^{m} \Big(\frac{nd}{2} - \frac{d}{2}(j-1)\Big)\Big(\frac{nd}{2} + 1 - \frac{d}{2}(j-1)\Big)...\Big(\frac{nd}{2} + p_j - 1 - \frac{d}{2}(j-1)\Big) \\ &\sim \prod_{j=1}^{m} (\frac{nd}{2})^{p_j} = (\frac{nd}{2})^{|\mathbf{p}|}, \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{nd}{2})^{|\mathbf{p}|}}{(\frac{nd}{2})_{\mathbf{p}}} = 1.$$

D'autre part, pour $n \geqslant 2(m-1)$ on a

$$\begin{aligned}
(\frac{nd}{2})_{\mathbf{p}} &= \prod_{j=1}^{m} \frac{\Gamma\big(p_j + \frac{nd}{2} - \frac{d}{2}(j-1)\big)}{\Gamma\big(\frac{nd}{2} - \frac{d}{2}(j-1)\big)} \\
&= \prod_{j=1}^{m} \big(\frac{nd}{2} - \frac{d}{2}(j-1)\big)\big(\frac{nd}{2} + 1 - \frac{d}{2}(j-1)\big)...\big(\frac{nd}{2} + p_j - 1 - \frac{d}{2}(j-1)\big) \\
&\geqslant \prod_{j=1}^{m} \big(\frac{nd}{2} - \frac{d}{2}(j-1)\big)^{p_j} = (\frac{nd}{2})^{|\mathbf{p}|} \prod_{j=1}^{m} (1 - \frac{j-1}{n})^{p_j} \\
&\geqslant (\frac{nd}{2})^{|\mathbf{p}|}\big(1 - \frac{m-1}{n}\big)^{|\mathbf{p}|} \geqslant (\frac{nd}{2})^{|\mathbf{p}|} 2^{-|\mathbf{p}|},
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{(\frac{nd}{2})^{|\mathbf{p}|}}{(\frac{nd}{2})_{\mathbf{p}}} \leqslant 2^{|\mathbf{p}|}. \tag{2.1}$$

En utilisant (2.1) et la convergence uniforme du développement de l'exponentielle en série sphérique, on peut intervertir somme et limite dans l'expression de ψ_n. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(\xi) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{d_{\mathbf{p}}}{(\frac{\delta(m)}{m})_{\mathbf{p}}} \Phi_{\mathbf{p}}(-\frac{1}{2d}\xi\xi^*) = e^{-\frac{1}{2d}\operatorname{tr}(\xi\xi^*)} = \psi(\xi).$$

La fonction ψ qui est définie sur $M(m,(\infty);\mathbb{F})$ est de type positif et continue pour la topologie de la limite inductive. D'après le théorème de Bochner (voir [5] proposition 2 p.187) la fonction ψ est la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité γ_m sur l'espace $M(m,\infty;\mathbb{F})$.

$$\int_{M(m,\infty;\mathbb{F})} e^{-i\langle\xi,x\rangle}\gamma_m(dx) = \psi(\xi).$$

Le résultat annoncé se déduit du théorème de Lévy-Crámer qui s'énnonce dans la situation présente :

Soit $\mu^{(n)}$ une suite de mesures de probabilités sur $M(m,\infty;\mathbb{F})$. On suppose que les transformées de Fourier

$$\varphi_n(\xi) = \int_{M(m,\infty;\mathbb{F})} e^{-i\langle\xi,x\rangle}\mu^{(n)}(dx)$$

convergent pour tout $\xi \in M(m,(\infty);\mathbb{F})$ vers une fonction $\varphi(\xi)$, et que φ est continue (pour la topologie de la limite inductive). Alors la suite des mesures $\mu^{(n)}$ converge faiblement vers une mesure de probabilité μ dont la transformée de Fourier est φ.

La mesure γ_m est une mesure gaussienne sur l'espace $M(m,\infty;\mathbb{F})$. $\square$

3. Théorème de Minlos

$\mathbb{R}^\infty$ désigne l'espace des suites réelles infinies. On munit $\mathbb{R}^\infty$ de la topologie produit. On note $\ell^2(\mathbb{N})$ le sous-espace de $\mathbb{R}^\infty$ des suites réelles de carré sommable. Pour une suite $c = \{c_k\}$ de nombres strictement positifs qui est sommable on note

$$\ell_c^2(\mathbb{N}) = \Big\{x \in \mathbb{R}^\infty \ / \ \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k^2 < \infty\Big\}.$$

L'espace $\ell_c^2(\mathbb{N})$ est un sous ensemble mesurable de $\mathbb{R}^\infty$.

En effet, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^\infty$ par

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k^2.$$

Les fonctions f_n sont continues, donc $f(x) = \sup_n f_n(x)$ est une fonction mesurable et par suite l'ensemble

$$\ell_c^2(\mathbb{N}) = \{x \in \mathbb{R}^\infty \ ; \ f(x) < \infty\}$$

est mesurable.

Nous utiliserons dans la suite la forme suivante du théorème de Minlos. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^\infty$. Sa transformée de Fourier φ

$$\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^\infty} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\,\mu(dx)$$

est définie et continue sur

$$\mathbb{R}^{(\infty)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n,$$

qui est muni de la topologie de la limite inductive.

Théorème 3.1. — *On suppose que φ est continue sur $\ell^2(\mathbb{N})$ pour la topologie induite par celle de $\ell^2(\mathbb{N})$. Alors, pour toute suite $c = \{c_k\}$ de nombres strictement positifs qui est sommable on a*

$$\mu(\ell_c^2(\mathbb{N})) = 1.$$

Notons que cette hypothèse est vérifiée si μ est la mesure gaussienne dont la transformée de Fourier est égale à

$$\varphi(\xi) = \exp(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2).$$

Il existe des énoncés plus généraux du théorème de Minlos (voir [6] par exemple).

Démonstration. — Posons

$$I_{\delta,n} = \int_{\mathbb{R}^\infty} e^{-\frac{\delta}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k x_k^2}\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k x_k^2}\mu_n(dx),$$

où μ_n est la projection de la mesure μ sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrons d'abord que

$$\lim_{\delta\to 0}(\lim_{n\to\infty} I_{\delta,n}) = \mu(\ell_c^2(\mathbb{N})).$$

Pour $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\delta}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k x_k^2} = \begin{cases} e^{-\frac{\delta}{2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k^2} & \text{si } x \in \ell_c^2(\mathbb{N}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc, d'après le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^\infty} e^{-\frac{\delta}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k x_k^2}\mu(dx) = \int_{\ell_c^2(\mathbb{N})} e^{-\frac{\delta}{2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k^2}\mu(dx).$$

De plus, pour $x \in \ell_c^2(\mathbb{N})$,

$$\lim_{\delta\to 0} e^{-\frac{\delta}{2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k^2} = 1,$$

donc, d'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{\delta\to 0}(\lim_{n\to\infty} I_{\delta,n}) = \mu(\ell_c^2(\mathbb{N})).$$

b) En exprimant $I_{\delta,n}$ à l'aide de la fonction φ nous allons montrer que

$$\lim_{\delta\to 0}(\lim_{n\to\infty} I_{\delta,n}) \geqslant 1.$$

En utilisant la formule ($a > 0$, $x \in \mathbb{R}$)

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2a}y^2} e^{-ixy} dy = (2\pi a)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{a}{2}x^2},$$

nous obtenons

$$I_{\delta,n} = \prod_{k=1}^{n} (2\pi\delta c_k)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{\ltimes}} e^{-\frac{1}{2\delta}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\xi_k^2}{c_k}} \varphi(\xi)\ d\xi_1 ... d\xi_n.$$

Puisque φ est continue en 0 pour la topologie de $\ell^2(\mathbb{N})$ et $\varphi(0) = 1$, alors

$\forall\ \ \varepsilon > 0$, $\exists\ \rho > 0$,tel que si $\xi \in \ell^2(\mathbb{N})$ et $||\xi|| < \rho \Rightarrow |\varphi(\xi) - 1| < \varepsilon$ et $\Re\varphi(\xi) \geqslant 1 - \varepsilon$.

D'autre part pour tout $\xi \in \ell^2(\mathbb{N})$

$$|\varphi(\xi)| \leqslant 1 \text{ et } \Re\varphi(\xi) \geqslant -1.$$

Par suite, pour tout ξ,

$$\Re\varphi(\xi) \geqslant 1 - \varepsilon - 2\frac{||\xi||^2}{\rho^2}.$$

En utilisant la formule ($s > 0$)

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2s}\xi^2} \xi^2 d\xi = s(2\pi s)^{\frac{1}{2}},$$

nous obtenons

$$I_{\delta,n} > 1 - \varepsilon - \frac{2\delta}{\rho^2} \sum_{k=1}^{n} c_k.$$

Par suite

$$\lim_{n\to\infty} I_{\delta,n} > 1 - \varepsilon - 2\frac{\delta}{\rho^2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k,$$

et

$$\lim_{\delta\to 0} (\lim_{n\to\infty} I_{\delta,n}) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Donc,

$$\mu(\ell_c^2(\mathbb{N})) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ on en déduit que

$$\mu(\ell_c^2(\mathbb{N})) = 1. \qquad \square$$

Une première application que nous obtenons du théorème de Minlos est l'évaluation de l'intégrale suivante.

$$\varphi(\lambda) = \int_{\mathbb{E}^\infty} \exp(-i\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |x_k|^2)\ \gamma(dx),$$

où $\mathbb{E}$ est un espace euclidien de dimension d et γ est la mesure gaussienne sur $\mathbb{E}^\infty$ dont la transformée de Fourier est égale à

$$\psi(\xi) = e^{-\frac{1}{2d}||\xi||^2}$$

et $\{\alpha_k\}$ est une suite sommable de nombres réels.

Proposition 3.2. — *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\varphi(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{2}{d} i\lambda\alpha_k)^{-\frac{d}{2}}.$$

Démonstration. — D'après le théorème de Minlos la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |x_k|^2$$

converge γ-presque partout sur $\mathbb{E}^\infty$ et d'après le théorème de convergence dominée on a

$$\int_{\mathbb{E}^\infty} \exp(-i\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |x_k|^2)\ \gamma(dx) = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{E}^\infty} \exp(-i\lambda \sum_{k=1}^{N} \alpha_k |x_k|^2)\ \gamma(dx).$$

De plus,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{E}^\infty} \exp(-i\lambda \sum_{k=1}^{N} \alpha_k |x_k|^2)\ \gamma(dx) \\
= & \int_{\mathbb{E}^{\mathbb{N}}} \exp(-i\lambda \sum_{k=1}^{N} \alpha_k |x_k|^2)\ \gamma_N(dx) \\
= & \prod_{k=1}^{N} (\frac{d}{2\pi})^{\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{E}} e^{-i\lambda\alpha_k |x_k|^2} e^{-\frac{d}{2}|x_k|^2} dx_k \\
= & \prod_{k=1}^{N} (1 + i\frac{2}{d}\lambda\alpha_k)^{-\frac{d}{2}}. \qquad \square
\end{aligned}$$

4. Comportement asymptotique de l'intégrale de Itzykson-Zuber

Dans ce paragraphe nous allons étudier la limite d'une intégrale de la forme

$$\int_X f_n(x)\mu^{(n)}(dx),$$

où $\mu^{(n)}$ est une suite de mesures de probabilité sur X qui converge faiblement vers une mesure μ. Si la suite des fonctions f_n converge uniformément vers une fonction f alors

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\mu^{(n)}(dx) = \int_X f(x)\mu(dx).$$

Mais nous ne connaissons pas de théorème général qui assure la convergence de la suite des intégrales sous des hypothèses plus faibles au sujet de la convergence de la suite des fonctions f_n.

Nous allons étudier les intégrales

$$\int_{S_{m,n}} e^{-i\mathrm{tr}(xva^{(n)}v^*)}\sigma_m^{(n)}(dv),$$

où $S_{m,n}$ est la variété de Stiefel définie dans la section 2 et $\sigma_m^{(n)}$ est la mesure uniforme normalisée sur $S_{m,n}$.

Pour $a^{(n)} = diag(a_1^{(n)}, ..., a_n^{(n)})$, $x \in V_m$, on pose

$$\varphi_n(x) = \int_{S_{m,n}} e^{-i\mathrm{tr}(xva^{(n)}v^*)}\ \sigma_m^{(n)}(dv).$$

Nous commençons par traiter le cas où $m = 1$. Alors, si $x = \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_n(\lambda) = \int_{S_n} \exp(-i\lambda\sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)}|v_k|^2)\ \sigma^{(n)}(dv),$$

où S_n est la sphère unité de $\mathbb{F}^n$ et $\sigma^{(n)}$ la mesure uniforme normalisée sur S_n.

Théorème 4.1. — *On suppose que pour tout k,*

$$(1)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_k^{(n)}}{n} = \alpha_k.$$

De plus, on suppose que la suite $\alpha = \{\alpha_k\}$ est sommable et que

$$(2) \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{(n)}}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k,$$

$$(3) \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k^{(n)}}{n}\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2.$$

Alors φ_n converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{2}{d} i\lambda\alpha_k)^{-\frac{d}{2}}.$$

Lemme 4.2. — *Soit $x^{(n)} = \{x_k^{(n)}\}$ une suite d'éléments de $\ell^2(\mathbb{N})$ telle que*

$$\forall\, k,\ \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k \text{ et}$$

$$\lim_{n\to\infty} ||x^{(n)}||_2 = ||x||_2.$$

Alors,

$$\lim_{k\to\infty} ||x^{(n)} - x||_2 = 0.$$

Démonstration. — On écrit

$$||x^{(n)} - x||_2^2 = ||x^{(n)}||_2^2 + ||x||_2^2 - 2\Re\langle x^{(n)}, x\rangle.$$

Pour montrer le lemme, il suffit de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \langle x^{(n)}, x\rangle = ||x||_2^2.$$

Pour $N < n$ on a,

$$\langle x^{(n)}, x\rangle = \sum_{k=1}^{N} x_k^{(n)} x_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} x_k^{(n)} x_k,$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a,

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} x_k^{(n)} x_k\right| \leqslant ||x^{(n)}||_2 \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant la deuxième hypothèse du lemme on obtient

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=N+1}^{\infty} x_k^{(n)} x_k = 0.$$

D'autre part d'après la première hypothèse du lemme on a

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N} x_k^{(n)} x_k = ||x||_2^2.$$

Par suite,

$$\lim_{n\to\infty}\langle x^{(n)}, x\rangle = ||x||_2^2,$$

d'où le résultat. $\square$

Lemme 4.3. — *Pour tout* $k, j \geqslant 1$

$$\int_{S_n} |v_k|^2 |v_j|^2 \sigma^{(n)}(dv) = \begin{cases} \dfrac{d}{n(nd+2)} & si\ k \neq j, \\ \dfrac{d+2}{n(nd+2)} & si\ k = j. \end{cases}$$

Démonstration. — D'après la proposition 2.1, pour $m=1$ et pour tout $x \in \mathbb{F}^n$ on a,

$$\int_{S_n} e^{-i\langle v,x\rangle}\ \sigma^{(n)}(dv) = \mathcal{J}^{(1)}_{\frac{nd}{2}}\left(\frac{||x||^2}{4}\right) = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k \frac{d_{[k]}}{(1)_k}\frac{1}{(\frac{nd}{2})_k}\Phi_{[k]}\left(\frac{||x||^2}{4},0,...,0\right),$$

où $[k]=(k,0,...,0)$ et $||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$.

En utilisant le développement en série sphérique suivant, pour $x \in V_m$,

$$e^{\mathrm{tr}(x)} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{d_{\mathbf{p}}}{(\frac{\delta(m)}{m})_{\mathbf{p}}}\Phi_{\mathbf{p}}(x),$$

on en déduit que

$$d_{[k]}\Phi_{[k]}(x,0,...,0) = x^k.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{F}^n$ on a,

$$\int_{S_n} e^{-i\langle v,x\rangle}\ \sigma^{(n)}(dv) = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k \frac{1}{k!}\frac{1}{4^k(\frac{nd}{2})_k}||x||^{2k}. \tag{4.1}$$

Soit $v_k=(v_k^1,...,v_k^d)\in\mathbb{F}$ alors

$$\begin{aligned}\int_{S_n}|v_k|^4\,\sigma^{(n)}(dv) &= \int_{S_n}((v_k^1)^2+...+(v_k^d)^2)^2\,\sigma^{(n)}(dv)\\ &= \sum_{j=1}^{d}\int_{S_n}(v_k^j)^4\,\sigma^{(n)}(dv)+\sum_{1\leqslant j\neq\ell\leqslant d}\int_{S_n}(v_k^j)^2(v_k^\ell)^2\,\sigma^{(n)}(dv)\\ &= d\int_{S_n}(v_k^1)^4\,\sigma^{(n)}(dv)+d(d-1)\int_{S_n}(v_k^j)^2(v_k^\ell)^2\,\sigma^{(n)}(dv)\end{aligned}$$

En prenant $x=(0,0,...,x_k,...,0)\in\mathbb{R}^{dn}$ dans (4.1) et par identification des coefficients on obtient

$$\int_{S_n}(v_k^1)^4\,\sigma^{(n)}(dv)=\frac{3}{4(\frac{nd}{2})_2}$$

et par suite

$$\int_{S_n}(v_k^1)^4\,\sigma^{(n)}(dv)=\frac{3}{nd(nd+2)}.$$

De même si $x=(0,...,0,x_j,...,x_\ell,0,...,0)\in\mathbb{R}^{dn}$, avec $j\neq\ell$, par identification on a

$$\int_{S_n}(v_k^j)^2(v_k^\ell)^2\,\sigma^{(n)}(dv)=\frac{1}{nd(nd+2)}.$$

Par suite

$$\int_{S_n}|v_k|^4\sigma^{(n)}(dv)=\frac{3d}{nd(nd+2)}+\frac{d(d-1)}{nd(nd+2)}=\frac{d+2}{n(nd+2)}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}1 &= \int_{S_n}\left(\sum_{k=1}^{n}|v_k|^2\right)^2\sigma^{(n)}(dv)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_{S_n}|v_k|^4\,\sigma^{(n)}(dv)+\sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant n}\int_{S_n}|v_k|^2|v_j|^2\,\sigma^{(n)}(dv),\end{aligned}$$

et par invariance de la mesure $\sigma^{(n)}$, on obtient

$$n\int_{S_n}|v_k|^4\,\sigma^{(n)}(dv)+n(n-1)\int_{S_n}|v_k|^2|v_j|^2\,\sigma^{(n)}(dv)=1.$$

Donc,

$$n(n-1)\int_{S_n}|v_k|^2|v_j|^2\,\sigma^{(n)}(dv)=1-\frac{d+2}{nd+2}.$$

Autrement dit, pour tout $j \neq k$

$$\int_{S_n} |v_k|^2 |v_j|^2 \, \sigma^{(n)}(dv) = \frac{d}{n(nd+2)}. \qquad \square$$

Démonstration du théorème. — Nous avons vu que la fonction φ admet la représentation intégrale

$$\varphi(\lambda) = \int_{\mathbb{F}^\infty} e^{-i\lambda \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j |x_j|^2} \gamma(dx).$$

Nous introduisons les intégrales suivantes :

$$A_{m,n}(\lambda) = \int_{S_n} e^{-i\lambda n \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j |x_j|^2} \sigma^{(n)}(dx)$$

pour $m \leqslant n$ et

$$B_m(\lambda) = \int_{\mathbb{F}^\infty} e^{-i\lambda \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j |x_j|^2} \gamma(dx),$$

et on décompose la différence $\varphi_n(\lambda) - \varphi(\lambda)$ en

$$\begin{aligned} \varphi_n(\lambda) - \varphi(\lambda) &= \varphi_n(\lambda) - A_{n,n}(\lambda) + A_{n,n}(\lambda) - A_{m,n}(\lambda) \\ &+ A_{m,n}(\lambda) - B_m(\lambda) + B_m(\lambda) - \varphi(\lambda). \end{aligned}$$

(i) Majoration de $\varphi_n(\lambda) - A_{n,n}(\lambda)$.

En utilisant l'inégalité $|e^{ix} - 1| \leqslant |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, dans l'expression suivante.

$$|\varphi_n(\lambda) - A_{n,n}(\lambda)| \leqslant \int_{S_n} \left| \exp\left(-in\lambda \sum_{j=1}^{n} (\frac{a_j^{(n)}}{n} - \alpha_j) |v_j|^2 \right) - 1 \right| \sigma^{(n)}(dv).$$

On en déduit que

$$|\varphi_n(\lambda) - A_{n,n}(\lambda)| \leqslant n|\lambda| \int_{S_n} \left| \sum_{j=1}^{n} (\frac{a_j^{(n)}}{n} - \alpha_j) |v_j|^2 \right| \sigma^{(n)}(dv).$$

Par suite, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|\varphi_n(\lambda) - A_{n,n}(\lambda)| \leqslant n|\lambda| \left(\int_{S_n} \left(\sum_{j=1}^{n} (\frac{a_j^{(n)}}{n} - \alpha_j) |v_j|^2 \right)^2 \sigma^{(n)}(dv) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\int_{S_n}\left(\sum_{j=1}^{n}(\frac{a_j^{(n)}}{n}-\alpha_j)|v_j|^2\right)^2\sigma^{(n)}(dv)\\
=\ &\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}(\frac{a_\ell^{(n)}}{n}-\alpha_\ell)(\frac{a_j^{(n)}}{n}-\alpha_j)\int_{S_n}|v_\ell|^2|v_j|^2\sigma^{(n)}(dv),
\end{aligned}$$

et d'après le lemme 4.3

$$\int_{S_n}|v_\ell|^2|v_j|^2\sigma^{(n)}(dv)=\begin{cases}\dfrac{d}{n(nd+2)}\ si\ j\neq\ell,\\ \dfrac{d+2}{n(nd+2)}\ si\ j=\ell.\end{cases}$$

Par suite,

$$\int_{S_n}\left(\sum_{j=1}^{n}(\frac{a_j^{(n)}}{n}-\alpha_j)|v_j|^2\right)^2\sigma^{(n)}(dv)=\frac{d}{n(nd+2)}I_n,$$

où

$$I_n=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^{(n)}}{n}-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\right)^2+\frac{2}{d}\sum_{j=1}^{n}(\frac{a_j^{(n)}}{n}-\alpha_j)^2.$$

Donc

$$|\varphi_n(\lambda)-A_{n,n}(\lambda)|\leqslant|\lambda|\frac{\sqrt{nd}}{\sqrt{nd+2}}\sqrt{I_n}. \tag{4.2}$$

Puisque les suites $(\frac{a_j^{(n)}}{n})_{1\leqslant j\leqslant n}$ et $(\alpha_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ vérifient les hypothèses du lemme 4.2 on a,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}(\frac{a_j^{(n)}}{n}-\alpha_j)^2=0.$$

En utilisant la première hypothèse du théorème on obtient que

$$\lim_{n\to\infty}I_n=0.$$

Donc,

$$\lim_{n\to\infty}|\varphi_n(\lambda)-A_{n,n}(\lambda)|=0,$$

et la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.

(ii) Majoration de $A_{n,n}(\lambda) - A_{m,n}(\lambda)$.

En utilisant les relations $\displaystyle\int_{S_n} |v_j|^2 \sigma^{(n)}(dv) = \frac{1}{n}$ et que $|e^{ix} - 1| \leqslant |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$|A_{n,n}(\lambda) - A_{m,n}(\lambda)| \leqslant n|\lambda| \sum_{j=m+1}^{n} |\alpha_j| \int_{S_n} |v_j|^2 \sigma^{(n)}(dx) \leqslant |\lambda| \sum_{j=m+1}^{\infty} |\alpha_j|.$$

(iii) Convergence de $A_{m,n}(\lambda)$ vers $B_m(\lambda)$ quand $n \to \infty$.

La fonction

$$g_m(x) = e^{-i\lambda \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j |x_j|^2}$$

est continue bornée sur $\mathbb{F}^\infty$. D'après le théorème de Poincaré (théorème 2.2)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{S_n} g_m(\sqrt{n}\, x) \sigma^{(n)}(dx) = \int_{\mathbb{F}^\infty} g_m(x) \gamma(dx).$$

Autrement dit,

$$\lim_{n\to\infty} A_{m,n}(\lambda) = B_m(\lambda).$$

(iv) Convergence de $B_m(\lambda)$ vers $\varphi(\lambda)$ quand $m \to \infty$.

Si $x \in \ell_c^2(\mathbb{N})$ avec $c = \{|\alpha_j| + \frac{1}{j^2}\}_j$, alors

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j |x_j|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j |x_j|^2$$

et

$$\lim_{m\to\infty} g_m(x) = g_\infty(x) \qquad \gamma - \text{presque par tout.}$$

Ainsi, d'après le théorème de Minlos et le théorème de convergence dominée on a

$$\lim_{m\to\infty} B_m(\lambda) = \varphi(\lambda).$$

et la convergence a lieu uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

(v) Conclusion. Soit $\varepsilon > 0$.

(1) D'après l'inégalité (4.2) on peut trouver N_0 tel que si $n \geqslant N_0$,

$$|\varphi_n(\lambda) - A_{n,n}(\lambda)| \leqslant |\lambda|\varepsilon.$$

(2) On peut trouver N_1 tel que si $m \geqslant N_1$,

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} |\alpha_j| \leqslant \varepsilon,$$

d'où

$$|A_{n,n}(\lambda) - A_{m,n}(\lambda)| \leqslant |\lambda|\varepsilon.$$

(3) On peut trouver N_2 tel que si $m \geqslant N_2$,

$$|B_m(\lambda) - \varphi(\lambda)| \leqslant \varepsilon.$$

(4) On fixe $m \geqslant \max(N_0, N_1, N_2)$, alors on peut trouver $n_0 \geqslant m$ tel que si $n \geqslant n_0$,

$$|A_{m,n}(\lambda) - B_m(\lambda)| \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que pour $n \geqslant n_0$ et tout λ dans un compact de $\mathbb{R}$,

$$|\varphi_n(\lambda) - \varphi(\lambda)| \leqslant C\varepsilon,$$

où C est une constante indépendante de n.

Donc φ_n converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers φ. □

Considérons maintenant le cas général $m \geqslant 1$.

Théorème 4.4. — *On suppose que $x \in V_m$ est une matrice hermitienne $m \times m$.*

Sous les hypothèses du théorème 4.1, la fonction $\varphi_n(x)$ définie sur V_m par

$$\varphi_n(x) = \int_{S_{m,n}} \exp(-i\mathrm{tr}(xva^{(n)}v^*))\ \sigma_m^{(n)}(dv),$$

converge uniformément sur tout compact de V_m vers la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \det(1 + \frac{2}{d} i\alpha_k x)^{-\frac{d}{2}}.$$

Démonstration. — On peut supposer que la matrice x est diagonale, $x = diag(\lambda_1, ..., \lambda_m)$ alors,

$$\varphi_n(x) = \int_{S_{m,n}} \exp(-i \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \lambda_j a_k^{(n)} |v_{jk}|^2)\ \sigma_m^{(n)}(dv)$$

et
$$\varphi(x) = \int_{M(m,\infty;\mathbb{F})} \exp(-i\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_j\alpha_k|v_{jk}|^2)\ \gamma_m(dv)$$
La démonstration suit pas à pas celle qui a été donnée dans le cas où $m = 1$. On définit l'espace de Hilbert
$$\mathcal{H}_{c,m} = \left\{ v \in M(m,\infty,\mathbb{F}) \mid \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty} c_k|v_{jk}|^2 < \infty \right\}$$
qui s'identifie à l'espace $(\ell_c^2(\mathbb{N}))^m$. D'après le théoreme de Minlos on a,
$$\gamma_m(\mathcal{H}_{c,m}) = 1.$$
La fonction
$$v \mapsto \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\lambda_j|v_{jk}|^2$$
est définie γ_m-presque par tout sur $M(m,\infty;\mathbb{F})$ donc l'intégrale suivante
$$\varphi(x) = \int_{M(m,\infty,\mathbb{F})} \exp(-i\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\lambda_j|v_{jk}|^2)\ \gamma_m(dv)$$
est bien définie. On obtient comme dans le cas où $m = 1$, que
$$\varphi(x) = \prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{\infty}(1 + i\frac{2}{d}\lambda_j\alpha_k)^{-\frac{d}{2}}.$$
Le reste de la preuve est identique à celle du théorème 4.1 $\square$

Remarque 4.5. — Considérons l'orbite $\mathcal{O}_n$ de $a^{(n)}$ sous l'action du groupe K_n,
$$\mathcal{O}_n = \{ka^{(n)}k^*,\ k \in K_n\},$$
où $a^{(n)} = diag(a_1^{(n)}, ..., a_n^{(n)})$ et la mesure orbitale $\mu^{(n)}$ portée par $\mathcal{O}_n$:
$$\int_{\mathcal{O}_n} f(x)\mu^{(n)}(dx) = \int_{K_n} f(ka^{(n)}k^*)\alpha^{(n)}(dk)$$
pour toute fonction continue f sur V_n.

Soit
$$p_m : V_n \longrightarrow M(m,n,\mathbb{F})$$

la projection qui a une matrice hermitienne $n \times n$ associe la matrice extraite constituée des m premières lignes. L'image $\mu_m^{(n)} = p_m(\mu^{(n)})$ de la mesure $\mu^{(n)}$ a pour transformée de Fourier

$$\widehat{\mu_m^{(n)}}(x) = \int_{M(m,n;\mathbb{F})} e^{-i\langle x,y\rangle} \mu_m^{(n)}(dy)$$

qui s'écrit aussi sous la forme

$$\widehat{\mu_m^{(n)}}(x) = \int_{S_{m,n}} e^{-i\mathrm{tr}(xva^{(n)}v^*)} \sigma_{m,n}(dy).$$

Sous les hypothèses du théorème 4.4 nous avons montré que cette intégrale converge uniformément sur tout compact de V_m vers la fonction continue et de type positif φ, donc la suite des mesures $\mu^{(n)}$ converge faiblement vers une mesure μ sur V_∞ (où V_∞ est l'espace des matrices hermitiennes infinies à coefficients dans $\mathbb{F}$) qui est ergodique relativement à l'action du groupe K_∞ (où K_∞ est la limite inductive des groupes unitaires K_n). Dans un article en préparation on déterminera toutes les mesures ergodiques à l'aide de leurs transformées de Fourier.

Bibliographie

[1] BILLINGSLEY (P.). — Convergence of probability measures, Wiley (1968).

[2] FARAUT (J.), KORÁNYI (A.). — Analysis on Symmetric Cones, Oxford University Press (1994).

[3] FREEDMAN (D.), DIACONIS (P.). — A dozen de Finetti-style result in search of a theory. Ann. Inst. Henri Poincaré (probabilités et statistiques) 23, p. 397-423 (1987).

[4] OLSHANSKI (G.), VERSHIK (A.). — Ergodic unitarily invariant measures on the space of infinite Hermitians matrices. Contemporary Mathematical physics (R. L. Dobroshin, R. A. Minlos, M. A. Shubin, M. A. Vershik) Amer. Math. Soc. Translations 175, p. 137-175 (1996)(2).

[5] SCHWARTZ (L.). — Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures, Oxford University Press (1973).

[6] YAMASAKI (Y.). — Measures on infinite dimensional spaces, World Scientific (1985).