ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

PIERRE DE LA HARPE, JEAN-PHILIPPE PRÉAUX

Groupes fondamentaux des variétés de dimension 3 et algèbres d'opérateurs

Tome XVI, nº 3 (2007), p. 561-589.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2007_6_16_3_561_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XVI, n° 3, 2007
pp. 561–589

Groupes fondamentaux des variétés de dimension 3 et algèbres d'opérateurs(*)

Pierre de la Harpe(1), Jean-Philippe Préaux(2)

Résumé. — Nous proposons une caractérisation géométrique des variétés de dimension 3 ayant des groupes fondamentaux dont toutes les classes de conjugaison autres que $\{1\}$ sont infinies, c'est-à-dire dont les algèbres de von Neumann sont des facteurs de type II_1 : ce sont essentiellement les 3-variétés à groupes fondamentaux infinis qui n'admettent pas de fibration de Seifert.
Autrement dit et plus précisément, soient M une 3-variété connexe compacte et Γ son groupe fondamental, qu'on suppose être infini et avec au moins une classe de conjugaison finie autre que $\{1\}$. Si M est orientable, alors Γ est groupe fondamental d'une variété de Seifert ; si M est non orientable, alors Γ est groupe fondamental d'une variété de Seifert modulo $\mathbf{P}$ au sens de Heil et Whitten [HeWh-94].
Nous faisons un usage intensif de résultats concernant les 3-variétés, autant classiques (comme on les trouve dans les livres de Hempel, Jaco et Shalen) que plus récents (solution de la conjecture des fibrés de Seifert).

Abstract. — We provide a geometric characterization of manifolds of dimension 3 with fundamental groups of which all conjugacy classes except $\{1\}$ are infinite, namely of which the von Neumann algebras are factors of type II_1: they are essentially the 3-manifolds with infinite fundamental groups on which there does not exist any Seifert fibration.
Otherwise said and more precisely, let M be a compact connected 3-manifold and let Γ be its fundamental group, supposed to be infinite and with at least one finite conjugacy class besides $\{1\}$. If M is orientable, then Γ is the fundamental group of a Seifert manifold; if M is not orientable, then Γ is the fundamental group of a Seifert manifold modulo $\mathbf{P}$ in the sense of Heil and Whitten [HeWh-94].

(*) Reçu le 21 octobre 2005, accepté le 14 mars 2007
(1) Section de Mathématiques, Université de Genève, C.P. 64, CH-1211 Genève 4.
Pierre.delaHarpe@math.unige.ch
(2) Centre de recherche de l'Armée de l'air, Ecole de l'Air, F-13661 Salon de Provence air.
Centre de mathématiques et d'informatique, Université de Provence, 39 rue F. Joliot-Curie, F-13453 Marseille cedex 13.
preaux@cmi.univ-mrs.fr

Les auteurs remercient le *Fonds national suisse de la recherche scientifique* pour son soutien. Le second auteur a été partiellement financé par le FNSRS.

We make heavy use of results on 3-manifolds, as well classical results (as can be found in the books of Hempel, Jaco, and Shalen), as more recent ones (solution of the Seifert fibred space conjecture).

Table des matières

1. Introduction

Plusieurs classes de groupes ont été étudiées du point de vue des algèbres d'opérateurs. Parmi les plus anciens exemples de la littérature figurent les groupes libres, et plus généralement les produits libres ; voir par exemple le § 6.2 de [ROIV] pour le facteur défini par un groupe libre de rang deux. Nous abordons ici de ce point de vue l'étude des 3-*groupes*, c'est-à-dire (ici!) des groupes fondamentaux des variétés compactes connexes de dimension trois.

Soit Γ un groupe. Soient ξ, η deux fonctions à valeurs complexes sur Γ, l'une au moins à support fini ; rappelons que leur *produit de convolution* est défini par

$$(\xi * \eta)(\gamma) = \sum_{\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma, \gamma_1\gamma_2 = \gamma} \xi(\gamma_1)\eta(\gamma_2).$$

L'algèbre $\mathbf{C}[\mathbf{\Gamma}]$ du groupe Γ est l'algèbre de convolution des fonctions à supports finis ; elle est munie d'une involution définie par $\varphi^*(\gamma) = \overline{\varphi(\gamma^{-1})}$ pour tous $\varphi \in \mathbf{C}[\mathbf{\Gamma}]$ et $\gamma \in \Gamma$. Notons $\mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$ l'algèbre involutive des opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Hilbert $\ell^2(\Gamma)$. La représentation régulière gauche $\lambda_\Gamma : \mathbf{C}[\mathbf{\Gamma}] \longrightarrow \mathcal{B}(\boldsymbol{\ell^2}(\mathbf{\Gamma}))$ est définie par $(\lambda_\Gamma(\varphi))(\xi) = \varphi * \xi$ pour tous $\varphi \in \mathbf{C}[\mathbf{\Gamma}]$ et $\xi \in \ell^2(\Gamma)$; c'est une $*$-représentation fidèle. *L'algèbre de von Neumann* $W^*_\lambda(\Gamma)$ de Γ est l'adhérence pour la topologie faible de $\lambda_\Gamma(\mathbf{C}[\mathbf{\Gamma}])$ dans $\mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$. La *$C^*$-algèbre réduite* $C^*_\lambda(\Gamma)$ de Γ est l'adhérence pour la topologie normique de $\lambda_\Gamma(\mathbf{C}[\mathbf{\Gamma}])$ dans $\mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$.

Notre but est de dégager certaines propriétés de l'algèbre $W^*_\lambda(\Gamma)$ lorsque Γ est un 3-groupe. (Plus tard, on peut espérer comprendre aussi $C^*_\lambda(\Gamma)$). Les preuves consistent essentiellement à recueillir et combiner des résultats connus concernant les 3-variétés (voir notamment [Hemp-76], [Jaco-77], [JaSh-79] et [BoMP-03]). En particulier, nous utilisons deux résultats profonds caractérisant certaines 3-variétés dont le groupe fondamental possède un sous-groupe distingué de type fini non réduit à $\{1\}$: le *théorème des fibrés de Seifert*, qui traite du cas où ce sous-groupe est cyclique, et un théorème de Hempel et Jaco, qui traite de cas où ce sous-groupe est d'indice infini et non cyclique.

Un groupe Γ est dit *à classes de conjugaison infinies*, ou plus brièvement *cci*, s'il est infini et si ses classes de conjugaison distinctes de $\{1\}$ sont toutes infinies. La caractérisation suivante des groupes cci est classique : c'est le lemme 5.3.4 de [ROIV] ; voir aussi, par exemple, le lemme 4.2.18 de [Saka-71]. Rappelons au préalable qu'une algèbre de von Neumann M est un *facteur de type II_1* si elle possède les trois propriétés suivantes :

(i) le centre de M est réduit à $\mathbf{C}$,

(ii) il existe une forme linéaire non nulle τ sur M qui est une trace, c'est-à-dire telle que $\tau(xy - yx) = 0$ pour tous $x, y \in M$,

(iii) l'algèbre M est de dimension infinie.

Caractérisation de Murray et von Neumann. — *L'algèbre de von Neumann $W^*_\lambda(\Gamma)$ est un facteur de type II_1 si et seulement si le groupe Γ est cci.*

Commençons par un énoncé concernant les groupes fondamentaux de surfaces, qui est une conséquence presqu'immédiate de la classification des surfaces (voir aussi la proposition 5.1 ci-dessous).

Cas des 2-groupes. — *Soient F une surface compacte connexe et Γ son groupe fondamental (F peut être orientable ou non, à bord vide ou non vide). Le groupe Γ est infini et non cci si et seulement si F est homéomorphe à l'une des surfaces de la liste*

anneau, ruban de Möbius, 2-tore, bouteille de Klein,

c'est-à-dire si et seulement si F admet un feuilletage par des cercles.

Le but principal du présent travail est de montrer une assertion analogue pour les 3-groupes. Le lecteur expert en 3-variétés pourra aborder l'essentiel de nos arguments en parcourant les preuves des théorèmes 6.6 et 7.1, consacrés au cas orientable. Pour le cas non orientable, voir le théorème 10.2 (qui complète l'énoncé ci-dessous).

Théorème 1.1. — *Soient M une 3-variété et Γ son groupe fondamental ; on suppose que Γ est infini et non cci.*

Si M est orientable, Γ est groupe fondamental d'une variété de Seifert. Si M est non orientable, Γ possède un sous-groupe d'indice 2 qui est groupe fondamental d'une variété de Seifert.

Nous remercions Michel Boileau, David Epstein et Claude Weber pour plusieurs commentaires utiles à ce texte. De plus, le second auteur tient à remercier les mathématiciens genevois, et nommément Goulnara Arzhantseva, pour leur accueil en 2004 et 2005.

2. Rappels sur les 3-variétés, la décomposition de Kneser-Milnor, et le théorème de Grushko-Stallings

Soit M une 3-*variété*, c'est-à-dire ici une variété de dimension 3, compacte, connexe, qui peut être ou bien close (c'est-à-dire à bord ∂M vide) ou bien bordée (c'est-à-dire à bord non vide). Nous convenons de penser à M et ses sous-variétés du point de vue p.l., ou « presque linéaire », et tous les plongements considérés sont supposés p.l. ; mais les points de vue différentiable et topologique localement plat sont équivalents (voir le début du chapitre 1 de [Hemp-76]). Nous notons systématiquement

$$\Gamma = \pi_1(M)$$

le groupe fondamental de M ; il est de présentation finie.

Le cas des 3-variétés à groupes fondamentaux finis est le sujet de nombreux travaux remontant au moins aux années 1920 ; voir par exemple [Hopf-25], [Miln-57] et [Rubi-95]. Nous nous intéressons ici en premier lieu aux 3-groupes *infinis.* Pour ce qui suit, voir [Hemp-76], en particulier le chapitre 3 pour le théorème de Kneser-Milnor et le chapitre 7 pour celui de Gruschko-Stallings.

Etant donné deux 3-variétés M_1, M_2, deux 3-boules plongées $B_1 \subset M_1$, $B_2 \subset M_2$ et un homéomorphisme φ du bord de B_1 sur celui de B_2, on définit la *somme connexe* $M_1 \sharp M_2$ (voir [Hemp-76], chapitre 3). Si M_1 et M_2 sont orientées et si φ est tel que les orientations naturelles de $\varphi(\partial B_1)$ et ∂B_2 sont opposées, le type d'homéomorphisme de la somme connexe est indépendant des autres choix ; dans le cas général, il y a au plus deux types d'homéomorphisme pour $M_1 \sharp M_2$. Dans tous les cas, le groupe fondamental $\pi_1(M_1 \sharp M_2)$ est isomorphe au produit libre $\pi_1(M_1) * \pi_1(M_2)$.

Une 3-variété M est *indécomposable* si, pour toute somme connexe $M_1 \sharp M_2$ homéomorphe à M, l'un au moins des facteurs M_1, M_2 est une 3-sphère. Une 2-sphère plongée dans une 3-variété est *inessentielle* si elle borde une 3-boule et *essentielle* sinon. Une 3-variété M est *irréductible* si elle ne possède aucune sphère essentielle. Une 3-variété indécomposable est ou bien irréductible, ou bien un $\mathbf{S^2}$-fibré sur un cercle [1] (lemme 3.13 de [Hemp-76]). L'espace total d'un $\mathbf{S^2}$-fibré sur un cercle est ou bien orientable, et alors homéomorphe à $\mathbf{S^2} \times \mathbf{S^1}$, ou bien non orientable, et alors homéomorphe à l'espace total du fibré en sphères non trivial de base un cercle, noté $\mathbf{S^2} \tilde{\times} \mathbf{S^1}$.

Décomposition de Kneser-Milnor. — *Toute* 3*-variété s'écrit comme somme connexe de variétés indécomposables*

$$M = X_1 \sharp \cdots \sharp X_k \sharp Y_1 \sharp \cdots \sharp Y_l$$

où $k, l \geqslant 0$ *sont des entiers, où* $X_1, \cdots, X_k$ *sont irréductibles, et où* $Y_1, \cdots, Y_l$ *sont des fibrés en* 2*-sphères sur des cercles (*M *est homéomorphe à* $\mathbf{S^3}$ *si* $k + l = 0$*).*

Lorsque M est orientable, cette décomposition est unique à l'ordre près et à homéomorphisme près des facteurs. Lorsque M est non orientable, il existe une unique [2] *telle décomposition dans laquelle aucun des Y_j n'est homéomorphe à* $\mathbf{S^2} \times \mathbf{S^1}$.

(1) Nous notons $\mathbf{S^n}$ [respectivement $\mathbf{D^n}$, $\mathbf{P^n}$] la sphère [resp. le disque, l'espace projectif] de dimension n, et $I = [0, 1]$ l'intervalle unité de la droite réelle. Au lieu de « n-disque », on écrit aussi « n-boule » ou « n-cellule ».

(2) Rappelons toutefois que, pour toute 3-variété non orientable M, les sommes connexes $M \sharp \left(\mathbf{S^2} \tilde{\times} \mathbf{S^1}\right)$ et $M \sharp \left(\mathbf{S^2} \times \mathbf{S^1}\right)$ sont homéomorphes (lemme 3.17 de [Hemp-76]).

Une surface F plongée dans M est *proprement plongée* si ∂F coïncide avec $F \cap \partial M$ ou si F est dans ∂M. Une surface F proprement plongée dans M est soit *bilatère* soit *unilatère* ; en d'autres termes, F admet un voisinage régulier dans M qui est homéomorphe respectivement soit à un I-fibré trivial soit à un I-fibré non trivial, de base F. Si F est dans ∂M, nous convenons que F est bilatère (ce qui est cohérent avec le corollaire 1.10 de [Hemp-76]). Lorsque M est orientable, alors F est bilatère si et seulement si F est orientable (voir [SeTh-34], § 76, théorème III).

Une surface proprement plongée F est par définition *compressible* dans les situations suivantes :

(i) F borde une 3-boule d'homotopie plongée dans M,

(ii) F est une 2-cellule dans ∂M,

(iii) F est une 2-cellule dans M et il existe une 3-boule d'homotopie X dans M telle que $\partial X \subset F \cup \partial M$,

(iv) il existe une 2-cellule $D \subset M$ telle que $D \cap F = \partial D$ et telle que ∂D n'est pas contractible dans F ;

et F est *incompressible* sinon.

Soit F une surface, distincte de $\mathbf{D^2}$ et $\mathbf{S^2}$, proprement plongée dans M. Si l'homomorphisme $\pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(M)$ est injectif, alors la surface F est incompressible (voir la situation (iv)). Si F est bilatère, la réciproque est vraie ; c'est une application du théorème du lacet [3].

Formulation de Stallings du théorème de Grushko. — *Soit M une 3-variété telle que toute composante connexe de ∂M est incompressible. S'il existe une décomposition non triviale en produit libre $\pi_1(M) = \Gamma_1 * \Gamma_2$, alors il existe une décomposition en somme connexe $M = M_1 \sharp M_2$ telle que $\Gamma_1 = \pi_1(M_1)$ et $\Gamma_2 = \pi_1(M_2)$.*

Référence et remarque. — Voir le théorème 7.1 dans [Hemp-76]. Exemple montrant que la condition sur ∂M est nécessaire : un corps à anses de genre $g \geqslant 2$ est une 3-variété irréductible, à bord compressible, dont le groupe fondamental est un produit libre non trivial.

Une 3-variété est $\mathbf{P^2}$*-irréductible* si elle est irréductible et si elle ne contient aucune surface plongée bilatère homéomorphe au plan projectif $\mathbf{P^2}$. En

(3) En anglais : « loop theorem », ou encore « Dehn+loop theorem ». Voir le corollaire 6.2 de [Hemp-76].

particulier, lorsque M est orientable, M est $\mathbf{P^2}$-irréductible si et seulement si M est irréductible.

3. Les variétés de Seifert

Sur une 3-variété M, une *structure de Seifert*, ou *fibration de Seifert*, est un feuilletage en cercles tel que chaque feuille possède un voisinage homéomorphe à un tore plein ou à une bouteille de Klein pleine feuilleté « de manière standard »[4]. Les *fibres régulières* de la fibration de Seifert sont les feuilles pour lesquelles l'application d'holonomie (ou application de premier retour sur un petit disque transverse à la feuille) est l'identité.

Une *variété de Seifert* est une 3-variété qui possède une structure de Seifert.

Rappelons d'abord que le groupe fondamental d'une variété de Seifert non simplement connexe n'est jamais cci. C'est une conséquence élémentaire du fait que la « structure fibrée passe de M à Γ ».

Lemme 3.1. — *Soient M une 3-variété sur laquelle il existe une structure de Seifert et X l'espace des orbites. Alors il existe une suite exacte courte*

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1^{\mathrm{orb}}(X) \longrightarrow 1$$

où K est le sous-groupe de $\pi_1(M)$ engendré par la classe d'homotopie d'une fibre régulière et où $\pi_1^{\mathrm{orb}}(X)$ désigne le groupe fondamental de X au sens des orbiétés. De plus, si le revêtement universel de M n'est pas homéomorphe à $\mathbf{S^3}$, alors K est un groupe cyclique infini.

Pour la démonstration. — Voir le lemme 3.2 de [Sco-83b]. □

Proposition 3.2. — *Le groupe fondamental d'une variété de Seifert non simplement connexe possède une classe de conjugaison finie autre que $\{1\}$.*

Démonstration. — Avec les notations du lemme précédent, ou bien $\pi_1(M)$ est fini non réduit à $\{1\}$, et il n'y a rien à montrer, ou bien le groupe K est cyclique infini, et en particulier contient des classes de conjugaison finies autres que $\{1\}$. □

(4) « Standard » se réfère à une condition de régularité qui est automatiquement vérifiée, par un théorème dû à Epstein [Epst-72] ; voir aussi le § 3 de [Sco-83b]. Les bouteilles de Klein n'apparaissent évidemment pas lorsque M est orientable.

Dans la suite, nous montrons dans quelle mesure, réciproquement, une 3-variété à groupe fondamental infini non cci est essentiellement une variété de Seifert. Après quelques rappels et des préliminaires sur les groupes cci, nous traitons successivement les variétés orientables irréductibles, orientables, non orientables $\mathbf{P^2}$-irréductibles, et non orientables.

4. Rappels sur le théorème des fibrés de Seifert (cas orientable) et sur un résultat de Hempel-Jaco

Nos preuves utilisent deux ingrédients cruciaux. D'abord la « conjecture des fibrés de Seifert », qui est devenue un théorème grâce aux travaux de Waldhausen, Gordon-Heil, Jaco-Shalen, Scott, Mess, Tukia, Gabai, Casson-Jungreis (pour l'histoire, voir [Gaba-92], pages 507-508), ainsi que Whitten et Heil (pour le cas non orientable). Voir aussi [Mail-03] et [BoMP-03].

Théorème des fibrés de Seifert, cas orientable. — *Soit M une 3-variété orientable irréductible. Si le groupe fondamental de M contient un sous-groupe normal cyclique infini, alors M est une variété de Seifert.*

Remarques. — (i) Soit M une 3-variété obtenue par supression d'une 3-boule ouverte dans une variété de Seifert $\hat{M}$. D'une part, le bord de M possède une composante connexe $\mathbf{S^2}$, ce qui exclut que M soit une variété de Seifert ; d'autre part, $\pi_1(M)$ est isomorphe à $\pi_1(\hat{M})$. On ne peut donc pas supprimer l'hypothèse d'irréductibilité dans le théorème précédent.

(ii) Pour le cas des variétés non orientables, voir le § 8 ci-dessous.

Voici ensuite ce que nous voulons rappeler ici d'un théorème de Hempel et Jaco. Pour l'énoncé complet, voir [HeJa-72], ou le théorème 11.1 de [Hemp-76] (dans lequel il faut prendre garde à l'hypothèse implicite $N \neq 1$).

Théorème (Hempel-Jaco). — *Soit M une 3-variété $\mathbf{P^2}$-irréductible dont le groupe fondamental Γ s'insère dans une suite exacte courte*

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow \Gamma \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

avec $K \neq 1$, K de type fini et Q infini. Si K n'est pas isomorphe à $\mathbf{Z}$, alors l'une au moins des assertions suivantes est vraie

(i) M est un fibré au dessus du cercle à fibre une surface F ;

(ii) il existe un I-fibré non trivial E sur une surface F tel que M soit homéomorphe à la réunion de deux copies de E recollées sur leur bord commun.

Dans les deux cas, K est isomorphe à un sous-groupe d'indice fini dans $\pi_1(F)$; en particulier, K est un groupe de surface.

5. Groupes cci

Soit $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$ un produit libre de deux groupes dont aucun n'est réduit à $\{1\}$. Si Γ_1 et Γ_2 sont d'ordre 2, alors Γ est un groupe diédral infini et n'est donc pas cci.

PROPOSITION 5.1. — *(i) Un produit libre $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$ tel que $|\Gamma_1| \geqslant 3$ et $|\Gamma_2| \geqslant 2$ est un groupe cci.*

Soit $\Gamma = \Gamma_1 *_{\Gamma_0} \Gamma_2$ un produit libre avec amalgamation relativement à des inclusions $\Gamma_0 \subset \Gamma_1$ et $\Gamma_0 \subset \Gamma_2$ d'indices $[\Gamma_1 : \Gamma_0] \geqslant 3$ et $[\Gamma_2 : \Gamma_0] \geqslant 2$.

(ii) Si l'un au moins des groupes Γ_1, Γ_2 est cci, le groupe Γ est aussi cci.

(iii) On suppose que tout sous-groupe de type fini de Γ_0 non réduit à un élément qui est normal à la fois dans Γ_1 et dans Γ_2 est cci. Alors le groupe Γ est aussi cci.

Soient Γ_1 un groupe, Γ_0, Γ_0' deux sous-groupes de Γ_1, l'un au moins étant propre, φ un isomorphisme de Γ_0 sur Γ_0', et Γ l'extension HNN correspondante.

(iv) Si Γ_1 est cci, le groupe Γ est aussi cci.

(v) On suppose que tout sous-groupe de type fini de Γ_0 non réduit à un élément qui est normal dans Γ est cci. Alors le groupe Γ est aussi cci.

Démonstration. — Ce sont des conséquences des théorèmes usuels de formes normales. A titre d'exemple, détaillons l'argument pour (v) lorsque Γ_0 est un sous-groupe propre de Γ_1. Notons t la lettre stable de l'extension HNN, et $C_\Delta(\delta)$ la classe de conjugaison dans un groupe Δ d'un élément $\delta \in \Delta$. Soit $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 1$; il s'agit de montrer que la classe $C_\Gamma(\gamma)$ est infinie.

Si $\gamma \notin \Gamma_1$, la classe $C_\Gamma(\gamma)$ est infinie par le lemme 2.1 de [Stal-06]. On suppose désormais que $\gamma \in \Gamma_1$. Si $\gamma \notin \Gamma_0$, les éléments $t^{-n}\gamma t^n$ (où $n = 1, 2, 3, \ldots$) sont distincts deux à deux, car ce sont des écritures de formes normales. On suppose désormais que $\gamma \in \Gamma_0$.

Si la classe $C_\Gamma(\gamma)$ était finie, elle serait contenue dans Γ_0 vu les cas déjà traités. Le groupe engendré par $C_\Gamma(\gamma)$ serait donc un sous-groupe de type fini de Γ_0 qui serait normal dans Γ, et il possèderait un élément distinct de 1 (à savoir γ) ayant une classe de conjugaison $C_{\Gamma_0}(\gamma)$ finie, contrairement aux hypothèses. Par suite la classe $C_\Gamma(\gamma)$ est infinie. □

Exemples. — Soit F une surface compacte connexe qui n'est pas homéomorphe à l'une des surfaces de la liste

2-disque, anneau, ruban de Möbius, $\mathbf{S^2}$, $\mathbf{P^2}$, 2-tore, bouteille de Klein,

de sorte que le groupe fondamental $\pi_1(F)$ n'est ni fini ni virtuellement abélien. Si le bord de F n'est pas vide, alors $\pi_1(F)$ est libre non abélien, donc cci par l'assertion (i) de la proposition précédente. Si le bord de F est vide, alors F est une surface close, orientable de genre au moins 2 ou non orientable de genre au moins 3, donc $\pi_1(F)$ est cci par l'assertion (ii).

Il résulte du théorème de Kneser-Milnor que, « en général », le groupe fondamental d'une 3-variété décomposable est cci ; comme bien d'autres « énoncés généraux » concernant les 3-variétés, celui-ci est contredit par quelques exceptions qui contribuent à allonger les arguments qui suivent.

Pour la commodité du lecteur, nous collectons ici trois lemmes concernant les groupes cci.

Lemme 5.2. — *Dans un groupe cci, tout sous-groupe d'indice fini est cci.*

Démonstration. — Soient G un groupe cci et H un sous-groupe d'indice fini. Choisissons un sous-ensemble fini T de G tel que G soit la réunion disjointe $\sqcup_{t \in T} tH$. Soit $h \in H$ un élément dont la classe de conjugaison $C_H(h) = \{h_1, \ldots, h_k\}$ dans H est finie ; les éléments th_it^{-1} $(t \in T, 1 \leqslant i \leqslant k)$ constituent une énumération (peut-être avec répétitions) de sa classe $C_G(h)$ dans G ; en particulier, celle-ci est finie, donc $h = 1$. □

La réciproque du lemme 5.2 n'est pas correcte, comme on le voit en considérant le produit direct d'un groupe cci et d'un groupe fini non réduit à un élément.

Lemme 5.3. — *Un groupe sans torsion qui possède un sous-groupe d'indice fini cci est lui-même cci.*

Démonstration. — Soit G un groupe possédant un sous-groupe d'indice fini H qui est cci. Il suffit de montrer que, si G n'est pas cci, alors G possède de la torsion.

Soit donc $g \in G$, $g \neq 1$, un élément dont la classe de conjugaison est finie. Il existe un entier $n > 1$ tel que $g^n \in H$, car H est d'indice fini. De plus $g^n = 1$, car H est cci. $\square$

LEMME 5.4. — *Soient G un groupe et H un sous-groupe d'indice 2 ; on suppose que H est cci. Alors ou bien G est cci, ou bien G est produit direct de H et d'un groupe d'ordre 2.*

Démonstration. — Notons F_G la réunion des classes de conjugaison finies de G ; c'est un sous-groupe distingué de G. De plus F_G est d'ordre au plus 2, car $F_G \cap H \subset F_H = \{1\}$. Si F_G est réduit à $\{1\}$, alors G est cci.

Supposons désormais que F_G soit d'ordre 2, et notons f son élément distinct de l'identité. Alors f est d'ordre 2 et central dans G, de sorte que G est produit direct de H et F_G. $\square$

6. Le théorème principal pour les variétés orientables irréductibles

Avec une 3-variété M, il convient de considérer la variété $\hat{M}$ obtenue à partir de M en lui recollant une 3-cellule le long de chaque composante de bord homéomorphe à $\mathbf{S^2}$ par un homéomorphisme renversant l'orientation. C'est une conséquence immédiate du théorème de Seifert-Van Kampen que l'inclusion $M \subset \hat{M}$ induit un isomorphisme $\pi_1(M) \approx \pi_1(\hat{M})$.

Soient M une variété et

$$M \;=\; M_1\sharp\cdots\sharp M_k\sharp B_1\sharp\cdots\sharp B_l\sharp C_1\sharp\cdots\sharp C_m$$

une décomposition de Kneser-Milnor de M, avec les M_i indécomposables et non simplement connexes, les B_j des 3-boules et les C_k des 3-sphères non standard (c'est-à-dire [5] des 3-sphères d'homotopie non homéomorphes à $\mathbf{S^3}$). Notons que

$$\hat{M} \;=\; \begin{cases} M_1\sharp\cdots\sharp M_k\sharp C_1\sharp\cdots\sharp C_m & \text{si} \quad k+m \geqslant 1, \\ \qquad \mathbf{S^3} & \text{si} \quad k+m = 0. \end{cases}$$

La *variété de Poincaré* associée à M est la variété définie par

$$\mathcal{P}(M) \;=\; \begin{cases} M_1\sharp\cdots\sharp M_k & \text{si} \quad k \geqslant 1, \\ \quad \mathbf{S^3} & \text{si} \quad k = 0. \end{cases}$$

(5) Nous ne supposons rien ici concernant la conjecture de Poincaré.

Il résulte à nouveau du théorème de Seifert-Van Kampen que les groupes fondamentaux de M et $\mathcal{P}(M)$ sont isomorphes. De plus, toute sous-variété compacte contractile de dimension trois de $\mathcal{P}(M)$ est homéomorphe à un 3-disque ; voir le début du chapitre 10 de [Hemp-76].

Pour le lecteur qui accepterait la conjecture de Poincaré, il conviendrait de lire $\hat{M}$ au lieu de $\mathcal{P}(M)$ ci-dessous.

La remarque et les quatre lemmes qui suivent préparent la preuve du théorème 6.6.

Remarques 6.1. — (i) Soit M une variété irréductible qui n'est pas une 3-boule. Alors $\hat{M} = M$; autrement dit, aucune composante connexe du bord ∂M n'est une 2-sphère.

(ii) Si M est une variété irréductible non simplement connexe, alors $\mathcal{P}(M) = M$.

En effet, l'assertion (i) provient du fait que remplacer une variété M par sa somme connexe avec une 3-boule revient à créer dans M une composante de bord $\mathbf{S^2}$. L'assertion (ii) est une conséquence immédiate des définitions.

Lemme 6.2. — *Soient G un groupe et H un sous-groupe d'indice fini de G ayant un centre infini. Alors H contient un sous-groupe distingué d'indice fini de G ayant un centre infini.*

Démonstration. — Soit N le noyau de l'homomorphisme naturel α de G dans le groupe des permutations du G-ensemble fini G/H. Alors N est normal et d'indice fini dans G. De plus, la restriction de α au centre de H a un noyau qui est infini (car d'indice fini dans le centre de H) et qui est contenu dans le centre de N. □

Lemme 6.3. — *Soient G un groupe contenant un élément g d'ordre infini à centralisateur $Z_G(g)$ d'indice fini dans G. Alors G contient un sous-groupe abélien de type fini qui est infini et distingué dans G.*

Démonstration. — Par le lemme précédent, G contient un sous-groupe distingué d'indice fini N à centre $Z(N)$ infini ; soient $t_1, \ldots, t_n$ des représentants de G modulo N. Soient $z \neq e$ un élément de $Z(N)$ et K la clôture normale de z dans G.

Le groupe K est engendré par $t_1 z t_1^{-1}, \ldots, t_n z t_n^{-1}$, de sorte que K est de type fini. Le groupe $Z(N)$ est caractéristique dans N, qui est normal dans

G, de sorte que $Z(N)$ est normal dans G ; il en résulte que K est contenu dans $Z(N)$, et en particulier que K est abélien. Enfin K est normal dans G, par définition. □

LEMME 6.4. — *Soit N l'espace total d'un fibré en 2-tores sur le cercle. Si N est orientable et si le groupe $\pi_1(N)$ n'est pas cci, alors N est une variété de Seifert.*

Démonstration. — Le groupe fondamental $\pi_1(N)$ est produit semi-direct de $\mathbf{Z}^2$ par $\mathbf{Z}$ relativement à un automorphisme $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}^2) = GL(2, \mathbf{Z})$. Plus précisément, ϕ est induit sur le groupe fondamental par un homéomorphisme du 2-tore qui préserve l'orientation (car N est orientable), de sorte que $\phi \in SL(2, \mathbf{Z})$. Il y a *a priori* trois cas à considérer selon que ϕ est elliptique (c'est-à-dire à valeurs propres non réelles), parabolique (à valeurs propres 1 ou -1), ou hyperbolique (à valeurs propres réelles de modules différents de 1).

Si ϕ est elliptique, ϕ est d'ordre fini, de sorte que N est un fibré de Seifert (lemme II.5.4 de [JaSh-79]).

Si ϕ est parabolique, alors ϕ est conjugué à une matrice de la forme $\pm \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sur le tore, ϕ définit soit un twist de Dehn (signe $+$) soit un twist de Dehn composé avec la symétrie centrale (signe $-$), donc laisse invariant un feuilletage en cercles. Par suite la variété N admet un feuilletage en cercles ; c'est donc une variété de Seifert.

Si ϕ est hyperbolique, ϕ n'a pas de vecteur propre dans $\mathbf{Z}^2$; il est alors facile de vérifier que le groupe $\pi_1(N) = \mathbf{Z}^2 \rtimes_\phi \mathbf{Z}$ est cci, et ce cas n'entre donc pas dans les hypothèses du lemme. □

Rappelons que, à une extension de groupes

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 1$$

avec A abélien, on associe naturellement l'homomorphisme $\theta : C \longrightarrow \mathrm{Aut}(A)$ défini comme suit ; pour $c \in C$, l'automorphisme $\theta(c)$ est la restriction à A de la conjugaison par un élément de $\pi^{-1}(c)$; voir par exemple [Rotm-95], pages 178 et suivantes. Il résulte de cette définition que le noyau de θ est l'image par π du centralisateur de A dans B.

LEMME 6.5. — *Soit Γ un 3-groupe sans torsion tel qu'il existe une extension*

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow \Gamma \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 1$$

avec Q fini, K abélien libre de rang trois, et K maximal parmi les sous-groupes abéliens libres de type fini distingués dans Γ. Alors l'homomorphisme $\theta : Q \longrightarrow GL(3, \mathbf{Z})$ associé à l'extension est injectif.

Démonstration. — Le noyau Q_0 de θ et son image inverse $\Gamma_0 = \pi^{-1}(Q_0)$ s'insèrent dans une suite exacte

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow \Gamma_0 \xrightarrow{\pi_0} Q_0 \longrightarrow 1$$

dont l'homomorphisme associé θ_0 est l'homomorphisme constant de Q_0 dans $GL(3, \mathbf{Z})$; il en résulte que K est central dans Γ_0. Le théorème 12.10 de [Hemp-76] implique que Γ_0 est isomorphe à $\mathbf{Z}^3$, donc que $K = \Gamma_0$ par hypothèse de maximalité, de sorte que le quotient Q_0 est réduit à $\{1\}$. $\square$

Théorème 6.6. — *Soit M une 3-variété orientable irréductible dont le groupe fondamental Γ est infini. Alors Γ n'est pas cci si et seulement si M est une variété de Seifert.*

Démonstration. — Vu la proposition 3.2, nous pouvons supposer que Γ n'est pas cci, c'est-à-dire qu'il contient un élément $\gamma \neq 1$ dont le centralisateur $Z_\Gamma(\gamma)$ est d'indice fini dans Γ ; il s'agit de montrer que M est une variété de Seifert.

Le groupe Γ est sans torsion car M est un espace d'Eilenberg-MacLane. (En effet, $\pi_2(M)$ est trivial par le théorème de la sphère ; détails au corollaire 9.9 de [Hemp-76].) Le lemme 6.3 montre qu'il existe un sous-groupe normal K dans Γ qui est abélien, de type fini et infini ; d'où une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow \Gamma \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

(avec $Q = \Gamma/K$). La liste est connue des groupes abéliens de type fini qui peuvent être sous-groupes de 3-groupes (théorème 9.13 de [Hemp-76]). Comme K est de plus sans torsion, il est isomorphe à l'un des groupes $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, et $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$.

Premier cas : K est cyclique infini.

Il résulte du théorème des fibrés de Seifert (voir plus haut) que M est une variété de Seifert.

Deuxième cas : $K \approx \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ et Q est fini.

La variété $\mathcal{P}(M)$ est un I-fibré sur une surface close par le théorème 10.6 de [Hemp-76], qui ne peut être qu'un 2-tore ou une bouteille de Klein (car de groupe fondamental virtuellement $\mathbf{Z}^2$) ; de plus $\mathcal{P}(M) = M$ (remarque 6.1.ii). Il en résulte que M est une variété de Seifert.

Troisième cas : $K \approx \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ *et* Q *est infini.*

Il résulte du théorème de Hempel-Jaco cité plus haut que l'une au moins des assertions suivantes est vraie :

(i) M est un fibré sur le cercle dont la fibre F est un tore ;

(ii) M est un recollement convenable le long d'une surface F de deux I-fibrés.

En particulier, M est une variété de Haken (la surface F du présent contexte est bilatère incompressible) et M possède un revêtement fini N qui est l'espace total d'un fibré en tores sur le cercle. Le lemme 5.3 implique que le groupe infini $\pi_1(N)$ n'est pas cci, et le lemme 6.4 que N est une variété de Seifert.

La variété M est de Seifert, car elle est de Haken et elle possède un revêtement fini qui est une variété de Seifert (théorème II.6.3 de [JaSh-79]).

Quatrième cas : $K \approx \mathbf{Z}^3$.

Le groupe Q est fini par le théorème de Hempel-Jaco (et le fait que $\mathbf{Z}^3$ n'est pas un groupe de surface !). Quitte à remplacer K par un sur-groupe d'indice fini, on peut supposer K maximal parmi les sous-groupes de Γ qui sont distingués, abéliens et de type fini. L'homomorphisme

$$\theta \, : \, Q \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}^3) \approx GL_3(\mathbf{Z})$$

associé à l'extension $1 \longrightarrow K = \mathbf{Z}^3 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow Q \longrightarrow 1$ est injectif (lemme 6.5). Un argument qu'on trouve dans [Sco-83b] (page 444) montre alors que Γ possède un sous-groupe normal cyclique infini. Il en résulte que M est une variété de Seifert (théorème des fibrés de Seifert). $\square$

7. Le théorème principal pour les variétés orientables

Nous pouvons maintenant traiter le cas d'une 3-variété orientable en toute généralité. Le prix qu'implique la considération des variétés réductibles est la présence a priori possible de 3-sphères non standard dans la décomposition de Kneser-Milnor de M, d'où l'apparition de la variété de Poincaré $\mathcal{P}(M)$.

THÉORÈME 7.1. — *Soient M une 3-variété orientable et Γ son groupe fondamental ; on suppose Γ infini et non diédral infini. Alors Γ n'est pas cci si et seulement si $\mathcal{P}(M)$ est une variété de Seifert.*

En particulier, pour le groupe fondamental infini Γ d'une 3-variété orientable, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Γ est groupe fondamental d'une variété de Seifert ;

(ii) Γ possède un sous-groupe normal cyclique infini ;

(iii) Γ n'est pas cci.

Remarques. — (i) Au théorème 7.1, il n'est pas possible de remplacer $\mathcal{P}(M)$ par M. En effet, soient M_1 une variété de Seifert orientable à groupe fondamental Γ infini et C une 3-sphère non standard ; posons $M = M_1 \sharp C$, de sorte que $\mathcal{P}(M) = M_1$. Alors $\Gamma = \pi_1(M_1) = \pi_1(M)$ n'est pas cci (proposition 3.2), M n'est pas une variété de Seifert [Sco-83a] et $\mathcal{P}(M)$ en est une.

(ii) Acceptons pour cette remarque la conjecture de Poincaré. Soit M une 3-variété orientable de la forme $M_1 \sharp M_2$, où les variétés M_1, M_2 sont premières et les groupes $\pi_1(M_1), \pi_1(M_2)$ d'ordre 2. Alors M est nécessairement $\mathbf{P^3} \sharp \mathbf{P^3}$, qui admet une fibration de Seifert. On peut donc supprimer l'hypothèse $\Gamma \not\approx D_\infty$ dans la première assertion du théorème 7.1.

Démonstration. — Vu la proposition 3.2, il reste à montrer que, si Γ n'est pas cci, alors $\mathcal{P}(M)$ est une variété de Seifert. Nous pouvons supposer M réductible grâce au théorème 6.6. Si M est de plus indécomposable, alors M est homéomorphe à $\mathbf{S^2} \times \mathbf{S^1}$ et il n'y a plus rien à montrer. Nous pouvons donc supposer M décomposable, et plus précisément que la décomposition de Kneser-Milnor de $\hat{M}$ est de la forme

$$\hat{M} \;=\; M_1 \sharp \cdots \sharp M_p \sharp C_1 \sharp \cdots \sharp C_q \qquad (p > 0)$$

où les M_i sont des variétés orientables irréductibles à groupes fondamentaux non réduits à $\{1\}$ et où les C_j sont des sphères non standard. Si $p = 1$, alors $\mathcal{P}(M) = M_1$ est une variété irréductible, et le théorème 6.6 s'applique, de sorte que $\mathcal{P}(M)$ est une variété de Seifert. Si $p \geqslant 2$, alors

$$\Gamma \;=\; \Gamma_1 * \cdots * \Gamma_p \qquad (\Gamma_i = \pi_1(M_i))$$

est un produit libre non banal. Notons que $p = 2$ et que les deux groupes Γ_1, Γ_2 sont d'ordre 2, car Γ n'est pas cci (proposition 5.1) ; donc Γ est produit libre de deux groupes d'ordre 2, c'est un groupe diédral infini. $\square$

8. Rappel sur le théorème des fibrés de Seifert (cas non orientable)

Notons[6] $\mathbf{P}$ la somme connexe sur un disque de deux copies de $\mathbf{P}^2 \times I$. Le bord de la variété $\mathbf{P}$ a trois composantes connexes, deux homéomorphes au plan projectif et une homéomorphe à la bouteille de Klein $\mathbf{K}^2$. Le groupe fondamental de $\mathbf{P}$ est diédral infini. De plus, $\mathbf{K}^2$ possède une fibration en cercles telle que la classe d'homotopie de chaque fibre engendre le sous-groupe cyclique d'indice deux de $\pi_1(\mathbf{P})$; convenons qu'une fibration de la composante connexe $\mathbf{K}^2$ de $\mathbf{P}$ est *spéciale* si elle possède cette propriété.

Sur une 3-variété *non orientable* M, on définit comme Heil et Whitten une *structure de Seifert modulo* $\mathbf{P}$. Une telle structure consiste en la donnée d'une famille $\mathcal{W} = (K_1, \ldots, K_l)$ (possiblement vide) de bouteilles de Klein plongées dans l'intérieur de M, disjointes deux à deux, chacune d'entre elles étant bilatère et munie d'une fibration en cercles. Les adhérences dans M des composantes connexes de $M \setminus \mathcal{W}$ sont d'une part des copies $P_1, \ldots, P_m$ de $\mathbf{P}$ et d'autre part des 3-variétés $M_1, \ldots, M_n$ munies de structures de Seifert ; chaque K_i est dans le bord d'au moins l'un des P_j. Si K_i borde un P_j, sa fibration en cercles est spéciale dans P_j ; si K_i borde un M_k, sa fibration en cercles est induite par la fibration de Seifert de M_k.

Sur une 3-variété non orientable munie d'une structure de Seifert modulo $\mathbf{P}$, les fibres régulières (définies comme au § 3) définissent une classe d'homotopie qui engendre un sous-groupe de $\pi_1(M)$ qui est cyclique, normal, et non réduit à un élément. On peut montrer que ce sous-groupe est toujours infini [HeWh-94], mais nous n'utilisons pas ce fait ci-dessous.

Une *variété de Seifert modulo* $\mathbf{P}$ est une 3-variété non orientable qui possède une structure de Seifert modulo $\mathbf{P}$.

Remarques 8.1. — (i) Pour tout $\mathbf{P}^2$ plongé dans une 3-variété M, le groupe fondamental de $\mathbf{P}^2$ s'injecte dans celui de M.

(ii) Dans le bord d'une variété de Seifert modulo $\mathbf{P}$, le nombre de composantes connexes homéomorphes à $\mathbf{P}^2$ est toujours pair. Une variété de Seifert modulo $\mathbf{P}$ est une variété de Seifert si et seulement si son bord ne contient aucun $\mathbf{P}^2$.

(iii) Soit M une variété de Seifert modulo $\mathbf{P}$. Si $\pi_1(M)$ n'a pas d'élément d'ordre deux, alors M est une variété de Seifert.

---

(6) Plus précisément, on considère deux copies P_1, P_2 de la variété $\mathbf{P}^2 \times I$, ainsi que deux 2-disques plongés dans leurs bords $D_1 \subset \partial P_1$, $D_2 \subset \partial P_2$, et on recolle le long de D_1, D_2 un cylindre plein $\mathbf{D}^2 \times I$.

La remarque (i) est le lemme 5.1 de [Hemp-76], la remarque (ii) découle de la définition, et la troisième remarque résulte des deux premières.

Convenons qu'un $\mathbf{P}^2 \times I$ *non standard* est une 3-variété homotope au produit d'un plan projectif et d'un intervalle, mais non homéomorphe à ce produit (si la conjecture de Poincaré est vraie, il n'existe pas de $\mathbf{P}^2 \times I$ non standard). On définit de même un $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{S^1}$ *non standard.*

Voici l'énoncé du théorème 1 de [HeWh-94].

Théorème 8.2 (Théorème des fibrés de Seifert, cas non orientable). — *Soit M une 3-variété non orientable irréductible qui ne contient pas de $\mathbf{P}^2 \times I$ non standard. Le groupe fondamental de M contient un sous-groupe normal cyclique non réduit à un élément si et seulement si M est ou bien une variété de Seifert modulo $\mathbf{P}$ ou bien homéomorphe à $\mathbf{P}^2 \times I$.*

Remarques. — (i) Rappelons qu'une 3-variété non orientable à groupe fondamental fini est toujours homotope à un $\mathbf{P}^2 \times I$ troué (théorème 9.6 de [Hemp-76]).

(ii) Un $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{S}^1$ non standard irréductible doit contenir un $\mathbf{P}^2 \times I$ non standard.

En effet, soient M un $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{S}^1$ non standard irréductible et soit $\Gamma = \pi_1(M)$. Soit C_2 l'image dans Γ du groupe fondamental de $\mathbf{P}^2$. Soit P un $\mathbf{P}^2$ plongé bilatère dans M, dont le groupe fondamental s'identifie à C_2 ; un tel P existe en vertu d'un résultat d'Epstein (théorème 9.8 de [Hemp-76]). Distinguons a priori deux cas selon que P est séparant ou non.

Si P est séparant, notons M_1, M_2 les composantes connexes de $M \setminus P$ et Γ_1, Γ_2 leurs groupes fondamentaux. Alors Γ est le produit amalgamé $\Gamma_1 *_{C_2} \Gamma_2$. Le centre de Γ est donc contenu dans C_2 ; or Γ est abélien, donc $\pi_1(M) = C_2$, ce qui est absurde. Ainsi, ce cas n'apparaît pas.

Si P n'est pas séparant, posons $M_1 = M \setminus P$ et notons Γ_1 son groupe fondamental. Alors Γ est une extension HNN de base Γ_1 au-dessus de deux sous-groupes d'ordre deux. Notons t la lettre stable de l'extension HNN. Si Γ_1 n'était pas d'ordre deux, il existerait $u \in \Gamma_1$ tel que tut^{-1} soit une écriture réduite, en particulier tel que $tut^{-1} \neq u$, et ceci est absurde puisque Γ est abélien. Donc Γ_1 est d'ordre deux. Par suite M_1 est un $\mathbf{P^2} \times I$ non standard en vertu d'un autre résultat d'Epstein (théorème 9.6 de [Hemp-76]).

(iii) L'énoncé du théorème 8.2 se simplifie dans le cas $\mathbf{P}^2$-irréductible : *Soit M une 3-variété non orientable $\mathbf{P}^2$-irréductible. Le groupe fondamental* *de M contient un sous-groupe normal cyclique infini si et seulement si M est une variété de Seifert.* La remarque (i) implique que le groupe fondamental d'une telle variété M est nécessairement infini.

9. Le théorème principal pour les variétés non orientables $\mathbf{P}^2$-irréductibles

Soient M une variété *non orientable* et Γ son groupe fondamental. Notons $\tilde{M}$ le revêtement d'orientation de M et $\tilde{\Gamma}$ le sous-groupe d'indice 2 de Γ correspondant ; le théorème 7.1 s'applique à $\tilde{M}$ et $\tilde{\Gamma}$. Rappelons que les variétés $\hat{M}$ et $\mathcal{P}(M)$ ont été définies peu avant les remarques 6.1.

LEMME 9.1. — *Soient M une 3-variété non orientable à groupe fondamental Γ infini. Alors Γ n'est pas cci si et seulement si l'une au moins des assertion suivantes est vraie :*

(i) $\mathcal{P}(\tilde{M})$ est une variété de Seifert ;

(ii) $\hat{M}$ a le type d'homotopie de $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{S}^1$;

(iii) $\tilde{\Gamma}$ est un groupe diédral infini.

Remarque. — Dans l'assertion (i), on ne peut remplacer $\mathcal{P}(\tilde{M})$ ni par M, ni par $\tilde{M}$, ni par $\mathcal{P}(M)$. En effet, soit par exemple $M = (\mathbf{P}^2 \times I)\sharp(\mathbf{P}^2 \times I)$; son revêtement d'orientation est $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$ moins quatre boules. Donc $\mathcal{P}(\tilde{M})$ est une variété de Seifert, mais M n'en est pas une, ni $\tilde{M}$; de plus $M = \mathcal{P}(M)$. Il en est de même pour la variété $\mathbf{P}$ du § 8, dont le revêtement d'orientation est un tore plein privé de deux boules.

Démonstration. — Supposons d'abord que Γ n'est pas cci. Si $\tilde{\Gamma}$ n'est pas cci, $\mathcal{P}(\tilde{M})$ est une variété de Seifert ou $\tilde{\Gamma}$ est diédral infini par le théorème 7.1. On peut donc supposer $\tilde{\Gamma}$ cci, donc Γ produit direct de $\tilde{\Gamma}$ et d'un groupe d'ordre 2 par le lemme 5.4.

Rappelons qu'un 3-groupe infini possède des éléments d'ordre infini. En effet, d'une part un groupe fondamental infini de variété irréductible orientable est sans torsion (par le théorème de la sphère, voir ci-dessus la preuve du théorème 6.6), et d'autre part un groupe fondamental de variété réductible orientable est un produit libre d'un groupe sans torsion et de groupes finis (produit libre provenant d'une décomposition de Kneser-Milnor). Par suite, si le groupe fondamental d'une 3-variété orientable est infini, il possède des éléments d'ordre infini ; on vérifie la même assertion pour le cas d'une 3-variété non orientable en considérant le sous-groupe correspondant au revêtement d'orientation.

En particulier, Γ possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Un résultat d'Epstein déjà cité (théorème 9.12 de [Hemp-76]) implique que M est de la forme $M_1 \sharp R$, où R est une variété fermée non orientable telle que $\pi_1(R) = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. De plus M_1 est simplement connexe (proposition 5.1.i), de sorte que $\Gamma = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Le théorème 12.10 de [Hemp-76] montre que $\hat{M}$ a le type d'homotopie de $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{S}^1$.

Réciproquement, si $\hat{M}$ a le type d'homotopie de $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{S}^1$, alors $\Gamma = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ n'est pas cci ; de même, le groupe diédral infini n'est pas cci ; enfin, si $\mathcal{P}(\tilde{M})$ est une variété de Seifert, Γ n'est pas cci par la proposition 3.2 et le lemme 5.2. $\square$

Proposition 9.2. — *Soient M une 3-variété non orientable $\mathbf{P}^2$-irréductible et Γ son groupe fondamental. Alors Γ n'est pas cci si et seulement si M est une variété de Seifert.*

Démonstration. — Si M est de Seifert, Γ n'est pas cci par la proposition 3.2.

Supposons que Γ n'est pas cci. Le groupe Γ est infini sans torsion par un résultat d'Epstein déjà invoqué (théorème 9.8 de [Hemp-76]). Le lemme 9.1 implique donc que $\mathcal{P}(\tilde{M})$ est une variété de Seifert ; de plus $\tilde{M}$ est irréductible (lemme 10.4 de [Hemp-76]), de sorte que $\tilde{M} = \mathcal{P}(\tilde{M})$ est une variété de Seifert. Ceci achève la preuve grâce au résultat suivant.

Une variété non orientable irréductible dont le revêtement d'orientation est une variété de Seifert est elle-même une variété de Seifert. C'est une conséquence dans le cas sans bord du théorème 3 de [Whit-92] et dans le cas avec bord du résultat principal de [Toll-78]. $\square$

10. Le théorème principal pour les variétés non orientables

Proposition 10.1. — *Soit M une 3-variété non orientable irréductible qui ne contient pas de $\mathbf{P}^2 \times I$ non standard et dont le groupe fondamental Γ est infini. Alors Γ n'est pas cci si et seulement si M est une variété de Seifert modulo $\mathbf{P}$.*

Démonstration. — Si M est de Seifert modulo $\mathbf{P}$, le groupe Γ n'est pas cci par le théorème 8.2.

Supposons que Γ n'est pas cci. Vu la proposition 9.2, nous pouvons supposer que M contient une copie P du plan projectif, plongé, bilatère ; son groupe fondamental s'injecte dans celui de M (remarque 8.1.i). Pour la suite de la preuve, nous distinguons plusieurs cas.

Cas (A) : le plan projectif P n'est pas parallèle au bord de M.

Cas (A.1) : de plus, P sépare M en deux variétés M_1, M_2. Alors M_1 et M_2 sont non orientables (car à bord contenant un plan projectif) et irréductibles (car M est irréductible). De plus les groupes fondamentaux $\Gamma_1 = \pi_1(M_1), \Gamma_2 = \pi_1(M_2)$ sont infinis ; en effet, si Γ_1 était fini, M_1 aurait le type d'homotopie d'un $\mathbf{P}^2 \times I$ par le théorème 9.6 de [Hemp-76], donc M_1 serait homéomorphe à $\mathbf{P}^2 \times I$ vu les hypothèses, et donc P serait parallèle au bord.

Le groupe Γ est un produit amalgamé $\Gamma_1 *_{C_2} \Gamma_2$. Par la proposition 5.1.iii, le groupe C_2 est normal dans Γ_1 et dans Γ_2. Les groupes infinis Γ_1 et Γ_2 contiennent donc chacun un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z} \times C_2$. Le corollaire 4.2 de [Swar-73] implique que M_1 et M_2 sont homotopes à $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{S}^1$, ce qui est absurde car M_1 et M_2 sont à bord.

Le cas (A.1) n'est donc pas possible.

Cas (A.2) : le plan P ne sépare pas la variété M. Le groupe Γ est donc une extension HNN de base un groupe Γ_1 au-dessus d'un groupe C_2 d'ordre deux. Si $\Gamma_1 = C_2$, alors $\Gamma \approx \mathbf{Z} \times C_2$ et M a le type d'homotopie de $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{S}^1$, donc M est homéomorphe à $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{S}^1$ qui est une variété de Seifert.

On peut donc supposer que C_2 est un sous-groupe propre de Γ_1. Alors C_2 est normal dans Γ_1 (sinon Γ serait cci par la proposition 5.1.v). Donc Γ possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z} \times C_2$. Le résultat de Swarup déja cité implique que M est homéomorphe à $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{S}^1$, qui est une variété de Seifert.

Cas (B) : tout plan projectif plongé dans M est parallèle au bord. Notons σ l'involution du revêtement d'orientation $\tilde{M}$ de M et $p : \tilde{M} \longrightarrow M$ la projection de revêtement.

Affirmation (I) : $\tilde{M}$ ne contient pas de boule non standard.

Supposons (ab absurdo) que $\tilde{M}$ contienne une boule non standard, dont nous notons S le bord. On peut supposer que l'une des deux situations suivantes est réalisée : $\sigma(S) \cap S = \emptyset$, ou $\sigma(S) = S$ (voir la preuve du lemme 1 de [Toll-70], ou la preuve du lemme 2 de [HeWhi-94]).

Cas où $\sigma(S) \cap S = \emptyset$. Alors M contient aussi une boule non standard, ce qui est absurde car M est irréductible et non simplement connexe (parce que non orientable).

Cas où $\sigma(S) = S$. Alors $p(S)$ est un plan projectif plongé dans M, donc $p(S)$ est parallèle au bord dans M. Il en résulte que S est parallèle au bord dans $\tilde{M}$, et par suite que $\tilde{M}$ est obtenue par recollement d'une boule non standard avec un produit $\mathbf{S}^2 \times I$; en particulier $\tilde{M}$ est simplement connexe, ce qui est absurde car $\Gamma = \pi_1(M)$ est infini.

L'affirmation (I) est ainsi démontrée, de sorte que $\mathcal{P}(\tilde{M}) = \overline{M}$, où nous écrivons $\overline{M}$ pour $\hat{\tilde{M}}$ (la signification du chapeau est celle définie au § 6). Le lemme 9.1 montre que ou bien $\pi_1(\tilde{M})$ est diédral infini, ou bien $\overline{M}$ est une variété de Seifert.

Affirmation (II) : $\pi_1(M)$ *contient un sous-groupe cyclique distingué non réduit à un élément.*

Cas où $\pi_1(\tilde{M})$ *est un groupe diédral infini.* Le sous-groupe sans torsion d'indice deux du groupe diédral infini est caractéristique, donc $\pi_1(M)$ contient un sous-groupe cyclique infini distingué.

Cas où $\overline{M}$ *est une variété de Seifert.* Alors, le groupe fondamental de $\overline{M}$ contient un sous-groupe normal infini, engendré par les fibres régulières. La variété de Seifert orientable $\overline{M}$ est ou bien homéomorphe à l'une de $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$, $\mathbf{P}^3 \sharp \mathbf{P}^3$, ou bien irréductible (lemme VI.7 de [Jaco-77]). Dans le premier cas, $\pi_1(M)$ contient évidemment un sous-groupe cyclique infini normal. On peut donc supposer que $\overline{M}$ est de plus irréductible.

L'involution d'orientation σ sur $\tilde{M}$ s'étend en une involution $\overline{\sigma}$ sur $\overline{M}$ qui a un nombre fini de points fixes (un par composante sphérique de $\partial\tilde{M}$). Notons X l'espace des orbites de la fibration de Seifert sur $\overline{M}$. L'orbiété X ne peut pas être $\mathbf{S}^2$ avec 0, 1 ou 2 points coniques (sinon $\overline{M}$ serait $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$ ou un espace lenticulaire, ce qui est exclu car $\overline{M}$ est irréductible et $\pi_1(\overline{M})$ est infini), ni $\mathbf{S}^2$ avec 3 points coniques (par un argument de la preuve du théorème 2 dans [HeWh-94]). Nous pouvons donc appliquer le théorème principal de [Toll-78], qui nous assure que $\overline{\sigma}$ préserve la fibration de Seifert de $\overline{M}$.

Notons t un générateur du sous-groupe cyclique infini normal de $\pi_1(\tilde{M})$, qui s'identifie à $\pi_1(\overline{M})$, et a un élément de $\pi_1(M)$ qui n'est pas dans le sous-groupe d'indice deux $\pi_1(\tilde{M})$. Nous affirmons que ata^{-1} est t ou t^{-1}, de sorte que le sous-groupe engendré par t est encore normal dans $\pi_1(M)$.

En effet, choisissons un point base $x_0 \in M$ et un relevé $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$ de telle sorte que $\tilde{x}_0$ soit dans une fibre régulière de $\overline{M}$. L'inclusion $\tilde{M} \subset \overline{M}$ fournit une identification $\pi_1(\tilde{M}, \tilde{x}_0) = \pi_1(\overline{M}, \tilde{x}_0)$ et la projection de revêtement p une identification de $\pi_1(\tilde{M}, \tilde{x}_0)$ avec un sous-groupe d'indice deux dans $\pi_1(M, x_0)$. Choisissons encore un lacet α dans M basé en x_0 représentant a, dont le relevé $\tilde{\alpha}$ dans $\tilde{M}$ connecte $\tilde{x}_0$ à $\sigma(\tilde{x}_0)$, un lacet $\tilde{\tau}$ dans $\tilde{M}$ basé en $\tilde{x}_0$ qui représente t, et notons $\overline{\tau}$ la fibre de $\overline{M}$ contenant $\tilde{x}_0$ orientée de telle sorte qu'elle représente aussi t (en particulier, $\tilde{\tau}$ et $\overline{\tau}$ sont homotopes dans $\overline{M}$).

Considérons le lacet $\tilde{\alpha}\sigma(\tilde{\tau})(\tilde{\alpha})^{-1}$ de $\tilde{M}$. D'une part, il se projette dans M sur un lacet $\alpha\tau\alpha^{-1}$ qui représente ata^{-1}. D'autre part, il est librement homotope dans $\overline{M}$ au lacet $\overline{\sigma}(\overline{\tau})$, qui est une fibre régulière orientée, donc qui est aussi librement homotope dans $\overline{M}$ à $\overline{\tau}$ ou à $(\overline{\tau})^{-1}$; par suite ata^{-1} est conjugué dans $\pi_1(\overline{M}, \tilde{x}_0)$ à t ou à t^{-1} ; mais t engendre dans $\pi_1(\overline{M}, \tilde{x}_0)$ un sous-groupe qui est cyclique infini normal, donc ata^{-1} est l'un de t ou t^{-1}, comme affirmé plus haut.

Ceci achève la preuve de l'affirmation (II). Le théorème 8.2 permet de conclure. □

THÉORÈME 10.2. — *Soit M une 3-variété non orientable qui ne contient pas de $\mathbf{P}^2 \times I$ non standard ; on suppose que le groupe fondamental Γ est infini et n'est pas diédral infini. Alors Γ n'est pas cci si et seulement si $\mathcal{P}(M)$ est une variété de Seifert modulo $\mathbf{P}$.*

En particulier, pour un groupe fondamental infini Γ d'une 3-variété non orientable, les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Γ est groupe fondamental d'une variété de Seifert modulo $\mathbf{P}$;

(ii) Γ possède un sous-groupe normal cyclique infini ;

(iii) Γ n'est pas cci ;

(iv) Γ possède un sous-groupe d'indice 2 qui est groupe fondamental d'une variété de Seifert orientable. Lorsque Γ n'a pas d'élément d'ordre deux, ces propriétés sont encore équivalentes à :

(v) Γ est groupe fondamental d'une variété de Seifert.

Démonstration. — Le théorème 10.2 résulte de la proposition 10.1 comme le théorème 7.1 résulte du théorème 6.6. □

11. Cas d'un entrelacs et cas d'une variété hyperbolique

Corollaire 11.1. — *Soit L un noeud dans $\mathbf{S}^3$. Alors le groupe de L est cci si et seulement si L n'est pas un noeud torique.*

Démonstration. — D'une part, le groupe d'un noeud est infini (le théorème de Hurwitz et la dualité d'Alexander montrent que son abélianisé est cyclique infini). D'autre part, on sait essentiellement depuis la classification par Seifert des structures de Seifert sur la sphère que le complémentaire d'un noeud dans $\mathbf{S}^3$ possède une fibration de Seifert si et seulement si le noeud est torique (voir par exemple [Mose-71]). □

Remarque. — Plus généralement, soit L un entrelacs dans $\mathbf{S}^3$. Les conditions suivantes sont équivalentes [BuMu-70] :

(i) le centre du groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus L)$ n'est pas réduit à $\{1\}$;

(ii) le groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{S}^3 \setminus L)$ n'est pas cci ;

(iii) l'entrelacs L est une réunion finie de fibres d'une fibration de Seifert de $\mathbf{S}^3$.

Voici enfin un énoncé qu'on pourrait sans doute déduire de ce qui précède, mais dont nous préférons donner une démonstration dans un autre contexte.

Proposition 11.2. — *Le groupe fondamental d'une variété hyperbolique orientable de volume fini est toujours un groupe cci.*

Démonstration. — Un tel groupe fondamental est un réseau dans la composante connexe du groupe des isométries de l'espace hyperbolique. Or c'est une conséquence du théorème de densité de Borel [Bore-60] que, plus généralement, dans un groupe de Lie G connexe simple non compact à centre réduit à un élément, tout réseau Γ est cci.

Plus précisément, soit $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 1$. Il s'agit de montrer qu'il existe une suite infinie $(\gamma_j)_{j\geqslant 1}$ telle que les conjugués $\gamma_j\gamma\gamma_j^{-1}$ soient distincts deux à deux. On pose $\gamma_1 = 1$ et on procède par récurrence.

Supposons qu'il existe une suite $(\gamma_j)_{1\leqslant j\leqslant k}$ telle que les éléments $\gamma_j^{-1}\gamma\gamma_j$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ sont distincts deux à deux. Pour chaque $j \in \{1, ..., k\}$, le fermé de Zariski

$$Z_G(\gamma)\gamma_j \;=\; \{g \in G : g^{-1}\gamma g = \gamma_j^{-1}\gamma\gamma_j\}$$

est distinct de G, sinon γ serait dans le centre de G. (La notation $Z_G(\gamma)\gamma_j$ indique le translaté par γ_j du centralisateur indiqué dans G.) Comme la réunion d'un nombre fini de fermés de Zariski distincts de G est distincte de G, la propriété de Γ d'être Zariski-dense dans G implique qu'il existe $\gamma_{k+1} \in \Gamma$ tel que

$$\gamma_{k+1} \notin \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant k} Z_G(\gamma)\gamma_j.$$

Par suite les éléments $\gamma_j^{-1}\gamma\gamma_j$ $(1 \leqslant j \leqslant k+1)$ sont distincts deux à deux.

Il en résulte que la classe de conjugaison de γ dans Γ est infinie. $\square$

Notons que la conclusion de la proposition et sa démonstration valent pour un sous-groupe Zariski-dense d'un groupe de Lie algébrique réel de centre réduit à $\{1\}$, et en particulier pour une variété hyperbolique de volume fini en toute dimension $n \geqslant 2$.

Plus généralement, on peut montrer que le groupe fondamental d'une 3-variété hyperbolique [7] non élémentaire est un groupe cci. Une variété hyperbolique, quotient de l'espace hyperbolique $\mathbf{H^3}$ par un groupe discret sans torsion Γ d'isométries de $\mathbf{H^3}$, est dite *élémentaire* si l'ensemble limite de Γ dans le bord $\mathbf{S}^2$ de $\mathbf{H^3}$ a au plus deux points, c'est-à-dire si Γ possède un sous-groupe d'indice fini isomorphe à $\mathbf{Z}^d$ $(d \leqslant 2)$.

12. Groupes de dimension cohomologique trois à dualité de Poincaré

Soit Γ un groupe de dimension cohomologique trois à dualité de Poincaré ; nous écrirons succinctement : « soit Γ *un groupe DP(3)* », et nous renvoyons au § VIII.10 de [Brow-82] pour la définition. Rappelons toutefois qu'un groupe DP(3) est sans torsion, que tout groupe fondamental d'une 3-variété fermée asphérique [8] est un groupe DP(3), et qu'on ne connaît pas d'autre exemple. Notons aussi que, si le groupe fondamental d'une 3-variété M est DP(3), alors la variété $\mathcal{P}(M)$ est nécessairement fermée et $\mathbf{P}^2$-irréductible

L'analogue du théorème des fibrés de Seifert pour les groupes DP(3) est le corollaire 0.5 de [Bowd-04] :

Proposition 12.1 (Bowditch). — *Un groupe DP(3) qui contient un sous-groupe normal cyclique infini est le groupe fondamental d'une variété de Seifert fermée.*

---

(7) Compacte ou non, de volume fini ou non.

(8) Ou, de manière équivalente, tout groupe fondamental d'une 3-variété fermée $\mathbf{P}^2$-irréductible à revêtement universel non compact.

Dans le cadre de ce paragraphe, voici l'analogue des théorèmes 7.1 et 10.2.

Proposition 12.2. — *Un groupe DP(3) n'est pas cci si et seulement si c'est le groupe fondamental d'une variété de Seifert.*

Démonstration. — Soit Γ un groupe DP(3) qui n'est pas cci ; il s'agit de montrer qu'il existe une variété de Seifert dont Γ est le groupe fondamental. Par le lemme 6.3, il existe dans Γ un sous-groupe Γ_0 qui est distingué, abélien, de type fini et infini ; de plus, sa dimension cohomologique est au plus trois. Par suite, Γ_0 est isomorphe à l'un des groupes $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}^2$, $\mathbf{Z}^3$.

Supposons d'abord Γ_0 d'indice fini. Sa dimension cohomologique est alors trois (théorème VIII.3.1 de [Brow-82]), de sorte que Γ_0 est isomorphe à $\mathbf{Z}^3$. L'argument du quatrième cas de la preuve du théorème 6.6 permet de conclure.

On suppose désormais Γ_0 d'indice infini, et donc isomorphe à l'un des groupes $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}^2$, par le théorème 1 de [Hill-87]. Si $\Gamma_0 = \mathbf{Z}$, la proposition 12.1 permet de conclure.

On peut donc supposer que Γ_0 est isomorphe à $\mathbf{Z}^2$. Le corollaire de [Hill-87] implique alors qu'il existe une 3-variété $\mathbf{P}^2$-irréductible dont Γ est le groupe fondamental. Le théorème 6.6 et la proposition 9.2 permettent de conclure. □

13. La propriété cci forte Une application à certaines représentations unitaires

Dans l'introduction, nous avons rappelé que la propriété pour un groupe Γ d'être cci se traduit en termes de l'algèbre de von Neumann $W^*_\lambda(\Gamma)$; elle a aussi des conséquences pour l'étude des représentations unitaires de Γ, et donc [Harp-07] des C*-algèbres associées. Avant d'en citer une, rappelons d'abord une définition de [BeHa-94] : un groupe Γ est *fortement cci* si, pour toute partie finie F de Γ disjointe de $\{1\}$, il existe une suite infinie $(\gamma_j)_{j\geqslant 1}$ d'éléments de Γ telle que, pour tout $x \in F$, les éléments $\gamma_j^{-1}x\gamma_j$ sont distincts deux à deux. En fait, cette propriété est équivalente à la propriété cci (comme déjà noté dans une note de [BeHa-94] ajoutée aux épreuves).

Proposition 13.1. — *Un groupe est cci si et seulement s'il est fortement cci.*

Démonstration. — Soit Γ un groupe non réduit à un élément, et cci ; il s'agit de montrer que Γ est fortement cci. Soit $F \subset \Gamma \setminus \{1\}$ un ensemble fini.

Nous affirmons que, pour tout $k \geqslant 1$, il existe une suite $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \Gamma$ telle que, pour tout $f \in F$, les éléments $\gamma_j f \gamma_j^{-1}$ $(j = 1, \ldots, k)$ sont distincts deux à deux. On pose $\gamma_1 = 1$ et on procède par récurrence sur k, en supposant l'affirmation démontrée jusqu'à k.

Comme Γ est cci, le centralisateur $Z_\Gamma(f)$ de f dans Γ est d'indice infini pour tout $f \in F$. Or c'est un fait classique qu'un groupe infini (ici Γ) n'est jamais réunion d'un nombre fini de classes à droite suivant des sous-groupes d'indices infinis (ici les $Z_\Gamma(f)\gamma_j$) ; voir le lemme 4.1 de [Neum-54]. Nous pouvons donc choisir $\gamma_{k+1} \in \Gamma$ tel que $\gamma_{k+1} \notin \cup Z_\Gamma(f)\gamma_j$ (réunion sur $f \in F$ et $j = 1, \ldots, k$). Il est alors immédiat de vérifier que, $\gamma_j f \gamma_j^{-1} \neq \gamma_{k+1} f \gamma_{k+1}^{-1}$ pour tous $j \in \{1, \ldots, k\}$ et $f \in F$. □

Rappelons encore qu'une représentation unitaire π d'un groupe Γ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$ est dite *de classe* $(\mathcal{C}_0)$ si, pour tout vecteur unité $\xi \in \mathcal{H}_\pi$, la fonction de type positif $\gamma \mapsto \langle \xi | \pi(\gamma)\xi \rangle$ tend vers 0 à l'infini de Γ. Nous écrivons $\pi \prec \rho$ si une représentation unitaire π est *faiblement contenue* dans une représentations unitaire ρ.

Proposition 13.2. — *Si Γ est un groupe cci et si π est une représentation de Γ de classe $(\mathcal{C}_0)$, alors $\lambda_\Gamma \prec \pi$.*

Démonstration. — Soit $\delta : \Gamma \to \mathbf{C}$ la fonction définie par $\delta(\gamma) = \langle \xi_1 | \lambda_\Gamma(\gamma)\xi_1 \rangle$ où $\xi_1 \in l^2(\Gamma)$ est la fonction caractéristique de $\{1\}$; nous avons donc $\delta(1) = 1$ et $\delta(\gamma) = 0$ si $\gamma \neq 1$. Vu la proposition 18.1.4 de [Dixm-69], il suffit de vérifier que δ est approchable par des fonctions de type positif associées à π.

Soit F une partie finie de Γ disjointe de $\{1\}$. Soit $(\gamma_j)_{j \geqslant 1}$ une suite comme dans la définition de « fortement cci ». Par hypothèse sur π, nous pouvons choisir un vecteur unité $\xi_0 \in \mathcal{H}_\pi$ tel que

$$\lim_{j \to \infty} \langle \xi_0 | \pi(\gamma_j^{-1} f \gamma_j)\xi_0 \rangle = 0 \qquad \text{pour tout} \quad f \in F$$

car $\gamma_j^{-1} f \gamma_j \neq \gamma_k^{-1} f \gamma_k$ si $j \neq k$. Définissons $\phi_{F,j} : \Gamma \to \mathbf{C}$ par

$$\phi_{F,j}(\gamma) \;=\; \langle \pi(\gamma_j)\xi_0 | \pi(\gamma)\pi(\gamma_j)\xi_0 \rangle.$$

Nous avons donc bien $\lim_{j\to\infty} \phi_{F,j}(f) = \delta(f)$ pour tout $f \in F \cup \{1\}$. □

En d'autres termes, et avec les notations de [Harp-07], si Γ est un groupe cci et si π est une représentation de Γ de classe $(\mathcal{C}_0)$, alors la C*-algèbre réduite $C^*_\lambda(\Gamma)$ est naturellement un quotient de la C*-algèbre $C^*_\pi(\Gamma)$ associée à π.

C'est une question naturelle que de demander dans quel cas, pour un 3-groupe Γ qui est cci, la C*-algèbre réduite $C^*_\lambda(\Gamma)$ est simple. (C'est par exemple toujours le cas si Γ est le groupe fondamental d'une variété hyperbolique close.)

Bibliographie

[BeHa-94] Bekka (M.) et de la Harpe (P.). — Représentations d'un groupe faiblement équivalentes à la représentation régulière, Bull. Soc. math. France 122, p. 333-342 (1994).

[BoMP-03] Boileau (M.), Maillot (S.) et Porti (J.). — Three-dimensional orbifolds and their geometric structures, Panoramas et synthèses 15, Soc. Math. France (2003).

[Bore-60] Borel (A.). — Density properties for certain subgroups of semisimple Lie groups without compact factors, Annals of Math. 72, p. 179-188 (1960) [Oeuvres, volume II, pages 125-134].

[Bowd-04] Bowditch (B.). — Planar groups and the Seifert conjecture, J. reine angew. Math. 576, p. 11-62 (2004).

[Brow-82] Brown (K.S.). — Cohomology of groups, Springer (1982).

[BuMu-70] Burde (G.) et Murasugi (K.). — Links and seifert fiber spaces, Duke Math. J. 37, p. 89-93 (1970).

[Dixm-69] Dixmier (J.). — Les C*-algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars (1969).

[Epst-72] Epstein (D.B.A.). — Periodic flows on 3-manifolds, Annals of Math. 95, p. 66-82 (1972).

[Gaba-92] Gabai (D.). — Convergence groups are Fuchsian groups, Ann. of Math. 136, p. 447-510 (1992).

[Harp-07] de la Harpe (P.). — On simplicity of reduced C*-algebras of groups, Bull. London Math. Soc., 39, p. 1-26 (2007).

[HeWh-94] Heil (W.) et Whitten (W.). — The Seifert fiber space conjecture and torus theorem for non-orientable 3-manifold, Canad. Math. Bull 37(4), p. 482-489 (1994).

[HeJa-72] Hempel (J.) et Jaco (W.). — Fundamental groups of 3-manifolds which are extensions, Annals of Math. 95, p. 86-98 (1972).

[Hemp-76] Hempel (J.). — 3-manifolds, Princeton Univ. Press (1976).

[Hill-87] Hillman (J.A.). — Three-dimensional Poincaré duality groups which are extensions, Math. Z. 195, p. 89-9 (1987).

[Hopf-25] Hopf (H.). — Zum Clifford-Kleinnchen Raumproblem, Math. Ann. 95, p. 340-367 (1925).

[Jaco-77] Jaco (W.). — Lectures on three-manifold topology, CBMS 43, Amer. Math. Soc. (1977).

[JaSh-79] Jaco (W.), Shalen (P.). — Seifert fibre space in 3-manifolds, Memoir 220, Amer. Math. Soc. (1979).

[Mail-03] MAILLOT (S.). — Open 3-manifolds whose fundamental groups have infinite center, and a torus theorem for 3-orbifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 355, p. 4595-4638 (2003).

[Miln-57] MILNOR (J.). — Groups which act on $\mathbf{S}^n$ without fixed points, Amer. J. Math. 79, p. 623-630 (1957) [Collected Papers, Volume 2, pp. 93 et 97-104].

[Mose-71] MOSER (L.). — Elementary surgery along a torus knot, Pacific J. Math. 38 (1971), p. 737-745.

[Neum-54] NEUMANN (B.H.). — Groups covered by permutable subsets, J. London Math. Soc. 29, p. 236-248 (1954).

[PaSa-79] W. PASCHKE (W.), SALINAS (N.). — C^*-algebras associated with the free products of groups , Pacific J. Math. 82, p. 211-221 (1979).

[ROIV] MURRAY (F.J.), VON NEUMANN (J.). — On rings of operators, IV, Annals of Math. 44, p. 716-808 (1943) [Collected Works, Volume III, p. 229-321].

[Rotm-95] ROTMAN (J.J.). — An introduction to the theory of groups, fourth edition, Springer (1995) [First edition 1965].

[Rubi-95] RUBINSTEIN (J.H.). — An algorithm to recognize the 3-sphere, Proc. ICM Zurich 1994 Vol. 1 (Birkhäuser 1995), p. 601-611.

[Saka-71] SAKAI (S.). — C*-algebras and W*-algebras, Springer (1971).

[Sco-83a] SCOTT (P.). — There is no fake Seifert fibre space with infinite π_1, Annals of Math. 117, p. 35-70 (1983).

[Sco-83b] SCOTT (P.). — The geometries of 3-manifolds, Bull. London Math. Soc. 15:5, p. 401-487 (1983).

[SeTh-34] SEIFERT (H.) et THRELFALL (W.). — A textbook of topology, Academic Press (1980) [traduit de : Lehrbuch der Topology, Teubner, 1934].

[Stal-06] STALDER (V.). — Moyennabilité intérieure et extensions HNN, Ann. Inst. Fourier 56, p. 309-323 (2006).

[Swar-73] SWARUP (G.A.). — Projective planes in irreducible 3-manifolds, Math. Z. 132, p. 305-317 (1973).

[Toll-70] TOLLEFSON (J.). — Free involutions on non-prime 3-manifolds, Osaka J. Math. 7, p. 161-164 (1970).

[Toll-78] TOLLEFSON (J.). — Involutions on Seifert fiber spaces, Pacific J. Math. 74, p. 519-529 (1978).

[Whit-92] WHITTEN (W.). — Recognizing non-orientable Seifert Manifolds, J. Knot Theory and its ramifications 1, p. 471-475 (1992).