ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

GABRIEL BIRAME NDIAYE, DOUDOU SAKHIR THIAM

*Intégration par rapport à une multimesure de Radon monotone, à valeurs convexes fermées bornées*

Tome XIX, nº 1 (2010), p. 71-93.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2010_6_19_1_71_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XIX, n° 1, 2010
pp. 71–93

# Intégration par rapport à une multimesure de Radon monotone, à valeurs convexes fermées bornées

Gabriel Birame Ndiaye[1], Doudou Sakhir Thiam[2]

**Résumé.** — Nous introduisons une notion de multimesure de Radon s-compacte, à valeurs convexes fermées bornées, afin de généraliser et d'unifier des résultats établis, pour des multimesures de Radon à valeurs faiblement compactes, par A. Costé, R. Pallu De La Barrière, K. Siggini, D. S. Thiam. Nous présentons l'intégration par rapport à de telles multimesures de Radon ; et démontrons un théorème de correspondance biunivoque, entre les multimesures faibles monotones s-compactes et les multimesures de Radon s-compactes monotones. Nous obtenons aussi un théorème de prolongeabilité, et définissons un espace $\mathsf{L}^{\infty}(I)$. Cela nous a permis d'obtenir des critéres d'intégrabilité, des densités d'un type nouveau, et des techniques de démonstrations plus simples.

**Abstract.** — We introduce a notion of s-compact set-valued Radon measure, with closed convex bounded values, to extend and unify results obtained in the weakly compact case by A. Costé, R. Pallu De La Barrière, D. S. Thiam, K. Siggini. We present integration with respect to such set-valued Radon measures. We prove a one to one correspondence theorem, between s-compact monotones set-valued Radon measures, and s-compact monotones weak set-valued measures, and also an extension theorem. We define a space $\mathsf{L}^{\infty}(I)$ and obtain integrability criteria, densities of new type, simple techniques in the proofs.

(*) Reçu le 12/07/08, accepté le 24/02/09
[1] Département de Mathématiques-Informatique, Université Cheikh Anta Diop, Dakar, BP 5005, Sénégal
gabrielbirame@ucad.sn, gabrielbirame@yahoo.fr
[2] Président Université Dakar Bourguiba, Dakar, BP 15744, Sénégal
sxr@sentoo.sn

## 1. Introduction

Les multimesures ont été le sujet de plusieurs thèses dont celle de C. Godet-Thobie de l'école de C. Castaing, et celles de l'école de Pallu De La Barrière : D. S. Thiam, A. Costé, K. Siggini. Le point de vue des semi-variations a été apporté par Pallu De La Barrière [11]. Tous ces travaux ont été fait pour une multimesure à valeurs faiblement compactes. Nous avons eu le projet d'étudier l'intégration par rapport à une multimesure à valeurs convexes fermées. Cela nous a amené à définir dans [5] la notion de s-compacité qui est l'équivalent multivoque de $\sigma$-finie des mesures scalaires. Nous introduisons ici, la notion de multimesure de Radon s-compacte, et utilisons les résultats obtenus de [5] à [9], pour aborder l'intégration par rapport à une multimesure de Radon, à valeurs convexes fermées bornées. Dans la section 2, nous rappelons des résultats obtenus dans nos papiers précédents. Dans la section 3, Nous établissons un théorème de correspondance biunivoque, entre les multimesures de Radon monotones s-compactes, et les multimesures faibles s-compactes monotones. Nous obtenons aussi un théorème de prolongeabilité. Nous avons donc généralisé, des résultats établis dans le cas compact, par [12], [2], [13], et [11]. Les espaces de fonctions intégrables sont complets. Nous appliquons le concept de I-mesurable à une multimesure de Radon I, et celui de $\mathsf{L}^{\infty}(I)$ que nous avions introduit dans [9], pour une multimesure faible. Nous obtenons ainsi des critères d'intégrabilités, et aussi qu' à toute fonction f de $\mathsf{L}^{\infty}_{+}(I)$, on peut identifier une multimesure de Radon, admettant f comme densité par rapport à I. Dans la section 4, nous comparons avec la méthode de [11]. Dans la section 5, pour une mesure de Radon u, nous unifions les méthodes de [11], [13], [19], et généralisons les théorèmes de convergence de [13]. Dans [13], l'auteur pensait que son espace pouvait contenir strictement celui de [19]. Nous montrons que ces espaces sont les mêmes. Nous prouvons comme dans [19], qu'une fonction u-mesurable, dominée par une fonction intégrable, est intégrable. Nous donnons aussi des exemples de multimesures de Radon, pour lesquelles, l'intégrale d'une fonction peut ne pas être à valeurs faiblement compactes, et donc non intégrables au sens de [13] et de [11]. Ces résultats sont présentés, pour l'essentiel dans [7]. Ceci s'inscrit dans le champ de travaux de [2], [13], [11], [12], [4].

## 2. Notations et préliminaires

On considére E un espace topologique localement convexe séparé non complet, $E^{'}$ son dual topologique. Le crochet de dualité $\langle E, E' \rangle$ est $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pour $A \subset E$, et $y \in E'$, on pose $\delta^{*}(y/A) = \sup\{\langle x, y \rangle : x \in A\}$.

On considère les monoïdes suivants : $(cc(E), +)$ l'ensemble des convexes faiblement compacts de E, $\left(cfb(E), \dot{+}\right)$ celui des convexes fermés bornés non vides, et $\left(cf(E), \dot{+}\right)$ celui des convexes fermés non vides. Si $A, B \in cf(E)$, $\overline{A}$ est l'adhérence de A et, $A \dot{+} B = \overline{(A+B)}$. On désigne par $\overline{co}(A)$, l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble A. La structure uniforme, de ces monoïdes, est celle de Hausdorff [1], et la relation d'ordre l'inclusion. Si O est une famille de parties convexes fermées de E on a :

$$\inf\{A : A \in O\} = \cap\{A : A \in O\}, \text{ et } \sup\{A : A \in O\} = \overline{co} \cup \{A : A \in O\}.$$

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de cf(E). On note : $\overline{\lim} A_n = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \sup\limits_{p \geqslant n} A_n$, et $\underline{\lim} A_n = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \inf\limits_{p \geqslant n} A_n$, au sens de l'ordre dans cf(E). Si en plus, pour $A \in cf(E)$, on a $A = \overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n$, alors A est la limite, au sens de l'ordre, dans cf(E), de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On définit de manière analogue, la limite au sens de l'ordre dans cfb(E), et dans cc(E). On désigne par T un ensemble non vide. Si $f \in \overline{\mathbb{R}}^T$ est une fonction de T dans $\overline{\mathbb{R}}$, on pose : $f^+ = \sup(f, 0)$, et $f^- = \sup(-f, 0)$. A partir de la section 3, T désignera un espace localement compact métrisable séparable, et $K(T)$ l'ensemble des fonctions numériques, définies sur T, continues à supports compacts. Pour $f \in K(T)$, le support de f sera noté : $supp(f) = \overline{\{t \in T : f(t) \neq 0\}}$. Si $A, B \in cfb(E)$, et si E est normé, on désigne par DH(A, B) la distance de Hausdorff. La formule de Hörmander (voir [1], chapitre II) sécrit :

$$DH(A, B) = \sup\{|\delta^*(y/A) - \delta^*(y/B)| : \; y \in E', \|y\| \leqslant 1\}.$$

Soit M: $\Omega \longrightarrow$ cf(E) une multiapplication. On dira que M est une multimesure faible si $\delta^*(y/M(.))$ est une mesure scalaire pour tout y de E' avec M($\emptyset$)= $\{0\}$ : cette notion a été introduite dans [2].

Définition 2.1. — *On considère une multimesure faible M à valeurs dans cf(E).*

(1) *On dit que M est séquentiellement compacte (s-compacte), s'il existe une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $T_n \in \Omega$, croissante vérifiant $\cup_{n \in \mathbb{N}^*} T_n = T$ (on note $T_n \uparrow T$) et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, M(T_n) \in cc(E)$.*

(2) *On dit que M est monotone si on a : $0 \in M(A)$, $\forall A \in \Omega$.*

*Exemple 2.2.* — Soit $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda$ une mesure $\sigma$-finie sur $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$. On considére : $M : \mathbb{B}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow cf(\mathbb{R})$, définie par :

$$M(A) = [0, \lambda(A)], \text{ si } \lambda(A) < +\infty, \text{ et } M(A) = [0, +\infty[, \text{ sinon.}$$

M est une multimesure monotone s-compacte. L'additivité provient de la propriétée de décomposition de Riesz, cf par exemple [13] page 173.

On considère une multimesure faible M à valeurs dans cf(E), et on suppose que M est s-compacte et monotone. On pose : $\Lambda = \{A \in \Omega / M(A) \in cc(E)\}$.

Si h= $\Sigma a_i 1_{A_i}$ est une fonction en escaliers basée sur le clan $\Lambda$, soit $I(h) = \Sigma a_i M(A_i)$, avec h positive. Si on désigne par H l'espace de Riesz des fonctions en escaliers basées sur $\Lambda$, et $H_+ = \{h \in H : h \geqslant 0\}$, alors l'application $I : H_+ \to cc(E)$ est une intégrale de Daniell secondaire : I est additive, monotone i.e. $0 \in I(h)$ pour tout $h \in H_+$, et si $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décoissante de $H_+$, qui converge simplement vers 0, (on note $h_n \downarrow 0$), alors $\inf_{n\in\mathbb{N}^*} I(h_n) = \{0\}$. Ici on désigne par $H^\vee$ (resp $H^\wedge$) l'ensemble des fonctions qui sont limites croissante (resp décroissante) de fonctions de $H_+$. Pour $h_n \uparrow f$, $h_n \in H_+$ et $g_n \downarrow g$, $g_n \in H_+$, on pose : $I^\vee(f) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} I(h_n)$, et $I^\wedge(g) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} I(g_n)$. Si $f \in \overline{\mathbb{R}}_+^T$, on pose : $I^*(f) = \inf\{I^\vee(\psi), \psi \in H^\vee : \psi \geqslant f\}$, si cet ensemble est non vide, sinon on pose $I^\star(f) = E$, et $I_*(f) = \sup\{I^\wedge(\phi), \phi \in H^\wedge, \phi \leqslant f\}$. L'espace des fonctions intégrables pour l'intégrale de Daniell scondaire I est :

$$L_+^1(I) = \{f \in \overline{\mathbb{R}}_+^T, \quad I^*(f) = I_*(f) \in cfb(E)\}.$$

C'est un cône convexe réticulé, voir [5] ou [7]. Si $f \in L_+^1(I)$, on pose $\int fI = I^*(f)$, et on le notera $\int(.)I$ ou I. Elle est additive et positivement homogène. On posera :

$$\text{si } h \in H_+,\ I_y(h) = \delta^*(y, I(h)), \text{ et si } h \in H,\ I_y(h) = I_y(h^+) - I_y(h^-).$$

La proposition 2.3 suivante regoupe dans l'ordre les propositions 7 et 13, puis les théorèmes 6 et 1 que nous avions obtenu dans [5].

PROPOSITION 2.3. — *On considère $f \in \overline{\mathbb{R}}^T$, et y∈E'.*

*(1) On a $(I_y)^*(|f|)=\delta^*(y/I^*(|f|))$.*

*(2) Si $I_*(|f|)\in cfb(E)$, alors on obtient, $(I_y)_*(|f|) = \delta^*(y/I_*(|f|))$.*

*(3) On a aussi $L_+^1(I)= \cap_{y\in E'} L_+^1(I_y)$, et si $f \in L_+^1(I)$ alors,*
*$\delta^*(y/\int fI) = \int f\delta^*(y/I(.))$.*

*(4) Soit$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante de $\overline{\mathbb{R}}_+^T$ on a,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} I^*(f_n) = I^*\left(\sup_{n\in\mathbb{N}^*}(f_n)\right).$$

Dans [5] nous avions obtenu, comme dans [13], les théorèmes de convergences monotones et dominée, au sens de l'ordre, mais cette fois ci, pour une multimesure à valeurs convexes fermées de E, et pour des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Nous appliquons une méthode de [13] pour l'intégrale multivoque, mais cette fois ci dans le cas non compact. Si on pose : $H^* = \{f \in \mathbb{R}^T,\ I^*(|f|) \in cfb(E)\}$, alors $(H^*,+,\leqslant)$ est un sous espace de Riesz de $\mathbb{R}^T$. Soit $V(0)$ l'ensemble des voisinages de 0 dans E. Si $V \in V(0)$, posons : $V^* = \{f \in \mathbb{R}^T,\, I^*(|f|) \subset V\}$. L'ensemble $V^*(0)$ des $V^*$ quand $V \in V(0)$ est une base de filtre de 0 de $H^*$. Nous avons ainsi défini sur $H^*$ une topologie faisant de $H^*$ un espace localement convexe. l'espace $L^1_+(I)$, que nous avons défini dans [5] ou [7], est l'espace des fonctions intégrables pour l'intégrale de Daniell secondaire, où I est l'intégrale associée à la multimesure M. Ainsi, on a : $H_+ \subset L^1_+(I)\ \cap \mathbb{R}^T \subset H^*$. Nous venons donc de munir d'une topologie l'espace $L^1_+(I)\ \cap \mathbb{R}^T$ et ceci n'existait pas dans [13]. Nous en ferons de même pour $L^1_+(I)$. Ces espaces contiennent ceux obtenus par [13], et nous avions montré, à la section 5 de [8], que l'inclusion peut même être stricte.

Dans [13], la sous-additivité de $I^*$ n'étant pas assurée dans cfb(E), cette construction n'était possible que dans cc(E).

Définition 2.4. —

*(i) Une fonction de* $\overline{\mathbb{R}}^T$ *est I-negligeable si* $I^*(|f|) = \{0\}$.

*(ii) Une partie* $A$ *de* $T$ *est I-negligible, si* $1_A$ *est I-negligeable.*

Définition 2.5. — *Soit* $N \subset T$*, un ensemble I-negligeable, une fonction définie sur T-N est une fonction definie I-pp sur T. La relation définie par* $f = g$ *I-pp sur l'ensemble*

$$F(T, \overline{\mathbb{R}}) = \{f \text{ definie I-pp sur } T, \text{ tel que } I^*(|f|) \in cfb(E)\},$$

*est une relation d'équivalence. Si* $\Delta$ *est l'espace quotient de* $F(T, \overline{\mathbb{R}})$ *par la relation I-pp, alors* $\Delta$ *est un espace vectoriel.*

Définition 2.6. — *Nous posons* $\pounds^1_+(I) = \{f \in F(T, \overline{R}), f \geqslant 0, \exists g \in L^1_+(I)$ *tel que* $f = g$ *I-pp*$\}$.

Dans toute la suite, nous supposerons que E est normé, sauf spécification contraire. Soit $f \in F(T, \overline{R})$, si nous posons

$$N_1(f) = sup\{\delta^*(y/I^*(|f|), y \in E', \|y\| \leqslant 1\} = DH[\{0\}, I^*(|f|)],$$

alors $N_1$ est une semi-norme sur $F(T, \overline{R})$, et $N_1(f) = 0$ si et seulement $f = 0$ I-pp.

Définition 2.7. — *Une suite* $(f_n)$ *de* $F(T,\overline{R})$ *converge en moyenne vers* $f$ *si* $\lim\limits_n N_1(f_n - f) = 0$. *La topologie de* $F(T,\overline{R})$ *definie par la semi-norme* $N_1$ *est la topologie de la convergence en moyenne. L'application* $\hat{f} \in \Delta, \hat{f} \mapsto N_1(f)$, *où* $f \in \hat{f}$, *est une norme sur* $\Delta$.

Définition 2.8. — *Nous posons* $\mathsf{L}^1(I)$ *l'adhérence de* $H$ *dans* $F(T, \overline{R})$,

$$\mathsf{L}^1_+(I) = \{f \in \mathsf{L}^1(I), f \geqslant 0\}, \ \ et \ ,$$

$$[\mathbf{B}]_C = \{f \in \mathbf{B}, I(f) \in cc(E)\}, \ \ pour\ \mathbf{B} \subset F(T,\overline{R}).$$

**NB:** Remarquons la différence entre $\mathsf{L}^1_+(I)$ et $L^1_+(I)$.

*Remarque 2.9.* — La topologie de $H^*$ est celle induite par $N_1$.

*Remarque 2.10.* —

(1) On a $[\ell^1_+(I)]_C \subset [L^1_+(I)]_C \cap R^T \subset [L^1_+(I)]_C \subset L^1_+(I) \subset \pounds^1_+(I)$,

(2) et $[\ell^1(I)]_C = \overline{H}$ dans $[H^*]_C$.

(3) Tous les espaces de fonctions intégrables sont réticulés, et en conséquence on a : $\ell^1(I) = \ell^1_+(I) - \ell^1_+(I)$ et $L^1(I) = L^1_+(I) - L^1_+(I)$.

Si E est complet, cc(E) est fermé dans cfb(E), dans ce cas on a $[\ell^1(I)]_C = \ell^1(I)$ et $[\mathsf{L}^1(I)]_C = \mathsf{L}^1(I)$ où $[\mathsf{L}^1(I)]_C = \overline{H}$ dans $[F(T,\overline{R})]_C$.

Théorème 2.11. — *On suppose que E est normé.*

*(1) L'espace* $\pounds^1_+(I)$ *(resp.* $\mathsf{L}^1(I)$*) est complet pour la topologie de la convergence en moyenne.*

*(2) Si* $(f_n)_{n\in N}$ *est une suite de* $\pounds^1_+(I)$ *(resp.* $\mathsf{L}^1(I)$*) qui converge en moyenne vers f, alors* $(f_n)_{n\in N}$ *posséde une sous-suite qui converge I-pp vers f.*

*Les fonctions de* $\mathsf{L}^1(I)$ *et de* $\ell^1(I)$ *sont donc I-mesurables.*

Théorème 2.12. —

*(1) Si* $(f_n)_{n\in N^*}$ *est une suite croissante I-pp de* $\pounds^1_+(I)$*, s'il existe* $g \in F(T,\overline{R})$ *telle que* $f_n \leqslant g$ *I-pp pour tout* $n \in N^*$*, et si on a* $I^*(g) \in cfb(E)$*, alors* $\sup\limits_{n\in N^*} f_n \in \pounds^1_+(I)$ *et* $\displaystyle\int (\sup_{n\in N^*} f_n)I = \sup_{n\in N^*} \int f_n I.$

*(2) Si* $(f_n)_{n\in N^*}$ *est une suite décroissante I-pp de* $\pounds^1_+(I)$*, alors* $\inf_{n\in N^*} f_n \in \pounds^1_+(I)$ *et* $\int (\inf_{n\in N^*} f_n)I = \inf_{n\in N^*}\int f_nI$.

*(3) Si* $(f_n)_{n\in N^*}$ *est une suite de* $\pounds^1_+(I)$*, s'il existe* $g \in F(T,\overline{R})$ *telle que* $f_n \leqslant g$ *I-pp pour tout* $n \in N^*$*, avec* $I^*(g) \in cfb(E)$*, et si* $(f_n)_{n\in N^*}$ *converge simplement vers* $f$ *I-pp, alors* $f \in \pounds^1_+(I)$ *et* $\int fI = \lim_{n\to+\infty}\int f_nI$ *au sens de l'ordre dans cfb(E).*

THÉORÈME 2.13. —

*(1) Si* $(f_n)_{n\in N^*}$ *est une suite croissante I-pp de* $\pounds^1_+(I)$*, si* $f = \sup_{n\in N^*} f_n$ *et S'il existe* $g \in F(T,\overline{R})$ *telle que* $f_n \leqslant g$ *I-pp pour tout* $n \in N^*$*, et si* $I^*(g) \in cc(E)$ *alors* $f \in [\pounds^1_+(I)]_C$ *et* $(f_n)_{n\in N^*}$ *converge en moyenne vers* $f$*.*

*(2) Si* $(f_n)_{n\in N^*}$ *est une suite décroissante I-pp de* $[\pounds^1_+(I)]_C$*, et si* $f = \inf_{n\in N^*} f_n$*, alors :* $f \in [\pounds^1_+(I)]_C$ *et* $(f_n)_{n\in N^*}$ *converge en moyenne vers* $f$*.*

*(3) Si* $(f_n)_{n\in N^*}$ *est une suite de* $[\pounds^1_+(I)]_C$*, qui converge simplement I-pp vers une fonction* $f$*, s'il existe* $g \in F(T,\overline{R})$ *telle que* $|f_n| \leqslant g$ *I-pp pour tout* $n \in N^*$*, et si* $I^*(g) \in cc(E)$*, alors* $f \in [\pounds^1_+(I)]_C$ *et* $(f_n)_{n\in N^*}$ *converge en moyenne vers* $f$*. Dans les trois cas on a* $\lim_{n\to+\infty}\int f_nI = \int fI$ *pour la topologie de cc(E).*

COROLLAIRE 2.14. — *Si* $(f_n)_{n\in N^*}$ *est une suite de* $\mathsf{L}^1(I)$*, qui converge I-pp vers* $f$*, s'il existe* $g \in \mathsf{L}^1_+(I)$ *telle que* $\int gI \in cc(E)$ *et* $|f_n| \leqslant g$ *I-pp pour tout* $n \in N^*$*, alors* $f \in \mathsf{L}^1(I)$ *et* $\int fI = \lim_{n\to+\infty}\int f_nI$ *au sens de la topologie de Hausdorff de cc(E), et* $(f_n)_{n\in N^*}$ *converge en moyenne vers* $f$*.*

DÉFINITION 2.15. —

*(1) Une fonction définie I-presque-partout (I-pp) sur T, à valeurs dans* $\overline{R}$*, est I-mesurable, si elle est limite I-pp d'une suite de H.*

*(2) Une partie A de T est I-mesurable si* $1_A$ *est I-mesurable.*

DÉFINITION 2.16. — *Soit f définie I-pp sur T, nous désignons par M(f), la I-borne supérieure de f :* $M(f) = \inf\{\alpha \in \overline{R}, f \leqslant \alpha 1_T \text{ I-pp }\}$.

Définition 2.17. —

(1) *La topologie de la convergence presque uniforme, définie par la semi-norme $N_\infty(f) = M(|f|)$, est celle de*

$$\mathsf{L}^\infty(I) = \{f \text{ definie } I\text{-pp}, f\ I\text{-mesurable}, M(|f|) < +\infty\}.$$

(2) *L'espace quotient $\mathsf{L}^{(\infty)}(I)$ a la topologie definie par la norme $\|\bar{f}\| = N_\infty(f)$, $f \in \bar{f}$. C'est un espace de Banach.*

Théorème 2.18. —

(1) *Si $f$ est I-mesurable positive, et si $I^*(f) \in cfb(E)$, alors on a : $f \in \mathcal{L}^1_+(I)$.*

(2) *Si $f$ est I-mesurable et si $I^*(|f|) \in cc(E)$, alors $f \in \mathsf{L}^1(I)$.*

La proposition 2.19 suivante regroupe dans l'ordre, les propositions 3.5 et 3.8 de [9].

Proposition 2.19. —

(1) *Si $(f_n)_{n\in N^*}$ est une suite de fonctions I-mesurables qui converge I-pp vers $f$, alors $f$ est I-mesurable.*

(2) *Soient $f$ et $g$ deux fonctions I-mesurables alors $fg$ est I-mesurable.*

Théorème 2.20. — *(Théorème de caractérisation de Lebesgue)*

(1) *Soit $f$ définie I-pp sur $T$ à valeurs dans $\overline{R}$ une fonction I-mesurable. Pour tout $\alpha \in R$, les ensembles suivants sont I-mesurables : $\{t \in T, f(t) < \alpha\} = \{f < \alpha\}, \{f > \alpha\}, \{f \leqslant \alpha\}, \{f \geqslant \alpha\}$.*

(2) *Réciproquement, si pour tout $\alpha \in R$, $\{f < \alpha\}$ est I-mesurable, resp. $\{f > \alpha\}$, resp. $\{f \leqslant \alpha\}$, resp. $\{f \geqslant \alpha\}$, alors $f$ est I-mesurable.*

Nous rappellons la propriétée suivante : si $(C_n)_{n\in N^*}$ est une suite décroissante de cc(E), alors pour tout $y \in E'$ on a :

$$\inf_{n\in N^*} \delta^*(y/C_n) = \delta^*(y/\inf_{n\in N^*} C_n) \tag{2.1}$$

Dans la remarque 2.21 suivante, nous allons essayer de situer la position du problème.

*Remarque 2.21.* — Nous avons expoxé, ci-avant, deux approches de [13]. Cependant pour assurer par exemple la sous-additivité de $I^*$ : $I^*(f_1+f_2) \subset I^*(f_1)\dot{+}I^*(f_2)$, il fallait supposer que $I^*(f_1) \in cc(E)$, $I^*(f_2) \in cc(E)$. En effet, cette sous-additivitée est basée sur la propriétée 2.1. Or dans cfb(E), cette propriétée ne subsiste plus : à la page 78 de [13], on peut trouver un contre- exemple, communiqué par le professeur Michel Valadier. Donc dans cfb(E), la construction s'effondre. C'est pourquoi, pour une multimesure faible à valeurs dans cfb(E), [13] a utilisé une autre approche : une fonction $f \in R_+^T$ est M-intégrable, si elle est limite croissante d'une suite de $H_+$, et si $I^*(f) \in cfb(E)$. Si maintenant la multimesure est à valeurs dans cf(E), comme dans l'exemple 2.2, que peut on faire ? L'exemple 2.2 nous a suggéré la notion de séquentielle compacité (s-compact). Elle nous a permis de maintenir l'édifice, et d'obtenir, en particulier, dans [5], les différents résultats résumés dans la proposition 2.3, dans [8], les théorèmes 2.11, 2.12, 2.13, et le corollaire 2.14.

De plus l'intégrale d'une fonction peut être à valeurs dans cfb(E), et non plus seulement dans cc(E), comme dans [11] ou [13] : nous avons, dans [8], donné des exemples de multimesures, pour lesquelles, l'intégrale d'une fonction était à valeur dans cfb(E), et non plus dans cc(E). De telles fonctions ne sont pas intégrables au sens de [11], ni de [13], mais le sont suivant nos définitions. D'autre part, la notion de négligeable, que nous avons introduit dans [8], n'existait pas dans [5], ni dans [13]. Tous les résultats obtenus Dans [13], le sont essentiellement, pour des fonctions définies sur T à valeurs dans $R$, et en supposant que tout se passe dans cc(E). Ici les fonctions sont définies I-pp sur T, à valeurs dans $\overline{R}$. Au total, on a eu dans [13], trois méthodes différentes d'intégration. Le lien entre ces méthodes n'avait pas encore été établi, à notre connaissance : dans [8] et [9], nous avons établi le lien entre ces méthodes, et avons également établi la corrélation avec la méthode de [11]. La notion de M-mesurabilitée, que nous avons introduit, dans [9], nous a permis d'obtenir, dans le théorème 2.18, des critères d'intégrabilité, identiques à ceux pour une mesure scalaire positive, et dans le théorème 2.20, un théorème de caractérisation de Lebesgue des fonctions M-mesurables, comme dans le cas scalaire.

Dans [13], et [11], l'Intégration par rapport à une multimesure de Radon monotone à valeurs dans cc(E), a été abordé, avec deux méthodes différentes. Dans cet article, nous étudions l'Intégration par rapport à une multimesure de Radon monotone à valeurs dans cfb(E), en nous inspirant de la méthodes de [13]. Pour cela, nous introduisons la notion de multimesure de Radon s-compacte. Nous comparons ensuite avec la méthode de [11].

## 3. Intégration par rapport à une multimesure de Radon s-compacte monotone

DÉFINITION 3.1. —

(1) *La fonction multivoque, $I : K_+(T) \to cf(E)$, est s-compacte, s'il existe une suite croissante $(h_n)_{n\in N}$ de $K_+(T)$, qui converge simplement vers $1_T$, ce que l'on note ($h_n \uparrow 1_T$), telle que, pour tout $n \in N$, $I(h_n) \in cc(E)$.*

(2) *I est monotone si $0 \in I(f)$, pour tout $f \in K_+(T)$.*

(3) *Dans tout ce qui suit, $(h_n)_{n\in N}$ sera comme dans la definition 3.1.*

Les propositions 3.2 et 3.4 suivantes ont été démontrées dans [13], pour I à valeurs dans cc(E) et T compact. Leurs preuves ne nécessitent pas que E soit normé.

PROPOSITION 3.2. — *Soit $I : K_+(T) \to cfb(E)$ une fonction additive monotone, s-compacte . si $(f_\alpha), \alpha \in A$ est une famille filtrante décroissante de $K_+(T)$, qui converge simplement vers 0, alors $[I(f_\alpha)]$ converge vers 0, pour la topologie de Hausdorff de cfb(E).*

*Preuve.* — On applique une méthode de [13]. Soit $\beta \in$A, $\forall\alpha \geqslant \beta$, $0 \leqslant f_\alpha \leqslant f_\beta$, si on désigne par supp(g) le support de g, on a $\text{supp}(f_\alpha) \subset \text{supp}(f_\beta)$ = K. D'après le théorème de Dini, $(h_n)$ converge uniformément vers $1_T$ sur le compact K i.e. :

$$\forall\epsilon_1 > 0,\ \exists p,\ \forall n,\ n > p,\ 1 - \epsilon_1 < h_n(t) < 1, \forall\ t \in K, \text{ avec } \epsilon_1 < 1.$$

Soit $n_0 > p$ , on a $\inf_{t\in K} h_{n_0}(t) \geqslant 1 - \epsilon_1 > 0$. Soit V un voisinage de 0 de E, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon\mathrm{I}(h_{n_0}) \subset$ V car $\mathrm{I}(h_{n_0})$ est borné. En appliquant Dini sur K, il existe $\alpha_0 > \beta$ tel que

$$\forall\alpha > \alpha_0,\ 0 \leqslant f_\alpha(t) \leqslant \epsilon \inf_{t\in K} h_{n_0}(t),$$

d'où $0 \leqslant f_\alpha(t) \leqslant \epsilon h_{n_0}(t) \forall t \in$ K. Cette inégalité est vraie aussi si $t \notin$ K, on obtient :

$$\forall\alpha > \alpha_0,\ 0 \leqslant f_\alpha \leqslant \epsilon h_{n_0}.$$

Ceci donnerais, $\mathrm{I}(f_\alpha) \subset I(\epsilon h_{n_0}) = \epsilon\mathrm{I}(h_{n_0})$, si nous avions la dernière égalité :

Montrons donc que $\mathrm{I}(\epsilon h_{n_0}) = \epsilon\mathrm{I}(h_{n_0})$. Soit

$$X = \{f \in K(T), \exists n \geqslant 1, \exists M > 0, |f| \leqslant M h_n\},$$

X est un sous-espace de Riesz de $K$(T) et I restreint à X est à valeurs dans

$$cc_+(E) = \{A \in cc(E)/0 \in A\}.$$

Donc d'après la proposition 0.1 page 12 de [13], I restreint à X est homogène. □

DÉFINITION 3.3. — *On suppose que* $K_+(T)$ *est muni de la topologie limite inductive et cfb(E) de la topologie de Hausdorff.*

*Une multimesure de Radon est une application I :* $K_+(T) \rightarrow$ *cfb(E) additive, positivement homogène et continue.*

PROPOSITION 3.4. — *Toute application additive, monotone et s-compacte, I :* $K_+(T) \rightarrow$ *cfb(E) est une multimesure de Radon.*

*Preuve.* — Si on pose

$$H = \{f \in K(T),\ I(|f|) \in cc(E)\},$$

alors H est un sous-espace de Riesz de $K$(T).

$$\text{Soit } I_1 : H_+ \rightarrow cc(E),\ I_1(f) = I(f),$$

d'après la proposition 3.2 ou III-1-1 de [7], $I_1$ est une intégrale de Daniell secondaire. On peut donc construire les espaces $L^1_+(I_1)$, $\mathcal{L}^1_+(I_1)$, $\ell^1(I_1)$, $\mathsf{L}^1(I_1)$ et ces espaces sont complets pour la topologie de la convergence en moyenne d'après le théorème 2.11, i.e. II-1-2 de [7] ou 4.7 de [8]. Montrons que $K_+$(T)$\subset H^\vee$. Soit alors $f \in K_+$(T), on a $fh_n \in H$ et $fh_n \uparrow f$. De plus, vu que $f = (f - fh_n) + fh_n$, alors on obtient $I(f) = I(f - fh_n) + I(fh_n)$. On a I($fh_n$ )= $I_1(fh_n) \subset I_1^\vee(f)$ et (f-$fh_n$)$\downarrow$ 0. On en déduit d'après la proposition 3.2, que $\lim\limits_{n \rightarrow +\infty} I(f - fh_n) = 0$, pour la topologie de Hausdorff. On obtient alors que $I(f) \subset I_1^\vee(f) = \sup\limits_n I(fh_n)$. D'autre part $I_1(fh_n) = I(fh_n) \subset$I(f) car I est croissante. On en déduit que :

$K_+(T) \subset H^\vee$ et si $f \in K_+(T)$, $I(f) = I_1(f) = \sup\limits_n I(fh_n)$. Soient K un compact de T et $f \in K(T)$ tel que supp(f)$\subset$K, en posant $\|f\|_u = \sup\limits_{t \in T} |f(t)|$ on obtient $|f| \leqslant \|f\|_u(\varphi_K)$ où $\varphi_K \in K$(T) $\varphi_K(t) \in [0,1]$ pour tout $t \in T$ avec $\varphi_K(t) = 1$ si $t \in K$. On en déduit que $I(|f|) \subset \|f\|_u I(\varphi_K)$. Soient p une semi-norme continue sur E, on considère B(p) = { x $\in$E , p(x) $\leqslant$ 1 }, et $B^0$ (p) sa polaire. Si on pose

$$M_K = \sup\{\delta^*(y, I(\varphi_K), y \in\ B^0(p)\}$$

on a : $\sup\{\delta^*(y, I(|f|)), y \in\ B^0(p)\} \leqslant M_K \|f\|_u$.

On en déduit que I est continue. □

Proposition 3.5. —

*(1) Les espaces $L^1_+(I_1), \mathcal{L}^1_+(I_1), \ell^1(I_1), \mathsf{L}^1(I_1)$, sont complets pour la topologie de la convergence en moyenne, d'après le théorème 2.11, ou II-1-2 de [7], ou 4.7 de [8].*

*(2) Si E est complet alors I est à valeurs faiblement compactes.*

*(3) (i) La topologie limite inductive de K(T), est plus fine que la topologie induite sur K(T) par $H^*$ ou $F(T,\overline{R})$, i.e. la topologie de la convergence en moyenne.*

*(ii) On a $K_+(T) \subset \ell^1(I_1)$ , $H_+ \subset K_+(T) \subset H^\vee$ et $H^\vee = [K_+(T)]^\vee$. L'intégrale $\int(.)I_1$ prolonge I.*

*(iii) Si $K_+(T)$ est muni de $N_1$, l'application I est uniformément continue car $\int(.)I_1$ l'est.*

*Preuve.* — Par la preuve de la proposition 3.2, si f$\in$ $K_+$(T), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} I(f - fh_n)$ =0 et $\lim\limits_{n\to+\infty} I(fh_n) = I(f)$, pour la topologie de Hausdorff de cfb(E). Or I$(fh_n)$ $\in$ cc(E) , de plus d'après la proposition 2 page I-15 de [10] voir aussi [6], si E est complet cc(E) est fermé dans cfb(E). On en déduit que I(f) $\in$ cc(E). Si E est normé, on peut définir la topologie de la convergence en moyenne par la semi-norme $N_1$, et aussi l'espace $\mathsf{L}^\infty(I_1)$. On a d'après la preuve de la proposition 3.4, si K est un compact de T et si $f \in K(T)$ est tel que supp(f )$\subset$ K, alors en posant $\|f\|_u = \sup\limits_{t\in T} |f(t)|$, on obtient $N_1$(f) $\leqslant \|f\|_u N_1(\varphi_K)$, où $\varphi_K \in K(T)$, $\varphi_K(t) \in [0,1]$, avec $\varphi_K(t) = 1$ si $t \in K$. On obtient donc que la topologie limite inductive sur $K(T)$, est plus fine que celle induite sur $\mathsf{K}(T)$, par la topologie de la convergence en moyenne.

Preuve de (3), (iii) : Soient $f, f' \in \mathcal{L}^1_+(I_1)$ , vu que $I_1(f) \subset I_1(f') + I_1(|f-f'|)$ et $I_1(f') \subset I_1(f) + I_1(|f-f'|$ alors on a : $\forall y \in E'$, $\delta^*(y/I_1(f)) \leqslant \delta^*(y/I_1(f')) + \delta^*(y/I_1(|f-f'|))$ et $\delta^*(y/I_1(f')) \leqslant \delta^*(y/I_1(f)) + \delta^*(y/I_1(|f-f'|)$. Ainsi on a : $\forall y \in E'$, $|\delta^*(y/I_1(f)) - \delta^*(y/I_1(f'))| \leqslant \delta^*(y/I_1(|f-f'|))$. On en déduit : $DH(I_1(f), I_1(f')) \leqslant N_1(f-f')$, d'où le résultat. □

De cette preuve, nous déduisons la remarque suivante.

*Remarque 3.6.* —

(1) Si $f \in K_+(T)$, on a : $\lim_{n\to+\infty} I(f - fh_n) = 0$, et $\lim_{n\to+\infty} I(fh_n) = I(f)$, pour la topologie de Hausdorff de cfb(E).

(2) Soit K un compact de T, et $f \in K(T)$ tel que supp(f)⊂K, on a :

$$N_1(f) \leqslant \|f\|_u N_1(\varphi_K), \text{ où, } \varphi_K \in K(T),$$

$$\varphi_K(t) \in [0,1] \forall t \in T, \text{ avec, } \varphi_K(t) = 1 \text{ si } t \in K.$$

Proposition 3.7. —

*(1) Si on prend les adhérences dans $H^*$ on a :*

$$K_+(T) \subset \ell^1_+(I_1) = \overline{K_+(T)} \subset L^1_+(I_1) \subset \mathcal{L}^1_+(I_1), \text{ et}$$

$$K(T) \subset \ell^1(I_1) = \overline{K(T)}.$$

*(2) De même si on prend les adhérences dans $F(T,\overline{R})$ on a :*

$$K_+(T) \subset \mathsf{L}^1_+(I_1) = \overline{K_+(T)}, \text{ et}$$

$$K(T) \subset \mathsf{L}^1(I_1) = \overline{K(T)}.$$

*Preuve.* — Nous posons $[\overline{A}]_F$ = adhérence de A dans F. Nous avons

$$K_+(T) \subset \ell^1_+(I_1) \subset [\overline{K_+(T)}]_{H^*} \subset [\overline{K_+(T)}]_{F(T,\bar{R})},$$

donc $\ell^1_+(I_1) = [\overline{K_+(T)}]_{H^*}$ et $\mathsf{L}^1_+(I_1) = [\overline{K_+(T)}]_{F(T,\overline{R})}$, de plus

$$K(T) \subset \ell^1(I_1) \subset [\overline{K(T)}]_{H^*},$$

d'où $\ell^1(I_1) = [\overline{K(T)}]_{H^*}$ . On a aussi K(T) $\subset \mathsf{L}^1(I_1) \subset [\overline{K(T)}]_{F(T,\overline{R})}$. On en déduit que $\mathsf{L}^1(I_1) = [\overline{K(T)}]_{F(T,\overline{R})}$. □

Proposition 3.8. — *On a $K(T) \subset \mathsf{L}^\infty(I_1)$, et la topologie limite inductive est plus fine que celle induite sur K(T) par $\mathsf{L}^\infty(I_1)$. De plus si f ∈K(T), alors : $N_\infty(f) \leqslant \|f\|_u$ et il existe $k >$ 0 tel que $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.*

*Preuve.* — Soit K un compact de T et f ∈ K(T) tel que supp(f)⊂ K. L'inégalité, $|f| \leqslant \|f\|_u$ donne $N_\infty(f) \leqslant \|f\|_u$. De plus on a $|f| \leqslant N_\infty(f)\varphi_K I_1 - pp$, on en déduit $N_1(f) \leqslant N_\infty(f)N_1(\varphi_K)$. Si on prend k $\geqslant N_1(\varphi_K) > 0$, on obtient l'inégalité, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$. □

Du théorème 2.18, nous déduisons le théorème 3.9 suivant.

THÉORÈME 3.9. — *Nous avons les critères d'intégrabilités suivants :*

*(1) Si $f$ est $I_1$-mesurable positive, et si de plus $(I_1)^*(f) \in cfb(E)$, alors on a, $f \in \mathcal{L}^1_+(I_1)$.*

*(2) Si $f$ est $I_1 -$ mesurable, et si $(I_1)^*(|f|) \in cc(E)$, alors $f \in \mathsf{L}^1(I_1)$.*

PROPOSITION 3.10. — *Soit $f \in \mathsf{L}^\infty_+(I_1)$, telle que $f \neq 0$ $I_1$-pp.*

*(1) Si on pose pour $g \in K_+(T)$, $J(g) = \int fgI_1$, $J$ est alors une multimesure de Radon monotone s-compacte et $J(g) \subset N_\infty(f)I_1(g)$.*

*(2) Si $g \in \mathsf{L}^1(I_1)$, alors on a $g \in \mathsf{L}^1(J)$ et, $\int gJ = \int fgI_1$.*

*(3) Si $g \in \mathsf{L}^1(J)$, alors on a $fg \in \mathsf{L}^1(I_1)$, et $\int fgI_1 = \int gJ$*

*(4) Si $f_1, f_2 \in \mathsf{L}^\infty_+(I_1)$, avec $f_1$ et $f_2$ non nulles $I_1$-pp, et si pour tout $h \in K_+(T)$, $\int hf_1I_1 = \int hf_2I_1$, alors $f_1 = f_2$ $I_1$-pp.*

*Cela signifie, que l'on peut identifier à $f$ de $\mathsf{L}^\infty_+(I_1)$, la multimesure de Radon $h \to \int hfI_1$, $h \in K_+(T)$, qui admet $f$ comme densitée par rapport à $I_1$.*

*Preuve.* —

*Preuve de* (1) : La fonction fg est $I_1$-mesurable et $fg \leqslant N_\infty(f)g$ $I_1$-pp. On en déduit, en utilisant les critères du théorème 3.9 (1), que fg est $I_1$-intégrable, et donc J est bien définie. Avec la proposition 3.4, on a le résultat.

*Preuve de* (2) : Si $g \in \mathsf{L}^1_+(I_1)$, d'après le théorème 2.11 , il existe $(g_n)$, telle que $g_n \in H_+$, $g_n \to g$ dans $\mathsf{L}^1_+(I_1)$, et $g_n \to g$ $I_1$-pp. La suite $(g_n)$ est une suite de Cauchy de $\mathsf{L}^1(I_1)$, et vu que l'on a : Si g $\in \bar{R}^T_+$ , alors $J^*(g) \subset N_\infty(f)I^*_1(g)$, on déduit que $(g_n)$ est une suite de Cauchy de $\mathsf{L}^1(J)$, et $g_n \to g$ J-pp. D'où, d'apès le théorème 2.11, $(g_n)$ converge (en moyenne) vers g dans $\mathsf{L}^1(J)$ . On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int g_nJ = \int gJ, \textit{ dans } cfb(E).$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \int g_nJ = \lim_{n\to+\infty} \int g_nfI_1,$$

de plus $(g_nf)$ est une suite de Cauchy de $\mathsf{L}^1(I_1)$, et $(g_nf) \to fg$ $I_1$-pp, d'où $g_nf \to fg$ dans $\mathsf{L}^1(I_1)$ . On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \int g_nfI_1 = \int fgI_1$. Si $g \in \mathsf{L}^1(I_1)$ , on pose $g = g^+ - g^-$ .

*Preuve.* (3) ? : On a :

$$J^*(g) = \inf\{\ J^\vee(\psi), \psi \in H^\vee, \psi \geqslant g\}\ = \inf\{\ I_1^\vee(f\psi), \psi \in H^\vee, \psi \geqslant g\}\ .$$

Comme $I_1^*(fg) \subset I_1^*(\psi f)$, on a $I_1^*(fg) \subset J^*(g)$. Si $A \subset T$ est J-négligeable, alors A est I-négligeable car

$$J^*(1_A) = 0 \Rightarrow I_1^*(1_A f) = 0 \Rightarrow 1_A f = 0\ I_1 - pp,$$

d'où : $1_A = 0 I_1$-pp.

Si g est une fonction de $K$(T), on a $\int gJ = \int fgI_1$. Vu que $K$(T) est dense dans $\mathsf{L}^1(J)$, Si $g \in \mathsf{L}^1(J)$, il existe $(g_n)$ une suite de $K$(T) qui converge vers g dans $\mathsf{L}^1(J)$, et donc $(g_n)$ est une suite de Cauchy de $\mathsf{L}^1(J)$. D'après le théorème 2.11, on peut choisir la suite $(g_n)$ telle qu'elle converge J-pp vers g. On a alors, $\int |g_n f - g_m f| I_1 = \int |g_n - g_m| J$, i.e. $(g_n f)$ est une suite de Cauchy de $\mathsf{L}^1(I_1)$. Donc il existe $h \in \mathsf{L}^1(I_1)$, tel que $\int g_n f I$ converge vers $\int h I_1$ dans cfb(E), et $(g_n f)$ tends vers h $I_1$-pp. Or $(g_n)$ converge vers g J-pp, donc $(g_n f)$tends vers gf J-pp . On en déduit que $(g_n f)$ tends vers gf $I_1$-pp, et donc $h = fg\ \ I_1$-pp. On a alors :

$$gf \in \mathsf{L}^1(I_1) \text{ et } \int hI_1 = \int fgI_1\ ,$$

on obtient donc que :

$$\int gJ = \lim_{n\to+\infty} \int g_n J = \lim_{n\to+\infty} \int fg_n I_1 = \int fgI_1.$$

*Preuve* (4) ? :
Si on Pose A = { t∈T, tel que $f_1(t) \geqslant f_2(t)$ } , on a alors $|f_1 - f_2| 1_A + f_2 1_A = f_1 1_A$. On en déduit pour tout $h \in K_+$(T) :

$$\int h|f_1 - f_2| 1_A I_1 + \int h f_2 1_A I_1 = \int f_1 1_A I_1 \tag{3.4}$$

De plus soit $J_i(h) = \int hf_i I_1$ , $h \in K$(T) avec i= 1,2. Soit $g = h1_A$, on a $g \in \mathsf{L}^1_+(J)$ d'après l'assertion (3) de la proposition 3.10, $\int gJ_i = \int gf_i I_1$. Or $J_1 = J_2$, par hypothèse, donc $\int gf_1 I_1 = \int gf_2 I_1$, ie, $\int hf_1 1_A I_1 = \int hf_2 1_A I_1$, $\forall h \in K$(T). Avec l'équation 3.4, on a $\forall y \in E', \delta^*(y/\int h|f_1 - f_2|1_A I_1) = 0$, i.e. $\int h|f_1 - f_2|1_A I_1$ =0 . On en déduit que $h|f_1 - f_2|1_A = 0\ I_1$-pp. On a alors, par symétrie : $|f_1 - f_2|1_A = |f_1 - f_2|1_{A^C} = 0\ \ I_1$-pp. Vu que $|f_1 - f_2| = |f_1 - f_2|1_A + |f_1 - f_2|1_{A^C}\ \ I_1$-pp, on a $f_1 = f_2\ \ I_1$-pp . □

*Remarque 3.11.* — Le théorème 3.12 suivant est un théorème de Riesz multivoque. Il est à rapprocher du théorème 3-7 de [12], obtenu dans le cas compact.

La preuve du théorème 3.12, utilise des techniques nouvelles dans la théorie de l'intégration multivoque. Nous travaillons ici comme si nous avions une mesure scalaire positive.

Théorème 3.12. — *Il existe une bijection définie par I(f) =* $\int fM$, $f \in K_+(T)$ *entre les multimesures faibles monotones s-compactes, définies sur le clan* $\Omega$ *engendré par les compacts de T, et les multimesures de Radon monotones s-compactes à valeurs dans cfb(E). On a* $\mathcal{L}^1_+(I) = \mathcal{L}^1_+(M)$, $\mathsf{L}^1(I) = \mathsf{L}^1(M)$, *et si* $f \in \mathcal{L}^1_+(I)$ *ou* $\mathsf{L}^1(I)$, *alors* $\int fM = \int fI$.

*Preuve.* — Soit M : $\Omega \to$ cfb(E) une multimesure faible monotone s-compacte. D'après [3] corollaire 2 page 299, si f $\in K$(T) il existe une suite $(f_n)$ de $\Omega$-fonctions en escaliers nulles en dehors de supp(f) et convergeant uniformément vers f sur T. On a donc que $K(\mathrm{T}) \subset \mathsf{L}^\infty(I)$, où I ou $\int(.)I$ est le prolongement à $\mathsf{L}^1(I)$ ou $\mathcal{L}^1_+(I)$, de l'intégrale de Daniell secondaire,

I(h) = $\Sigma a_i M(A_i)$, avec h = $\Sigma a_i 1_{A_i}$ est une fonction en escaliers, $A_i \in \Omega$.

Montrons que $K_+(\mathrm{T}) \subset \mathcal{L}^1_+(I)$ :

Si f $\in K_+$(T), alors f est I-mesurable. Posons K=supp(f), alors on a $|f| \leqslant \|f\|_u \varphi_K \in \mathcal{L}^1_+(I)$ : voir la remarque 3.6. Avec le théorème 3.9, ou II-3-1 de [7], on obtient que $f \in \mathcal{L}^1_+(I)$.

De plus I : ( $K_+$(T) , $N_1$ ) $\to$ cfb(E) est continue d'après la proposition 3.5, assertion (3),(iii). Donc en remplaçant $N_1$ par la topologie limite inductive plus fine (cf proposition 3.5, assertion (3),(i)), on a : I : $K_+(\mathrm{T}) \to$ cfb(E) est encore continue, et donc est une multimesure de Radon. On a M(A) = $\int 1_A I$, $A \in \Omega$ ou encore I(f) = $\int fM$, $f \in K_+(T)$ est une multimesure de Radon s-compacte car $\varphi_{K_n} \uparrow 1_T$ où $(K_n)$ est une suite croissante de compacts, dont la réunion est T. On obtient $\mathcal{L}^1_+(I) = \mathcal{L}^1_+(M)$, et si $f \in \mathcal{L}^1_+(I)$ ou $\mathsf{L}^1(I) = \mathsf{L}^1(M)$, alors $\int fM = \int fI$.

*Réciproquement :* Soit I une multimesure de Radon et soit K un compact de T, il existe $\varphi_K \in K_+(T)$, tel que $0 \leqslant 1_K \leqslant \varphi_K$. Comme T est un espace localement compact métrisable séparable, on en déduit que $(1_K)$ est I-mesurable et $0 \leqslant 1_K \leqslant \varphi_K \in L^1_+(I)$. D'après le théorème 3.9, $K \in$ J = { A $\subset$ T , $1_A \in L^1_+$(I) }. Or d'après le théorème 2.12 de la convergence monotone, J est un $\delta$ - clan, on a donc que $\Omega \subset$ J et M(A) = $\int 1_A I$ est une multimesure faible monotone, toujours d'après théorème 2.12. On a donc $I(f) = \int fM$, si $f \in K_+(T)$. On obtient $\mathcal{L}^1_+(I) = \mathcal{L}^1_+(M)$ , $\mathsf{L}^1(I) = \mathsf{L}^1(M)$, et si $f \in \mathcal{L}^1_+(I)$ ou $\mathsf{L}^1(I) = \mathsf{L}^1(M)$, $\int fI = \int fM$. □

THÉORÈME 3.13. — *Soit I une multimesure de Radon monotone s-compacte, il existe, d'après le théorème 3.12, une multimesure monotone M qui lui correspond.*

*(1) Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(i) Il existe $K_n \in \Omega$ , $K_n \uparrow T$ tel que $\sup_n M(K_n) \in$ cfb(E) ou il existe $h_n \uparrow 1_T, h_n \in K_+(T)$ tel que $\sup_n I(h_n) \in cfb(E)$.*

*(ii) Si B(T) est la tribu Borélienne, et si nous posons $J = \{A \subset T, 1_A \in L^1_+(I)\}$, alors $B(T) \subset J$.*

*(iii) Si $f \in \overline{R}^T$ est sci positive bornée, alors $f \in L^1_+(I)$.*

*(2) Si E est un Banach, les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a) Il existe $K_n \in \Omega$ , $K_n \uparrow T$ tel que $\sup_n M(K_n) \in$ cc(E) ou il existe $h_n \uparrow 1_T, h_n \in K_+(T)$ tel que $\sup_n I(h_n) \in$ cc(E).*

*(b) $\forall A \in B(T)$ , $1_A \in \ell^1(I)$.*

*(c) Si f est sci borné à support compact alors $f \in \ell^1(I)$.*

*Preuve.* — D'après le théorème 2.12 de la convergence monotone, J est une tribu si et seulement si (i) est vrai. On applique ensuite les critères d'intégrabilités du théorème 3.9, en remarquant que ces fonctions sont I-mesurables. Il est à remarquer que dans le (2), nous sommes dans le cas compact. □

*Remarque 3.14.* — On dit que I est prolongeable si toute fonction borélienne bornée à support compact est I-intégrable. Une multimesure de Radon monotone s-compacte est donc prolongeable. Les multimesures de Radon prolongeables ont été caractérisées dans le cas compact par [2], [13], [11].

## 4. Comparaison avec l'intégration par rapport à une semi-norme de riesz

Soit I : $K_+$(T) → cfb(E) une multimesure de Radon monotone s-compacte. Comme dans [12] page III-1, posons :

$$\nu(f) = \sup\{\delta^*(y, I(|f|), \|y\| \leqslant 1, y \in E'\},\ f \in K(T).$$

Soit J l'ensemble des fonctions de $\bar{R}^T$, qui sont enveloppe supérieure de fonctions de $K_+(T)$, et soit $J_\sigma$ l'ensemble des fonctions qui sont limites de suites croissantes de fonctions de $K_+(T)$, nous avons $J_\sigma = H^\vee = [K_+(T)]^\vee$. Vu que T est localement compact métrisable et séparable, alors $J = J_\sigma$. Posons alors

$$\nu_1(g) = \sup\{\nu(h), h \in H, h \leqslant g\}, \text{ si } g \in H^\vee.$$

Si $g_n \in K_+(T)$ est tel que $g_n \uparrow g$, on obtient d'après le lemme 1-4 page I-2 de [12] : $\nu_1(g) = \sup_n \nu(g_n)$. Si $f \in R_+^T$, nous posons,

$$\nu^*(f) = inf\{\nu_1(g), g \in H^\vee, g \geqslant f\},\ F_\nu = \{f \in R^T, \nu^*(|f|) < +\infty\} \text{ et,}$$

$$\ell^1(\nu) = \text{ adhérence de } K(T) \text{ dans } F_\nu,$$

pour la topologie définie par la semi-norme $\nu^*$. Le prolongement de $\nu_1$ à $R_+^T$ est $\nu^*$. Si h $\in K_+(T)$, on a $\nu(h) = N_1(h)$, où $N_1$ est la semi-norme de la convergence en moyenne. La semi-norme $\nu$ est équivalente à celle de [11] : cf proposition XIV.9 page 188.

Proposition 4.1. —

*(1) Si $g \in [K_+(T)]^\vee$, alors $\nu_1(g) = N_1(g)$.*

*(2) Si $f \in R_+^T$, $\nu^*(f) \geqslant N_1(f)$.*

*(3) On a, $F_\nu \subset H^*$, et $\ell^1(\nu) \subset \ell^1(I_1)$.*

*Preuve.* — Si $g \in [K_+(T)]^\vee$, il existe une suite $(g_n)_{n\in N}$, telle que $g_n \uparrow g$. Si $I^\vee(g) \in cfb(E)$, on a : $\nu_1(g) = \sup_n \nu(g_n) = \sup_n N_1(g_n) =$

$$\sup\{\sup_n \delta^*(y, I(g_n), \|y\| \leqslant 1, y \in E'\} =$$

$$\sup\{\delta^*(y, I^\vee(g)), \|y\| \leqslant 1, y \in E'\} = N_1(g).$$

Si $I^\vee(g) \notin cfb(E)$, on a $\nu_1(g) = +\infty$, et en posant $N_1(g) = +\infty$, on obtient $\nu_1(g) = N_1(g)$. Si $g \in H^\vee$ et $g \geqslant f$, alors $N_1(g) \geqslant N_1(f)$, et donc

$$\nu^*(f) = \inf\{N_1(g), g \in H^\vee, g \geqslant f\} \geqslant N_1(f).$$

Si $f \in F_\nu$, on a $N_1(f) < +\infty$ et $I^*(|f|) \in cfb(E)$. On obtient alors $F_\nu \subset H^*$. De plus vu que la topologie définie par $\nu^*$, est plus fine que celle induite sur $F_\nu$ par $N_1$. On en déduit que $[\overline{K(T)}]_{\nu^*} \subset [\overline{K(T)}]_{N_1}$ dans $F_\nu$, ie $\ell^1(\nu) \subset [\overline{K(T)}]_{N_1} \cap F_\nu$ dans $H^*$, ou encore que $\ell^1(\nu) \subset \ell^1(I_1) \cap F_\nu \subset \ell^1(I_1]$.
□

Si $(f_n)_{n\in N}$ est une suite de $K_+(T)$ qui converge vers f dans $\ell^1_+(\nu)$, alors on a :
$\lim_{n\to+\infty} N_1(f_n - f)) = 0$, et donc $\lim_{n\to+\infty} I(f_n) = I_1^*(f) = \displaystyle\int fI_1$. On a alors la définition suivante, voir cependant la remarque 4.4.

Définition 4.2. — *Si $f \in \ell^1_+(\nu)$, alors il existe une suite $(f_n)_{n\in N}$ de $K_+(T)$, qui converge vers f dans $\ell^1_+(\nu)$. On pose $\int fI_\nu = \lim_{n\to+\infty} I(f_n)$ dans cfb(E). Si $f \in \ell^1(\nu)$, on pose $\int fI_\nu = \int f^+I_\nu \dot{+} (-\int f^-I_\nu)$.*

Proposition 4.3. — *Si $f \in \ell^1(\nu)$, alors $\int fI_\nu = \int fI_1$.*

*Preuve.* — Si $(f_n)_{n\in N}$ converge vers f dans $\ell^1_+(\nu)$, alors $\nu^*(|f_n - f|)$ converge vers 0. D'où $N_1(f_n - f)$ converge vers 0, i.e. $(f_n)_{n\in N}$ converge vers f dans $\ell^1_+(I_1)$, et I$(f_n)$ converge vers $\int fI_1$ dans cfb(E) ; donc $\int fI_\nu = \int fI_1$. Si f $\in \ell^1(\nu)$, on a $\int fI_\nu = \int f^+I_\nu \dot{+} (-\int f^-I_\nu) = \int fI_1$. □

*Remarque 4.4.* — Si $(f_n)_{n\in N}$ est une suite de $K_+(T)$ qui converge vers f dans $\ell^1_+(\nu)$, alors on a : $\lim_{n\to+\infty} N_1(f_n - f)) = 0$, et donc $\lim_{n\to+\infty} I(f_n) = I_1^*(f) = \displaystyle\int fI_1$. Cela nous a permis d'avoir la définition 4.2. Dans la méthode de [11], si E n'est pas complet, pour T compact, il se pose le problème du prolongement par continuité de l'intégrale, qui peut se retrouver dans $cfb(E^{'*})$, où $E^{'*}$ est le complété faible de $E^{'}$ : cf définition XIV.13 [11], page 190. Ici $N_1$ est définie à partir de $I^*$, ce qui permet de ne pas supposer E complet, de ne pas séparer l'intégrabilité d'avec le prolongement de l'intégrale, et de ne pas perdre le lien avec l'espace E où tout prend ses valeurs.

## 5. Integration par rapport a une mesure de Radon vectorielle faiblement compacte

Nous supposons que E est un espace de Banach. Soit $C_0(T)$ l'ensemble des fonctions continues nulles à l'infini. Soit u : $K(T) \to E$, une mesure de Radon faiblement compacte, i.e. qui transforme la boule unitée de $C_0(T)$, en un sous ensemble relativement faiblement compact de E. Comme dans [13] page 155, si on pose

$$M_u(f) = \overline{\{u(g),\, g \in K(T),\, |g| \leqslant f\}} \text{ avec } f \in K_+(T), \text{ alors}$$

$M_u$ : $K_+(T) \to$ cc(E) est une intégrale de Daniell, et $M_u$ est s-compacte. On obtient $\delta^*(y, M_u(f)) = |u_y|(f)$ où $|u_y|$ est la valeur absolue de la mesure de Radon scalaire $u_y$ definie par :

$$u_y(g) =< u(g), y >, g \in K(T).$$

Définition 5.1. — *Nous posons,* $\ell^1(u) = \ell^1(M_u)$ *et* $\mathsf{L}^1(u) = \mathsf{L}^1(M_u)$.

La restriction de u à $K_+(T)$ est une section, ou selection de $M_u$, donc on a $u : K_+(T) \to cc(E)$ est uniformément continue, si $K_+(T)$ est muni de la topologie induite par $H^*$ ou F(T, $\bar{R}$, i.e. $N_1$, et cc(E) de celle de Hausdorff, car $M_u$ est uniformément continue, d'après la proposition 3.5, (3), (iii). On Désigne par u, le prolongement par continuité de u à l'espace $\mathsf{L}^1(M_u)$ : on se mettra dans l'espace de Banach $\mathsf{L}^{(1)}(M_u)$, où $\mathsf{L}^{(1)}(M_u)$ est l'espace quotient par la relation $M_u$-pp. Si $f \in \mathsf{L}^1(M_u)$, on pose : $u(f) = \int fu = \int f^+u - \int f^-u$. De [19] chapitre 1 page 66, ou [13] page 160 on tire la définition suivante.

Définition 5.2. — *On pose*

*(1)* $u^{\cdot}(g) = \sup\{\|u(h)\|, |h| \leqslant g, h \in K(T)\}$,
*si* $g \in H^{\vee} = [K_+(T)]^{\vee}$,

*(2)* $u^{\cdot}(f) = \inf\{u^{\cdot}(g), g \geqslant f, g \in H^{\vee}\}$, *si* $f \in \overline{R}^T_+$, *et supp(f) est compact,*

*(3) et* $u^{\cdot}(f) = \sup\ \{u^{\cdot}(g), g \geqslant f, g \in \bar{R}^T_+$, *et supp(g) est compact* $\}$, *si* $f \in \overline{R}^T_+$.

Proposition 5.3. —

*(1) Si* $f \in H^{\vee}$, *on a* $N_1(f) = u^{\cdot}(f)$.

*(2) Si* $f \in \overline{R}^T$, *on a* $N_1(f) \leqslant u^{\cdot}(|f|)$.

*Preuve.* — Si $f \in H^{\vee}$, alors d'après le lemme 1.4 de [19], nous avons $N_1(f) = u^{\cdot}(f)$. Si $f \in \overline{R}^T_+$, et supp(f) est compact,

$$\delta^*(y, I^*(f)) = \inf\{\delta^*(y, I^{\vee}(g)), g \geqslant f, g \in H^{\vee}\} = (I_y)^*(f) \text{ et,}$$

$$\begin{aligned} N_1(f) &= \sup_{\|y\|\leqslant 1} \inf\{\delta^*(y, I^{\vee}(g)), g \geqslant f, g \in H^{\vee}\} \\ &\leqslant \inf \sup_{\|y\|\leqslant 1} \{\delta^*(y, I^{\vee}(g)), g \geqslant f, g \in H^{\vee}\} \\ &\leqslant \{u^{\cdot}(g), g \geqslant f, g \in H^{\vee}\} = u^{\cdot}(f). \end{aligned}$$

Si $f \in \overline{R}^T_+$, et si $(h_n)$ est une suite de $K_+(T)$, telle que $h_n \uparrow 1_T$, avec $I(h_n) \in cc(E)$, alors on a

$$N_1(f) = \sup_n N_1(fh_n) \leqslant \sup_n u^{\cdot}(fh_n) = u^{\cdot}(f).$$

Si $f \in \bar{R}^T$, on a $N_1(f) = N_1(|f|) \leqslant u^{\cdot}(|f|)$. $\square$

*Remarque 5.4.* —

(1) *Si $A \subset T$ est u-negligeable, alors $A$ est $M_u$-negligeable.*

(2) *Si $f$ est définie u-pp sur $T$, alors $f$ l'est $M_u$-pp.*

(3) *Si $f$ est u-mesurable, alors $f$ est $M_u$-mesurable.*

(4) *Le théorème 5.5, ci-après, est une version presque partout des théorèmes de convergences 6-1, et 6-2 pages 157-158 de [13].*

Théorème 5.5. — *Soit $(f_n)$ une suite de $\mathsf{L}^1(M_u)$ qui converge $M_u$-pp vers f. S'il existe $g \in [F(T, \overline{R})]_C$, i.e. $I^*(g) \in cc(E)$, tel que $|f_n| \leqslant g$, $M_u$-pp, pour tout $n \in N^*$, alors $f \in \mathsf{L}^1(M_u)$, et $f_n$ converge en moyenne vers $f$ dans $\mathsf{L}^1(M_u)$. On a alors $u(f) = \lim_{n \to +\infty} u(f_n)$, et $\lim_{n \to +\infty} u(|f_n - f|) = 0$.*

*Preuve.* — On applique le corollaire 2.14, à la multimesure $M_u$. On obtient alors que $f \in \mathsf{L}^1(M_u)$, et $f_n$ converge en moyenne vers f dans $\mathsf{L}^1(M_u)$. La mesure de Radon vectorielle u, est une sélection de $M_u$, son prolongement u, par continuité à $\mathsf{L}^1(M_u)$ vérifie : $u(f) = \lim_{n \to +\infty} u(f_n)$, et $\lim_{n \to +\infty} u(|f_n - f|) = 0$. □

*Remarque 5.6.* — On désigne par $L^1_+(M_u)$ l'espace obtenu pour l'intégrale de Daniell secondaire $M_u$.

(1) On a $\ell^1(u^\cdot) \subset \ell^1(M_u) \subset \mathsf{L}^1(M_u)$.

(2) L'espace $\ell^1(u^\cdot)$ est celui obtenu par [19], ou [11].

(3) L'espace $\ell^1(M_u)$ est celui obtenu par [13], et on a $\ell^1_+(M_u) \subset L^1_+(M_u)$.

(4) L'espace $\mathsf{L}^1(M_u)$ est celui que nous avons obtenu : c'est l'espace des fonctions intégrables, definies $M_u$-pp sur T, à valeurs dans $\overline{R}$.

(5) D'après la proposition 1-28, page 83, de [19], $\cap_{y \in E'} L^1_+(|u_y|) = \ell^1_+(u^\cdot)$. D'après le théorème 6 de [5], nous avons $L^1_+(M_u) = \cap_{y \in E'} L^1_+(|u_y|)$. Nous obtenons donc, que les espaces de [11], [13] et [19] coïncident. Dans [13], seule l'inclusion, $\ell^1(u^\cdot) \subset \ell^1(M_u)$ avait été établie, et l'auteur pensait que l'inclusion pouvait être stricte. Cela n'est pas le cas.

Théorème 5.7. — *Soit $f$ une fonction définie u-pp sur $T$ à valeurs dans $\overline{R}$. Si $f$ est u-mesurable, et s'il existe $g$ tel que $|f| \leqslant g$ u-pp, avec $I^*(g) \in cc(E)$, par exemple $g$ u-integrable, alors $f$ est u-integrable.*

*Preuve.* — D'après le théorème 3.9, on a : une fonction $M_u$-mesurable dominée par une fonction intégrable est intégrable. On a donc le résultat. □

*Remarque 5.8. — Le théorème 5.7 est à comparer au théorème 1.22 page 74 de [19].*

*Remarque 5.9.* — Dans [8], section 5, nous avions donné des exemples de multimesures pour lesquelles, l'intégrale d'une fonction pouvait être dans cfb(E) et non dans cc(E). Si à de telles multimesures, nous identifions des multimesures de Radon, grâce au théorème 3.12, nous obtenons des multimesures de Radon, pour lesquelles l' intégrale d'une fonction peut être dans cfb(E) et non cc(E). De telles fonctions ne sont pas alors intégrables au sens de [11], et [13].

Pour des references concernant le Professeur D. S. Thiam, on pourra consulter [14], [15], [16], [17], et [18].

## Bibliographie


[1] Castaing (C.), Valadier (M.). — Convex Analysis and Measurable Multifunctions, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 580, p. 37-50 (1977).

[2] Costé (A.). — Contribution à la théorie de l'intégration multivoque, thèse d'état, Paris 6, (1977).

[3] Dinculeanu (N.). — Vector Measures, Pergamon Press Veb-Berlin, Vol. 95, §. 8, p. 119 (1967).

[4] Godet-Thobie (C.). — Multimesures et multimesures de transition. thèse d'état, Montpellier, (1975).

[5] Ndiaye (G. B.). — Intégration par rapport à une multimesure s-compacte monotone, Journal des sciences - Dakar, Vol. 3 (2003), no. 1, p. 44-50. http://www.ucadjds.org/

[6] Ndiaye (G. B.). — Prolongeabilité et richesse d'une multimesure s-compacte à valeurs convexes fermées bornées, conditions de compacitée, Journal des sciences - Dakar, Vol. 3 (2003), no. 2, p. 51-55. http://www.ucadjds.org/

[7] Ndiaye (G. B.). — Multimesures et multimesures de Radon séquentiellement compactes, thèse d'état, u. c. a. d., Dakar, (2004).

[8] Ndiaye (G. B.). — L'intégration par rapport à une multimesure, monotone et s-compacte, à valeurs convexes fermées : African Diaspora Journal of Mathematics (ADJM), vol. 6, no 1, p. 13-30 (2008).

[9] Ndiaye (G. B.). — M-mesurabilité, par rapport à une multimesure M, à valeurs convexes fermées, et densité univoque d' une multimesure. À paraître dans Boletin de la Asociation Matematica Venezolana (BAMV).

[10] Pallu De La Barrière (R.). — Une alternative au théorème de Banach-Dieudonné, Seminaire d'analyse convexe, Montpellier, vol. II, fascicule I, Exposé no. 1, I.1-I.19 (1981).

[11] Pallu De La Barrière (R.). — Intégration : Un nouvel itinéraire d'initiation à l'analyse mathématique, Ellipses, Paris (1997).

[12] Siggini (K.). — Sur les proriétées de régularité des mesures vectorielles et multivoques sur des espaces topologiques généraux, thèse de doctorat, Paris 6, (1992).

[13] Thiam (D. S.). — Intégration dans les espaces ordonnés et intégration multivoque, thèse d'état, Paris 6, (1976).

[14] Thiam (D. S.). — Multimesures positives. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 280, Ai, A993-A995 (1975).

[15] Thiam (D. S.). — Intégrale de Daniell à valeurs dans un semi-goupe ordonné. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 281,no. 5-8, Aii, A215-A218 (1975).

[16] Thiam (D. S.). — Applications à l'intégration multivoque, de l'intégrale de Daniell à valeurs dans un semi-groupe ordonné. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 281, no. 22, Ai, A955-A958 (1975).

[17] Thiam (D. S.). — Intégrales multivoques monotones. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 282, no. 5, Ai A263-A265 (1976).

[18] Thiam (D. S.). — Applications à l'intégration multivoque, de l'intégrale de Daniell à valeurs dans un monoïde. Intégration vectorielle et multivoque (Colloq. Univ. Caen, 1975), Expo. no. 7, 35 pp. Dép. Math., U. E. R. Sci., Univ. Caen, (1975).

[19] Thomas (E.). — L'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle Ann. Inst. Fourrier , vol. 20, p. 55-191 (1970).