ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

Xavier Thirion

Groupes de Ping-Pong et comptage

Tome XIX, n° 1 (2010), p. 135-190.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2010_6_19_1_135_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XIX, n° 1, 2010
pp. 135–230

Groupes de Ping-Pong et comptage

Xavier Thirion[1]

Résumé. — Dans cet article, nous étudions les propriétés asymptotiques d'une large classe de sous-groupe discrets du groupe linéaire réel : les groupes de Ping-Pong. Nous décrivons leur action sur l'espace projectif réel et le comportement à l'infini de leur fonction de comptage.

Abstract. — In this paper, we study the asymptotic properties of a large class of discrete subgroups of the real linear group, called the Ping-Pong groups. We describe their action on the real projective space and the behavior at infinity of their counting function.

1. Introduction

L'étude des sous-groupes discrets d'isométries des espaces symétriques de type non compact est un domaine de recherche très actif, en quête constante de nouveaux exemples explicites. Contrairement à ce qui se passe en rang 1, on dispose en rang supérieur ou égal à 2 de peu d'exemples de tels sous-groupes discrets, puisque seuls les réseaux ou les groupes de Schottky ont fait l'objet d'études précises (voir par exemple [Esk-McMul], [Duk-Rud-Sar], [Bar] et [Qui1]), répondant en particulier à un critère dit de « généricité » introduit par P. Albuquerque dans [Alb].

Il est intéressant de souligner un phénomène de rigidité en rang supérieur ou égal à 2, qui amène une restriction de facto à l'existence de tels sous-groupes. Dans un travail récent [Quint2], J.-F. Quint a montré que les seuls sous-groupes discrets convexes co-compacts (en un sens qu'il précise) d'un groupe de Lie linéaire réel simple et de rang $\geqslant 2$ sont les réseaux uniformes ;

(*) Reçu le 23/10/08, accepté le 02/12/08
(1) LAGA, Institut Galilée, Université Paris 13, 93 430 Villetaneuse
xthirion@math.univ-paris13.fr

le contraste est donc grand avec le rang 1, la classe des groupes convexes cocompacts de l'espace hyperbolique étant par exemple très vaste et contenant, loin s'en faut, beaucoup plus de groupes que les seuls réseaux uniformes ou les groupes de Schottky.

Nous considérons dans cet article une vaste classe de sous-groupes discrets du groupe linéaire de $\mathbb{R}^d$, appelés « groupes de Ping-Pong » ; ces groupes peuvent en particulier contenir des transformations unipotentes ce qui les distingue de façon significative des seuls groupes de Schottky. La présence d'éléments unipotents apporte toute une série de difficultés dans l'étude de l'action du groupe sur l'espace projectif, qui n'est plus orbitalement équivalente à celle d'un sous-shift de type fini sur un espace symbolique fini ; la mise en oeuvre des outils du formalisme thermodynamique ne se fait plus de façon directe comme dans le cas des groupes de Schottky (voir [Pol-Sha] et [Qui1]).

Présentons maintenant les résultats principaux de cet article.

Nous fixons un nombre entier $d \geqslant 1$, nous munissons $\mathbb{R}^d$ du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$, nous notons $\|\cdot\|$ la norme associée et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Nous munissons l'espace $\mathrm{End}\left(\mathbb{R}^d\right)$ des endomorphismes de $\mathbb{R}^d$ de la norme $\|.\|$ définie par :

$$\forall f \in \mathrm{End}\left(\mathbb{R}^d\right) \quad \|f\| = \sup\{\|f(x)\| / x \in \mathbb{R}^d, \|x\| = 1\}.$$

De plus, nous notons G le groupe des automorphismes linéaires de $\mathbb{R}^d$.

Nous nous intéressons à l'action projective des éléments de G et munissons pour ce faire l'espace projectif $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ de la distance canonique δ, définie par la formule (2.1) de la page 140 et appelée parfois « distance de Fubini-Study ». Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, on notera $\mathbf{x}$ l'élément de $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ qui lui est associé.

Rappelons qu'un automorphisme g de $\mathbb{R}^d$ est dit proximal s'il possède une unique valeur propre λ_g de module maximal et si de plus cette valeur propre est simple. Notons alors que

- la valeur propre λ_g appartient à $\mathbb{R}$
- si x_g un vecteur propre de g associé à λ_g et X_g l'unique hyperplan g-invariant de $\mathbb{R}^d$ tel que $X_g \oplus \mathbb{R}\, x_g = \mathbb{R}^d$, la suite $(g^n \cdot \mathbf{x})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{x}_g$ pour tout $\mathbf{x} \notin \mathbb{P}(X_g)$.

Les transformations proximales de $\mathbb{R}^d$ sont donc « contractantes », au sens suivant :

Définition 1.1. — *Un automorphisme g de $\mathbb{R}^d$ est dit* **contractant** *sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ s'il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ et un sous-espace vectoriel propre $X \subset \mathbb{R}^d$ tels que, pour tout $\mathbf{y} \notin \mathbb{P}(X)$, la suite $\left(g^n \cdot \mathbf{y}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{x}$.*

Remarquons d'emblée que l'élément $\mathbf{x}$ qui apparaît dans cette définition est unique : on le notera par la suite $\mathbf{x}_g$ et on dira que $\mathbf{x}_g$ est la **droite attractive** de g. Remarquons également qu'il existe des automorphismes de $\mathbb{R}^d$ qui sont contractants sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ et non proximaux, nous dirons qu'ils sont **quasi-proximaux** sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$. On peut par exemple considérer certains automorphismes unipotents de G ; en effet, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$$

définie un automorphisme g de $\mathbb{R}^d$ contractant sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, la suite $\left(g^n \cdot \mathbf{x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{e}_1$.

Dans cet article, nous caractérisons les éléments de G qui sont contractants sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Cela nous permet d'associer à chaque automorphisme g de $\mathbb{R}^d$ contractant sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ un unique hyperplan X_g de $\mathbb{R}^d$, appelé **hyperplan répulsif**, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus X_g$, on ait $\lim_{n\to+\infty} g^n \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}_g$.

C'est essentiellement la propriété de contraction sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ décrite ci-dessus des automorphismes proximaux qu'utilisent Y. Benoist [Ben] ou M. Pollicott et R. Sharp [Pol-Sha] pour construire des groupes de Schottky. Ainsi, à l'instar de la construction des produits Schottky de groupes discrets kleiniens (voir par exemple [Pei]), il est possible de considérer des sous-groupes discrets de G, de type Schottky, mais contenant des transformations non proximales. L'étude du comportement asymptotique des fonctions de comptage de ces groupes nécessite cependant de « quantifier » la notion de transformation contractante ; nous proposons la

Définition 1.2. — *Soit g une transformation contractante sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Pour tout $\epsilon \in]0,1[$, on pose*

$$\mathbf{b}_g^\epsilon := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right) / \delta\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}_g\right) \leqslant \epsilon\right\} \quad et \quad \mathbf{B}_g^\epsilon := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right) / \delta\left(\mathbf{x}, \mathbb{P}\left(X_g\right)\right) \geqslant \epsilon\right\}.$$

L'automorphisme g est dit **ϵ-contractant** *sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

- $g^n\left(\mathbf{B}_g^\epsilon\right) \subset \mathbf{b}_g^\epsilon$.

- *la restriction de g^n à $\mathbf{B}_g^\epsilon$ est lipschitzienne, de constante de lipschitz $\leqslant \epsilon$.*

Nous disposons à présent de tous les outils nécessaires pour construire de nouveaux sous-groupes discrets de G ; nous avons la

DÉFINITION 1.3. — *Soit ϵ un réel strictement positif. Une partie symétrique $\mathcal{A} := \{a_1^{\pm 1}, \ldots, a_N^{\pm 1}\}$, avec $N \geqslant 2$, de G formée de transformations ϵ-contractantes sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ est dite en position* **ϵ-Ping-Pong** *si :*

- *l'ensemble $\mathbf{B}_\Gamma := \bigcap_{g \in \mathcal{A}} \mathbf{B}_g^\epsilon$ est non vide.*
- *pour tous $g, h \in \mathcal{A}$ tels que $g \neq h^{\pm 1}$, l'ensemble $\mathbf{b}_g^\epsilon$ est contenu dans l'intérieur de $\mathbf{B}_h^\epsilon$.*
- *pour tous $g, h \in \mathcal{A}$ tels que $g \neq h^{\pm 1}$ on a $\mathbf{b}_g^\epsilon \cap \mathbf{b}_h^\epsilon = \emptyset$.*

Le sous-groupe de G engendré par une partie $\mathcal{A}$ en position **ϵ-Ping-Pong** *est appelé* **groupe ϵ-Ping-Pong** *sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ engendré par $\mathcal{A}$.*

Dans ce qui suit, Γ désigne un groupe ϵ-Ping-Pong contenant des transformations quasi-proximales et l'on fixe un élément x_0 de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{B}_\Gamma$. Nous étudions le comportement asymptotique des fonctions de comptage

$$N_\Gamma(x_0, R) := \mathrm{Card}\{\gamma \in \Gamma / \|\gamma(x_0)\| \leqslant R\}$$

et

$$N_\Gamma(R) := \mathrm{Card}\{\gamma \in \Gamma / \|\gamma\| \leqslant R\}.$$

Nous donnons tout d'abord un critère simple, portant sur les générateurs de Γ, qui assure que son exposant critique

$$\tau := \limsup_{R \to +\infty} \frac{\log \mathrm{Card}\{\gamma \in \Gamma / \|\gamma\| \leqslant R\}}{R}$$

est fini.

Nous pouvons alors préciser le comportement asymptotique de la fonction $N_\Gamma(x_0, \cdot)$. Rappelons que, suivant la terminologie employée par [Con-Gui], un sous-groupe discret H de G vérifie l'hypothèse d'irréductible s'il n'existe pas de sous-espace propre de $\mathbb{R}^d$ qui soit invariant par H. Nous avons le

THÉORÈME 1.4. — *Soit Γ un sous-groupe de G engendré par une partie $\mathcal{A}$ en position ϵ-Ping-Pong sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$, d'exposant critique τ fini et vérifiant* *l'hypothèse d'irréductibilité. Si on suppose que* Γ *contient une transformation non proximale alors, pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ *tel que* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{B}_\Gamma$*, il existe* $C = C(\Gamma, x_0) > 0$ *tel que*

$$\mathrm{Card}\{\gamma \in \Gamma / \|\gamma(x_0)\| \leqslant R\} \sim C\, R^\tau$$

lorsque $R \to +\infty$.

Notons que le cas où tous les éléments de Γ sont proximaux a déjà été étudié par M. Pollicott et R. Sharp dans [Pol-Sha], sous une hypothèse technique supplémentaire, dite de non-arithmicité, portant sur les rayons spectraux des éléments de Γ ; cette hypothèse n'est plus nécessaire lorsque Γ contient une transformation non proximale, nous renvoyons le lecteur au paragraphe 5 pour plus de détails.

Quant au comportement asymptotique de la fonction $N_\Gamma(\cdot)$, nous démontrons le

THÉORÈME 1.5. — *Soit* Γ *un sous-groupe de* G *engendré par une partie* $\mathcal{A}$ *en position* ϵ*-Ping-Pong sur* $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ *d'exposant critique* τ *fini et vérifiant l'hypothèse d'irréductibilité. On suppose que les transformations de* $\mathcal{A}$ *sont, soit proximales, soit contractantes sur* $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ *et unipotentes. Il existe alors une constante* $C = C(\Gamma) > 0$ *telle que*

$$\mathrm{Card}\{\gamma \in \Gamma / \|\gamma\| \leqslant R\} \sim C\, R^\tau$$

lorsque $R \to +\infty$.

La principale propriété des groupes de Ping-Pong sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ que nous utilisons ici est que leur ensemble limite peut être codé par un alphabet infini dénombrable. Ceci nous permet d'introduire une famille d'opérateurs de Ruelle, dont il est possible de décrire le spectre en restriction à certains espaces fonctionnels adaptés ; cette description est une étape essentielle dans l'étude de la série de Poincaré associée à ces groupes.

Il est important de souligner que les seuls générateurs non proximaux que nous considérons dans le dernier théorème sont unipotents ; cette restriction est nécessaire pour minorer la taille des cylindres associés au codage de l'ensemble limite, avec une borne comparable à leur diamètre ; cette propriété, que nous appelons non distorsion, est établie dans le paragraphe 6.1 et intervient de façon essentielle dans la démonstration du théorème 1.5.

2. Préliminaires

On identifie l'espace des matrices carrées d'ordre d avec l'espace $\mathrm{End}\left(\mathbb{R}^d\right)$ des endomorphismes de $\mathbb{R}^d$ et on note I l'application identité sur $\mathbb{R}^d$.

Nous notons $\bigwedge^2\mathbb{R}^d$ le carré extérieur de $\mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle_2$ défini pour $x_1 \wedge x_2,\ y_1 \wedge y_2 \in \bigwedge^2\mathbb{R}^d$ par

$$\langle x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2 \rangle_2 = \langle x_1, y_1 \rangle \langle x_2, y_2 \rangle - \langle x_1, y_2 \rangle \langle x_2, y_1 \rangle.$$

Nous notons $\|.\|_2$ la norme sur $\bigwedge^2\mathbb{R}^d$ associée à $\langle .,. \rangle_2$ et $\mathrm{End}\left(\bigwedge^2\mathbb{R}^d\right)$ l'espace des endomorphismes de $\bigwedge^2\mathbb{R}^d$ muni de la norme canonique $\|.\|$ associée à $\|.\|_2$.

Pour tout $g \in G$, nous notons $\bigwedge^2 g$ l'automorphisme de $\bigwedge^2\mathbb{R}^d$ défini par :

$$\forall x \wedge y \in \bigwedge^2\mathbb{R}^d \qquad \left(\bigwedge^2 g\right)(x \wedge y) := g(x) \wedge g(y).$$

Nous munissons enfin l'espace projectif de $\mathbb{R}^d$, noté $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$, de la distance naturelle δ, dite de « Fubini-Study », définie par

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right) \qquad \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\|x \wedge y\|_2}{\|x\| \, \|y\|}, \tag{2.1}$$

où x et y sont respectivement des représentants de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$. Notons pour finir que G opère de façon naturelle sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

2.1. Décomposition de Cartan de G et transformations unipotentes

Le groupe G des matrices inversibles possède des sous-groupes remarquables qui joueront un rôle important par la suite. Nous noterons ainsi

- A le sous-groupe de G constitué des matrices diagonales à coefficients strictement positifs.
- K le sous-groupe de G constitué des matrices orthogonales.

Ces sous-groupes permettent de décomposer G. En effet, nous avons la

Définition-Théorème 2.1. — *Toute matrice g de G se décompose sous la forme $g = k\,a(g)\,l$ avec :*

- $k, l \in K$.

- $a(g) = diag\ (a_1(g), \ldots, a_d(g)) \in A$ *et* $a_1(g) \geqslant \ldots \geqslant a_d(g) > 0$.

Une telle décomposition est appelée **décomposition de Cartan** *de* g.

Un automorphisme linéaire g est dit **unipotent** s'il se décompose sous la forme $g = I + u$ où u est un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^d$; l'indice de nilpotence de u, c'est-à-dire le plus petit entier $\nu \leqslant d$ tel que $u^\nu = 0$, est aussi appelé **indice** de g. De façon équivalent, g est unipotent s'il existe un endomorphisme nilpotent v de $\mathbb{R}^d$ tel que $g = \exp(v)$. On a $u = \exp(v) - I = \sum_{k=1}^{d-1} \frac{v^k}{k!}$ et réciproquement $v = \ln(I+u) = -\sum_{k=1}^{d-1} \frac{(-u)^k}{k}$. De ces expressions, on déduit que les endomorphismes nilpotents u et v ont le même indice et que $\ker u^n = \ker v^n$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Introduisons alors la

Définition 2.2. — *Soit g un endomorphisme unipotent de $\mathbb{R}^d$ et $\nu = \nu(g)$ son indice ; on appelle* **ultime noyau** *de g le sous-espace vectoriel* $ker\left(u^{\nu-1}\right)$.

2.2. Sur l'action projective des éléments de G

On considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^d$, on note $\mathrm{Spect}(g)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de g (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de g vu comme application linéaire de $\mathbb{C}^d$) et $\rho(g)$ le rayon spectral de g défini par

$$\rho(g) = \max\{|\lambda| / \lambda \in \mathrm{Spect}(g)\}.$$

Si $\lambda \in \mathrm{Spect}(g)$, on désigne respectivement par $\mathcal{E}_\lambda$ et $\mathcal{C}_\lambda$ les sous-espaces propres et caractéristiques de $\mathbb{C}^d$ associés à la valeur propre λ et définis par

$$\mathcal{E}_\lambda = \ker(g - \lambda I) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_\lambda = \ker(g - \lambda I)^d.$$

La multiplicité algébrique de λ, c'est-à-dire la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique de g, est notée m_λ ; par convention, lorsque λ n'est pas une valeur propre de g, on pose m_λ=0.

La restriction de $g - \lambda I$ à l'espace $\mathcal{C}_\lambda$ est un opérateur nilpotent, dont l'indice de nilpotence sera noté ν_λ et l'ultime noyau $\mathcal{U}_\lambda$; remarquons que ν_λ est aussi la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme minimal de g et que l'on a

$$\mathcal{U}_\lambda = \ker(g - \lambda I)^{\nu_\lambda - 1} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_\lambda = \ker(g - \lambda I)^{\nu_\lambda}.$$

En particulier, $\nu_\lambda = 1$ signifie que la restriction de g à $\mathcal{E}_\lambda$ est diagonale. Rappelons que si $\lambda \in \mathrm{Spect}(g)$, il en est de même pour $\bar{\lambda}$ et l'on a :

$$\mathcal{E}_{\bar{\lambda}} = \bar{\mathcal{E}}_\lambda,\ \mathcal{C}_{\bar{\lambda}} = \bar{\mathcal{C}}_\lambda \text{ et } \mathcal{U}_{\bar{\lambda}} = \bar{\mathcal{U}}_\lambda.$$

On considère alors les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^d$ définis par :

$$E_\lambda = (\mathcal{E}_\lambda \oplus \mathcal{E}_{\bar{\lambda}}) \cap \mathbb{R}^d \ , \ C_\lambda = (\mathcal{C}_\lambda \oplus \mathcal{C}_{\bar{\lambda}}) \cap \mathbb{R}^d \ \text{ et } \ U_\lambda = (\mathcal{U}_\lambda \oplus \mathcal{U}_{\bar{\lambda}}) \cap \mathbb{R}^d.$$

Notons que $E_\lambda = E_{\bar{\lambda}}$, $C_\lambda = C_{\bar{\lambda}}$ et $U_\lambda = U_{\bar{\lambda}}$; de plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$E_\lambda = \mathcal{E}_\lambda \cap \mathbb{R}^d \ , \ C_\lambda = \mathcal{C}_\lambda \cap \mathbb{R}^d \ \text{ et } \ U_\lambda = \mathcal{U}_\lambda \cap \mathbb{R}^d.$$

Introduisons la

DÉFINITION 2.3. — *Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^d$. On appelle* **indice de** *g le nombre entier $\nu(g)$ défini par :*

$$\nu(g) = \max\{\nu_\lambda / \lambda \in \mathit{Spect}(g), |\lambda| = \rho(g)\}.$$

et la

Notation 2.4. — Pour tout endomorphisme g de $\mathbb{R}^d$, on note X_g le sous-espace de $\mathbb{R}^d$ défini par

$$X_g := \left(\bigoplus_{|\lambda|<\rho} C_\lambda \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{|\lambda|=\rho \\ \nu_\lambda<\nu(g)}} C_\lambda \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{|\lambda|=\rho \\ \nu_\lambda=\nu(g)}} U_\lambda \right). \tag{2.2}$$

En utilisant alors le fait que, pour tout $\lambda \in \mathrm{Spect}(g)$, tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \ker(g - \lambda I)^{k+1} \setminus \ker(g - \lambda I)^k$, on a

$$\|g^n(x)\| \asymp |\lambda|^n n^k, \qquad {}^{(1)}$$

on obtient la

PROPOSITION 2.5. —

1. *Il existe une constante $c_1 > 1$ telle que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait*

$$\|g^n\| \overset{c_1}{\asymp} \rho^n n^{\nu(g)-1}.$$

2. *Si λ est une valeur propre de g telle que $|\lambda| < \rho$, pour tout vecteur unitaire de x de C_λ, la suite $\left(\frac{\|g^n(x)\|}{\|g^n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge exponentiellement vite vers 0.*

(1) Pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ et tout $c \geqslant 1$, nous écrivons $x_1 \overset{c}{\asymp} x_2$ si $\frac{x_1}{c} \leqslant x_2 \leqslant c\, x_1$. On écrit plus simplement $x_1 \asymp x_2$ lorsque la constante c n'est pas explicitée.

3. *Si λ est une valeur propre de g telle que $|\lambda| = \rho$ et $\nu_\lambda < \nu(g)$, il existe une constante $c_2 > 0$ telle que, pour tout vecteur unitaire de $x \in C_\lambda$ et tout $n \geqslant 1$, on ait :*

$$\|g^n(x)\| \leqslant c_2 \frac{\|g^n\|}{n^{\nu(g)-\nu_\lambda}}.$$

4. *Si λ est une valeur propre de g telle que $|\lambda| = \rho$ et $\nu_\lambda = \nu(g)$, il existe une constante $c_3 > 0$ telle que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in U_\lambda$, on ait :*

$$\|g^n(x)\| \leqslant c_3 \frac{\|g^n\|}{n}.$$

5. *Si λ est une valeur propre de g telle que $|\lambda| = \rho$ et $\nu_\lambda = \nu(g)$, alors pour tout $x \in C_\lambda \setminus U_\lambda$, il existe un réel $c_4(x) > 0$ tel que :*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\|g^n(x)\|}{\|g^n\|} = c_4(x).$$

Nous obtenons de façon immédiate le

Corollaire 2.6. — *Pour toute partie compacte C de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathbb{P}(X_g)$, il existe $\eta = \eta(C) > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ vérifiant $\mathbf{x} \in C$, on ait :*

$$\frac{\|g^n(x)\|}{\|x\|} \overset{\eta}{\asymp} \|g^n\|.$$

En particulier, cette estimation est uniforme.

La proposition qui suit décrit l'action des puissances d'une transformation $g \in G$ sur les éléments de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 2.7. — *Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^d$ de rayon spectral ρ et d'indice ν et soit X_g le sous-espace de $\mathbb{R}^d$ défini par la formule (2.2).*

1. *Pour tous $x, y \notin X_g \setminus \{0\}$ tels que $x \in \mathbb{R}^* y + X_g$, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \delta(g^n \cdot \mathbf{x}, g^n \cdot \mathbf{y}) = 0.$$

2. *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = \pm\rho$. Pour tout $x \in C_\lambda \setminus U_\lambda$, la suite $(g^n \cdot \mathbf{x})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément de $\mathbb{P}(E_\lambda)$.*

3. *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda \neq \pm\rho$ et $|\lambda| = \rho$. Pour tout $x \in C_\lambda \setminus U_\lambda$, la suite $(g^n \cdot \mathbf{x})_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.*

Démonstration de la proposition 2.7. — La première assertion découle directement de la proposition 2.5. En effet on a $x = \lambda\, y + z$ avec, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $x, y \notin X_g$ et $z \in X_g$, si bien que $\|g^n(x)\| \asymp \|g^n(y)\| \asymp \|g^n\|$ tandis que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\|g^n(z)\|}{\|g^n\|} = 0$. Pour établir les deux autres assertions, posons $\lambda = |\lambda|\, e^{i\theta}$ et écrivons la restriction de g à C_λ sous la forme $\lambda\, e^{v_\lambda}$ où v_λ est un endomorphisme nilpotent de C_λ d'indice ν_λ. Fixons $x \in C_\lambda \setminus U_\lambda$ et décomposons x en $x' + \bar{x}'$ avec $x' \in \mathcal{C}_\lambda \setminus \mathcal{U}_\lambda$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $g^n(x') = \lambda^n \sum_{k=0}^{\nu_\lambda - 1} \frac{n^k}{k!} v_\lambda^k(x')$, si bien qu'en posant $y' = \frac{v_\lambda^{\nu_\lambda-1}(x')}{\|v_\lambda^{\nu_\lambda-1}(x')\|}$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| \frac{g^n(x')}{\|g^n(x')\|} - e^{i\,n\,\theta} y' \right\| = 0\ ;$$

ainsi, en notant respectivement y_1 et y_2 les parties réelles et imaginaires de y', il vient

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| \frac{g^n(x)}{\|g^n(x)\|} - (\cos(n\,\theta) y_1 + \sin(n\,\theta)\, y_2) \right\| = 0.$$

La suite $(g^n \cdot \mathbf{x})_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$. D'où le résultat. $\square$

3. Transformations contractantes sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$

Nous démontrons la

Proposition 3.1. — *Soit g un automorphisme de $\mathbb{R}^d$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'automorphisme g est contractant sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$.*
2. *L'automorphisme g possède une unique valeur propre λ de module maximal telle que, dans l'espace caractéristique associé, l'automorphisme unipotent $\frac{1}{\lambda} g$ possède un unique bloc de Jordan de longueur maximale.*

Démonstration de la proposition 3.1. — Nous notons X_g le sous-espace de $\mathbb{R}^d$ défini par la formule (2.2).

Montrons que $1 \Rightarrow 2$. L'automorphisme g étant supposé contractant sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$, nous fixons $\mathbf{y} \in \mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ et un hyperplan Y de $\mathbb{R}^d$ tels que, pour tout $\mathbf{x} \notin \mathbb{P}(Y)$, la suite $(g^n \cdot \mathbf{x})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{y}$. De plus, nous considérons une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de g telle que $|\lambda| = \rho(g)$ et $\nu_\lambda = \nu(g)$.

Comme $X_g \neq \mathbb{R}^d$, nous avons $\mathbb{R}^d \neq X_g \cup Y$. Ainsi, nous fixons $x_1 \in C_\lambda \setminus U_\lambda$ et nous choisissons $x_2 \notin X_g \cup Y$ tel que $x_1 \in \mathbb{R}^*\, x_2 + X_g$. Par définition de Y, la suite $(g^n \cdot \mathbf{x}_2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{y}$ et, d'après l'assertion 1 de la proposition 2.7, la suite $(\delta(g^n \cdot \mathbf{x}_1, g^n \cdot \mathbf{x}_2))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. La suite $(g^n \cdot \mathbf{x}_1)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $\mathbf{y}$ si bien que, d'après l'assertion 3 de la proposition 2.7, la valeur propre λ est donc réelle. De plus, d'après l'assertion 2 de la proposition 2.7, nous avons $\mathbf{y} \in \mathbb{P}(E_\lambda)$. Ce qui est suffisant.

Montrons que $2 \Rightarrow 1$. Notons λ l'unique valeur propre de module maximal telle que, dans l'espace caractéristique associé, l'automorphisme unipotent $\frac{1}{\lambda}\,g$ possède un unique bloc de Jordan de longueur maximale. Ces hypothèses assurent que X_g est un hyperplan de $\mathbb{R}^d$.

D'après l'assertion 2 de la proposition 2.7, pour tout $\mathbf{x} \notin \mathbb{P}(X_g)$, la suite $(g^n \cdot \mathbf{x})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de $\mathbb{P}(E_\lambda)$. De plus, le sous-espace X_g étant un hyperplan de $\mathbb{R}^d$, pour tous $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \notin \mathbb{P}(X_g)$, on peut respectivement fixer deux représentants x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ de $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ tels que $x_1 \in \mathbb{R}^*\, x_2 + X_g$. Ainsi, d'après l'assertion 1 de la proposition 2.7, pour tous $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \notin \mathbb{P}(X_g)$, nous avons $\delta(g^n \cdot \mathbf{x}_1, g^n \cdot \mathbf{x}_2) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Ceci démontre qu'il existe $\mathbf{x}_g \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ tel que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathbb{P}(X_g)$, la suite $(g^n \cdot \mathbf{x})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{x}_g$. Ce qui est suffisant. $\square$

La proposition 3.1 nous amène à introduire la

Définition 3.2. — *Soit g un automorphisme contractant sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$. L'hyperplan X_g de $\mathbb{R}^d$ défini par la formule (2.2) est appelé* **hyperplan répulsif** *de g.*

La définition 1.2 donnée dans l'introduction est une version quantifiée de la notion de transformation contractante. Il est clair qu'elle est plus restrictive, cependant nous avons la

Proposition 3.3. — *Soit g un automorphisme de $\mathbb{R}^d$ contractant sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $\epsilon \in]0,1[$ il existe $n_\epsilon = n(\epsilon, g) \geqslant 1$ tel que, pour tout $n \geqslant n_\epsilon$, l'automorphisme g^n est ϵ-contractant sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration de la proposition 3.3. — Nous allons démontrer une version uniforme de l'assertion 1 de la proposition 2.7. Pour ce faire, fixons $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ orthogonal à X_g et montrons qu'il existe $n_\epsilon = n(\epsilon, g) \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $\mathbf{y} \in \mathbf{B}_g^\epsilon$ et tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_\epsilon$, on ait $\delta(g^n \cdot \mathbf{x}, g^n \cdot \mathbf{y}) \leqslant \frac{\epsilon}{2}\,\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Nous fixons une partie compacte C de X_g telle que $\mathbf{B}_g^\epsilon \subset \{\mathbf{y} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d) \,/\, y = x + z \text{ avec } z \in C\}$. De plus, grâce au corollaire 2.6, nous fixons $\kappa > 0$ tel que, pour tout $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ avec $\mathbf{y} \in \mathbf{B}_g^\epsilon$, nous ayons $\|g^n(y)\| \geqslant \kappa \|g^n\| \, \|y\|$.

Considérons à présent $z \in C$ et posons $y = x + z$. Le vecteur x étant orthogonal à $z \in X_g$, nous avons $\|x \wedge z\|_2 = \|x\| \, \|z\|$ si bien que $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\|x\wedge y\|_2}{\|x\| \, \|y\|} = \frac{\|x\wedge z\|_2}{\|x\| \, \|y\|} = \frac{\|x\| \, \|z\|}{\|x\| \, \|y\|} = \frac{\|z\|}{\|y\|}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned} \delta(g^n \cdot \mathbf{x}, g^n \cdot \mathbf{y}) &= \frac{\|\bigwedge^2 g^n (x \wedge z)\|_2}{\|g^n(x)\| \, \|g^n(y)\|} \leqslant \frac{\|g^n(x)\| \, \|g^n(z)\|}{\kappa \|g^n(x)\| \, \|g^n\| \, \|y\|} \\ &\leqslant \quad \leqslant \frac{\|g^n(z)\|}{\kappa \|g^n\| \, \|z\|} \frac{\|z\|}{\|y\|} \leqslant \frac{\|g^n(z)\|}{\kappa \|g^n\| \, \|z\|} \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.5, la suite $\left(\frac{\|g^n(z)\|}{\|g^n\| \, \|z\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur C. Ce qui est suffisant $\square$

4. Groupes de Ping-Pong sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$

Dans cette section, nous étudions la classe des groupes ϵ-Ping-Pong sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ introduite dans la définition 2.6. L'existence de tels groupes repose sur la proposition suivante

Proposition 4.1. — *Soit $\mathcal{A} = \{a_1^{\pm 1}, ..., a_N^{\pm 1}\}$ une famille symétrique et finie d'éléments contractants de G. On suppose que pour tous $g, h \in \mathcal{A}$ tels que $g \neq h^{\pm 1}$ on a $\mathbf{x}_g \notin \mathbb{P}(X_h)$. Pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que la famille $\mathcal{A}^{(n)} := \{a_1^{\pm n}, ..., a_N^{\pm n}\}$ soit en position ϵ-Ping-Pong.*

Démonstration de la proposition 4.1. — Grâce aux hypothèses, on fixe $\epsilon > 0$ suffisamment petit de sorte que, pour tous $g, h \in \mathcal{A}$ avec $g \neq h^{\pm 1}$, nous ayons

- les ensembles $\mathbf{b}_g^\epsilon$ et $\mathbf{b}_h^\epsilon$ sont disjoints.
- la partie $\mathbf{b}_g^\epsilon$ est contenue dans l'intérieur de $\mathbf{B}_h^\epsilon$.
- l'ensemble $\bigcap_{a\in\mathcal{A}} \mathbf{B}_a^\epsilon$ est non vide.

On achève cette démonstration en appliquant la proposition 3.3. $\square$

Dans tout le reste de l'article, on fixe $\epsilon > 0$, on considère une partie finie $\mathcal{A}$ de G en position ϵ-Ping-Pong et on note Γ le sous-groupe ϵ-Ping-Pong qu'elle engendre.

Par un argument classique, reposant sur le lemme du tennis de table de Klein, on montre que Γ est libre et discret. Ainsi, ces éléments se décomposent de façon unique sous la forme $\alpha_1^{n_1}...\alpha_k^{n_k}$ où $(\alpha_i, n_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ est une suite finie de $\mathcal{A}\times\mathbb{N}^*$ telle que $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}^{\pm 1}$, pour $i \in \{1,\ldots,k-1\}$. On obtient ainsi une bijection entre Γ et l'ensemble des suites finies $(\alpha_k, n_k)_{1\leqslant k\leqslant l}$ d'éléments de $\mathcal{A}\times\mathbb{N}^*$ telles que, pour tout $k \in \{1,...,l-1\}$, on ait $\alpha_k \neq \alpha_{k+1}^{\pm 1}$. Nous précisons à présent un certain nombre de notations.

Notations 4.2. — Soit γ une transformation de Γ qui se décompose sous la forme $\gamma = \alpha_1^{n_1}...\alpha_l^{n_l}$ où $(\alpha_i, n_i)_{1\leqslant i\leqslant l}$ est une suite finie de $\mathcal{A}^* := \mathcal{A}\times\mathbb{N}^*$ telle que $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}^{\pm 1}$ pour $i \in \{1,\ldots,l-1\}$.

- La suite $(\alpha_i, n_i)_{1\leqslant i\leqslant l}$ est dite **$\mathcal{A}^*$-admissible** et est appelée **$\mathcal{A}^*$-décomposition** de γ.
- L'entier l est appelé **longueur de** γ et est noté $l(\gamma)$.
- L'ensemble $\mathbf{b}_{\alpha_1}^{\epsilon}$ est appelé **bassin d'arrivée de** γ et est noté $\mathbf{b}_\gamma$.
- L'ensemble $\mathbf{B}_{\alpha_k}^{\epsilon}$ est appelé **bassin de départ de** γ et est noté $\mathbf{B}_\gamma$.

4.1. Sur la norme des éléments d'un groupe ϵ-Ping-Pong

D'après le corollaire 2.6, si g est un automorphisme contractant sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$, pour tout $x \notin X_g$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{\|g^n(x)\|}{\|x\|} \asymp \|g^n\|.$$

Lorsque Γ est un groupe ϵ-Ping-Pong, cette propriété se propage à partir des générateurs à tout le groupe. Afin d'énoncer ce résultat, nous précisons deux notations :

- D'après le corollaire 2.6, on peut choisir $\kappa > 0$ tel que, pour tout $g \in \mathcal{A}$, tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ vérifiant $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_g$, on ait
$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \geqslant \kappa\,\|g\|.$$
- On pose $\eta := \min_{\substack{g,h\in\mathcal{A}\\ g\neq h^{\pm 1}}} \delta\left(\mathbf{b}_g, \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)\setminus\mathbf{B}_h\right)$.

Nous avons la

Proposition 4.3. — *Il existe une constante $c = c(\epsilon,\mathcal{A}) > 0$ telle que, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $x \in \mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ vérifiant $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_\gamma$, on ait*

$$\frac{\|\gamma(x)\|}{\|x\|} \overset{c}{\asymp} \|\gamma\|.$$

Plus précisément on peut prendre $c := \dfrac{(1-\epsilon)\eta\kappa}{\sqrt{2}}\Big(1-\sqrt{1-\eta^2}\Big)^{3/2}$.

La démonstration de cette proposition repose sur l'étude d'une classe particulière d'éléments de Γ au travers des deux lemmes qui suivent.

Définition 4.4. — *Soit* $\gamma \in \Gamma$ *et soit* $(\alpha_i, n_i)_{1\leqslant i\leqslant l}$ *sa* $\mathcal{A}^*$*-décomposition. On dit que* γ *est* **très réduit** *si* $l(\gamma) \geqslant 2$ *et si* $\alpha_1 \neq \alpha_l^{\pm 1}$. *Nous notons* Γ^+ *l'ensemble des transformations très réduites de* Γ.

Lemme 4.5. — *Tout élément* γ *de* Γ^+ *est proximal et* $\mathbb{P}(X_\gamma)$ *est inclus dans le complémentaire de* $\mathbf{B}_\gamma$. *De plus, pour tout* $\gamma \in \Gamma^+$, *on a* $\delta(\mathbf{b}_\gamma, \mathbb{P}(X_\gamma)) \geqslant \eta$.

On déduit directement de ce lemme que les éléments de Γ sont soit proximaux soit conjugués à une puissance d'un générateur quasi-proximal.

Lemme 4.6. — *Il existe une constante* $\eta_1 = \eta_1(\Gamma)$ *telle que, pour tout* $\gamma \in \Gamma^+$, *on ait :*

$$\|\gamma\| \overset{\eta_1}{\asymp} \rho(\gamma),$$

où $\rho(\gamma)$ *désigne le rayon spectral de* γ *; plus précisement, on a*

$$(1-\epsilon)\Big(1-\sqrt{1-\eta^2}\Big)\,\|\gamma\| \leqslant \rho(\gamma) \leqslant \|\gamma\|.$$

Démonstration du lemme 4.5.— Commençons par expliciter une valeur propre réelle de γ. On fixe $\gamma \in \Gamma^+$ et on note $(\alpha_i, n_i)_{1\leqslant i\leqslant l}$ sa $\mathcal{A}^*$-décomposition. Comme $\gamma \in \Gamma^+$, on a $\alpha_1 \neq \alpha_l^{\pm 1}$, si bien que $\gamma \cdot \mathbf{b}_\gamma \subset \mathbf{b}_\gamma$. La partie $\mathcal{A}$ étant en position ϵ-Ping-Pong, la transformation γ est ϵ^n-lipschitzienne sur $\mathbf{b}_\gamma$ et, par le théorème du point fixe, nous fixons $\mathbf{y}_\gamma \in \mathbf{b}_\gamma$ tel que $\gamma \cdot \mathbf{y}_\gamma = \mathbf{y}_\gamma$. Il existe donc $\lambda_\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\gamma(y_\gamma) = \lambda_\gamma\, y_\gamma$, où y_γ est un représentant de $\mathbf{y}_\gamma$.

Montrons à présent que λ_γ *est la seule valeur propre de* γ *dont le module est égal à* $\rho(\gamma)$ *et que celle-ci est simple.* Nous considérons l'action naturelle de γ sur $\mathbb{C}^d$. De plus, nous fixons une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de γ de module $\rho(\gamma)$, nous posons $\lambda = e^{i\theta}\rho(\gamma)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$, et nous choisissons un vecteur propre $u \in \mathbb{C}^d$ de γ associé à λ. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\gamma^n(y_t) = t\,\lambda_\gamma^n\, y_\gamma + \rho(\gamma)^n\left(e^{i\,n\,\theta}\,u + e^{-i\,n\,\theta}\,\bar{u}\right) \in \mathbb{R}^d, \tag{4.1}$$

où $y_t := t\,y_\gamma + (u+\bar{u}) \in \mathbb{R}^d$.

L'ensemble $\mathbf{b}_\gamma$ étant contenu dans l'intérieur de $\mathbf{B}_\gamma$ et $\mathbf{y}_\gamma \in \mathbf{b}_\gamma$, nous fixons $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{y}_{t_0} \in \mathbf{B}_\gamma$. La transformation γ étant ϵ^n-lipschitzienne sur $\mathbf{B}_\gamma$, par le théorème du point fixe, la suite $(\gamma^n \cdot \mathbf{y}_{t_0})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{y}_\gamma$ mais, d'après la formule (4.1), ceci n'est possible que si $\lambda = \lambda_\gamma = \rho(\gamma)$ et $u \in \mathbb{R}\, y_\gamma$. Ce qui est suffisant.

Montrons que $\mathbb{P}(X_\gamma) \cap \mathbf{B}_\gamma = \emptyset$. Il suffit de remarquer que l'orbite de tout point de $\mathbf{B}_\gamma$ s'accumule en $\mathbf{x}_\gamma$ alors que l'ensemble fermé $\mathbb{P}(X_\gamma)$ est γ-invariant mais ne contient pas $\mathbf{x}_\gamma$. D'où le résultat. □

Pour démontrer le lemme 4.6, nous aurons besoin du résultat suivant

Fait 4.7. — *Soient* $\mathbb{P}(X)$ *et* $\mathbb{P}(Y)$ *deux sous-ensembles de* $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ *tels que* $\delta(\mathbb{P}(X), \mathbb{P}(Y)) > 0$.

(i) Pour tout vecteur unitaire $x \in \mathbb{R}^d$ *tel que* $\mathbf{x} \in \mathbb{P}(X)$ *et tout* $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ *tel que* $\mathbf{y} \in \mathbb{P}(Y)$, *on a*

$$\|x - y\| \geqslant \delta(\mathbb{P}(X), \mathbb{P}(Y)).$$

(ii) Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ *tels que* $\mathbf{x} \in \mathbb{P}(X)$ *et* $\mathbf{y} \in \mathbb{P}(Y)$, *on a :*

$$\|x + y\| \geqslant c\,(\|x\| + \|y\|)$$

avec $c := \sqrt{\dfrac{1 - \sqrt{1 - \delta(\mathbb{P}(X), \mathbb{P}(Y))^2}}{2}}$.

Démonstration du fait 4.7. — Remarquons que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, la quantité $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ représente le sinus de l'angle entre x et y.

Choisissons $a, b \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et notons p désigne la projection orthogonale de a sur $\mathbb{R}\, b$. Nous avons $\|a - p\| \leqslant \|a - b\|$ et, le triangle $[0, a, p]$ étant rectangle, nous avons $\delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leqslant \|a - p\|/\|a\|$. Ainsi, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tels que $\mathbf{x} \in \mathbb{P}(x)$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{P}(Y)$, nous avons $\delta(\mathbb{P}(X), \mathbb{P}(Y)) \leqslant \frac{\|x-y\|}{\|x\|}$.

Pour établir la deuxième assertion, remarquons que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, nous avons $\|x + y\|^2 \geqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\,\|y\| \sqrt{1 - \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}$. Ainsi, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ tels que $\mathbf{x} \in \mathbb{P}(X)$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{P}(Y)$, nous avons $\|x + y\|^2 \geqslant c^2\, (\|x\| + \|y\|)^2$. D'où le résultat. □

Démonstration du lemme 4.6. — Fixons $\gamma \in \Gamma^+$ et considérons un vecteur unitaire $y \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|\gamma(y)\| = \|\gamma\|$.
Comme γ est très réduit, il est proximal et on a $\mathbf{x}_\gamma \notin \mathbb{P}(X_\gamma)$. Fixons un représentant unitaire $x_\gamma \in \mathbb{R}^d$ de $\mathbf{x}_\gamma$ et décomposons y sous la forme $\alpha\, x + \beta\, x_\gamma$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\|x\| = 1$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{P}(X_\gamma)$; on a :

$$\|\gamma\| = \|\gamma(y)\| \leqslant |\alpha| \times \|\gamma(x)\| + |\beta| \times \rho(\gamma).$$

Dans un premier temps, nous controlons la taille des coefficients α et β. Supposons pour fixer les idées que $|\alpha| \geqslant |\beta|$; on a alors

$$1 = \|y\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\,\beta\langle x, x_\gamma\rangle \geqslant \alpha^2 + \beta^2 - 2|\alpha\,\beta|\sqrt{1-\eta^2},$$

d'où $1 \geqslant \Big(|\alpha| - \sqrt{1-\eta^2}|\beta|\Big)^2$; en utilisant le fait que $|\alpha| \geqslant |\beta|$, il vient $|\alpha| \leqslant \dfrac{1}{1-\sqrt{1-\eta^2}}$. Le cas où $|\alpha| \leqslant |\beta|$ se traite de façon analogue et on obtient finalement

$$\max(|\alpha|, |\beta|) \leqslant \frac{1}{1-\sqrt{1-\eta^2}}. \tag{4.2}$$

Dans un second temps, nous majorons $\|\gamma(x)\|$ en fonction de $\rho(\gamma)$. Puisque x appartient au sous-espace γ invariant X_γ, on a

$$\|\gamma(x)\| \times \delta\left(\mathbf{x}_\gamma, \mathbb{P}\left(X_\gamma\right)\right) \leqslant \|x_\gamma \wedge \gamma(x)\|_2.$$

Posons alors $y_\epsilon := \epsilon x + x_\gamma$ et remarquons que $\mathbf{y}_\epsilon$ appartient à $\mathbf{b}_\gamma$; il vient

$$\begin{aligned} \|x_\gamma \wedge \gamma\left(x\right)\|_2 &= \frac{1}{\epsilon}\|x_\gamma \wedge \gamma\left(y_\epsilon\right)\|_2 \leqslant \Big(\|\gamma(x)\| + \frac{\rho(\gamma)}{\epsilon}\Big)\delta\left(\gamma\cdot\mathbf{x}_\gamma, \gamma\cdot\mathbf{y}_\epsilon\right) \\ &\leqslant \Big(\|\gamma(x)\| + \frac{\rho(\gamma)}{\epsilon}\Big)\epsilon^{l(\gamma)}\delta\left(\mathbf{x}_\gamma, \mathbb{P}\left(X_\gamma\right)\right). \end{aligned}$$

On a alors $\|\gamma(x)\| \leqslant \Big(\|\gamma(x)\| + \dfrac{\rho(\gamma)}{\epsilon}\Big)\epsilon^{l(\gamma)}$ d'où

$$\|\gamma(x)\| \leqslant \frac{\epsilon^{l(\gamma)-1}}{1-\epsilon^{l(\gamma)}}\ \rho(\gamma). \tag{4.3}$$

En combinant les inégalités (4.2), (4.3) et le fait que $l(\gamma) \geqslant 2$, il vient

$$\|\gamma\| \leqslant \frac{\rho(\gamma)}{(1-\epsilon)(1-\sqrt{1-\eta^2})}.$$

D'où le résultat. $\square$

Démonstration de la proposition 4.3. — Fixons $\gamma \in \Gamma$ et notons $(\alpha_i, n_i)_{1\leqslant i\leqslant l}$ sa $\mathcal{A}^*$-décomposition ; choisissons par ailleurs un vecteur unitaire $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_\gamma$.

Dans un premier temps, supposons que γ soit très réduit. Le vecteur x se décompose sous la forme $\mu\, x_\gamma + x'$ avec $\mu \in \mathbb{R}^*$ et $x' \in X_\gamma$; on a $\mathbf{x}' \in \mathbb{P}\left(X_\gamma\right)$ et $\mathbf{x}_\gamma \in \mathbf{b}_\gamma$ si bien que $\delta\left(\mathbf{x}_\gamma, \mathbf{x}'\right) \geqslant \eta\left(\epsilon\right)$ d'après le lemme 4.5. Par conséquent, en appliquant l'assertion i) du fait 4.7, il vient

$$\|x - x'\| = |\mu| \geqslant \eta\left(\eta\right).$$

De même, en appliquant cette fois l'assertion *ii*) du fait 4.7, on obtient

$$\|\gamma(x)\| \geqslant \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\eta^2}}{2}}\Big(|\mu|\rho(\gamma)+\|\gamma(x')\|\Big) \geqslant \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\eta^2}}{2}}|\mu|\rho(\gamma)\,.$$

D'après le lemme 4.6, il vient

$$\|\gamma(x)\| \geqslant \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\eta^2}}{2}}\eta\rho(\gamma) \geqslant \frac{\eta(1-\epsilon)}{\sqrt{2}}\Big(1-\sqrt{1-\eta^2}\Big)^{3/2}\|\gamma\|.$$

Ainsi, pour tout $\gamma \in \Gamma^+$ et tout $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_\gamma$, on a $\|\gamma(x)\| \geqslant c'\|\gamma\|$ avec

$$c' = \frac{\eta(1-\epsilon)}{\sqrt{2}}\Big(1-\sqrt{1-\eta^2}\Big)^{3/2}.$$

Lorsque γ n'est pas très réduit, on écrit $\gamma = \alpha_1^{n_1}...\alpha_{l-1}^{n_{l-1}}\alpha_l^{n_l}$; la transformation $\alpha_1^{n_1}...\alpha_{l-1}^{n_{l-1}}$ est très réduite et $\alpha_l^{n_l}\cdot\mathbf{x} \in \mathbf{B}_{\alpha_{l-1}}$ (car $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_\gamma$). Il vient

$$\begin{aligned}\|\gamma(x)\| &\geqslant c'\,\|\alpha_1^{n_1}\dots\alpha_{l-1}^{n_{l-1}}\|\,\|\alpha_l^{n_l}(x)\|\\ &\geqslant c'\,\kappa\,\|\alpha_1^{n_1}...\alpha_{l-1}^{n_{l-1}}\|\,\|\alpha_l^{n_l}\| \geqslant c'\,\kappa\,\|\gamma\|.\end{aligned}$$

D'où le résultat avec $c = \kappa\, c'$. □

4.2. Sur l'exposant critique des groupes de Ping-Pong

Dans ce paragraphe, nous étudions l'exposant critique associé aux groupes de Ping-Pong. Plus précisément, nous énonçons un critère de finitude et nous montrons que les groupes de Ping-Pong satisfont une propriété que nous appelons, *propriété du trou critique.* On commence par rappeler la notion d'exposant critique.

DÉFINITION 4.8. — *Soit H un sous-semi-groupe discret de G. L'***exposant critique** τ_H *de H est défini par*

$$\tau_H = \inf\{s>0/\sum_{h\in H}\|h\|^{-s}<\infty\},$$

avec la convention $\inf\emptyset = +\infty$. *On dit que H est divergent si la série $\sum_{h\in H}\|h\|^{-\tau_H}$ diverge ; sinon, on dit que H est convergent.*

Pour tout $g \in G$, nous notons $\langle g\rangle$ le sous-semi-groupe engendré par g. Nous avons la

Proposition 4.9. — *L'exposant critique τ_Γ de Γ est fini si et seulement si, pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a $\tau_{\langle a \rangle} < +\infty$. De plus, pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a*

$$\tau_\Gamma > \tau_{\langle \gamma \rangle}$$

À la lumière de ce résultat, il nous a paru utile de caractériser les semi-groupes monogènes de G dont l'exposant critique est fini.

Lemme 4.10. — *Soit g un élément de G, de rayon spectral ρ et d'indice ν. L'exposant critique du sous-semi-groupe $\{g^n \in G / n \in \mathbb{N}\}$ est fini si et seulement si l'on a, soit $\rho > 1$, soit $\rho = 1$ et $\nu \geqslant 2$.*

Démonstration du lemme 4.10. — D'après la proposition 2.5, il existe $c > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$\|g^n\| \overset{c}{\asymp} n^{\nu-1}\rho^n.$$

Nous en déduisons que les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} n^{-s(\nu-1)}\rho^{-s\,n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \|g^n\|^{-s}$ sont donc de même nature. Ainsi, les deux cas $(\rho > 1)$ et $(\rho = 1$ et $\nu \geqslant 2)$ sont les seuls où l'ensemble $\{s > 0 / \sum_{n=1}^{+\infty} \|g^n\|^{-s} < +\infty\}$ est non vide. D'où le résultat. $\square$

Démonstration de la proposition 4.9. — *Étape* 1. *Supposons que $\tau_\Gamma < +\infty$ et montrons que, pour tout $a \in \mathcal{A}$, nous avons $\tau_{\langle a \rangle} < +\infty$.* Pour tout $s > 0$ et tout $a \in \mathcal{A}$, nous avons $\sum_{n=1}^{+\infty} \|a^n\|^{-s} \leqslant \sum_{\gamma \in \Gamma} \|\gamma\|^{-s}$ si bien que, pour tout $a \in \mathcal{A}$, l'ensemble $\{s > 0 / \sum_{n=1}^{+\infty} \|a^n\|^{-s} < +\infty\}$ est non vide.

Étape 2. *Supposons que, pour tout $a \in \mathcal{A}$, nous avons $\tau_{\langle a \rangle} < +\infty$ et montrons que $\tau_\Gamma < +\infty$.* À l'aide de la proposition 4.3, nous fixons $c > 0$ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ avec $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_\gamma$, on ait $\|\gamma\| \geqslant c\,\frac{\|\gamma(x)\|}{\|x\|}$.

De plus, nous notons P la fonction définie de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ pour $s \geqslant 0$ par $P(s) := \max\{\sum_{n=1}^{+\infty} \|a^n\|^{-s} / a \in \mathcal{A}\}$.

La partie $\mathcal{A}$ étant en position ϵ-Ping-Pong, grâce à notre choix de $c > 0$, pour toute suite $\mathcal{A}^*$-admissible $(\alpha_i, n_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$, on a

$$\|\alpha_1^{n_1} ... \alpha_l^{n_l}\| \geqslant c^l \|\alpha_1^{n_1}\| ... \|\alpha_l^{n_l}\|.$$

Ainsi, pour tout $s \geqslant 0$ et toute suite $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}^{\pm 1}$ pour $i \in \{1, ..., l-1\}$, nous avons

$$\sum_{n_1, \dots, n_l \geqslant 1} \|\alpha_1^{n_1} ... \alpha_l^{n_l}\|^{-s} \leqslant c^l \sum_{n \geqslant 1} \|\alpha_1^{n}\|^{-s} ... \sum_{n \geqslant 1} \|\alpha_l^{n}\|^{-s} \leqslant (c\,P(s))^l\,.$$

Le nombre de suites d'éléments de $\mathcal{A}$ et de longueur l étant majoré par $(2\,N)^l$, pour tout $l \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\sum_{\gamma \in \Gamma^{(l)}} \|\gamma\|^{-s} \leqslant (2\,c\,N\,P(s))^l\,,$$

où l'on rappelle que $\Gamma^{(l)}$ désigne l'ensemble des éléments de Γ dont la $\mathcal{A}^*$-décomposition est de longueur $l \in \mathbb{N}$.

Notons à présent que, pour tout $a \in \mathcal{A}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\|a^n\| > 1$. En effet, s'il existait $n_0 \geqslant 1$ tel que $\|a^{n_0}\| \leqslant 1$ alors, pour tout $s > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous aurions $\|a^{k\,n_0}\|^{-s} \geqslant 1$ si bien que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|a^n\|^{-s} \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \|a^{k\,n_0}\|^{-s} = +\infty,$$

ce qui contradirait le fait que $\tau_{\langle a \rangle}$ soit fini.

Grâce au théorème de Lebesgue, nous en déduisons que $\lim_{s \to +\infty} P\,(s) = 0$. En effet, d'après ce qui précède, pour tout $a \in \mathcal{A}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\lim_{s \to +\infty} \|a^n\|^{-s} = 0$ et, par définition de P, pour tout $s_0 > \max\{\tau_{\langle a \rangle} / a \in \mathcal{A}\}$, nous avons $P\,(s_0) < +\infty$.

Ainsi, quitte à changer la valeur de s_0, on peut donc supposer $2\,c\,N\,P\,(s_0) < 1$ et on obtient $\sum_{\gamma \in \Gamma} \|\gamma\|^{-s_0} \leqslant 1 + \sum_{l=1}^{+\infty} (2\,c\,N\,P(s_0))^l < +\infty$. D'où l'étape 2.

Étape 3. *Montrons que, pour tout* $\gamma \in \Gamma$, *on a* $\tau_\Gamma > \tau_{\langle \gamma \rangle}$. Sans perdre en généralité, on supposera que τ_Γ est fini. Soit $\gamma_0 \in \Gamma \setminus \{I\}$ dont la $\mathcal{A}^*$-décomposition est $(\alpha_i, n_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$. Quitte à remplacer γ par un conjugué, on peut supposer que $\alpha_1 \neq \alpha_k^{-1}$. On pose $h = \alpha_k$. Pour ce choix de h, on remarque que les éléments $\gamma_0^{n_1} h ... \gamma_0^{n_l} h$, $l \geqslant 1, n_1, ..., n_l \geqslant 1$, sont deux à deux distincts ; pour tout $s > \tau_{\langle \gamma_0 \rangle}$ on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma \in \Gamma} \|\gamma\|^{-s} &\geqslant \sum_{l \geqslant 1} \sum_{n_1, \dots, n_l \geqslant 1} \|\gamma_0^{n_1} h ... \gamma_0^{n_l} h\|^{-s} \\
&\geqslant \sum_{l \geqslant 1} \sum_{n_1, \dots n_l \geqslant 1} \|\gamma_0^{n_1}\|^{-s} ... \|\gamma_0^{n_l}\|^{-s} \, \|h\|^{-l\,s} \\
&\geqslant \sum_{l \geqslant 1} \left(\|h\|^{-s} \sum_{n \geqslant 1} \|\gamma_0^n\|^{-s} \right)^l .
\end{aligned}$$

On utilise alors le résultat suivant que nous démontrons à la fin de ce paragraphe.

Lemme 4.11. — *Les semi-groupes monogènes de G d'exposant critique fini sont divergents.*

Ainsi, le sous-semi-groupe $\langle\gamma_0\rangle$ ci-dessus est divergent si bien qu'on peut choisir $s_0 > \tau_{\langle\gamma_0\rangle}$ suffisamment proche de $\tau_{\langle\gamma_0\rangle}$ tel que

$$\|h\|^{-s_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \|\gamma_0^n\|^{-s_0} > 1 \ ;$$

il vient $\sum_{\gamma\in\Gamma} \|\gamma\|^{-s_0} = +\infty$, ce qui prouve que $\tau_\Gamma > \tau_{\langle\gamma_0\rangle}$. □

Démonstration du lemme 4.11. — On note respectivement $\rho > 0$ et $\nu \geqslant 1$ le rayon spectral et l'indice de g. D'après le lemme 4.10, deux cas se présentent : soit $(\rho > 1)$, soit $(\rho > 1 \ \text{ et } \ \nu \geqslant 1)$. De plus, d'après la proposition 2.5, les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-s(\nu-1)}\rho^{-s\,n}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|g^n\|^{-s}$ sont de même nature. Dans les deux cas, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|g^n\|^{-s}$ diverge en son exposant critique. D'où le résultat. □

4.3. Sur l'ensemble limite des groupes de Ping-Pong

Soit H un sous-groupe discret de G ; nous introduisons les deux hypothèses suivantes :

- *H1)* On dit que H vérifie *l'hypothèse d'irréductibilité* s'il n'existe pas de sous-espace vectoriel propre de $\mathbb{R}^d$ qui soit invariant par Γ.
- *H2)* On dit que H vérifie *l'hypothèse de proximalité* si Γ contient une transformation proximale.

Les éléments de H agissent par homéomorphisme sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$; d'après le lemme de Zorn, tout fermé invariant de $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ contient donc une partie minimale sous l'action de H. L'unicité d'une telle partie minimale n'est pas toujours vraie et nécessite des hypothèses supplémentaires ; en effet, si g est un automorphisme proximal, les ensembles $\mathbf{x}_g$ et $\mathbb{P}\left(X_g\right)$ sont des fermés, g-invariant et disjoints de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

Nous rappelons à présent comment les hypothèses d'irréductibilité et de proximalité interviennent dans la notion d'ensemble limite d'un sous-groupe discret de G. Nous avons la :

Proposition 4.12 *[Con-Gui]. — Soit H un sous-groupe discret de G vérifiant les hypothèses H1 et H2. Il existe une unique partie fermée de $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ qui soit minimale pour l'action de H. Cette partie, appelée* **ensemble limite de** H*, est égale à l'adhérence de l'ensemble des droites attractives des transformations proximales de H. On la note $\Lambda(H)$.*

Dans tout le reste de ce paragraphe, nous supposons que Γ satisfait l'hypothèse d'irréductibilité. Puisque les élements de Γ^+ sont proximaux, l'hypothèse de proximalité est toujours satisfaite par Γ. D'après la proposition 4.12, il existe une unique partie fermée $\Lambda(\Gamma) \subset \mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ qui soit minimale pour l'action de Γ.

Le but de ce paragraphe est de coder les points de $\Lambda(\Gamma)$ à l'aide de suites formées à partir de l'alphabet $\mathcal{A}^* = \{(a,n)\,/a \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Reprenant une approche d'induction ([Dal-Pei]), on retire à $\Lambda(\Gamma)$ l'orbite sous Γ des droites attractives des éléments de $\mathcal{A}$; on note $\Lambda(\Gamma)^0$ l'ensemble ainsi obtenu. De plus, on note Σ_+ l'ensemble des suites $(a_k, n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}^*$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait $a_{k+1} \neq a_k^{\pm 1}$. Une suite de Σ_+ sera dite $\mathcal{A}^*$-*admissible*. Nous avons la

Proposition 4.13. — *Avec les notations introduites ci-dessus*

i) Pour tout $\mathbf{a} = (a_k, n_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \Sigma_+$*, la suite* $((a_0^{n_0}...a_k^{n_k}) \cdot \mathbf{x})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge vers un point* $\pi_+(\mathbf{a})$ *qui appartient à* $\Lambda(\Gamma)^0$ *et qui ne dépend pas du choix de* $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_\Gamma$*.*

ii) L'application π_+ *est bijective de* Σ_+ *sur* $\Lambda(\Gamma)^0$*.*

Démonstration de la proposition 4.13. — La partie $\mathcal{A}$ étant en position ϵ-Ping-Pong sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$, pour tout $\mathbf{z} \in \mathbf{B}_\Gamma$ et tout $\gamma \in \Gamma\backslash\{I\}$, nous avons $\gamma\cdot\mathbf{z} \in \cup_{(a,n)\in\mathcal{A}\times\mathbb{N}^*} a^n \cdot \mathbf{B}_a$. Ceci montre que l'ensemble des valeurs d'adhérences de $\{\gamma\cdot\mathbf{z} \in \mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)/\gamma \in \Gamma\}$ est contenu dans $\bigcup_{(a,n)\in\mathcal{A}\times\mathbb{N}^*} a^n \cdot \mathbf{B}_a$. L'ensemble limite $\Lambda(\Gamma)$ étant la seule partie fermée de $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ qui soit minimale pour l'action de Γ, il contient les valeurs d'adhérences de $\{\gamma\cdot\mathbf{z} \in \mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)/\gamma \in \Gamma\}$ si bien que

$$\Lambda(\Gamma) \subset \bigcup_{(a,n)\in\mathcal{A}\times\mathbb{N}^*} a^n \cdot \mathbf{B}_a \subset \bigcup_{a\in\mathcal{A}} \mathbf{b}_a. \tag{4.4}$$

Étape 1. *Montrons que, pour tout* $\mathbf{y} \in \Lambda(\Gamma)$ *et tout* $a \in \mathcal{A}$*, il existe* $a' \in \mathcal{A}\cup\{I\}$ *tel que* $a' \cdot \mathbf{y} \in \mathbf{B}_a$. Fixons $\mathbf{y} \in \Lambda(\Gamma)$ et $a \in \mathcal{A}$. Grâce à (4.4), on fixe $g \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbf{y} \in \mathbf{b}_g$. En choisissant à présent $a' \neq a^{\pm 1}$ si $g = a^{\pm 1}$ et $a' = I$ si $g \neq a^{\pm 1}$, par définition des parties en position de ϵ-Ping-Pong, nous avons $a' \cdot \mathbf{y} \in \mathbf{B}_a$.

Étape 2. *Fixons* $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_\Gamma$ *et montrons que, pour tout* $(a_k, n_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \Sigma_+$*, la suite* $((a_0^{n_0}...a_k^{n_k}) \cdot \mathbf{x})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ *vers un élément de* Λ_Γ*.* Le groupe Γ étant ϵ-Ping-Pong, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la transformation $a_k^{n_k}$ est ϵ-lispchitzienne sur $\mathbf{B}_{a_k}$ si bien que, pour tous $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, nous avons

$\delta\left(\left(a_0^{n_0}...a_{k_1}^{n_{k_1}}\right)\cdot\mathbf{x},\left(a_0^{n_0}...a_{k_1+k_2}^{n_{k_1+k_2}}\right)\cdot\mathbf{x}\right) \leqslant \epsilon^{k_1}$. Nous en déduisons que $\left(\left(a_0^{n_0}...a_k^{n_k}\right)\cdot\mathbf{x}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Notons $\pi_+(\mathbf{a})$ sa limite et vérifions que $\pi(\mathbf{a})\in\Lambda(\Gamma)$.

On fixe $\mathbf{z}\in\Lambda(\Gamma)$ et, grâce à ce qui précède, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on choisit $a_k^{'}\in\mathcal{A}\cup\{I\}$ tel que $a_k^{'}\cdot\mathbf{z}\in\mathbf{B}_{a_k}$. Le groupe Γ étant ϵ-Ping-Pong, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $\delta\left(\left(a_0^{n_0}...a_k^{n_k}\right)\cdot\mathbf{x},\left(a_0^{n_0}...a_k^{n_k}a_k^{'}\right)\cdot\mathbf{z}\right)\leqslant\epsilon^k\,\delta\left(\mathbf{x},a_k^{'}\cdot\mathbf{z}\right)\leqslant\epsilon^k$, si bien que $\left(\left(a_0^{n_0}...a_k^{n_k}\,a_k^{'}\right)\cdot\mathbf{z}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\pi_+(\mathbf{a})$. L'ensemble $\Lambda(\Gamma)$ étant Γ-invariant et fermé dans $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$, nous avons $\pi_+(\mathbf{a})\in\Lambda(\Gamma)$.

Étape 3. *Montrons que, pour tout* $(a_k,n_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\Sigma_+$ *et tout* $\mathbf{x}\in\mathbf{B}_\Gamma$, *la limite de la suite* $\left(\left(a_0...a_k^{n_k}\right)\cdot\mathbf{x}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *ne dépend pas de* $\mathbf{x}$. Considérons $(a_k,n_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\Sigma_+$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tous $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{B}_\Gamma$, on a $\delta\left(\left(a_0^{n_0}...a_k^{n_k}\right)\cdot\mathbf{x},\left(a_0^{n_0}...a_k^{n_k}\right)\cdot\mathbf{y}\right)\leqslant\epsilon^k$ si bien que, d'après ce qui précède, les suites $\left(\left(a_0^{n_0}...a_k^{n_k}\right)\cdot\mathbf{x}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\left(a_0^{n_0}...a_k^{n_k}\right)\cdot\mathbf{y}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Étape 4. *Montrons que* π_+ *est injective.* Considérons deux éléments distincts $\mathbf{a}=(a_k,n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\mathbf{a}'==\left(a_k^{'},n_k^{'}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de Σ_+ et posons $\mathbf{y}=\pi_+(\mathbf{a})$ et $\mathbf{y}'=\pi_+(\mathbf{a}')$. Quitte à appliquer à $\mathbf{y}$ et $\mathbf{y}'$ un élément de Γ, on peut supposer que $a_0'\neq a_0^{\pm1}$. Par la dynamique de « Ping-Pong », on a $\mathbf{y}\in\mathbf{b}_{a_0}$ et $\mathbf{y}'\in\mathbf{b}_{a_0'}$; on a donc $\mathbf{y}\neq\mathbf{y}'$, sinon on aurait $\mathbf{b}_{a_0}\cap\mathbf{b}_{a_0'}\neq\emptyset$ soit $a_0'=a_0^{\pm1}$.

Étape 5. *Montrons que, pour tout* $\mathbf{a}\in\Sigma_+$, *on a* $\pi_+(\mathbf{a})\in\Lambda(\Gamma)^0$. Si tel n'était pas le cas, il existerait $\gamma\in\Gamma$ et $a\in\mathcal{A}$ tels que, pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$(a^n\,\gamma)\cdot\pi_+(\mathbf{a})=\pi_+(\mathbf{a})\,.$$

Contradiction avec le fait que π_+ soit injective.

Étape 6. *Montrons que* π_+ *est une surjection de* Σ_+ *dans* $\Lambda(\Gamma)^0$. Fixons $\mathbf{z}\in\Lambda(\Gamma)^0$. Grâce à un procédé de récurrence utilisant (4.4), on montre l'existence d'une suite $(a_k,n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de Σ_+ ainsi que d'une suite $(\mathbf{z}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\Lambda(\Gamma)^0$ telles que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on ait :

$$\mathbf{z}_k\in\mathbf{B}_{a_k}\quad\text{et}\quad\mathbf{z}=\left(a_0^{n_0}...a_k^{n_k}\right)\cdot\mathbf{z}_k.$$

Le groupe Γ étant ϵ-Ping-Pong, les transformations $a\in\mathcal{A}$ sont ϵ-lipschitziennes sur $\mathbf{B}_a$ si bien que, pour tout $k\in\mathbb{N}$ nous avons

$$\delta\left(\left(a_0^{n_0}...a_k^{n_k}\right)\cdot\mathbf{z}_k,\left(a_0^{n_0}...a_k^{n_k}\right)\cdot\mathbf{x}\right)\leqslant\epsilon^k.$$

D'où la convergence de $\left(\left(a_0^{n_0}...a_k^{n_k}\right)\cdot \mathbf{x}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ vers $\mathbf{z}$. L'application π_+ est donc surjective. Ceci achève la démonstration de la proposition 4.13. $\square$

5. Sur la fonction orbitale $N_\Gamma\left(x_0, R\right)$

Dans ce paragraphe, nous démontrons le théorème 1.4. Les méthodes employées pour démontrer sont en partie inspirées des travaux de M. Pollicott et R. Scharp dans [Pol-Sha].

Introduisons la mesure borélienne $\nu_{\Gamma,x_0} = \sum_{\gamma\in\Gamma}\delta_{\|\gamma(x_0)\|}$, où δ_a désigne la mesure de Dirac en a. Pour tout $R \geqslant 0$, on a

$$\mathrm{Card}\{\gamma\in\Gamma/\|\gamma\left(x_0\right)\|\leqslant R\} = \nu_{\Gamma,x_0}\left([0,R]\right).$$

Nous montrerons que cette mesure vérifie les hypothèses du théorème taubérien d'Ikehara-Wiener dont nous rappelons ci-dessous l'énoncé.

Théorème 5.1 (Théorème 2.10 de [E-MF]). — *Soit ν une mesure borélienne positive sur l'intervalle $[1,+\infty[$ de fonction de répartition N_ν. On suppose qu'il existe $\tau > 0$ tel que, pour tout $s\in\{z\in\mathbb{C}/\mathcal{R}e\left(z\right)>\tau\}$, on ait :*

$$\int_1^\infty T^{-s}d\nu\left(T\right) = \frac{C}{s-\tau}+H\left(s\right)$$

où H est une fonction continue sur le demi-espace fermé $\{z\in\mathbb{C}/\mathcal{R}e\left(z\right)\geqslant \tau\}$ et C une constante strictement positive. Alors

$$N_\nu\left(R\right)\sim C\,R^\tau \text{ lorsque } R\to+\infty.$$

Introduisons la transformée de Laplace P_{Γ,x_0} de la mesure ν_{Γ,x_0} définie formellement pour $z\in\mathbb{C}$ par

$$P_{\Gamma,x_0}\left(z\right) = \int_0^{+\infty}T^{-z}d\nu_{\Gamma,x_0}\left(T\right).$$

Pour tout $s\in\mathbb{R}$, on a

$$P_{\Gamma,x_0}\left(s\right) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\|\gamma\left(x_0\right)\|^{-s}$$

si bien que le domaine de définition de P_{Γ,x_0} n'est autre que le demi-espace ouvert $\{z\in\mathbb{C}/\mathcal{R}e\left(z\right)>\tau\}$. En effet, d'après la proposition 4.3, il existe $c>0$ tel que, pour tout $\gamma\in\Gamma$, on ait $\|\gamma\| \overset{c}{\asymp} \|\gamma\left(x_0\right)\|$. Les séries $\sum_{\gamma\in\Gamma}\|\gamma\left(x_0\right)\|^{-z}$ et $\sum_{\gamma\in\Gamma}\|\gamma\|^{-z}$ sont donc de même nature et, par définition de τ, la série $\sum_{\gamma\in\Gamma}\|\gamma\left(x_0\right)\|^{-z}$ est absolument convergente si et seulement si $\mathcal{R}e\left(z\right)>\tau$. Introduisons les

Notations 5.2. —

- On note D l'ensemble des nombres complexes de partie réelle $>\max\{\tau_{\langle a\rangle}/a\in\mathcal{A}\}$, où $\tau_{\langle a\rangle}$ désigne l'exposant critique du sous-semi-groupe engendré par a.
- On note Ξ l'adhérence dans $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ de l'orbite de $\mathbf{x}_0$ sous l'action de Γ et $\Lambda(\Gamma)$ l'ensemble limite de Γ.
- On note $\mathcal{B}_\infty(\Xi,\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions boréliennes, bornées définies sur Ξ à valeurs dans $\mathbb{C}$, muni de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$.

Expliquons à présent les méthodes employées pour prolonger la fonction P_{Γ,x_0} au demi-espace fermé $\{z\in\mathbb{C}/\mathcal{R}e(z)\geqslant\tau\}$. La première étape consiste à introduire une famille $(\mathcal{L}_z/z\in D)$ d'endomorphismes de $\mathcal{B}_\infty(\Xi,\mathbb{C})$ telle que, pour tout $z\in D$ et tout $n\in\mathbb{N}$, on ait :

$$\mathcal{L}_z^n(\mathbf{1}_\Xi)(\mathbf{x}_0)=\sum_{\gamma\in\Gamma^{(n)}}\|\gamma(x_0)\|^{-z}, \tag{5.1}$$

où l'on rappelle que $\Gamma^{(n)}$ désigne l'ensemble des transformations de longueur n. On peut alors écrire

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}\|\gamma(x_0)\|^{-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathcal{L}_z^n(\mathbf{1}_\Xi)(\mathbf{x}_0). \tag{5.2}$$

Cette formule permet alors de relier l'étude de la fonction P_{Γ,x_0} à celle du spectre des opérateurs $\mathcal{L}_z$ ou, plus précisemment à celui de leur restriction à l'espace des fonctions lipschitziennes sur Ξ.

5.1. Opérateurs de Ruelle

5.1.1. Définition

Quelques notations seront nécessaires

Notations 5.3. — Soit γ un élément de Γ et $(a_i,n_i)_{1\leqslant i\leqslant l}$ sa $\mathcal{A}^*$-décomposition.

- On pose $\Xi_\gamma=\Xi\cap\left(\{\mathbf{x}_0\}\cup\left(\bigcup_{g\in\mathcal{A}/g\neq a_l^{\pm1}}\mathbf{b}_g\right)\right)$.
- On considère la fonction $\Xi\to\mathbb{R}$, $\mathbf{x}\mapsto p(\gamma,\mathbf{x})$ définie pour $\mathbf{x}\in\Xi$ par $\mathrm{p}(\gamma,\mathbf{x})=\frac{\|x\|}{\|\gamma(x)\|}1_{\Xi_\gamma}(\mathbf{x})$, où x est un représentant de $\mathbf{x}$.

Si $\phi \in \mathcal{B}_\infty(\Xi, \mathbb{C})$, pour tout $\mathbf{x} \in \Xi$ et tout $z \in D$, la série

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{n=1}^{+\infty} p^z(a^n, \mathbf{x})\, \phi\big(a^n \cdot \mathbf{x}\big)$$

converge. En effet, d'après la proposition 4.3, il existe $c > 0$ tel que, pour tout $a \in \mathcal{A}$, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\mathbf{x} \in \Xi_a$, on ait $p(a^n, \mathbf{x}) \overset{c}{\asymp} \|a^n\|^{-1}$; on en déduit que la série $\sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{n=1}^{+\infty} \|p^z(a^n, \cdot)\|_\infty$ est convergente dès que $z \in D$. Ainsi, par définition de D, la série $\sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{n=1}^{+\infty} \|p^z(a^n, \cdot)\|_\infty$ est absolument convergente dès que $z \in D$. En fait, pour tout $\phi \in \mathcal{B}_\infty(\Xi, \mathbb{C})$ et tout $\mathbf{x} \in \Xi$, on a

$$\Big| \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{n=1}^{+\infty} p^z(a^n, \mathbf{x})\ \phi(a^n \cdot \mathbf{x}) \Big| \leqslant \kappa \|\phi\|_\infty,$$

où $\kappa = \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{n=1}^{+\infty} \|p^z(a^n, \cdot)\|_\infty$. Cette dernière inégalité nous permet d'introduire la

Définition 5.4. — *Pour tout $z \in D$, on note $\mathcal{L}_z$ l'endomorphisme de $\mathcal{B}_\infty(\Xi, \mathbb{C})$ défini pour $\phi \in \mathcal{B}_\infty(\Xi, \mathbb{C})$ par*

$$\forall \mathbf{x} \in \Xi \qquad \mathcal{L}_z(\phi)(\mathbf{x}) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{n=1}^{+\infty} p^z(a^n, \mathbf{x})\ \phi(a^n \cdot \mathbf{x}).$$

Les itérés de $\mathcal{L}_z$ sont donnés par la formule suivante : *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $z \in D$, tout $\phi \in \mathcal{B}_\infty(\Xi, \mathbb{C})$ et tout $\mathbf{x} \in \Xi$, nous avons*

$$\mathcal{L}_z^n(\phi)(\mathbf{x}) = \sum_{\gamma \in \Gamma^{(n)}} p^z(\gamma, \mathbf{x})\, \phi(\gamma \cdot \mathbf{x}). \tag{5.3}$$

En particulier, les opérateurs $(\mathcal{L}_z / z \in D)$ vérifient la relation (5.1).

5.1.2. Continuité des opérateurs de Ruelle

Dans ce paragraphe, nous montrons que les opérateurs $\mathcal{L}_z$ agissent continûment sur $C(\Xi)$ mais aussi sur l'espace $L(\Xi)$ des fonctions lipschitziennes sur Ξ. Nous utiliserons les

Notations 5.5. —

- *On note $C(\Xi)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues définies sur Ξ à valeurs dans $\mathbb{C}$, muni de la norme uniforme $\|.\|_\infty$.*

- *On note $L(\Xi)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel constitué des fonctions lipschitziennes définies sur Ξ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si ϕ est une fonction de $L(\Xi)$ on pose*

$$[\phi] = \sup_{a\in\mathcal{A}} \sup\{\frac{|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y})|}{\delta(\mathbf{x},\mathbf{y})} / \mathbf{x},\mathbf{y} \in \Xi_a, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}\}.$$

On munit l'espace $L(\Xi)$ de la norme $\|\phi\|_{L(\Xi)} = \|\phi\|_\infty + [\phi]$.

- *On note* $\mathrm{End}(L(\Xi))$ *l'espace vectoriel complexe des endomorphismes continus de $L(\Xi)$ muni de la norme usuelle.*

D'après le théorème d'Ascoli, l'espace $L(\Xi)$, muni de la norme $\|.\|_{L(\Xi)}$, est un $\mathbb{C}$-espace de Banach et l'injection canonique de $L(\Xi)$ dans $C(\Xi)$ est compacte.

Nous allons démontrer la

Proposition 5.6. — *Pour tout $z \in D$, l'opérateur $\mathcal{L}_z$ agit continûment sur $C(\Xi)$ et $L(\Xi)$.*

Pour démontrer cette proposition, il suffit de contrôler les normes dans $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_{L(\Xi)}$ des fonctions **poids** $(p(\gamma,\cdot)/\gamma \in \Gamma)$. Nous avons le

Lemme 5.7. — *L'ensemble $\{\|\gamma\| \times \|p(\gamma,\cdot)\|_{L(\Xi)}/\gamma \in \Gamma\}$ est borné.*

Démonstration du lemme 5.7. — À l'aide de la proposition 4.3, nous fixons $\kappa_1 > 0$ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ vérifiant $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_\gamma$, on ait

$$\|\gamma\| \overset{\kappa_1}{\asymp} \frac{\|\gamma(x)\|}{\|x\|}.$$

De plus, nous fixons $\kappa_2 > 0$ tel que, pour tous vecteurs unitaires $x, y \in \mathbb{R}^d$, on ait

$$\inf\{\|x-y\|, \|x+y\|\} \leqslant \kappa_2\, \delta(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Considérons $\gamma \in \Gamma$. En observant que, pour $\mathbf{x} \in \Xi_\gamma$, on a $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_\gamma$ il vient $\|\gamma\| \times p(\gamma,\mathbf{x}) \leqslant \kappa_1$, si bien que

$$\|\gamma\| \times \|p(\gamma,\cdot)\|_\infty \leqslant \kappa_1. \tag{5.4}$$

De même, pour tous $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Xi_\gamma$, on a :

$$\|\gamma\| \times |p(\gamma,\mathbf{x}_1) - p(\gamma,\mathbf{x}_2)| \leqslant \|\gamma\|^2 \frac{\|x_1 - x_2\|}{\|\gamma(x_1)\| \times \|\gamma(x_2)\|}$$

où x_1 et x_2 sont respectivement des représentants unitaires de $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$. Par le choix de κ_1 et κ_2, pour tous $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Xi_\gamma$, nous obtenons

$$\|\gamma\| \times |p(\gamma, \mathbf{x}_1) - p(\gamma, \mathbf{x}_2)| \leqslant \kappa_1^2 \kappa_2 \delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2),$$

si bien que

$$\|\gamma\| \times [p(\gamma, \cdot)] \leqslant \kappa_1^2 \kappa_2. \tag{5.5}$$

Le lemme 5.7 résulte des inégalités (5.4) et (5.5). □

On déduit du lemme 5.7 la

PROPOSITION 5.8. — *L'application*

$$\mathcal{L}_\cdot : D \to \mathrm{End}(L(\Xi)) \qquad z \mapsto \mathcal{L}_z$$

est analytique sur D.

5.1.3. Le spectre des opérateurs de Ruelle sur $L(\Xi)$

Nous décrivons ici le spectre de $\mathcal{L}_z$ en restriction à $L(\Xi)$. Aussi, pour tout $z \in D$, nous notons $r(z)$ le rayon spectral de $\mathcal{L}_z$ sur $L(\Xi)$.

Dans un premier temps, nous décrivons le spectre périphérique de $\mathcal{L}_z$ lorsque $z \in D$ est réel. Puis, nous contrôlons le rayon spectral de $\mathcal{L}_z$ lorsque z est un élément quelconque de D.

Nous avons les deux propositions suivantes

PROPOSITION 5.9. — *Soit s un réel de D.*

1. *Cas où $Card(\mathcal{A}) \geqslant 6$. Il existe une unique mesure de probabilité ν_s sur Ξ, une unique fonction $h_s \in L(\Xi)$ et un endomorphisme Q_s sur $L(\Xi)$, de rayon spectral $< r(s)$, tels que*

   $$Q_s \circ \mathcal{L}_s = \mathcal{L}_s \circ Q_s \;\; Q_s(h_s) = 0 \;\; \text{et} \;\; \mathcal{L}_s(\phi) = r(s)\; h_s \int_\Xi \phi \, d\nu_s + Q_s(\phi).$$

   De plus, le support topologique de ν_s contient $\Lambda(\Gamma)$ et la fonction h est strictement positive sur Ξ.

2. *Cas où $Card(\mathcal{A}) = 4$. Il existe une mesure de probabilité ν_s sur Ξ, deux fonctions $h_s^{(1)}, h_s^{(2)} \in L(\Xi)$ et un endomorphisme Q_s de $L(\Xi)$ de rayon spectral $< \rho(s)$ tels que*

   $$Q_s \circ \mathcal{L}_s = \mathcal{L}_s \circ Q_s, \; Q_s\left(h_s^{(1)}\right) = Q_s\left(h_s^{(2)}\right) = 0$$
   $$\text{et} \;\; \mathcal{L}_s(\phi) = r(s)\; h_s^{(1)} - r(s)\; h_s^{(2)} \int_\Xi \phi \, d\nu_s + Q_s(\phi).$$

De plus, le support topologique de ν_s contient $\Lambda(\Gamma)$ et les fonctions $h_s^{(1)}$ et $h_s^{(2)}$ ne s'annulent pas sur Ξ.

Dans le cas où $\mathrm{Card}\,(\mathcal{A}) \geqslant 6$ et avec les notations de cette proposition, les propriétés de h_s, Q_s et ν_s assurent que, pour tout $\phi \in L\,(\Xi)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\mathcal{L}_s^n\,(\phi) = r\,(s)^n\ h_s \int_\Xi \phi\, d\nu_s + Q_s^n\,(\phi)\,.$$

De plus, le rayon spectral de Q_s étant $< \rho\,(s)$, pour tout $\phi \in L\,(\Xi)$, la suite $\left(\frac{1}{r(s)^n}\mathcal{L}_s^n\,(\phi)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $h_s \int_\Xi \phi\, d\nu_s$.

De même, dans le cas où $\mathrm{Card}\,(\mathcal{A}) = 4$ et toujours avec les notations de cette proposition, les propriétés de $h_s^{(1)}$, $h_s^{(2)}$, Q_s et ν_s assurent que, pour tout $\phi \in L\,(\Xi)$ et tout $n \geqslant 1$, on ait :

$$\mathcal{L}_s^n\,(\phi) = \left(r^n\,(s)\,h_s^{(1)} + (-r\,(s))^n\ h_s^{(2)}\right) \int_\Xi \phi\, d\nu_s\ +\ Q_s^n\,(\phi)\,.$$

De plus, le rayon spectral de Q_s étant $< \rho\,(s)$, pour tout $\phi \in L\,(\Xi)$, la suite $\left(\rho^{-2\,n}\,(s)\,\mathcal{L}_s^{2\,n}\,(\phi)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\left(h_s^{(1)} + h_s^{(2)}\right) \int_\Xi \phi\, d\nu_s$.

Proposition 5.10. — *Pour tout $z \in D$ on a*

$$r\,(z) \leqslant r\,(\mathcal{R}e\,(z)) \tag{5.6}$$

De plus, si $r\,(\mathcal{R}e\,(z))$ est une valeur spectrale de $\mathcal{L}_z$, alors z est réel.

Pour démontrer ces deux propositions, il nous faut contrôler le rayon spectral essentiel sur $L\,(\Xi)$ des opérateurs $\mathcal{L}_z$, avec $z \in D$. À cet effet, nous allons démontrer le

Lemme 5.11. — *Pour tout $z \in D$, nous avons*

$$r_e\,(z) \leqslant \epsilon\, r\,(\mathcal{R}e\,(z))\,. \tag{5.7}$$

où $r_e\,(z)$ désigne le rayon spectral essentiel dans $L\,(\Xi)$ de $\mathcal{L}_z$. En particulier, l'endomorphisme $\mathcal{L}_z$ est quasi-compact lorsque z est réel.

Rappelons que Γ est un groupe ϵ-Ping-Pong sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$. En particulier, pour tout $a \in \mathcal{A}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, la restriction de a^n à $\mathbf{B}_a$ est ϵ-lipschitzienne.
Démonstration du lemme 5.11. Il suffit de montrer que : *pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $R_n > 0$ tel que pour tout $\phi \in L\,(\Xi)$:*

$$[\mathcal{L}_z^n\,(\phi)] \leqslant \epsilon^n\,[\phi]\,\|\mathcal{L}_{\mathcal{R}e(z)}^n(\mathbf{1}_\Xi)\|_\infty + R_n\|\phi\|_{L(\Xi)}. \tag{5.8}$$

En effet, cette inégalité est à la base du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu sur les opérateurs quasi-compacts, et une version améliorée de ce théorème, due à H. Hennion [Hen] (*voir également le théorème* XIV.3 *de [Hen-Her]*), précise que l'inégalité (5.7) découle de (5.8).

Grâce au lemme 5.7, nous fixons $\kappa > 0$ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, nous ayons $\|\gamma\| \, \|p(\gamma, \cdot)\|_{L(\Xi)} \leqslant \kappa$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons $R_n = \kappa^{\mathcal{R}e(z)} \sum_{\gamma \in \Gamma^{(n)}} \|\gamma\|^{-\mathcal{R}e(z)}$.

Fixons $a \in \mathcal{A}$ et $\phi \in L(\Xi)$ et montrons (5.8). Grâce à (5.3), pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Xi_a$, nous avons

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_z(\phi)(\mathbf{x}_1) - \mathcal{L}_z(\phi)(\mathbf{x}_2)| \leqslant & \sum_{\gamma \in \Gamma^{(n)}} |p^z(\gamma, \mathbf{x}_1)| \, |\phi(\gamma \cdot \mathbf{x}_1) - \phi(\gamma \cdot \mathbf{x}_2)| \\ & + \sum_{\gamma \in \Gamma^{(n)}} |p^z(\gamma, \mathbf{x}_1) - p^z(\gamma, \mathbf{x}_2)| \, |\phi(\gamma \cdot \mathbf{x}_2)| \end{aligned}$$

Le groupe Γ étant ϵ-Ping-Pong sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$, pour tout $\gamma \in \Gamma^{(n)}$ et tous $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{B}_\gamma$, nous avons $\delta(\gamma \cdot \mathbf{x}_1, \gamma \cdot \mathbf{x}_2) \leqslant \epsilon^n \, \delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. Ainsi, en rappelant que la fonction $\Xi \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto p(\gamma, \mathbf{x})$ est nulle en dehors de $\mathbf{B}_\gamma$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Xi_a$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma^{(n)}} |p^z(\gamma, \mathbf{x}_1)| \, |\phi(\gamma \cdot \mathbf{x}_1) - \phi(\gamma \cdot \mathbf{x}_2)| & \leqslant \epsilon^n [\phi] \, \delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \sum_{\gamma \in \Gamma^{(n)}} |p^z(\gamma, \mathbf{x}_1)| \\ & \leqslant \epsilon^n [\phi] \, \delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \, \|\mathcal{L}^n_{\mathcal{R}e(z)}(\mathbf{1}_\Xi)\|_\infty. \end{aligned}$$

Par ailleurs, par le choix de $\kappa > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Xi_a$, nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in \Gamma^{(n)}} |p^z(\gamma, \mathbf{x}_1) - p^z(\gamma, \mathbf{x}_2)| \, |\phi(\gamma \cdot \mathbf{x}_2)| \\ & \quad \leqslant \|\phi\|_\infty \sum_{\gamma \in \Gamma^{(n)}} |p^{\mathcal{R}e(z)}(\gamma, \mathbf{x}_1) - p^{\mathcal{R}e(z)}(\gamma, \mathbf{x}_2)| \\ & \quad \leqslant \|\phi\|_\infty \, \kappa^{\mathcal{R}e(z)} \, \delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \sum_{\gamma \in \Gamma^{(n)}} \|\gamma\|^{-\mathcal{R}e(z)} \leqslant R_n \|\phi\|_{L(\Xi)} \, \delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{aligned}$$

D'où l'inégalité (5.8). $\square$

Démonstration de la proposition 5.9. — On note $\mathcal{M}(\Xi)$ l'espace des mesures boréliennes complexes sur Ξ muni de la topologie faible $*$ et $\mathcal{M}^{1,+}(\Xi)$ l'ensemble des mesures de probabilités boréliennes sur Ξ. L'opérateur $\mathcal{L}_s$

étant continu sur $C(\Xi)$, on considère l'opérateur $\mathcal{L}_s^*$ de $\mathcal{M}(\Xi)$ défini pour tout $\mu \in \mathcal{M}(\Xi)$ et tout $\phi \in C(\Xi)$ par

$$\mathcal{L}_s^*(\mu)(\phi) = \int_\Xi \mathcal{L}_s(\phi)\, d\mu.$$

Étape 1. Il existe $\chi \geqslant 0$ et $\nu \in \mathcal{M}^{1,+}(\Xi)$ tels que $\mathcal{L}_s^*(\nu) = \chi\nu$. De plus, le support de ν contient $\Lambda(\Gamma)$. Considérons l'application $\Psi : \mathcal{M}(\Xi) \to \mathcal{M}(\Xi)$ définie pour tout $\mu \in \mathcal{M}(\Xi)$ et tout $\phi \in C(\Xi)$ par $\Psi(\mu)(\phi) = \mu(\mathcal{L}_s(\phi)) / \mu(\mathcal{L}_s(\mathbf{1}|_\Xi))$.

L'opérateur $\mathcal{L}_s$ étant positif et continu, l'application Ψ est continue et préserve le compact $\mathcal{M}^{1,+}(\Xi)$. Ainsi, par le théorème de Schauder-Tychonov, l'application Ψ admet donc un point fixe dans $\mathcal{M}^{1,+}(\Xi)$. Nous fixons maintenant $\nu \in \mathcal{M}^{1,+}(\Xi)$ telle que $\Psi(\nu) = \nu$ et nous posons $\chi = \nu(\mathcal{L}_s(\mathbf{1}|_\Xi))$.

Afin de vérifier que le support topologique $S \subset \Xi$ de ν contient $\Lambda(\Gamma)$, introduisons la fonction $f : \Xi \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) := \delta(\mathbf{x}, S)$. Cette fonction est continue, positive sur Ξ et nulle sur S et l'on a donc $\int_\Xi f\, d\nu = 0$. L'égalité $\mathcal{L}_s^*(\nu) = \chi\nu$ assure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_\Xi \mathcal{L}_s^n(f)\, d\nu = 0$; la fonction $\mathcal{L}_s^n(f)$ étant continue et positive sur Ξ, elle est en fait nulle sur S. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\mathbf{x} \in \Xi$, on a $\sum_{\gamma \in \Gamma(n)} p^s(\gamma, \mathbf{x})\, f(\gamma \cdot \mathbf{x}) = 0$, ce qui n'est possible que si :

$$\forall \gamma \in \Gamma, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{S} \cap \Xi_\gamma \qquad f(\gamma \cdot \mathbf{x}) = 0. \tag{5.9}$$

Fixons à présent γ une transformation proximale de Γ, notons $\mathbf{x}_\gamma$ sa droite attractive et considérons $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$. Quitte à remplacer $\mathbf{x}$ par $a' \cdot \mathbf{x}$, où $a' \in \mathcal{A}$ diffère de la première lettre de la $\mathcal{A}$-décomposition de γ, on peut supposer $\mathbf{x} \in \Xi_\gamma$. D'après (5.9), pour tout $n \geqslant 0$, on a alors $\gamma^n \cdot \mathbf{x} \in \mathbf{S}$. Le sous-ensemble $\mathbf{S}$ étant fermé dans Ξ, nous avons $\mathbf{x}_\gamma \in \mathbf{S}$ puisque $\lim_{n\to+\infty} \gamma^n \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}_\gamma$.

Ceci est suffisant car l'ensemble des droites attractives des transformations proximales de Γ est dense dans $\Lambda(\Gamma)$.
Étape 2. Il existe une fonction strictement positive $h \in L(\Xi)$ telle que $\mathcal{L}_s(h) = \chi\, h$. Grâce au lemme 5.7, nous fixons $c = c(\Gamma) > 0$ tel que, pour tout $a \in \mathcal{A}$ et tous $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Xi_a$, on ait

$$p(a, \mathbf{x}_1) \leqslant e^{c\delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)} p(a, \mathbf{x}_2). \tag{5.10}$$

De plus, nous fixons $l > e^{\frac{\epsilon s c}{1-\epsilon}}$ et notons L le sous-ensemble de $L(\Xi)$ constitué des fonctions φ strictement positives sur Ξ et telles que

$$\forall a \in \mathcal{A},\ \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Xi_a \quad \varphi(\mathbf{x}_1) \leqslant l^{\delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)} \varphi(\mathbf{x}_2) \quad \text{et} \quad \int_\Xi \varphi\, d\nu = 1.$$

L'ensemble L est non vide, convexe et stable par l'application $L(\Xi) \to L(\Xi)$, $f \mapsto \mathcal{L}_s(f)/\chi$. De plus, pour tout $\varphi \in L$ on a $[\varphi] \leqslant l\, e^l$ si bien que L est une partie équicontinue de $C(\Xi)$. De plus, l'ensemble L est borné car, pour tout $\varphi \in L$, tout $a \in \mathcal{A}$ et tous $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Xi_a$ on a $\varphi(\mathbf{x}_1) \leqslant l^{\delta(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)}\varphi(\mathbf{x}_2)$ si bien qu'en intégrant cette expression, il vient

$$l^{-1} \inf_{a\in\mathcal{A}} \nu(\Xi_a) \leqslant \varphi(\mathbf{x}) \leqslant l \sup_{a\in\mathcal{A}} \nu(\Xi_a). \tag{5.11}$$

Par le théorème d'Ascoli, L est relativement compacte dans $C(\Xi)$ si bien que, grâce au théorème de Schauder-Tychonov, nous fixons $h \in \bar{L}$ tel que $\mathcal{L}_s(h) = \chi\, h$. La fonction h est strictement positive ; en effet, d'après la formule (5.11), toutes les fonctions de $\bar{L}$ sont strictement positives, puisque $\nu(\Xi_a) > 0$ pour tout $a \in \mathcal{A}$.

Étape 3. *On suppose que* Card$(\mathcal{A}) \geqslant 6$. *Pour tout $\phi \in L(\Xi)$, la suite $\left(\chi^{-n}\mathcal{L}_s^n(\phi)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $h \int_\Xi \phi\, d\nu$.* Nous avons besoin de considérer l'opérateur $Q : \mathcal{B}_\infty(\Xi,\mathbb{C}) \to \mathcal{B}_\infty(\Xi,\mathbb{C})$ défini pour $\phi \in \mathcal{B}_\infty(\Xi,\mathbb{C})$ par $Q(\phi) = \frac{1}{\chi\, h}\mathcal{L}_s(h\,\phi)$. L'intérêt d'introduire cet opérateur réside essentiellement dans le fait qu'il soit markovien ; en effet, nous avons $Q(1_\Xi) = \mathbf{1}_\Xi$ et que $Q(\phi) \geqslant 0$ dès que ϕ est positive.

Fixons $\phi \in L(\Xi)$ et montrons que $\left(Q^n(\phi)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $C(\Xi)$ vers $\int_\Xi \phi\, h\, d\nu$. Sans perdre en généralité, nous supposerons que ϕ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. En reprenant les arguments utilisés pour établir (5.8), on montre qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$[Q^n(\phi)] \leqslant \epsilon^n [\phi] + \frac{C}{1-\epsilon}\|\phi\|_\infty.$$

Cette inégalité assure que $\{Q^n(\phi)/n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue. Cet ensemble étant également borné dans $C(\Xi)$, par le théorème d'Ascoli, il est relativement compact. Il est donc suffisant de montrer que la fonction constante et égale à $\int_\Xi \phi\, h\, d\nu$ sur Ξ est la seule valeur d'adhérence dans $C(\Xi)$ de $\{Q^n(\phi) \in C(\Xi)/n \in \mathbb{N}\}$.

Pour cela, fixons une suite croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ telle que $\left(Q^{n_k}(\varphi)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $C(\Xi)$ vers $\varphi \in C(\Xi)$. L'opérateur Q étant markovien, la fonction φ est positive et

$$\inf_{\mathbf{x}\in\Xi} \varphi(\mathbf{x}) \leqslant \inf_{\mathbf{x}\in\Xi} Q(\varphi)(\mathbf{x}) \leqslant \sup_{\mathbf{x}\in\Xi} Q(\varphi)(\mathbf{x}) \leqslant \sup_{\mathbf{x}\in\Xi} \varphi(\mathbf{x})$$

D'autre part, la suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant croissante, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons $n_{k+1} \geqslant n_k + 1$ si bien que

$$\inf_{\mathbf{x}\in\Xi} Q^{n_k+1}(\phi)(\mathbf{x}) \leqslant \inf_{\mathbf{x}\in\Xi} Q^{n_{k+1}}(\phi)(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \sup_{\mathbf{x}\in\Xi} Q^{n_{k+1}}(\phi)(\mathbf{x}) \leqslant \sup_{\mathbf{x}\in\Xi} Q^{n_k+1}(\phi)(\mathbf{x}).$$

Ainsi, en faisant tendre k vers $+\infty$ et en remarquant que les suites $(Q^{n_k}(\phi))_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(Q^{n_k+1}(\phi)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers φ et $Q(\varphi)$, nous obtenons

$$\inf_{\mathbf{x}\in\Xi}\varphi(\mathbf{x})=\inf_{\mathbf{x}\in\Xi}Q(\varphi)(\mathbf{x}) \text{ et } \sup_{\mathbf{x}\in\Xi}Q(\varphi)(\mathbf{x})=\sup_{\mathbf{x}\in\Xi}\varphi(\mathbf{x}).$$

Par compacité de Ξ, nous fixons $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in\Xi$ tels que $\varphi(\mathbf{x}_1)=Q(\varphi)(\mathbf{x}_1)=\sup_{\mathbf{x}\in\Xi}\varphi(\mathbf{x})$ et $\varphi(\mathbf{x}_2)=Q(\varphi)(\mathbf{x}_2)=\inf_{\mathbf{x}\in\Xi}\varphi(\mathbf{x})$.

Notons à présent qu'il existe $a\in\mathcal{A}$ tel que $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in\mathbf{B}_a$. En effet, puisque $\Xi=\{\mathbf{x}_0\}\cup\left(\bigcup_{a\in\mathcal{A}}(\Xi\cap\mathbf{b}_a)\right)$, on peut fixer $a_1,a_2\in\mathcal{A}$ tels que $\mathbf{x}_i\in\Xi\cap\mathbf{b}_{a_i}; i=1,2$. Ainsi, par définition des parties en position ϵ-Ping-Pong, pour tout $a\in\mathcal{A}\setminus\{a_1^{\pm1},a_2^{\pm1}\}$ (on utilise ici le fait que $\mathrm{Card}(\mathcal{A})\geqslant 6$), nous avons $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\}\subset\mathbf{B}_a$.

Fixons $a\in\mathcal{A}$ tel que $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in\mathbf{B}_a$ et remarquons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous avons $\varphi(\mathbf{x}_1)=\varphi(a^n\cdot\mathbf{x}_1)$ et $\varphi(\mathbf{x}_2)=\varphi(a^n\cdot\mathbf{x}_2)$. L'application a étant contractante, pour tout $\mathbf{x}\in\mathbf{B}_a$, la suite $(a^n\cdot\mathbf{x})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{x}_a$ si bien que $\varphi(\mathbf{x}_1)=\varphi(\mathbf{x}_2)=\varphi(\mathbf{x}_a)$. La fonction φ est donc constante sur Ξ et la convergence de $(Q^{n_k}(\phi))_{k\in\mathbb{N}}$ vers φ étant uniforme, on a en fait $\varphi=\int_\Xi h\,\phi\,d\nu$ car :

$$\varphi=\int_\Xi h\,\varphi\,d\nu=\lim_{k\to+\infty}\int_\Xi\chi^{-n_k}\mathcal{L}_s^{n_k}(\phi\,h)\,d\nu=\int_\Xi\phi\,h\,d\nu.$$

Ceci termine la démonstration de l'étape 3.

Étape 4. *Conclusion dans le cas où* $\mathrm{Card}(\mathcal{A})\geqslant 6$. D'après l'inégalité (5.7), l'opérateur $\mathcal{L}_s : L(\Xi)\to L(\Xi)$ est quasi-compact. Il nous suffit donc de montrer que $r(s)$ est la seule valeur propre de module maximal de $\mathcal{L}_s$ et que celle-ci est simple.

Considérons une valeur spectrale ρ de $\mathcal{L}_s$ de module $r(s)$. L'opérateur $\mathcal{L}_s$ étant quasi-compact, ρ est une valeur propre de $\mathcal{L}_s$ si bien que nous fixons $f\in L(\Xi)$ non nul tel que $\mathcal{L}_s(f)=\rho\,f$.

D'après l'étape 3, la suite $(\chi^{-n}\,\rho^n\,f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $h\int_\Xi f\,d\nu$ puisque, pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous avons $\mathcal{L}_s^n(f)=\rho^n\,f$. Cela montre que $\chi=\rho$ et que les fonctions h et f sont proportionnelles. Nous en déduisons que $r(s)$ est la seule valeur spectrale de module maximal de $\mathcal{L}_s$ et que $r(s)$ est simple.

Étape 5. *On suppose que* $\mathrm{Card}(\mathcal{A})=4$. *Les réels χ et $-\chi$ sont des valeurs propres de $\mathcal{L}_s$ et, pour tout $\phi\in L(\Xi)$, la suite* $\left(\chi^{-2n}\mathcal{L}_s^{2n}(\phi)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* *uniformément vers* $h \int_\Xi \phi d\nu$. Le fait que χ soit une valeur propre de $\mathcal{L}_s$ découle de l'étape 2. Considérons à présent $f \in L(\Xi)$ définie par $f = h\,\mathbf{1}_{\Xi_{a_1}} - h\,\mathbf{1}_{\Xi_{a_2}}$. Nous avons $\mathcal{L}_s(f) = -\chi f$ si bien que $-\chi$ est une valeur propre de $\mathcal{L}_s$. On établit la deuxième affirmation en appliquant le même raisonnement que celui de l'étape 3 à l'opérateur Q^2.

Étape 6. *Conclusion dans le cas où* Card$(\mathcal{A}) = 4$. Il suffit d'appliquer le raisonnement précédent à l'opérateur $\mathcal{L}_s^2$. La démonstration de la proposition 5.9 est maintenant complète. □

Démonstration de la proposition 5.10. — Fixons $z = s+it \in D$ et posons $r = r(s)$. On note ν l'unique mesure de probabilité sur Ξ telle que $\mathcal{L}_s^*(\nu) = r\,\nu$ et h l'unique fonction strictement positive de $L(\Xi)$ telle que $\mathcal{L}_s(h) = r\,h$ et $\int_\Xi h\,d\nu = 1$. Rappelons que le support de la probabilité ν contient $\Lambda(\Gamma)$.

Étape 1. *Montrons que* $r(s+it) \leqslant r$. Pour cela, on raisonne par l'absurde et supposer que $r(s+it) > r$. D'après l'inégalité (5.7), on aurait

$$r_e(s+it) < \epsilon\, r(s+it)$$

si bien que l'opérateur $\mathcal{L}_{s+it}$ posséderait une valeur propre de module $r(s+it)$. On pourrait donc fixer un nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| = r(s+i\,t)$ et une fonction non nulle $\phi \in L(\Xi)$ tels que $\mathcal{L}_{s+it}(\phi) = \lambda\,\phi$. Pour tout $\mathbf{x} \in \Xi$ on aurait alors

$$|\lambda| \times |\phi(\mathbf{x})| = |\mathcal{L}_{s+it}(\phi)(\mathbf{x})| \leqslant \mathcal{L}_s(|\phi|)(\mathbf{x})$$

et en itérant cette inégalité on obtiendrait $\mathcal{L}_s^n(|\phi|)(\mathbf{x}) \geqslant |\lambda|^n \times |\phi(\mathbf{x})|$. Or, d'après la proposition 5.9, la suite $\left(\frac{1}{r^{2n}}\mathcal{L}_s^{2n}(|\phi|)(\mathbf{x})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $h(\mathbf{x}) \int_\Xi |\phi|\,d\nu$ tandis que $|\lambda|^{2n}/r^{2n} \to +\infty$. Contradiction.

Étape 2. *Montrons que si* $\rho(s)$ *est une valeur spectrale de* $\mathcal{L}_{s+it}$ *alors* $t = 0$. Dans ce cas, on a $r(s+it) \geqslant r(s)$ si bien que, d'après l'étape 1, on a $r(s+it) = r(s)$. En utilisant alors l'inégalité (5.7), on voit que

$$r_e(s+it) \leqslant \epsilon\, r(s+it)$$

et $r(s)$ est nécessairement une valeur propre de $\mathcal{L}_{s+it}$. On fixe alors $\phi \in L(\Xi)$ non nul tel que $\mathcal{L}_{s+it}(\phi) = r\,\phi$. On a

$$\forall \gamma \in \Gamma^{(1)}, \forall \mathbf{x} \in \Lambda(\Gamma) \cap \Xi_\gamma \qquad \frac{\phi(\gamma\cdot\mathbf{x})}{h(\gamma\cdot\mathbf{x})} p^{i\,t}(\gamma,\mathbf{x}) = \frac{\phi(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x})}. \tag{5.12}$$

En effet, comme précédemment, on a $r|\phi| \leqslant \mathcal{L}_s(|\phi|)$ et l'égalité $\mathcal{L}_s^*(\nu) = r\,\nu$ implique $r|\phi|(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_s(|\phi|)(\mathbf{x})$ pour ν-presque tout $\mathbf{x}$. Les fonctions $|\phi|$ et

$\mathcal{L}_s\left(|\phi|\right)$ étant continues sur $\Lambda(\Gamma)$ et le support de ν contenant $\Lambda(\Gamma)$, cette dernière égalité est en fait vérifiée pour tout $\mathbf{x} \in \Lambda(\Gamma)$. La valeur propre ρ étant simple, les fonctions $|\phi|$ et h sont finalement proportionnelles. L'égalité $\mathcal{L}_{s+it}\left(\phi\right) = r\,\phi$ peut alors s'écrire :

$$\frac{1}{h\big(\mathbf{x}\big)} \sum_{\gamma\in\Gamma^{(1)}} p^s\big(\gamma,\mathbf{x}\big)\, h\left(\gamma\cdot\mathbf{x}\right)\, p^{it}\left(\gamma,\mathbf{x}\right). \frac{\phi\big(\gamma\cdot\mathbf{x}\big)}{h\big(\gamma\cdot\mathbf{x}\big)} = r\,\frac{\phi\big(\mathbf{x}\big)}{h\big(\mathbf{x}\big)}$$

avec $|\phi|$ proportionnelle à h. Comme $\mathcal{L}_s\left(h\right) = r\,h$, ceci n'est possible que si

$$\forall\gamma\in\Gamma^{(1)}, \forall\mathbf{x}\in\Lambda(\Gamma)\cap\Xi_\gamma \qquad \frac{\phi\big(\gamma\cdot\mathbf{x}\big)}{h\big(\gamma\cdot\mathbf{x}\big)} p^{it}\left(\gamma,\mathbf{x}\right) = \frac{\phi\left(\mathbf{x}\right)}{h\left(\mathbf{x}\right)}.$$

Cette dernière égalité intervient de façon cruciale pour conclure que t est nécessairement nul.

En effet, fixons $a \in \mathcal{A}$ contractante et non-proximale, de rayon spectral ρ_a et d'indice $\nu_a \geqslant 2$. D'après la proposition 2.5, pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ vérifiant $\mathbf{x} \in \Xi_a$, il existe $c = c\big(\mathbf{x}\big) > 0$ tel que

$$\frac{\|a^n\left(x\right)\|}{\|x\|} = c\,\rho_a^n\, n^{\nu_a-1}(1+\epsilon(n)) \tag{5.13}$$

avec $\epsilon(n) \to 0$. En appliquant (5.12) à $\gamma = a^n$ et en remarquant que $\big(a^n\cdot\mathbf{x}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{x}_a$, la suite $\Big(p^{it}\big(a^n,\mathbf{x}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite non nulle. En particulier

$$\frac{p^{it}\big(a^n,\mathbf{x}\big)}{p^{it}\big(a^{n+1},\mathbf{x}\big)} = e^{it(\ln(\|a^{n+1}(x)\|)-\ln(\|a^n(x)\|))} \to 1 \quad \text{quand} \quad n\to+\infty,$$

où x désigne un représentant unitaire de $\mathbf{x}$. Ainsi, d'après la formule (5.13), on a $e^{i\,t\,\ln(\rho_a)} = 1$ si bien que la suite $\Big(e^{it(\nu_a-1)\ln(n)}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Ceci n'est possible que si $t = 0$. Ce qui achève la démonstration. $\square$

5.2. Démonstration du théorème 1.4

La démonstration de ce théorème se décompose en quatre étapes et repose sur un théorème classique de la théorie des pertubations. Nous utiliserons la

Notation 5.12. — Nous notons $L^*\left(\Xi\right)$ le dual topologique de $L\left(\Xi\right)$ muni de la norme usuelle. De plus, pour tout $z \in D$, nous notons $\mathcal{L}_z^*$ l'endomorphisme de $L^*\left(\Xi\right)$ défini pour tout $\nu \in L^*\left(\Xi\right)$ et tout $\varphi \in L\left(\Xi\right)$ par

$$\mathcal{L}_z^*\left(\nu\right)\left(\varphi\right) := \nu\left(\mathcal{L}_z\left(\varphi\right)\right).$$

Comme pour la proposition 5.9, il nous faut distinguer les cas où $\mathrm{Card}(\mathcal{A}) \geqslant 6$ et $\mathrm{Card}(\mathcal{A}) = 4$. Nous envisagerons tout d'abord la situation où $\mathrm{Card}(\mathcal{A}) \geqslant 6$ puis nous préciserons les modifications à apporter lorsque $\mathrm{Card}(\mathcal{A}) = 4$.

Le cas où $\mathrm{Card}(\mathcal{A}) \geqslant 6$**.** Nous adaptons ici à notre situation un énoncé classique de la théorie des perturbations.

PROPOSITION 5.13. — *Si* $\mathrm{Card}(\mathcal{A}) \geqslant 6$*. Il existe un voisinage* V *de* τ*, inclus dans* D*, et des applications analytiques* $z \mapsto \lambda(z)$ *de* V *dans* $\mathbb{C}$*,* $z \mapsto h_z$ *de* V *dans* $L(\Xi)$*,* $z \mapsto \nu_z$ *de* V *dans* $L^*(\Xi)$ *et* $z \mapsto Q_z$ *de* V *dans* $\mathrm{End}(L(\Xi))$ *telles que pour tout* $z \in V$ *on ait :*

- $\lambda(z)$ *est la seule valeur propre dominante de* $\mathcal{L}_z$ *et elle est simple.*
- ν_z *est un élément de* $L^*(\Xi)$ *tel que* $\mathcal{L}_z^*(\nu_z) = \lambda(z)\nu_z$*.*
- h_z *est une fonction de* $L(\Xi)$ *telle que* $\mathcal{L}_z(h_z) = \lambda(z)h_z$ *et* $\nu_z(h_z) = 1$*.*
- *le rayon spectral* $\rho(Q_z)$ *de l'opérateur* Q_z *est* < 1*.*

De plus, pour tout $z \in V$*, nous avons*

$$Q_z \circ \mathcal{L}_z = \mathcal{L}_z \circ Q_z,\ Q_z(h_z) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_z(\cdot) = \lambda(z)\ h_z\,\nu_z(\cdot) + Q_z(\cdot)\,.$$

En particulier, avec les notations de cette proposition, pour tout $z \in V$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{L}_z^n(\cdot) = \lambda^n(z)\ h_z\,\nu_z(\cdot) + Q_z^n(\cdot)\,.$$

Remarque.— Pour tout $s \in V$*, on a* $r(s) = |\lambda(s)|$*. En particulier, l'application* $D \mapsto \mathbb{R}$*,* $s \mapsto r(s)$ *est continue au voisinage de* τ*.*

Démonstration de la proposition 5.13.— D'après les propositions 5.8 et 5.9, les hypothèses du théorème III.8 de [Hen-Her] sont satisfaites. Ce qui est suffisant. □

Nous pouvons maintenant détailler la démonstration du théorème 1.4. Pour ce faire, nous utilisons les notations de la proposition 5.13.

Étape 1. *Pour tout nombre réel* $s \in D$*, on a* $r(s) < 1$ *si et seulement si* $s > \tau$*. En particulier, la fonction* $D \to \mathbb{R}$*,* $z \mapsto r(z)$ *étant continue au voisinage* τ*, nous avons* $r(\tau) = 1$. Fixons $s \in D$. D'après la proposition

5.9, il existe $Q_s \in \mathrm{End}\,(L\,(\Xi))$, de rayon spectral $\leqslant \epsilon\, r\,(s)$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\mathcal{L}_s^n\,(\mathbf{1}_\Xi)\,\big(\mathbf{x}_0\big) = r^n\,(s)\;h_s\big(\mathbf{x}_0\big)\,\nu_s\,(\mathbf{1}_\Xi) + Q_s^n\,(\mathbf{1}_\Xi)\,\big(\mathbf{x}_0\big).$$

La fonction h_s étant strictement positive sur Ξ et la mesure ν_s étant une mesure de probabilité sur Ξ, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}_s^n\,(\mathbf{1}_\Xi)\,\big(\mathbf{x}_0\big)$ converge si et seulement si $r\,(s) < 1$. Par ailleurs, on rappelle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}_s^n\,(\mathbf{1}_\Xi)\,\big(\mathbf{x}_0\big) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \|\gamma(x_0))\|^{-s} \asymp \sum_{\gamma\in\Gamma} \|\gamma\|^{-s}.$$

Ainsi, par définition de l'exposant critique τ, on voit que $(s > \tau \Rightarrow r(s) < 1)$ et $(s < \tau \Rightarrow r\,(s) \geqslant 1)$. La fonction $s \mapsto r\,(s)$ étant continue, on a donc nécessairement $r\,(\tau) = 1$. D'où l'étape 1.

Étape 2. *Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $\mathcal{R}e(z) \geqslant \tau$ alors* 1 *est une valeur spectrale de $\mathcal{L}_z$ si et seulement si $z = \tau$.* D'après l'étape 1, il suffit de montrer que si z est un nombre complexe tel que $\mathcal{R}e(z) \geqslant \tau$ et pour lequel 1 est une valeur spectrale de $\mathcal{L}_z$ alors $z = \tau$. Fixons un tel nombre complexe z. On sait que $r\,(z) \leqslant r\,(\mathcal{R}e\,(z))$ et que, pour tout $s > \tau$, on a $r\,(s) < 1$; on a donc $\mathcal{R}e(z) = \tau$. Puisque 1 est une valeur spectrale de $\mathcal{L}_z$, on a $r\,(z) \geqslant 1$; l'inégalité $r\,(z) \leqslant r\,(\tau) = 1$ permet donc d'affirmer que $r\,(z) = 1 = r\,(\tau)$, et d'après la proposition 5.10 on conclut que $z = \tau$. D'où l'étape 2.

Étape 3. *La fonction P_Γ admet un prolongement méromorphe au voisinage de τ et τ est un pôle simple.* D'après la proposition 5.9, la fonction h_τ est strictement positive, ainsi, quitte à réduire l'ensemble V, on peut supposer que, pour tout $z \in V$, la fonction h_z ne s'annule pas. Nous considérons la fonction $P_\Gamma^{(1)}$ définie sur l'ouvert V par

$$P_\Gamma^{(1)}\,(z) = \frac{h_z\big(\mathbf{x}_0\big)\nu_z\,(\mathbf{1}_\Xi)}{1-\lambda\,(z)} + (I - Q_z)^{-1}\,(\mathbf{1}_\Xi)\,(\mathbf{x}_0)\,.$$

D'après la proposition 5.13, les fonctions $z \mapsto Q_z$, $z \mapsto \nu_z$, $z \mapsto h_z$ et $z \mapsto \lambda\,(z)$ sont analytiques sur V et $\lambda(\tau) = 1$. Nous en déduisons que la fonction $P_\Gamma^{(1)}$ est méromorphe et admet τ comme unique pôle sur V. Le lemme suivant précise la nature de ce pôle ; il sera démontré en fin de section.

Lemme 5.14. — *Le réel τ est un pôle simple de la fonction $P_\Gamma^{(1)}$.*

Montrons à présent que les fonctions P_Γ et $P_\Gamma^{(1)}$ coïncident sur l'ensemble $\{z \in V/\mathcal{R}e(z) > \tau\}$. Fixons $z \in V$ tel que $\mathcal{R}e\,(z) > \tau$; d'après l'étape 1, on a $r(z) < 1$, et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}_z^n (\mathbf{1}_\Xi) \big(\mathbf{x}_0\big) = \frac{h_z\big(\mathbf{x}_0\big)\, \nu_z (\mathbf{1}_\Xi)}{1-\lambda(z)} + (I-Q_z)^{-1} (\mathbf{1}_\Xi) \big(\mathbf{x}_0\big) = P_\Gamma^{(1)}(z)\,.$$

Par ailleurs, puisque la partie réelle de z est strictement supérieure à τ alors, d'après la formule (5.2), on a $P_\Gamma(z) = \sum_{n\geqslant 0} \mathcal{L}_z^n (\mathbf{1}_\Xi)\big(\mathbf{x}_0\big)$. D'où l'étape 3.

Étape 4. *Conclusion.* Pour appliquer le théorème taubérien d'Ikehara-Wiener, d'après l'étape 2, il suffit de vérifier que la fonction P_Γ admet un prolongement continu sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} / \mathcal{R}e\,(z) \geqslant \tau\} \setminus \{\tau\}$. Pour ce faire, nous introduisons la fonction $P_\Gamma^{(2)}$ définie formellement par

$$P_\Gamma^{(2)}(z) = (I-\mathcal{L}_z)^{-1} (\mathbf{1}_\Xi)\big(\mathbf{x}_0\big).$$

D'après l'étape 1, on sait que 1 n'appartient pas au spectre de $\mathcal{L}_z$ lorsque $\mathcal{R}e\,(z) \geqslant \tau$ et $z \neq \tau$. La fonction $P_\Gamma^{(2)}$ est donc bien définie sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}/\mathcal{R}e\,(z) \geqslant \tau\} \setminus \{\tau\}$; elle est de plus continue sur cet ensemble d'après la proposition 5.8. Par ailleurs si $\mathcal{R}e(z) > \tau$, on a $r(z) < 1$ d'où

$$P_\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}_z^n (\mathbf{1}_\Xi)\big(\mathbf{x_0}\big) = (I-\mathcal{L}_z)^{-1} (\mathbf{1}_\Xi)\big(\mathbf{x}_0\big) = P_\Gamma^{(2)}(z)\,.$$

D'où l'étape 4.

Étape 5. *Conclusion.* D'après ce qui précède la mesure $\sum_{\gamma\in\Gamma} \delta_{\|\gamma(x_0)\|}$, où δ_x satisfait les hypothèses du théorème taubérien d'Ikehara-Wiener 5.1. Ce qui est suffisant. □

Démonstration du lemme 5.14. — La fonction $P_\Gamma^{(1)}$ admet un pôle simple en τ si et seulement si il en est de même pour la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-\lambda(z)}$ et il nous suffit alors de montrer que $\lambda'(\tau) \neq 0$. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et dérivons par rapport à z la fonction $z \mapsto \mathcal{L}_z(h_z)$. Du fait que, pour tout $z \in V$, on a

$$\mathcal{L}_z(h_z) = \lambda(z)\, h_z;$$

en $z = \tau$, on obtient

$$\mathcal{L}_\tau^n (h'_\tau) + \sum_{\gamma\in\Gamma^{(n)}} p^\tau(\gamma,\cdot) \ln\left(p(\gamma,\cdot)\right) h_\tau = n\lambda'(\tau)\, h_\tau + \lambda(\tau)\; h'_\tau.$$

D'après l'étape 1 de la démonstration précédente, nous avons $\lambda(\tau) = r(\tau) = 1$ si bien qu'en intégrant les deux membres de l'égalité précédente par rapport à ν_τ, nous obtenons

$$\int_\Xi \left(\mathcal{L}_\tau^n \left(h'_\tau\right)(\omega) + \sum_{\gamma \in \Gamma^{(n)}} p^\tau \left(\gamma, \omega\right) \ln \left(p\left(\gamma,\omega\right)\right) h_\tau \left(\omega\right) \right) d\nu_\tau \left(\omega\right)$$

$$= \int_\Xi n\lambda'(\tau)\, h_\tau d\nu_\tau + \int_\Xi h'_\tau d\nu_\tau .$$

Ainsi, en utilisant à présent le fait que $\mathcal{L}_\tau^* \left(\nu_\tau\right) = \nu_\tau$, nous obtenons

$$\int_\Xi \sum_{\gamma \in \Gamma^{(n)}} p^\tau \left(\gamma, \omega\right) \ln \left(p\left(\gamma,\omega\right)\right) h_\tau d\nu_\tau \left(\omega\right) = n\, \lambda'(\tau) \int_\Xi h_\tau \, d\nu_\tau .$$

La fonction h_τ ayant été choisie de sorte que $\nu_\tau \left(h_\tau\right) = 1$, nous avons

$$\int_\Xi \sum_{\gamma \in \Gamma^{(n)}} p^\tau \left(\gamma, \omega\right) \ln \left(p\left(\gamma,\omega\right)\right) h_\tau \left(\omega\right) d\nu_\tau \left(\omega\right) = n\lambda' \left(\tau\right). \tag{5.14}$$

Grâce à la proposition 4.3, nous fixons à présent $c > 0$ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ avec $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_\gamma$, on ait $c \left\|\gamma\left(x\right)\right\| \geqslant \|\gamma\| \, \|x\|$. De plus, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma / \|\gamma\| \leqslant 2\,c\}$ étant fini, nous fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma^{(n)}$, on ait $\|\gamma\| > 2c$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que $\mathbf{x} \in \Xi$, on a $p\big(\gamma, \mathbf{x}\big) = \frac{\|x\|}{\|\gamma(x)\|}$ si $\mathbf{x} \in \Xi_\gamma \subset \mathbf{B}_\gamma$ et 0 ailleurs. Ainsi, l'égalité (5.14) montre que $\lambda'\left(\tau\right) < 0$ car la fonction $\mathbf{x} \mapsto \ln\Big(p\big(\gamma, \mathbf{x}\big)\Big)$ est strictement négative. □

Le cas où $\operatorname{Card}(\mathcal{A}) = 4$**.** Les méthodes employées sont essentiellement les mêmes que pour le cas où $\operatorname{Card}(\mathcal{A}) = 4$. On modifie la proposition 5.13 de la façon suivante.

Proposition 5.15. — *Supposons que* $\operatorname{Card}(\mathcal{A}) = 4$. *Il existe un voisinage V de τ, inclus dans D, et des applications analytiques $z \mapsto \lambda^{(1)}(z)$ de V dans $\mathbb{C}$, $z \mapsto \lambda^{(2)}(z)$ de V dans $\mathbb{C}$, $z \mapsto h_z^{(1)}$ de V dans $L(\Xi)$, $z \mapsto h_z^{(2)}$ de V dans $L(\Xi)$ $z \mapsto \nu_z$ de V dans $L^*(\Xi)$ et $z \mapsto Q_z$ de V dans* $\operatorname{End}(L(\Xi))$ *telles que pour tout $z \in V$ on ait :*

- $\nu_z^{(1)}$ *est un élément de $L^*(\Xi)$ tel que $\mathcal{L}_z^*\left(\nu_z^{(1)}\right) = \lambda(z)\, \nu_z^{(1)}$.*
- $h_z^{(1)}$ *est une fonction de $L(\Xi)$ telle que $\mathcal{L}_z\left(h_z^{(1)}\right) = \lambda^{(1)}(z)\, h_z^{(1)}$ et $\nu_z^{(1)}\left(h_z^{(1)}\right) = 1$.*

- $\nu_z^{(2)}$ *est un élément de* $L^*(\Xi)$ *tel que* $\mathcal{L}_z^*\left(\nu_z^{(2)}\right) = \lambda(z)\,\nu_z^{(2)}$.
- $h_z^{(2)}$ *est une fonction de* $L(\Xi)$ *telle que* $\mathcal{L}_z\left(h_z^{(2)}\right) = \lambda^{(2)}(z)\,h_z^{(2)}$ *et* $\nu_z^{(2)}\left(h_z^{(2)}\right) = 1$.
- *le rayon spectral* $r(Q_z)$ *de l'opérateur* Q_z *est* < 1.

De plus, pour tout tout $z \in V$*, on a*

$$\begin{aligned}
&Q_z \circ \mathcal{L}_z = \mathcal{L}_z \circ Q_z, \qquad Q_z\left(h^{(1)}\right) = Q_z\left(h^{(2)}\right) = 0\\
&\text{et } \ \mathcal{L}_z(\cdot) = \lambda^{(1)}(z)\,h_z^{(1)}\,\nu_z^{(1)}(\cdot)\,h_z - \lambda^{(2)}(z)\,h_z^{(2)}\,\nu_z^{(2)}(\cdot)\,h_z + Q_z(\cdot).
\end{aligned}$$

Une remarque. Soulignons qu'au cours de la première étape de la démonstration du théorème 1.4, nous avons démontré le résultat suivant, qui précise le comportement de la série de Poincaré de Γ en son exposant critique.

Corollaire 5.16. — *Tout groupe de Ping-Pong* Γ *d'exposant critique fini, est divergent.*

6. Sur le comportement asymptotique de la fonction orbitale $N_\Gamma(R)$

Dans ce paragraphe, nous démontrons le théorème 1.5. Les méthodes employées sont celles développées dans la section précédente. En effet, nous allons montrer que la mesure de Radon $\nu_\Gamma := \sum_{\gamma\in\Gamma} \delta_{\|\gamma\|}$, où δ_a désigne la mesure de Dirac en a, satisfait les hypothèses du théorème taubérien d'Ikehara-Wiener 5.1. Pour ce faire, on utilisera les notations suivantes

Notations 6.1. — On fixe $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{B}_\Gamma$ et on note Ξ l'adhérence de $\Gamma \cdot \mathbf{x}_0$ dans $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on note Ξ_γ le sous-ensemble de Ξ défini par $\Xi_\gamma = \Xi \cap (\{\mathbf{x}_0\} \cup \bigcup_{g\in\mathcal{A}/g\neq a^{\pm 1}} \mathbf{b}_g)$, où $a \in \mathcal{A}$ désigne la dernière lettre de la $\mathcal{A}^*$-décomposition de γ.

Ensuite, on introduit une famille d'opérateurs positifs $\mathcal{L}_s$, $s > \max\{\tau_{\langle a\rangle}/a \in \mathcal{A}\}$, sur l'espace des fonctions continues sur Ξ, tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$\mathcal{L}_s^n\left(\mathbf{1}_\Xi\right)(\mathbf{x}_0) = \sum_{\gamma\in\Gamma^{(n)}} \|\gamma\|^{-s},$$

reliant ainsi la transformée de Laplace de la mesure ν_Γ au potentiel des opérateurs $\mathcal{L}_s$. Les opérateurs $\mathcal{L}_s$ prennent en compte la dynamique de Γ sur Ξ et sont définis de la façon suivante : Pour tout $\phi \in \mathcal{B}_\infty(\Xi, \mathbb{C})$, on pose

$$\mathcal{L}_s(\phi)(\mathbf{x}) = \sum_{(a,n)\in\mathcal{A}\times\mathbb{N}^*} p^s(a^n, \mathbf{x})\, \phi(a^n \cdot \mathbf{x}),$$

où $(p(\gamma, \cdot)/\gamma \in \Gamma)$ est une famille de fonctions dont on précise à présent la valeur : Pour tous $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, on pose

$$p(\gamma, \gamma' \cdot \mathbf{x}_0) := \begin{cases} \frac{\|\gamma'\|}{\|\gamma\,\gamma'\|} & \text{si} \quad \gamma' \cdot \mathbf{x}_0 \in \Xi_\gamma \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous verrons (lemme 6.6) que les fonctions poids $p(\gamma, \cdot)$ se prolongent par continuité sur Ξ en posant

$$\forall\gamma \in \Gamma, \forall\mathbf{x} \in \Lambda(\Gamma) \qquad p(\gamma, \mathbf{x}) := \begin{cases} \frac{\|x\|}{\|\gamma(x)\|} & \text{si} \quad \mathbf{x} \in \Xi_\gamma \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

Une fois établie la régularité (proposition 6.11) des fonctions poids $(p(\gamma, \cdot)/\gamma \in \Gamma)$, la démonstration du théorème 1.5 est analogue à celle du théorème 1.4. Aussi, nous nous contenterons de donner seulement les grandes lignes de la démonstration du théorème 1.5, en soulignant les aspects nouveaux.

Nous commençons par démontrer la

Proposition 6.2. — *L'ensemble des transformations $\gamma \in \Gamma$ pour lesquelles il existe $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que*

$$\frac{\|\gamma(x)\|}{\|x\|} = \|\gamma\| \quad \textit{et} \quad \mathbf{x} \notin \mathbf{B}_\gamma$$

est fini

Démonstration de la proposition 6.2. — On rappelle que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'ensemble X_γ désigne l'hyperplan répulsif de γ et que, pour tout $g \in G$, la matrice $a(g) = \operatorname{diag}(a_1(g), ..., a_d(g))$ désigne la composante de Cartan de g.

Étape 1. Montrons que $\epsilon < 1 - \epsilon$. Fixons $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ tels que $a_1 \neq a_2^{\pm 1}$, considérons $x_1 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_{a_1}$.

Par définition des parties en position ϵ-Ping-Pong, l'ensemble $\mathbf{b}_{a_1}$ est inclus dans l'intérieur de $\mathbf{B}_{a_2}$. Ainsi, le vecteur x_1 n'appartient pas à l'hyperplan répulsif X_2 de a_2 si bien que nous choisissons $v_2 \in X_2 \setminus \{0\}$ et $x_2 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ orthogonal à v_2 tels que $x_1 = \lambda\, x_2 + (1-\lambda)\ v_2$. De plus, pour tout $t \in [0,1]$, nous posons $w_t = (1-t)\ x_2 + t\, v_2$. (Nous avons donc $x_1 = w_\lambda$ et $x_2 = w_0$)

L'application $\phi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^+$, $(s,t) \mapsto \phi(s,t) = \delta(\mathbf{w}_s, \mathbf{w}_t)$ est continue et, pour tous $s, t_1, t_2 \in [0,1]$ tels que $s \leqslant t_1 < t_2$, nous avons $\phi(s,t_1) < \phi(s,t_2)$. Grâce à cela, nous fixons $\mu_1, \mu_2 \in [0,1]$ tels que

$$\delta(\mathbf{x}_1, \mathbf{w}_{\mu_1}) \, (= \delta(\mathbf{w}_\lambda, \mathbf{w}_{\mu_1})) = \epsilon \quad \text{et} \quad \delta(\mathbf{x}_2, \mathbf{w}_{\mu_2}) \, (= \delta(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_{\mu_2})) = 1 - \epsilon.$$

L'application $[\lambda, 1] \to \mathbb{R}^+$, $t \mapsto \delta(\mathbf{w}_\lambda, \mathbf{w}_t)$ étant continue et strictement croissante, nous avons $\mu_1 = \sup\{s \in [0,1] / \mathbf{w}_s \in \mathbf{b}_{a_1}\}$. De plus, le vecteur x_2 étant orthogonal à X_2, nous avons $\mathbf{B}_{a_2} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d) / \delta(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \leqslant 1 - \epsilon\}$ si bien que $\mu_2 = \sup\{s \in [0,1] / \mathbf{w}_s \in \mathbf{B}_{a_2}\}$. Nous en déduisons que $\epsilon = \mu_1 < \mu_2 = 1 - \epsilon$ puisque $\mathbf{b}_{a_1}$ est inclus dans l'intérieur de $\mathbf{B}_{a_2}$. D'où l'affirmation.

Étape 2. *Soient X un hyperplan de $\mathbb{R}^d$ et $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que $\delta(\mathbf{x}, \mathbb{P}(X)) \leqslant \epsilon$. Il existe $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ orthogonal à x tel que $\delta(\mathbf{y}, \mathbb{P}(X)) \geqslant \epsilon$.* Pour tout hyperplan Y de $\mathbb{R}^d$, nous notons $Y^\perp$ l'orthogonal de Y. Remarquons que, pour tous hyperplans X_1, X_2 de $\mathbb{R}^d$, nous avons $\delta\left(\mathbb{P}(X_1), \mathbb{P}\left(X_2^\perp\right)\right) = \delta\left(\mathbb{P}\left(X_1^\perp\right), \mathbb{P}(X_2)\right)$.

Grâce à cette égalité, nous fixons $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que $\delta\left(\mathbb{P}\left(X^\perp\right), \mathbf{y}\right) \leqslant \epsilon$. Ainsi, nous avons $\delta(\mathbb{P}(X), \mathbf{y}) \geqslant \delta\left(\mathbb{P}(X), \mathbb{P}\left(X^\perp\right)\right) - \delta\left(\mathbb{P}\left(X^\perp\right), \mathbf{y}\right) \geqslant 1 - \epsilon \geqslant \epsilon$. La dernière inégalité résulte l'étape 1.

Étape 3. *Soit $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Γ qui sort de tout compact. Montrons que $(a_2(\gamma_n)/a_1(\gamma_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers* 0. D'après l'implication (6) $\Rightarrow$ (1) du lemme 3.5 de [Ben], il suffit de montrer que les valeurs d'adhérence de $(\gamma_n / \|\gamma_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathrm{End}\left(\mathbb{R}^d\right)$ sont des endomorphismes de rang 1.

Commençons par vérifier que $(\mathrm{Diam}(\gamma_k \cdot \mathbf{B}_{\gamma_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Par définition des parties en position ϵ-Ping-Pong sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la transformation γ_k est $\epsilon^{l(\gamma_k)}$-lispchitzienne sur $\mathbf{B}_{\gamma_k}$. Par conséquent, si $(l(\gamma_k))_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, la suite $(\mathrm{Diam}(\gamma_k \cdot \mathbf{B}_{\gamma_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. D'autre part, si $(l(\gamma_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $(a_k, n_k) \in \mathcal{A} \times \mathbb{N}^*$, le premier élément de la $\mathcal{A}^*$-décomposition de γ_k. La suite $(l(\gamma_k))_{k\in\mathbb{N}}$ n'étant pas bornée, sans perdre en généralité, on peut supposer que $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne soit pas borné et, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait $a_k = a$. Par définition des parties en position ϵ-Ping-Pong, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons $\gamma_n \cdot \mathbf{B}_{\gamma_n} \subset a^{n_k} \cdot \mathbf{B}_a$ si bien que

$$\mathrm{Diam}(\gamma_n \cdot \mathbf{B}_{\gamma_n}) \leqslant \mathrm{Diam}(a^{n_k} \cdot \mathbf{B}_a).$$

La transformation a étant contractante sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$, la suite $\left(\mathrm{Diam}\left(\gamma_k \cdot \mathbf{B}_{\gamma_k}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 0.

Considérons à présent une sous-suite convergente $\left(\gamma_{n_k}/\|\gamma_{n_k}\|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\left(\gamma_{n_k}/\|\gamma_n\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Quitte à extraire une sous-suite, nous fixons $a \in \mathcal{A}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous ayons $\mathbf{B}_a = \mathbf{B}_{\gamma_{n_k}}$. La suite $\left(\mathrm{Diam}\left(\gamma_n \cdot \mathbf{B}_{\gamma_n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_a$, la suite $\left(\gamma_{n_k} \cdot \mathbf{x}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. La partie $\mathbf{B}_a$ étant d'intérieure non vide, ceci démontre que $\left(\gamma_{n_k}/\|\gamma_{n_k}\|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un opérateur de rang 1.

Étape 4. *Conclusion.* Nous allons raisonner par l'absurde et supposer que l'ensemble Ω des transformations $\gamma \in \Gamma$ pour lesquelles il existe $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que $\mathbf{x} \notin \mathbf{B}_\gamma$ et $\|\gamma(x)\| = \|\gamma\| \, \|x\|$ est infini.

Grâce à la proposition 4.3, nous fixons $\kappa > 0$ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ avec $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_\gamma$, nous avons $\|\gamma(x)\| \geqslant \kappa \|\gamma\| \, \|x\|$. De plus, pour tout $\gamma \in \Gamma$, nous fixons $k_\gamma, l_\gamma \in K$ tels que $\gamma = l_\gamma \, a(\gamma) \, k_\gamma$ et nous notons X_γ^m le sous-espace de $\mathbb{R}^d$ engendré par $k_\gamma^{-1}(e_2), ..., k_\gamma^{-1}(e_d)$. Il est important de remarquer que X_γ^m est l'othogonal de $k_\gamma^{-1}(e_1)$.

L'ensemble Ω étant infini, nous fixons $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Ω qui sort de tout compact. Par définition de Ω, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\delta\left(k_{\gamma_n}^{-1} \cdot \mathbf{e}_1, \mathbb{P}\left(X_{\gamma_n}\right)\right) \leqslant \epsilon$. Ainsi, grâce à l'étape 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous fixons $x_n \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que $\mathbf{x}_n \in \mathbf{B}_{\gamma_n} \cap \mathbb{P}\left(X_{\gamma_n}^m\right)$ (ici, on utilise le fait que les sous-espaces $X_{\gamma_n}^m$ et $\mathbb{R}\, k_{\gamma_n}^{-1}(e_1)$ soient orthogonaux). Comme $\mathbf{x}_n \in \mathbb{P}\left(X_{\gamma_n}^m\right)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $\|\gamma_n(x_n)\| \leqslant a_2(\gamma_n) \, \|x_n\|$ si bien que, par le choix de $\kappa > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\frac{a_2(\gamma_n)}{a_1(\gamma_n)} \geqslant \frac{\|\gamma_n(x_n)\|}{\|\gamma_n\| \, \|x_n\|} \geqslant \kappa > 0.$$

Ce qui est absurde, d'après l'étape 3. D'où le résultat. $\square$

6.1. Non distorsion.

Lorsque Γ est un groupe ϵ-Ping-Pong engendré par des transformations proximales, il existe un homéomorphisme bi-höldérien entre son ensemble limite Ξ_Γ et l'ensemble $\Sigma_{\mathcal{A}}^+$ des suites $\mathcal{A}$-admissibles, muni de la distance canonique. Le caractère bi-höldérien de cet homéomorphisme est alors utilisé pour ramener l'étude de la dynamique de l'action de Γ sur Λ_Γ à celle de l'opérateur de décalage sur $\Sigma_{\mathcal{A}}^+$; il repose en fait sur la propriété suivante, satisfaite par tous les éléments de Γ :

Il existe $\epsilon_2 \in]0, \epsilon[$ tel que pour tous $\gamma \in \Gamma$ de longueur n et tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{B}_\gamma$ on ait

$$\epsilon_2^n \, \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \delta(\gamma \cdot \mathbf{x}, \gamma \cdot \mathbf{y}) \leqslant \epsilon^n \, \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) .$$

Nous allons étendre cette inégalité au cas où Γ contient des transformations unipotentes ; dans un premier temps, nous examinons le cas des puissances des générateurs de Γ. Nous avons la

PROPOSITION 6.3. — *Soit a une transformation ϵ-proximale ou unipotente ϵ-contractante sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$. Il existe alors des suites strictement positives $(A^-(a^n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A^+(a^n))_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel $\beta_a \in]0,1]$ ayant les propriétés suivantes : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$A^+(a^n) \leqslant A^-(a^n)^{\beta_a}$$

et, pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{B}_a$, on a

$$A^-(a^n) \;\; \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \delta(a^n \cdot \mathbf{x}, a^n \cdot \mathbf{y}) \leqslant A^+(a^n) \, \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) .$$

De plus, lorsque a est proximale, on peut prendre $A^-(a^n) = \frac{1}{C_a}\epsilon_1^n$ et $A^+(a^n) = \frac{1}{C_a}\epsilon^n$ avec $C_a \geqslant 1$ et $0 < \epsilon_1 < \epsilon < 1$

Démonstration de la proposition 6.3. — Nous utiliserons de façon essentielle les deux inégalités suivantes : pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ et tout $a \in \mathcal{A}$ on a

$$\frac{\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\| \bigwedge^2 a^{-n} \| \times \|a^n\|^2} \leqslant \delta(a^n \cdot \mathbf{x}, a^n \cdot \mathbf{y}) \tag{6.1}$$

et

$$\delta(a^n \cdot \mathbf{x}, a^n \cdot \mathbf{y}) \leqslant \frac{\| \bigwedge^2 a^n \|}{\|a^n(x)\| \times \|a^n(y)\|} \, \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) , \tag{6.2}$$

où x et y sont des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^d$ représentant respectivement $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$.

Supposons que a soit proximal. La transformation a étant proximale, on a $\mathbf{b}_a \subset \mathbf{B}_a$ si bien que, pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{B}_a$, on a

$$\delta(a^n \cdot \mathbf{x}, a^n \cdot \mathbf{y}) \leqslant \epsilon^n \, \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) .$$

D'autre part, en utilisant (6.2) et en notant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\| \bigwedge^2 a^{-n} \| \times \|a^n\|^2 \leqslant \left(\|a^{-1}\| \times \|a\|^{2\,n}, \right)$$

on obtient

$$\delta(a^n \cdot \mathbf{x}, a^n \cdot \mathbf{y}) \geqslant \epsilon_1^n \, \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

avec $\epsilon_1 := \left(\|a^{-1}\| \times \|a\|\right)^{-2}$. Dans ce cas, on pose $A^-(a^n) := (\epsilon')^n$, $A^+(a^n) := \epsilon^n$ et $\beta_a := \frac{\ln(\epsilon)}{\ln(\epsilon')}$.

Supposons que $a \in \mathcal{A}$ soit contractante sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ et unipotent. L'automorphisme a étant unipotent, il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\|\bigwedge^2 a^n\| \asymp n^{p_1}$. Ainsi, d'après la proposition 4.3, pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{B}_a$, nous avons

$$\|a^n(x)\| \asymp \|a^n(y)\| \asymp \|a^n\| \asymp n^{p_1}.$$

De même, les automorphismes $\bigwedge^2 a$ et $\bigwedge^2 a^{-1}$ étant unipotents, il existe $p_2, p_3 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$\|\bigwedge^2 a^n\| \asymp n^{p_2} \quad \text{et} \quad \|\bigwedge^2 a^{-n}\| \asymp n^{p_3}.$$

Ainsi, l'automorphisme a étant ϵ-contractant sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$, grâce aux inégalités (6.1) et (6.2), nous fixons $p, q \in \mathbb{N}$ et $c_a \geqslant \epsilon^{\frac{1}{q}} / \left(1 - \epsilon^{\frac{1}{q}}\right)$ tels que, pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{B}_a$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$\left(\frac{1}{c_a\, n}\right)^p \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \delta(a^n \cdot \mathbf{x}, a^n \cdot \mathbf{y}) \leqslant \inf\{\epsilon_0, \frac{c_a}{n}\}^q\, \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

où $\epsilon_0 = \epsilon^{\frac{1}{q}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons $A^-(a^n) := \left(\frac{1}{c_a\, n}\right)^p$ et $A^+(a^n) := \inf\{\epsilon_0, \frac{c_a}{n}\}^q$. De plus, nous notons n_a la partie entière de c_a/ϵ_0.

Comme $c_a > \epsilon_0/(1-\epsilon_0)$, nous avons $n_a > c_a$. Ainsi, grâce à cette inégalité, nous choisissons $\beta_a \in]0,1[$ de sorte que

$$\beta_a \leqslant \frac{-\ln(\epsilon_0)}{\ln(n_a) - \ln(c_a)}\, \frac{q}{p} \quad \text{et} \quad \beta_a \leqslant \sup_{n \geqslant n_{a+1}} \frac{\ln(n) - \ln(c_a)}{\ln(n) + \ln(c_a)}\, \frac{q}{p}.$$

Comme $\beta_a \leqslant \frac{-\ln(\epsilon_0)}{\ln(n_a)-\ln(c_a)}\, \frac{q}{p}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant n_a$, nous avons

$$A^+(a^n) = \inf\{\epsilon_0, \frac{c_a}{n}\}^q = \epsilon_0^q \leqslant \left(\frac{c_a}{n_a}\right)^{p\,\beta_a} \leqslant \left(\frac{c_a}{n}\right)^{p\,\beta_a} = A^-(a^n)^{\beta_a}.$$

De plus, comme $\beta_a \leqslant \sup_{n \geqslant n_{a+1}} \frac{\ln(n)-\ln(c_a)}{\ln(n)+\ln(c_a)}\, \frac{q}{p}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_a + 1$, nous avons

$$A^+(a^n) = \inf\{\epsilon_0, \frac{c_a}{n}\}^q = \left(\frac{c_a}{n}\right)^q \leqslant \left(\frac{1}{c_a\, n}\right)^{p\,\beta_a} = A^-(a^n)^{\beta_a}.$$

D'où le résultat. $\square$

La propriété de non distorsion de l'action projective des transformations ϵ-proximales ou unipotentes et ϵ-contractantes sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ s'étend aux éléments des groupes de Ping-Pong qu'elles engendrent quand elles sont en position ϵ-Ping-Pong ; nous avons le

COROLLAIRE 6.4. — *Il existe* $\beta_\Gamma \in]0,1[$ *tel que, pour tout* $\gamma \in \Gamma$*, il existe des constantes* $A^-(\gamma), A^+(\gamma) \in]0,1]$ *ayant les propriétés suivantes : Pour tous* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{B}_\gamma$*, on a*

$$A^-(\gamma)\ \delta(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leqslant \delta(\gamma\cdot\mathbf{x},\gamma\cdot\mathbf{y}) \leqslant A^+(\gamma)\ \delta(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

avec $A^+(\gamma) \leqslant A^-(\gamma)^{\beta_\Gamma}$*. De plus, il existe* $C_\Gamma \geqslant 1$ *tel que, pour tout* $\gamma \in \Gamma$ *on ait*

$$\frac{A^-(\gamma)}{C_\Gamma} \leqslant \frac{\|\bigwedge^2\gamma\|}{\|\gamma\|^2} \leqslant C_\Gamma\, A^+(\gamma).$$

Démonstration du corollaire 6.4. — Pour établir la première assertion de ce corollaire, il suffit d'appliquer la proposition 6.3 en posant

$$A^-(\gamma) := A^-(a_1^{n_1})\times\ldots\times A^-(a_k^{n_k}) \quad \text{et} \quad A^+(\gamma) := A^+(a_1^{n_1})\times\ldots\times A^+(a_k^{n_k})$$

lorsque la $\mathcal{A}^*$-décomposition de $\gamma \in \Gamma$ est égale à $a_1^{n_1}\ldots a_k^{n_k}$ et en prenant $\beta_\Gamma := \inf\{\beta_a / a \in \mathcal{A}\}$.

Pour établir la seconde assertion du corollaire, on suppose que la dernière lettre de γ est $a \in \mathcal{A}$ et on fixe une base $\mathcal{B}_a = (x_{ai})_{1\leqslant i\leqslant d}$ de $\mathbb{R}^d$, avec $\mathbf{x}_{a1}, \ldots, \mathbf{x}_{ad} \in \mathbf{B}_a$. D'après la proposition 4.3, il existe $c > 1$ tel que

$$\|\gamma(x_{ai})\| \overset{c}{\asymp} \|\gamma\|$$

si bien que, pour tous $1 \leqslant i \neq j \leqslant d$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\|\bigwedge^2\gamma\|}{\|\gamma\|^2} &\geqslant \frac{\|\bigwedge^2\gamma(x_{ai}\wedge x_{aj})\|_2}{c^2\,\|\gamma(x_{ai})\|^2} = \frac{1}{c^2}\ \delta(\gamma\cdot\mathbf{x}_{ai},\gamma\cdot\mathbf{x}_{aj})\\ &\geqslant \frac{A^-(\gamma)}{c^2}\ \delta(\mathbf{x}_{ai},\mathbf{x}_{aj}).\end{aligned}$$

D'autre part, les normes de $\mathbb{R}^d$ étant équivalentes, il existe une constante $c'_a > 0$ ne dépendant que de $\mathcal{B}_a$ telle que

$$\begin{aligned}\frac{\|\bigwedge^2\gamma\|}{\|\gamma\|^2} &\leqslant c'_a \max_{i\neq j}\frac{\|\bigwedge^2\gamma(x_{ai}\wedge x_{aj})\|}{\|\gamma(x_{ai})\|^2} = c'_a \max_{i\neq j}\delta(\gamma\cdot\mathbf{x}_{ai},\gamma\cdot\mathbf{x}_{aj})\\ &\leqslant c'\,A^+(\gamma)\ \delta(\mathbf{x}_{ai},\mathbf{x}_{aj}).\end{aligned}$$

On choisit une telle base $\mathcal{B}_a$ pour chaque $a \in \mathcal{A}$ et on pose

$$C_\Gamma := c' + \max_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ ai\neq aj}} \frac{c^2}{\delta(\mathbf{x}_{ai}, \mathbf{x}_{aj})}.$$

D'où le résultat. $\square$

Lorsque a est proximal, son bassin d'arrivée $\mathbf{b}_a$ est inclus dans l'intérieur de $\mathbf{B}_a$; ceci n'est plus le cas pour des transformations unipotentes et contractantes sur $\mathbb{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Cependant, il est possible de préciser dans certains cas la façon dont l'orbite d'un point $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_a$ se rapproche de celle de certains points de $\mathbf{b}_a$. En effet, nous avons la

Proposition 6.5. — *Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout générateur unipotent a de Γ, il existe une constante $C_a \geqslant 1$ telle que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_a$, tout $\mathbf{y} \in \cup_{k\geqslant 1} a^k\left(\mathbf{B}_a\right)$ et tout $n \geqslant 1$ on ait*

$$\frac{1}{C_a n^p} \leqslant \delta\left(a^n\cdot\mathbf{x}, a^n\cdot\mathbf{y}\right) \leqslant \frac{C_a}{n}. \tag{6.3}$$

Démonstration de la proposition 6.5. — Rappelons que, d'après (6.1), pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\delta\left(a^n\cdot\mathbf{x}, a^n\cdot\mathbf{y}\right) \geqslant \frac{\delta\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right)}{\|\bigwedge^2 a^{-n}\| \times \|a^n\|^2}.$$

Remarquons que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $\mathbf{y} \in \cup_{k\geqslant 1} a^k\left(\mathbf{B}_a\right)$ nous avons $\mathbf{y} \in \mathbf{b}_a$. Ainsi, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_a$, tout $\mathbf{y} \in \cup_{k\geqslant 1} a^k\left(\mathbf{B}_a\right)$, nous avons

$$\delta\left(\mathbf{x},\mathbf{y}\right) \geqslant \delta\left(\mathbf{B}_a, \mathbf{b}_a\right) > 0$$

Par ailleurs, les automorphismes a et $\bigwedge^2 a$ étant unipotents, il existe $c \geqslant 1$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous ayons

$$\|a^n\| \leqslant c\, n^d, \qquad \|\bigwedge^2 a^{-n}\| \leqslant c\, n^{\frac{(d+1)\,d}{2}}$$

D'où l'inégalité de gauche dans (6.3) avec $p = 2\,d + \frac{(d+1)\,d}{2}$ et $\frac{1}{C_a} = \frac{\delta(\mathbf{B}_a, \mathbf{b}_a)}{c^2}$. Pour obtenir l'inégalité de droite, notons ν_a l'indice de a et remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\delta\left(a^n\cdot\mathbf{x}, a^n\cdot\mathbf{y}\right) \leqslant \delta\left(a^n\cdot\mathbf{x}, \mathbf{x}_a\right) + \delta\left(a^n\cdot\mathbf{y}, \mathbf{x}_a\right).$$

Or, par définition de δ, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\delta\left(a^n\cdot\mathbf{x}, \mathbf{x}_a\right) = \frac{\|a^n\left(x\right) \wedge x_a\|}{\|a^n\left(x\right)\|}$$

avec $\|a^n(x) \wedge x_a\| \asymp n^{\nu_a-2}$ et $\|a^n(x)\| \asymp n^{\nu_a-1}$ uniformément en $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_a$. Il existe donc $c_a > 0$ tel que $\delta(a^n \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x}_a) \leqslant \frac{c_a}{n}$, et ce, quel que soit $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_a$. Par ailleurs, il existe $k \geqslant 1$ et $\mathbf{x}' \in \mathbf{B}_a$ tels que $\mathbf{y} = a^k \cdot \mathbf{x}'$ si bien que

$$\delta(a^n \cdot \mathbf{y}, \mathbf{x}_a) = \delta\left(a^{n+k} \cdot \mathbf{x}', \mathbf{x}_a\right) \leqslant \frac{c_a}{n+k};$$

il vient

$$\delta(a^n \cdot \mathbf{y}, \mathbf{x}_a) \leqslant \frac{c_a}{n}$$

uniformément par rapport à $\mathbf{y} \in \cup_{k\geqslant 1}\mathbf{B}_a$. D'où le résultat. □

6.2. Régularité des fonctions poids

Nous commençons par le

Lemme 6.6. — *Pour tout $\gamma \in \Gamma$, la fonction $p(\gamma, \cdot)$ est continue sur Ξ.*

Pour démontrer ce lemme nous avons besoin d'introduire quelques notations.

Notations 6.7. — Pour tout $g \in G$ de décomposition de Cartan $k_g\, a(g)\, l_g$, on pose

$$x_g^M = l_g^{-1}(e_1) \qquad \text{et} \qquad y_g^M = k_g(e_1).$$

Notons que $\|g(x_g^M)\| = \|g\|$ et $\mathbf{y}_g^M = g \cdot \mathbf{x}_g^M$. Pour établir le lemme 6.6, nous aurons besoin du

Fait 6.8. — *Pour tous $g, h \in G$, on a*

$$1 \leqslant \frac{\|g\,h\|}{\|h\|\,\|g(y_h^M)\|} \leqslant 1 + \frac{\|g\|}{\|g\left(y_h^M\right)\|}\,\frac{a_2(h)}{a_1(h)}$$

Démonstration du fait 6.8. — Décomposons h sous la forme $h = k_h\, a(h)\, l_h$. On a

$$\|g\,h\| = \|g\,k_h\,a(h)\|, \qquad \|h\| = \|k_h a(h)\| \ \text{ et } \ y_h^M = y_{k_h\,a(h)}^M = k_h(e_1),$$

si bien que l'on peut supposer que $l_h = I$. Quitte alors à remplacer g par $g\,k_h$, on peut supposer que h est diagonale, égale à $a = \mathrm{diag}(a_1, ..., a_d)$ avec $a_1 \geqslant ... \geqslant a_d$, et il nous faut montrer que

$$1 \leqslant \frac{\|g\,a\|}{\|a\|\,\|g(e_1)\|} \leqslant 1 + \frac{\|g\|}{\|g(e_1)\|}\,\frac{a_2}{a_1}.$$

Pour ce faire, on choisit x un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^d$ et on note x' le vecteur orthogonal à x tel que $x = \langle x, e_1\rangle e_1 + x'$; on a

$$\frac{\|g\,a\,(x)\,\|}{\|a\|\,\|g\,(e_1)\,\|} = \|\langle x, e_1\rangle \frac{g\,(e_1)}{\|g\,(e_1)\,\|} + \frac{g\,a\,(x')}{\|a\|\,\|g\,(e_1)\,\|}\|.$$

On en déduit que

$$1 = \frac{\|g\,a\,(e_1)\,\|}{a_1\,\|g\,(e_1)\,\|} \leqslant \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^d\\ \|x\|=1}} \frac{\|g\,a\,(x)\,\|}{\|a\|\,\|g\,(e_1)\,\|} \leqslant 1 + \frac{\|g\|\,a_2}{\|g\,(e_1)\,\|\,a_1}.$$

D'où le résultat. $\square$

Nous utiliserons la

Définition 6.9. — *Soient f et g deux éléments de Γ et $(a_i, n_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $(a_{p+i}, n_{p+i})_{1\leqslant i\leqslant q}$ leurs $\mathcal{A}^*$-décompositions respectives. On dit que le couple (f, g) est $\mathcal{A}^*$-admissible si $(a_i, n_i)_{1\leqslant i\leqslant p+q}$ est $\mathcal{A}^*$-admissible.*

De la proposition 4.3, il résulte le

Corollaire 6.10. — *Il existe $c > 0$ tel que, pour tout couple $\mathcal{A}^*$-admissible (f, g) de Γ, on ait*

$$\|f\,g\| \geqslant c\,\|f\|\,\|g\|.$$

Démonstration du corollaire 6.10. — Grâce à la proposition 4.3, nous fixons $\kappa > 0$ telle que, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ vérifiant $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_\gamma$, nous ayons $\|\gamma\,(x)\,\| \geqslant \kappa\,\|\gamma\|\,|x\|$.

Soient f et g deux éléments de Γ que nous supposons $\mathcal{A}^*$-admissible et soit $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_\Gamma$. Par définition des parties en position ϵ-Ping-Pong, nous avons $g \cdot \mathbf{x} \in \mathbf{B}_f$. Nous en déduisons que

$$\|f\,g\| \geqslant \frac{\|f\,(g\,(x))\,\|}{\|g\,(x)\,\|}\,\frac{\|g\,(x)\,\|}{\|x\|} \geqslant \kappa^2\,\|f\|\,\|g\|.$$

Ce qui est suffisant. $\square$

Démonstration du lemme 6.6. — On fixe $\gamma \in \Gamma$, $\mathbf{x} \in \Lambda(\Gamma)$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Γ tels que $(\gamma_n \cdot \mathbf{x_0})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{x}$; on veut montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} p\,(\gamma, \gamma_n \cdot \mathbf{x_0}) = p\,(\gamma, \mathbf{x})\,.$$

À l'aide de la proposition 6.2, on fixe $R_0 \geqslant 0$ tel que, pour tout élément proximal γ' de Γ de norme $\geqslant R_0$, on ait

$$\mathbf{x}^M_{\gamma'} \in \mathbf{B}_{\gamma'}.$$

Quitte à remplacer γ_n par $\gamma_n\, a$, avec $a \in \mathcal{A}$ et (γ, a) $\mathcal{A}^*$-admissible, on peut supposer que les transformations γ_n sont proximales. Pour $\|\gamma_n\| \geqslant R_0$, on a $\mathbf{x}^M_{\gamma_n} \in \mathbf{B}_{\gamma_n}$ et $\mathbf{y}^M_{\gamma_n} = \gamma_n \cdot \mathbf{x}^M_{\gamma_n} \in \gamma_n \cdot \mathbf{B}_{\gamma_n}$, et donc

$$\mathbf{y}^M_{\gamma_n} \to \mathbf{x}.$$

Il y a alors deux cas à distinguer :

Premier cas. Supposons que $\mathbf{x} \in \Xi_\gamma$. Dans ce cas, $\mathbf{x}$ est en fait intérieur à $\mathbf{B}_\gamma$. Pour n assez grand, (γ, γ_n) est $\mathcal{A}^*$-admissible et les points $\mathbf{y}^M_{\gamma_n}$ appartiennent aussi à l'intérieur de $\mathbf{B}_\gamma$. D'après le fait 6.8, le réel

$$p\,(\gamma, \gamma_n \cdot \mathbf{x_0}) := \frac{\|\gamma_n\|}{\|\gamma\, \gamma_n\|} \in \Big[\frac{1}{\|\gamma(y^M_{\gamma_n})\|}, \frac{1+\epsilon(n)}{\|\gamma(y^M_{\gamma_n})\|}\Big]$$

avec

$$\epsilon(n) \in \Big[0, \frac{\|\gamma\|}{\|\gamma(y^M_{\gamma_n})\|} \times \frac{a_2\,(\gamma_n)}{a_1\,(\gamma_n)}\Big].$$

D'après la proposition 4.3, on a

$$\frac{\|\gamma\|}{\|\gamma\left(y^M_{\gamma_n}\right)\|} = O(1)$$

puisque $\mathbf{y}^M_{\gamma_n} \in \mathbf{B}_\gamma$. La proposition 2.5 entraîne alors $\lim_{n\to+\infty} \epsilon(n) = 0$. Comme de plus $\mathbf{y}^M_{\gamma_n} \to \mathbf{x}$, il vient

$$\lim_{n\to+\infty} p\,(\gamma, \gamma_n \cdot \mathbf{x}_0) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\|\gamma\left(y^M_{\gamma_n}\right)\|} = \frac{1}{\|\gamma(x)\|}$$

où x est un réprésentant unitaire de $\mathbf{x}$.

Deuxième cas. Supposons que $\mathbf{x} \notin \Xi_\gamma$. Dans ce cas, pour n assez grand, les couples (γ, γ_n) ne sont pas $\mathcal{A}^*$-admissibles et on a

$$p\,(\gamma, \gamma_n \cdot \mathbf{x}_0) = p\,(\gamma, \mathbf{x}) = 0.$$

Ceci prouve que la fonction $p\,(\gamma, \cdot)$ est bien continue sur $\Lambda(\Gamma)$. D'où le résultat. $\square$

Nous décrivons à présent la régularité de la famille de fonctions poids $(p(\gamma, .)/\gamma \in \Gamma)$. Pour ce faire, pour $\beta \in]0,1[$, nous considérons l'espace H_β des fonctions β-höldériennes sur Ξ à valeurs dans $\mathbb{C}$; pour $\phi \in H_\beta$, on pose

$$m_\beta\,(\phi) = \sup_{a\in\mathcal{A}} \sup\{\frac{|\phi\,(\mathbf{x}) - \phi\,(\mathbf{y})\,|}{\delta\,(\mathbf{x},\mathbf{y})^\beta} / \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Xi_a, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}\},$$

puis $\|\phi\|_\beta := |\phi|_\infty + m_\beta(\phi)$. On rappelle que $(H_\beta, \|.\|_\beta)$ est un $\mathbb{R}$-espace de Banach dont la boule unité est relativement compacte dans $(C(\Xi), |.|_\infty)$.

La régularité de la famille de fonctions poids est donnée par la

Proposition 6.11. — *Il existe* $\beta_\Gamma \in]0,1[$ *tel que l'ensemble* $\{\|\gamma\| \times \|p(\gamma,\cdot)\|_{\beta_\Gamma} / \gamma \in \Gamma\}$ *soit borné.*

Pour démontrer cette proposition nous aurons besoin du fait suivant :

Fait 6.12. — *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour tout* $\gamma \in \Gamma$ *et tous* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *de* $\mathbf{B}_\gamma$*, on ait :*

$$|\ln\left(\frac{\|\gamma(x)\|}{\|x\|}\right) - \ln\left(\frac{\|\gamma(y)\|}{\|y\|}\right)| \leqslant C\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{6.4}$$

où x *et* y *sont des représentants de* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$*.*

Démonstration du fait 6.12. — Nous posons

$$\kappa = \sup\{\frac{\|\gamma\|}{\|\gamma(x)\|} / \gamma \in \Gamma, \|x\| = 1\ \mathbf{x} \in \mathbf{B}_\gamma\}$$

et

$$\kappa' = \sup\{\frac{\|x - y\|}{\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})} / \|x\| = \|y\| = 1,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}\}.$$

Remarquons que, d'après la proposition 4.3, nous avons $\kappa < \infty$.

Fixons à présent un élément γ de Γ et $x, y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tels que $\|x\| = \|y\| = 1$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{B}_\gamma$ avec $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$; on peut supposer $\|\gamma(x)\| \geqslant \|\gamma(y)\|$, et l'on obtient

$$\begin{aligned} |\ln(\|\gamma(x)\|) - \ln(\|\gamma(y)\|)| &= \left|\ln\left(1 + \frac{\|\gamma(x)\| - \|\gamma(y)\|}{\|\gamma(y)\|}\right)\right| \\ &\leqslant \left|\frac{\|\gamma(x)\| - \|\gamma(y)\|}{\|\gamma(y)\|}\right| \leqslant \frac{\|\gamma\|}{\|\gamma(y)\|}\|x - y\| \\ &\leqslant \kappa\kappa'\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

D'où le résultat. $\square$

Démonstration de la proposition 6.11. — Comme dans la démonstration précédente, on pose

$$\kappa := \sup\{\frac{\|\gamma\|}{\|\gamma(x)\|} / \gamma \in \Gamma, \|x\| = 1\ \mathbf{x} \in \mathbf{B}_\gamma\}$$

et on fixe $R_0 >$ tel que l'on ait $\mathbf{x}_\gamma^M \in \mathbf{B}_\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ de norme $\|\gamma\| \geqslant R_0$. D'après la proposition 4.3, nous avons $\kappa < \infty$.

Étape 1. *L'ensemble* $\Big\{\|\gamma\| \times \|p(\gamma, .)\|_\infty / \gamma \in \Gamma\Big\}$ *est borné.* Fixons γ un élément de Γ et $\mathbf{x} \in \Xi$.

Quand $\mathbf{x} \notin \Xi_\gamma$, on a

$$\|\gamma\|\, p(\gamma, \mathbf{x}) = 0. \tag{6.5}$$

Supposons que $\mathbf{x} \in \Xi_\gamma \cap \Lambda(\Gamma)$. On a $p(\gamma, \mathbf{x}) := \|\gamma(x)\|^{-1}$, où x est un représentant unitaire de $\mathbf{x}$. Puisque $\mathbf{x} \in \Xi_\gamma \subset \mathbf{B}_\gamma$, on a

$$\|\gamma\|\, p(\gamma, \mathbf{x}) \leqslant \kappa. \tag{6.6}$$

Enfin, lorsque $\mathbf{x} \in \Xi_\gamma$ et $\mathbf{x} = g \cdot \mathbf{x}_0$, on a

$$\|\gamma\|\, p(\gamma, \mathbf{x}) = \|\gamma\| \,\frac{\|g\|}{\|\gamma\, g\|} \leqslant \kappa \|\gamma\| \,\frac{\|g(x_0)\|}{\|\gamma g(x_0)\|}.$$

Puisque $g \cdot \mathbf{x}_0 \in \mathbf{b}_g \subset \mathbf{B}_\gamma$, il vient $\|\gamma g(x_0)\| \geqslant \kappa^{-1}\|\gamma\|\,\|g(x_0)\|$ et donc

$$\|\gamma\|\, p(\gamma, \mathbf{x}) \leqslant \kappa^2. \tag{6.7}$$

Ainsi, l'étape 1 résulte des inégalités (6.5), (6.6) et (6.7).

Étape 2. *Montrons l'existence d'un nombre* $\beta_\Gamma > 0$ *tel que l'ensemble*

$$\Big\{\|\gamma\|\, m_{\beta_\Gamma}(p(\gamma, \cdot)) / \gamma \in \Gamma\Big\}$$

soit borné. Fixons $\gamma \in \Gamma$ et appliquons l'inégalité des accroissement finis à la fonction $x \mapsto e^x$; pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Xi_\gamma$, nous avons :

$$|p(\gamma, \mathbf{x}) - p(\gamma, \mathbf{y})| \quad \leqslant \quad \max\Big(p(\gamma, \mathbf{x}), p(\gamma, \mathbf{y})\Big)\Big|\ln(p(\gamma, \mathbf{x})) - \ln(p(\gamma, \mathbf{y}))\Big|,$$

si bien que, par (6.6) et (6.7), il vient

$$\|\gamma\| \,\Big|p(\gamma, \mathbf{x}) - p(\gamma, \mathbf{y})\Big| \quad \leqslant \quad \kappa^2\Big|\ln(p(\gamma, \mathbf{x})) - \ln(p(\gamma, \mathbf{y}))\Big|.$$

Ainsi, il nous suffit de majorer la quantité

$$\sup\{\frac{|\ln(p(\gamma, \mathbf{x})) - \ln(p(\gamma, \mathbf{y}))|}{\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\beta} / \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Xi_\gamma, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}\}$$

par une constante indépendante de γ.

Pour ce faire, fixons g et h deux éléments de Γ tels que (γ, g) et (γ, h) soient $\mathcal{A}^*$-admissibles ; sans perdre en généralité, quitte à supposer que la norme des transformations g et h est suffisamment grande, on peut imposer que les points $\mathbf{x}_g^M$ et $\mathbf{x}_h^M$ appartiennent respectivement à $\mathbf{B}_g$ et $\mathbf{B}_h$. Ceci implique en particulier que les points $\mathbf{y}_g^M$ et $\mathbf{y}_h^M$ appartiennent à $\Xi_\gamma \subset \mathbf{B}_\gamma$. Ainsi, en appliquant le fait 6.8, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
&|\ln\left(p\left(\gamma, g \cdot \mathbf{x}_0\right)\right) - \ln\left(p\left(\gamma, h \cdot \mathbf{x}_0\right)\right)| = |\ln\left(\frac{\|g\|}{\|\gamma\, g\|}\right) - \ln\left(\frac{\|h\|}{\|\gamma\, h\|}\right)| \\
&\leqslant |\ln\left(\|\gamma\left(y_g^M\right)\|\right) - \ln\left(\|\gamma\left(y_h^M\right)\|\right)| + \frac{\|\gamma\|}{\|\gamma\left(y_g^M\right)\|}\frac{a_2\left(g\right)}{a_1\left(g\right)} + \frac{\|\gamma\|}{\|\gamma\left(y_h^M\right)\|}\frac{a_2\left(h\right)}{a_1\left(h\right)} \\
&\leqslant |\ln(\|\gamma(y_h^M)\|) - \ln(\|\gamma(y_g^M)\|)| + \kappa\frac{a_2(g)}{a_1(g)} + \kappa\frac{a_2(h)}{a_1(h)}.
\end{aligned}
$$

D'après le fait 6.12, il existe une constante $C > 0$ (indépendante de γ) telle que

$$
|\ln\left(\|\gamma\left(y_h^M\right)\|\right) - \ln\left(\|\gamma\left(y_g^M\right)\|\right)| \leqslant C\,\delta\left(\mathbf{y}_g^M, \mathbf{y}_h^M\right) \leqslant C\,\delta\left(g \cdot \mathbf{x}_g^M, h \cdot \mathbf{x}_h^M\right).
$$

Pour obtenir le résultat escompté, il nous suffit de majorer, à une constante multiplicative près, les quantités $\delta\left(g \cdot \mathbf{x}_g^M, h \cdot \mathbf{x}_h^M\right)$, $a_2\left(g\right)/a_1\left(g\right)$ et $a_2\left(h\right)/a_1\left(h\right)$ par $\delta\left(g \cdot \mathbf{x}_0, h \cdot \mathbf{x}_0\right)^\beta$. Pour cela, nous allons comparer les $\mathcal{A}^*$-décompositions des transformations g et h.

Dans un premier temps, supposons que $g = \mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ et $h = \mathfrak{a}\mathfrak{a}''$, que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}')$ et $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'')$ sont $\mathcal{A}^*$-admissibles et que les éléments $\mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{a}''$ diffèrent par leurs premières lettres. Posons $\mathbf{x}' := \mathfrak{a}' \cdot \mathbf{x}_g^M$, $\mathbf{x}'' := \mathfrak{a}'' \cdot \mathbf{x}_h^M$, $\mathbf{x}_0' := \mathfrak{a}' \cdot \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_0'' := \mathfrak{a}'' \cdot \mathbf{x}_0$ et remarquons que $\delta\left(\mathbf{x}', \mathbf{x}''\right)$ et $\delta\left(\mathbf{x}_0', \mathbf{x}_0''\right)$ sont $\geqslant \eta_\Gamma$. On a

$$
\begin{aligned}
\delta\left(g \cdot \mathbf{x}_0, h \cdot \mathbf{x}_0\right) &= \delta\left(\mathfrak{a} \cdot \mathbf{x}_0', \mathfrak{a} \cdot \mathbf{x}_0''\right) \\
&\geqslant A^-\left(\mathfrak{a}\right)\delta\left(\mathbf{x}_0', \mathbf{x}_0''\right) \geqslant A^-\left(\mathfrak{a}\right)\,\eta_\Gamma.
\end{aligned}
$$

Par ailleurs

$$
\begin{aligned}
\delta\left(g \cdot \mathbf{x}_g^M, h \cdot \mathbf{x}_h^M\right) &= \delta\left(\mathfrak{a} \cdot \mathbf{x}', \mathfrak{a} \cdot \mathbf{x}''\right) \\
&\leqslant A^+\left(\mathfrak{a}\right)\delta(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \leqslant A^+\left(\mathfrak{a}\right)
\end{aligned}
$$

et, le corollaire 6.4 nous donne alors

$$
\delta\left(g \cdot \mathbf{x}_g^M, h \cdot \mathbf{x}_h^M\right) \leqslant \frac{1}{\eta_\Gamma^\beta}\delta\left(g \cdot \mathbf{x}_0, h \cdot \mathbf{x}_0\right)^\beta. \tag{6.8}
$$

De même, d'après le corollaire 6.10, on a

$$
\|g\| \geqslant c\,\|\mathfrak{a}\| \times \|\mathfrak{a}'\|,
$$

si bien que, en utilisant de nouveau le corollaire 6.4, on obtient

$$\frac{a_2(g)}{a_1(g)} = \frac{\|\bigwedge^2 g\|}{\|g\|^2} \leqslant \frac{\|\bigwedge^2 \mathfrak{a}\|}{c^2\|\mathfrak{a}\|^2} \times \frac{\|\bigwedge^2 \mathfrak{a}'\|}{\|\mathfrak{a}'\|^2} \leqslant \frac{C_\Gamma}{c^2} A^+(\mathfrak{a}),$$

d'où

$$\frac{a_2(g)}{a_1(g)} \leqslant \frac{C_\Gamma}{c^2(\eta_\Gamma)^\beta} \delta(g\cdot \mathbf{x}_0, h\cdot \mathbf{x}_0)^\beta. \tag{6.9}$$

De même

$$\frac{a_2(h)}{a_1(h)} \leqslant \frac{C_\Gamma}{c^2(\eta_\Gamma)^\beta} \delta(g\cdot \mathbf{x}_0, h\cdot \mathbf{x}_0)^\beta. \tag{6.10}$$

Les majorations (6.8), (6.9) et (6.10) donnent bien le résultat annoncé.

Dans un second temps, supposons que $g = \mathfrak{a}\, a^n \mathfrak{a}'$ et $h = \mathfrak{a} a^{n+m} \mathfrak{a}''$, avec $a \in \mathcal{A}$, $n, m \geqslant 1$ et $(\mathfrak{a}, a^n, \mathfrak{a}')$, $(\mathfrak{a}, a^{n+m}, \mathfrak{a}'')$ qui sont $\mathcal{A}^*$-admissibles. Nous détaillons d'abord la démonstration lorsque a est une transformation unipotente. Une légère adaptation permettra de considérer le cas où a est proximale.

Posons de nouveau $\mathbf{x}' := \mathfrak{a}' \cdot \mathbf{x}_g^M$, $\mathbf{x}'' := \mathfrak{a}'' \cdot \mathbf{x}_h^M$ et $\mathbf{x}_0^{'} := \mathfrak{a}' \cdot \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_0^{''} := \mathfrak{a}'' \cdot \mathbf{x}_0$. D'après le corollaire 6.4 et la proposition 6.5, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tous $\mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in \mathbf{B}_a$, on a

$$\frac{A^-(\mathfrak{a})}{C_a\, n^p} \leqslant \delta\left(\mathfrak{a} a^n \cdot \mathbf{y}', \mathfrak{a} a^{n+m} \cdot \mathbf{y}''\right) \leqslant A^+(\mathfrak{a}) \frac{C_a}{n}.$$

Si on prend $\mathbf{y}' = \mathbf{x}_0^{'}$ et $\mathbf{y}'' = \mathbf{x}_0^{''}$, il vient

$$\delta(g\cdot \mathbf{x}_0, h\cdot \mathbf{x}_0) \geqslant \frac{A^-(\mathfrak{a})}{C_a\, n^p},$$

et d'autre part, en prenant $\mathbf{y}' = \mathbf{x}'$ et $\mathbf{y}^{''} = \mathbf{x}^{''}$ on obtient

$$\delta\left(g\cdot \mathbf{x}_g^M, h\cdot \mathbf{x}_h^M\right) \leqslant A^+(\mathfrak{a}) \frac{C_a}{n}.$$

Ainsi

$$\delta\left(g\cdot \mathbf{x}_g^M, h\cdot \mathbf{x}_h^M\right) \leqslant C_a^{1+\beta}\, n^{\beta\, p-1} \delta(g\cdot \mathbf{x}_0, h\cdot \mathbf{x}_0)^\beta, \tag{6.11}$$

puisque $A^+(\mathfrak{a}) \leqslant A^-(\mathfrak{a})^\beta$. Par ailleurs,

$$\frac{a_2(g)}{a_1(g)} \leqslant \frac{\|\bigwedge^2 \mathfrak{a}\, a^n\|}{c^2\|\mathfrak{a}\, a^n\|^2}.$$

Par le corollaire 6.4, pour $\mathbf{y} \neq \mathbf{y}^{''}$, il vient

$$\frac{a_2\,(g)}{a_1\,(g)} \leqslant \frac{C_\Gamma}{c^2}\Big(\frac{\delta\,(\mathfrak{a}a^n\cdot\mathbf{y}',\mathfrak{a}a^{n+m}\cdot\mathbf{y}'')}{\delta\,(\mathbf{y}',\mathbf{y}'')}\Big)^\beta$$

d'où

$$\frac{a_2\,(g)}{a_1\,(g)} \leqslant \frac{C_\Gamma\,C_a^{\beta+\beta^2}}{c^2\,\delta\,(\mathbf{x}',\mathbf{x}'')^\beta}n^{\beta^2\,p-\beta}\,\delta\,(g\cdot\mathbf{x}_0,h\cdot\mathbf{x}_0)^{\beta^2}\,. \tag{6.12}$$

La même majoration est valable pour $a_2(h)/a_1(h)$. Les majorations (6.11) et (6.12) donnent bien le résultat annoncé, si l'on choisit $\beta := \beta_\Gamma$ pour que $\beta\,p-1 \leqslant 0$.

Dans le cas où a est une transformation proximale, on modifie la démonstration ci-dessus en utilisant la proposition 6.3. En effet, cette dernière assure qu'il existe deux réels $\epsilon > 0$ et $\epsilon' > 0$ tels que $(\epsilon')^{\beta_a} \leqslant \epsilon$ et, pour tous points $\mathbf{y}',\mathbf{y}''$ de $\mathbf{B}_a$, on a

$$\frac{A^-\,(\mathfrak{a})}{C_a}\,(\epsilon')^n\,\delta\,(\mathbf{y}',a^m\cdot\mathbf{y}'') \leqslant \delta\,\big((\mathfrak{a}\mathfrak{a}^\mathfrak{n})\cdot\mathbf{y}',\big(\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{\mathfrak{n}+\mathfrak{m}}\big)\cdot\mathbf{y}''\big) \leqslant A^+\,(\mathfrak{a})\;C_a\,\epsilon^n$$

Le reste de la preuve est inchangée. Ce qui est suffisant. □

6.3. Démonstration du théorème 1.5

Le schéma de la preuve est celui du théorème 1.4. Nous fixons $\beta \in]0,1[$ comme dans la proposition 6.11 et nous posons $D = \{z \in \mathbb{C}/\mathcal{R}e\,(z) > \tau\}$.

Étape 1. Pour tout nombre complexe $z \in D$, nous considérons l'opérateur $\mathcal{L}_z$, dit *de Ruelle*, défini pour $\phi \in C\,(\Xi)$ par

$$\forall \mathbf{x} \in \Xi \qquad \mathcal{L}_z\phi\,(\mathbf{x}) := \sum_{\gamma\in\Gamma^{(1)}} p^z\,(\gamma,\mathbf{x})\;\phi\,(\gamma\cdot\mathbf{x})\,.$$

En utilisant les résultats du paragraphe précédent, nous pouvons montrer la

Proposition 6.13. — *Pour tout $z \in D$, l'opérateur $\mathcal{L}_z$ agit continûment sur H_β.*

De plus, l'application

$$\mathcal{L}_z : D \to \mathrm{End}\,(H_\beta) \qquad z \mapsto \mathcal{L}_z$$

est analytique sur D.

Le spectre des opérateurs de Ruelle en restriction à H_β est décrit dans la

Proposition 6.14. — *(1) Soit s un réel de D. On a*

- *si* $\mathrm{Card}\,(\mathcal{A}) \geqslant 6$ *alors $\rho\,(s)$ est la seule valeur propre de $\mathcal{L}_s$ de module maximal et elle est simple.*
- *si* $\mathrm{Card}\,(\mathcal{A}) = 4$ *alors $\rho\,(s)$ et $-\rho\,(s)$ sont les seules valeurs propres de $\mathcal{L}_s$ de module maximal et elles sont simples.*

(2) Si z est un nombre complexe de D on a

$$\rho\,(z) \leqslant \rho\,(\mathcal{R}e\,(z))\,, \tag{6.13}$$

et $\rho\,(\mathcal{R}e\,(z))$ est une valeur spectrale de $\mathcal{L}_z$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.

Étape 2. On considère la fonction η définie formellement par

$$\eta\,(z) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \|\gamma\|^{-z}.$$

Cette fonction est définie dès que $\mathcal{R}e\,(z) > \tau$, par définition de l'exposant critique τ. À l'aide des propositions 6.13 et 6.14, on établit l'existence de $C > 0$ tel que la fonction

$$D \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \eta(z) - \frac{C}{\tau - z}$$

se prolonge par continuité sur le demi-espace fermé $\{z \in \mathbb{C}/\mathcal{R}e\,(z) \geqslant \tau\}$. La mesure

$$\nu_\Gamma := \sum_{\gamma\in\Gamma} \delta_{\|\gamma\|},$$

dont la fonction de répartition n'est autre que la fonction comptage $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $R \mapsto \mathrm{Card}\{\gamma \in \Gamma/\|\gamma\| \leqslant R\}$ de Γ, vérifie donc les hypothèses du théorème taubérien d'Ikehara-Wiener. Par conséquent, nous avons

$$\mathrm{Card}\{\gamma \in \Gamma/\|\gamma\| \leqslant R\} \sim C\,R^\tau$$

lorsque $R \to +\infty$. Ce qui achève la démonstration du théorème 1.5. $\square$

Bibliography

[Alb] Albuquerque (P.). — Patterson-Sullivan theory in higher rank symmetric spaces. Geom. Funct. Anal. 9, no. 1, p. 1-28 (1999).

[Ben] Benoist (Y.). — Propriétés asymptotiques des groupes linéaires. Geom. Funct. Anal. 7, no. 1, p. 1-47 (1997).

[Bar] Bartels (H.J.). — Nichteuklidische Gitterpunktprobleme und Gleichverteilung in linearen algebraischen Gruppen. Comment. Math. Helv. 57, no. 1, p. 158-172 (1982).

[Con-Gui] Conze (J.P.), Guivarc'h (Y.). — Limit sets of groups of linear transformations. Ergodic theory and harmonic analysis (Mumbai, 1999). Sankhya Ser. A 62, no. 3, p. 367-385 (2000).

[Dal-Pei] Dal'bo (F.), Peigné (M.). — Some negatively curved manifolds with cusps, mixing and counting. J. Reine Angew. Math. 497, p. 141-169 (1998).

[Dal-Ota-Pei] Dal'bo (F.), Otal (J.-P.), Peigné (M.). — Séries de Poincaré des groupes géométriquement finis. Israel J. Math. 118, p. 109-124 (2000).

[Duk-Rud-Sar] Duke (W.), Rudnik (Z.), Sarnak (P.). — Density of integer points on affine homogeneous varieties. Duke Math. J. 71, no. 1, p. 143-179 (1993).

[E-MF] Ellison (W.J.), Mendès France (M.). — Les nombres premiers. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, No. IX. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1366. Hermann, Paris, 1975.

[Esk-McMul] Eskin (A.), Mc Mullen (C.). — Mixing, counting, and equidistribution in Lie groups. Duke Math. J. 71, no. 1, p. 181-209 (1993).

[Gui] Guivarc'h (Y.). — Produits de matrices aléatoires et applications aux propriétés géométriques des sous-groupes discrets du groupe linéaire, Ergodic Theory and Dynamical Systems 10, p. 483-512 (1990).

[Hen-Her] Hennion (H.), Hervé (L.). — Limit theorems for Markov chains and stochastic properties of dynamical systems by quasi-compactness. Lecture Notes in Mathematics, 1766. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[Hen] Hennion (H.). — Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipchitziens. Proc. Amer. Math. Soc. 118, no. 2, p. 627-634 (1993).

[Pei] Peigné (M.). — On the Patterson-Sullivan measure of some discrete group of isometries, Israel Journal of Mathematics 133, p. 77-88 (2003).

[Pol-Sha] Pollicott (M.), Sharp (R.). — Linear actions of free groups. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 51, no. 1, p. 131-150 (2001).

[Qui1] Quint (J.-F.). — Groupes de Schottky et comptage. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55, no. 2, p. 373-429 (2005).

[Quint2] Quint (J.-F.). — Groupes convexes cocompacts en rang supérieur. Geom. Dedicata 113, p. 1-19 (2005).

[Tit] Tits (J.). — Free subgroups in linear groups. J. Algebra 20, p. 250-270 (1972).