ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

FAHD KARAMI

Compétition Réaction-Diffusion et comportement asymptotique d'un problème d'obstacle doublement non linéaire

Tome XIX, n° 2 (2010), p. 345-362.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2010_6_19_2_345_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XIX, n° 2, 2010
pp. 345–362

Compétition Réaction-Diffusion et comportement asymptotique d'un problème d'obstacle doublement non linéaire

Fahd Karami[(1)]

Résumé. — Le but de cet article est l'étude de la compétition Réaction-Diffusion pour un problème de type $\beta(w)_t - d_\varepsilon \operatorname{div} a(x, Dw) + r_\varepsilon g\big(x, \beta(w)\big) = f$, où **a** est un opérateur de Lerray-Lions, β est une fonction continue croissante et la réaction g est une fonction croissante qui dépend de l'espace x. On suppose que les coefficients de diffusion d_ε et de Réaction r_ε dépendent du paramètre ε avec d_ε et/ou r_ε tends vers $+\infty$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Dans le cas où, le coefficient de réaction est très rapide, nous étudions le comportement asymptotique lorsque $t \to \infty$ de la solution du problème d'obstacle afin de caractériser la donnée initiale du problème limite.

Abstract. — In this paper, we study the competition between the diffusion and the reaction for the problem of type $\beta(w)_t - d_\varepsilon \operatorname{div} a(x, Dw) + r_\varepsilon g\big(x, \beta(w)\big) = f$, where **a** is a Lerray-Lions operator, β is a nondecreasing continuous function and the reaction g is a nondecreasing function that depend on the space x. Assume that, the coefficient of diffusion d_ε and the reaction r_ε depend on the parameter ε with d_ε and/or r_ε tends to $+\infty$ as $\varepsilon \to 0$. In the case when, the reaction coefficient is very fast, we study the asymptotic behavior as $t \to \infty$ of the solution of the obstacle problem to characterize the initial data for the limit problem.

1. Introduction

Cet article est consacré à l'étude du comportement de la solution d'un problème de Réaction-Diffusion lorsque la réaction et/ou la diffusion deviennent très grands. On considère l'EDP suivante :

(*) Reçu le 31/12/2008, accepté le 26/06/2009
(1) École Supérieure de Technologie d'Essaouira, Université Cadi Ayyad, B.P 383 Essaouira El Jadida, Essaouira, Maroc

$$P^{d,r}(u_0,\ f)\begin{cases} u_t - d\ \mathrm{div}\, a(x,\ Dw) + r\, g(x,\ u) = f, & \text{sur } Q := (0,T)\times\Omega \\ u = \beta(w) & \\ a(x, Dw).\vec{n} = 0 & \text{sur } \Sigma := (0,T)\times\Gamma \\ u(0) = u_0 & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ est un domaine borné de frontière lipschitzienne Γ, $\vec{n}$ est le vecteur normale unitaire extérieur à Ω, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^\infty(Q)$ et $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue croissante avec $\beta(0) = 0$ et

(H_β) $$Im(\beta) = \mathbb{R},$$

(H_g) pour p.p. $x \in \Omega$, $s \to g(x,\ s)$ est une fonction continue, croissante et pour tout $s \in \mathbb{R}$, $g(.,\ s) \in L^1(\Omega)$ avec $g(.,\ 0) \equiv 0$.

$\mathbf{a} : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est un champ Caratheodory (i.e. mesurable en $x \in \Omega$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et continue en $\xi \in \mathbb{R}^N$ pour p.p. $x \in \Omega$) avec $\mathbf{a}(.,\ \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ vérifiant les hypothèses du type Leray-Lions (cf. [3], [16]) suivantes :

(H_1) il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ $a(x,\ \xi).\xi \geqslant \alpha|\xi|^p$ pour p.p. $x \in \Omega$

(H_2) pour tout $\xi,\ \eta \in \mathbb{R}^N$ tel que $\xi \neq \eta$ $\big(a(x,\ \xi) - a(x,\ \eta)\big).(\xi - \eta) > 0$ p.p. $x \in \Omega$

(H_3) ils existent $\sigma > 0$ et $k \in L^{p'}(\Omega)$ tels que $|a(x,\xi)| \leqslant \sigma(k(x) + |\xi|^{p-1})$ p.p. $x \in \Omega$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, où $p' = \dfrac{p}{p-1}$.

L'existence et l'unicité de la solution faible du problème $P^{d,\,r}(u_0,\ f)$ a fait l'objet de nombreuses recherches nous renvoyons à [19] et aux références qui s'y trouvent. On s'intéresse au comportement asymptotique de la solution lorsque les coefficients d et/ou r deviennent très grands (cf. [6], [7], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [22]). Le cas où la fonction g est indépendante de l'espace et le champ $\mathbf{a}(x,\ \xi) = \xi$ a été étudié dans [18]. Dans ce travail, nous généraliserons ces résultats dans le cas ou l'opérateur de diffusion et de réaction dépendent de l'espace. Ce genre de dépendance apparait dans la modélisation des (matériaux composites, dynamique de populations, réactions chimiques) lorsque dans des sous régions soit une espèce se diffuse plus rapidement que l'autre, ou bien les deux espèces sont en grande interaction (cf. [2], [20], [23]).

Lorsque la réaction est très rapide, plus précisément lorsque d est fixé et $r \to \infty$, la solution du problème $P^{d,r}(u_0,\ f)$ converge formellement vers la solution du problème

$$P^{d,\infty}(.,f)\ \begin{cases} u_t - d\ \operatorname{div} a(x,\ Dw) + \partial\mathbb{I}_{[m(x),M(x)]}(u) \ni f, & \text{sur}\ \ Q \\ u = \beta(w) & \\ & \\ a(x,\ Dw).\vec{n} = 0 & \text{sur}\ \ \Sigma \end{cases} \tag{1.1}$$

où m et M sont données par $g(x,.)^{-1}\{0\} = [m(x),\ M(x)]$ p.p. $x \in \Omega$. Le problème $P^{d,\infty}$ s'écrit encore sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} m \leqslant u \leqslant M, \quad u = \beta(w) \\[2ex] \big(u_t - d\ \operatorname{div} a(x,\ Dw) - f\big)(u-m)(u-M) = 0 \\[2ex] \big(u_t - d\ \operatorname{div} a(x,\ Dw) - f\big) \geqslant 0 \text{ sur } [u=m] \\[2ex] \big(u_t - d\ \operatorname{div} a(x,\ Dw) - f\big) \leqslant 0 \text{ sur } [u=M] \end{array}\right\} & \text{sur}\ \ Q \\[2ex] a(x,\ Dw).\vec{n} = 0 & \text{dans}\ \ \Sigma \end{cases}$$

est appelé problème d' obstacle. Il vient de [19] que si $m(x) \leqslant u_0(x) \leqslant M(x)$ p.p. $x \in \Omega$. Alors, le problème $P^{d,\infty}$ admet une unique solution $u \in \mathcal{C}\Big([0,T),\ L^1(\Omega)\Big)$ et il existe $w \in L^p\Big(0,T;\ W^{1,p}(\Omega)\Big)$, $u = \beta(w)$ p.p. Q telle que $\forall\, l > 0$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \int_0^w T_l(r-\xi)d\beta(r) + d\int_\Omega a(.,Dw)DT_l(w-\xi) \leqslant \int_\Omega fT_l(w-\xi) \tag{1.2}$$
dans $\mathcal{D}'(0,T)$

pour tout $\xi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap K$, où T_l est la fonction de troncation au niveau l donnée par $T_l(s) := max\big\{-l,\ min\{l,\ s\}\big\}$, $s \in \mathbb{R}$ et K est défini par :

$$K = \Big\{ w \in L^\infty(\Omega) \text{ telle que } m(x) \leqslant \beta(w) \leqslant M(x) \ \text{ p.p. } \ x \in \Omega \Big\}.$$

Si $r > 0$ et $d \to \infty$, alors le problème limite est l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$c_t + r \fint_\Omega g(x,c)\,dx = \fint_\Omega f \quad \text{sur} \quad (0,T) \tag{1.3}$$

Finalement, on suppose que $d \to \infty$ et $r \to \infty$, ce qui correspond à la compétition entre la réaction et la diffusion. Alors, le problème limite est l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$c_t + \partial \mathbb{I}_{[m_0,M_0]}(c) \ni \fint_\Omega f \quad \text{sur} \ (0,T) \tag{1.4}$$

où

$$m_0 = \min\Big(\bigcap_{x\in\Omega}[m(x),\, M(x)]\Big) \quad \text{et} \quad M_0 = \max\Big(\bigcap_{x\in\Omega}[m(x),\, M(x)]\Big).$$

Il est clair, que la donnée initiale u_0 est incompatible avec les problèmes limites (1.1), (1.3) et (1.4). Ainsi, un phénomène de *couche limite* apparaît au voisinage de $t = 0$ (Cf. [5], [4], [9]) . Pour l'identification des données initiales correspondantes aux problèmes limites nous utiliserons les résultats obtenus dans [18], et en ce qui concerne le problème (1.4) nous aurons besoin de distinguer entre le cas où $\dfrac{d}{r} \to \infty$ et $\dfrac{d}{r} \to 0$.

2. Résultats principaux

THÉORÈME 2.1. — *Soient $f \in L^\infty(Q)$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $u^{d,r}$ la solution du problème $P^{d,r}(u_0, f)$.*

1. *Grande diffusion : Pour tout $r > 0$, lorsque $d \to \infty$, on a $u^{d,r} \to c$ dans $\mathcal{C}\Big((0,T),\ L^1(\Omega)\Big)$, avec $c \in \mathcal{C}^1\big([0,T)\big)$ est l'unique solution de l'EDO,*

$$\begin{cases} c_t + r \displaystyle\fint_\Omega g(x,\, c) = \fint_\Omega f \qquad \textit{sur} \quad (0,T) \\ c(0) = \displaystyle\fint_\Omega u_0. \end{cases} \tag{2.5}$$

2. *Réaction rapide : Pour $d > 0$ et lorsque $r \to \infty$, on a $u^{d,r} \to u$ dans $\mathcal{C}\Big((0,T), L^1(\Omega)\Big)$, avec u est l'unique solution entropique du problème d'obstacle (1.1) et $u(0) = m \vee (u_0 \wedge M)$ p.p. dans Ω.*

3. *Compétition Réaction-Diffusion : Si $d \to \infty$ et $r \to \infty$, alors*

$$u^{d,r} \to c \quad \textit{dans}\ \mathcal{C}\Big((0,T),\ L^1(\Omega)\Big)$$

où $c \in \mathcal{C}^1([0,T))$ est la solution de l'EDO

$$c_t + \partial \mathbb{I}_{[m_0,M_0]}(c) \ni \fint_\Omega f \quad \textit{dans} \quad (0,T),$$

avec

(a) Si $\dfrac{d}{r} \to 0$, *alors* $c(0) = m_0 \vee \big(M_0 \wedge \fint_\Omega u_0\big)$.

(b) Si $\dfrac{d}{r} \to \infty$, *alors* $c(0) = \lim\limits_{t\to\infty} z(t)$ *avec* z *est la solution du problème d'obstacle* $P^{d,\,\infty}(z_0,\, 0)$ *où* $z_0 = m\vee(u_0\wedge M)$, *p.p.* Ω.

THÉORÈME 2.2. — *Soient* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\underline{u}_0(x) := m(x)\vee\big(u_0(x)\wedge M(x)\big)$ *p.p. dans* Ω *et* $u(t)$ *est la solution du problème* $P^{d,\,\infty}(\underline{u}_0, 0)$. *Alors, il existe une unique constante* $v \in [m_0,\, M_0]$ *telle que*

$$u(t) \to v \quad \text{dans } L^1(\Omega), \quad \text{lorsque } t \to \infty.$$

3. Preuve des Théorèmes

Il vient de [19] que la solution faible du problème $P^{d,\,r}(u_0, f)$ n'est autre que la *bonne solution* du problème de Cauchy suivant

$$CP^{d,\,r}(u_0,\, f)\begin{cases} u_t + \mathcal{A}^{d,r}u = f & \text{sur } [0,T) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

avec, $\overline{\mathcal{A}^{d,r}}$ est un opérateur m-T-accrétif et $\mathcal{A}^{d,r}$ défini dans $L^1(\Omega)$ par

$$f = \mathcal{A}^{d,r}v \Leftrightarrow \begin{cases} v,\, f \in L^{p'}(\Omega),\ g(.,v) \in L^{p'}(\Omega),\, \exists w \in W^{1,p}(\Omega),\, v = \beta(w) \ \text{ p.p. } \Omega \ \text{ et} \\ d\displaystyle\int_\Omega a(.,\, Dw)D\xi + r\int_\Omega g(x,\, v)\xi = \int_\Omega f\xi, \ \text{ pour tout } \ \xi \in W^{1,p}(\Omega). \end{cases}$$

De plus, $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{d,r})} = L^1(\Omega)$ voir le Lemme 3.1(cf. [19]).

Examinons maintenant le comportement lorsque d et/ou r tends vers ∞ de la solution du problème stationnaire associé a $P^{d,r}(u_0, f)$ défini par

$$S^{d,r}(f)\ \begin{cases} v - d\ \operatorname{div} a(x,\, Dw) + r\, g(x,\, v) = f,\ v = \beta(w) & \text{sur } \Omega \\ a(x,\, Dw).\vec{n} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Proposition 3.1. — *Soit $f \in L^\infty(\Omega)$ et $v^{d,r}$ la solution du problème $S^{d\,,r}(f)$.*

1. *Si $d = d_\varepsilon$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} d_\varepsilon = \infty$, alors*

$$v^{d,r} \longrightarrow \big(I_{\mathbb{R}} + r \fint_\Omega g(x,\,.)\,dx\big)^{-1}\big(\fint_\Omega f\big) \qquad \text{dans } L^1(\Omega).$$

2. *Si $r = r_\varepsilon$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} r_\varepsilon = \infty$, alors $v^{d,\,r} \to v$ dans $L^1(\Omega)$ et v est l'unique solution du problème elliptique*

$$\begin{cases} v - d\ \mathrm{div}\, a(x,\, Dw) + \partial\mathbb{I}_{[m(x),M(x)]}(v) \ni f, \quad v = \beta(w) & \text{sur } \Omega \\ a(x,\, Dw).\vec{n} = 0, & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

3. *Si $d = d_\varepsilon$ et $r = r_\varepsilon$, avec $\lim\limits_{\varepsilon\,\to\,0} d_\varepsilon = \lim\limits_{\varepsilon\,\to\,0} r_\varepsilon = \infty$, alors*

$$v^{d,r} \longrightarrow (I_{\mathbb{R}} + \partial\mathbb{I}_{[m_0,M_0]})^{-1}\big(\fint_\Omega f\big) \qquad \text{dans } L^1(\Omega).$$

Remarque 3.2. — $(I\!I_{\mathbb{R}} + \partial\mathbb{I}_{[m_0,M_0]})^{-1}\big(\fint_\Omega f\big) = m_0 \vee \big(\fint_\Omega f \wedge M_0\big).$

Preuve de la Proposition 3.1. — Puisque d et/ou r dépendent de ε, alors on note par v_ε (respectivement w_ε) la suite $v^{d,r}$ (respectivement $w^{d,r}$). D'après la Proposition 2.1 (cf. [19]) on a v_ε et w_ε sont bornées dans $L^\infty(\Omega)$ de plus w_ε est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$. Alors, w_ε est faiblement relativement compact dans $W^{1,p}(\Omega)$ et puisque β est continue alors v_ε est relativement compact dans $L^1(\Omega)$. Donc, il existe une sous suite notée encore par ε, telle que $v_\varepsilon \to v$ dans $L^1(\Omega)$, $w_\varepsilon \to w$ fortement dans $L^1(\Omega)$ et faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$ et $v = \beta(w)$ p.p. Ω. Nous allons traiter séparément les différents cas du théorème pour pouvoir caractériser u et w.

1. D'après la Proposition 2.1 (cf. [19]), on a

$$d_\varepsilon \int_\Omega |Dw_\varepsilon|^p \leqslant \frac{C_1\Big(\Omega, p, N, ||f||_\infty\Big)}{\alpha},$$

alors, lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, on obtient

$$\int_\Omega |Dw|^p \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |Dw_\varepsilon|^p = 0,$$

d'où les fonctions v et w sont constantes. Prenons $\xi \equiv 1$ comme fonction test et passons à la limite il vient que v vérifie $v+r\fint_\Omega g(x,\, v)\,dx = \fint_\Omega f$. ce qui termine la preuve de la première partie du théorème.

2. Conséquence immédiate du Corollaire 2.5 (cf. [19]).

3. Puisque
$$d_\varepsilon \int_\Omega |Dw_\varepsilon|^p \leqslant \frac{C_1\Big(\Omega, p, N, ||f||_\infty\Big)}{\alpha},$$
alors v et w sont constantes. De plus, $g(.,\, 0) = \beta(0) = 0$ alors la Proposition 2.1 (cf. [19]) nous donne
$$|\, v_\varepsilon\, |_{L^1(\Omega)} + r_\varepsilon|\, g(.,\, v_\varepsilon)\, |_{L^1(\Omega)} \leqslant |\, f\, |_{L^1(\Omega)}$$
donc lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$ on a $g(.,\, v_\varepsilon) \longrightarrow 0$ dans $L^1(\Omega)$, par suite, $g(.,\, v) = 0$ et $v \in [m(x),\, M(x)]$ p.p. Ω, or v est constant donc $v \in \bigcap\limits_{x\in\Omega}[m(x), M(x)]$. Soit $\xi \in W^{1,p}(\Omega)$, prenons $(w_\varepsilon - \xi)$ comme fonction test dans la définition de la solution du problème $S^{d,r}(f)$ alors on a
$$\int_\Omega v_\varepsilon(w_\varepsilon-\xi)+d_\varepsilon\int_\Omega a(x,\, Dw_\varepsilon)D(w_\varepsilon-\xi)+r_\varepsilon\int_\Omega g(.,v_\varepsilon)(w_\varepsilon-\xi) = \int_\Omega f(w_\varepsilon-\xi).$$
D'autre part, on prend ξ constante telle que $\xi \in K$, alors $\beta(\xi) \in [m_0,\, M_0]$, d'où $g\big(x,\, \beta(\xi)\big) = \mathbf{a}(x,\, 0) = 0$ p.p. $x \in \Omega$ et il vient de la monotonie de a, β, g que
$$\int_\Omega g(.,\, v_\varepsilon)\big(w_\varepsilon - \xi\big) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \int_\Omega a(.,\, Dw_\varepsilon)D\big(w_\varepsilon - \xi\big) \geqslant 0,$$
on obtient que
$$\int_\Omega v_\varepsilon(w_\varepsilon - \xi) \leqslant \int_\Omega f(w_\varepsilon - \xi),$$
on passe à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$, on trouve que
$$(w-\xi)(v - \fint_\Omega f) \leqslant 0.$$

- Si $\xi \in \beta^{-1}(m_0)$ alors on a
$$(v-m_0)(v-\fint_\Omega f) \leqslant 0.$$
Puisque $v \in [m_0,\, M_0]$, alors soit $v = m_0$ ou bien $v > m_0$ et dans ce cas $v - \fint_\Omega f \leqslant 0$.

- Si $\xi \in \beta^{-1}(M_0)$ alors on a

$$(v - M_0)(v - \fint_\Omega f) \leqslant 0.$$

Soit $v = M_0$ ou bien $v < M_0$ et dans ce cas $v - \fint_\Omega f \geqslant 0.$

Finalement, on obtient que

$$v + \partial \mathbb{I}_{[m_0, M_0]}(v) \ni \fint_\Omega f.$$

Ce qui termine la preuve du Théorème. $\square$

Conséquence immédiate de ce théorème est le Corollaire suivant :

Corollaire 3.3. —

1. *Pour tout $r > 0$, lorsque $d \to \infty$, alors l'opérateur $\mathcal{A}^{d\,,r}$ converge vers l'opérateur T-accrétif $\mathcal{A}^{\infty,r}$ défini, dans $L^1(\Omega)$, par*

$$f \in \mathcal{A}^{\infty,r} v \Leftrightarrow f \in L^1(\Omega),\ v \equiv c,\ c \in \mathbb{R} \text{ et } r \int_\Omega g(x,\, c) d\,x = \int_\Omega f.$$

2. *Pour tout $d > 0$, lorsque $r \to \infty$, alors on a $\mathcal{A}^{d\,,r}$ converge dans $L^1(\Omega)$vers l'opérateur T-accrétif $\mathcal{A}^{d,\infty}$ défini, par*

$$f \in \mathcal{A}^{d,\infty} v \Leftrightarrow \begin{cases} v, f \in L^{p'}(\Omega), \exists\ w \in W^{1,p}(\Omega),\ v = \beta(w) \ \ p.p.\,\Omega \ \ et \\ \\ d \displaystyle\int_\Omega a(.,\, Dw) DT_l(w - \xi) \leqslant \int_\Omega f T_l(w - \xi) \quad \forall l > 0, \\ \\ \ pour\ tout\ \ \xi \in W^{1,p}(\Omega) \cap K. \end{cases}$$

3. *Lorsque $d \to \infty$ et $r \to \infty$, alors $\mathcal{A}^{d\,,r}$ converge vers l'opérateur T-accrétif $\mathcal{A}^\infty$, défini par*

$$f \in \mathcal{A}^\infty v \Leftrightarrow f \in L^1(\Omega),\ v \equiv c,\ c \in \mathbb{R} \text{ et } \fint_\Omega f \in \partial \mathbb{I}_{[m_0, M_0]}(c).$$

Il est bien claire que l'opérateur $\mathcal{A}^{d,r}$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{A}^{d,r} = dA + rB \tag{3.6}$$

avec $A = \mathcal{A}^{1,0}$ et $B \ : \ L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ est défini par $B\,u(x) \ = \ g(x,\, u(x))$ p.p. Ω où

$$\mathcal{D}(B) = \Big\{ u \ \in \ L^1(\Omega);\ g(.,\, u) \ \in \ L^1(\Omega) \Big\}.$$

De plus, on a $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$.

LEMME 3.4. — *Lorsque $\varepsilon \ \to \ 0$, on a $\varepsilon\, A \ + B \ \to \ B$, au sens de la résolvante.*

Preuve. — Pour $f \in L^\infty(\Omega)$, on considère u_ε la solution du problème

$$\begin{cases} u_\varepsilon - \varepsilon \operatorname{div} a(x,\, Dw_\varepsilon) + g(x,\, u_\varepsilon) = f,\ u_\varepsilon = \beta(w_\varepsilon) & \text{sur } \ \Omega \\ a(x,\, Dw_\varepsilon).\vec{n} = 0 & \text{sur } \ \Gamma\,. \end{cases} \tag{3.7}$$

Nous utilisons les mêmes arguments dans [19] et nous montrons que

$$\int_\Omega |Dw_\varepsilon|^p \leqslant \frac{C(||f||_\infty, \beta)}{\varepsilon\alpha} =: \frac{C_4}{\varepsilon} \text{ et } \Big(\int_\Omega |\varepsilon a(.,Dw)|^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} \leqslant \sigma\Big(\varepsilon ||k||_{L^{p'}(\Omega)} + \varepsilon^{\frac{1}{p}} C_4^{\frac{1}{p'}}\Big).$$

Alors, lorsque $\varepsilon \ \to \ 0$ on a $\varepsilon a(.,\, Dw_\varepsilon)$ converge faiblement vers 0 dans $[L^{p'}(\Omega)]^N$. Passons à la limite dans la formulation faible du problème (3.7), on trouve

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \big(u_\varepsilon + g(.,\, u_\varepsilon)\big)\xi = \int_\Omega f\, \xi \quad \text{pour tout } \xi \in W^{1,p}(\Omega).$$

Nous réutiliserons la Proposition 2.1 (cf. [19]), alors

$$||u_\varepsilon + g(.,\, u_\varepsilon)||_{L^{p'}(\Omega)} \leqslant ||f||_{L^{p'}(\Omega)},$$

d'où $u_\varepsilon + g(.,\, u_\varepsilon)$ converge fortement vers f dans $L^{p'}(\Omega)$ et par suite $L^1(\Omega)$. D'autre part, soit $u \in L^1(\Omega)$ tel que $u + g(.,u) = f$, on a

$$u_\varepsilon - u = u_\varepsilon + g(.,\, u_\varepsilon) - f - \big(g(.,\, u_\varepsilon) - g(.,u)\big),$$

donc

$$||u_\varepsilon - u||_{L^1(\Omega)} \leqslant ||u_\varepsilon + g(.,\, u_\varepsilon) - f||_{L^1(\Omega)}.$$

Nous passons à la limite lorsque $\varepsilon \ \to \ 0$, nous obtenons u_ε converge vers $u := (I \ + \ B)^{-1}\, f$ dans $L^1(\Omega)$. Ce qui termine la preuve. $\square$

LEMME 3.5. — *Lorsque $\varepsilon \ \to \ 0$, on a $A \ + \ \varepsilon\, B \ \to \ A$, au sens de la résolvante.*

Preuve. — La fonction $r \to g(.,r)$ est continue croissante, alors l'opérateur B est strictement accrétif et d'après la remarque 2.4 (cf. [18]), il vient que $A + \varepsilon B \to A$, au sens de la résolvante. □

PROPOSITION 3.6. —

1. $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{d,\infty})} = \Big\{ z \in L^1(\Omega) \ ; \ m(x) \leqslant z(x) \leqslant M(x) \ p.p. \ \Omega \Big\}.$
2. $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{\infty,r})} = \mathbb{R}$.
3. $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{\infty})} = [m_0, M_0]$.

Preuve. —

1. conséquence du corollaire 2.5 (cf. [19]).
2. Il vient de (H_g), pour tout $c \in \mathbb{R}$, $r \displaystyle\int_\Omega g(x,\, c) d\, x$ est bien défini et il existe $f \in L^1(\Omega)$, telle que $\displaystyle\int_\Omega f = r \int_\Omega g(x,\, c) d\, x$, alors $f \in \mathcal{A}^{\infty,r}(c)$ et $\mathcal{A}^{\infty,r}(c) \neq \emptyset$.
3. Il est claire que $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{\infty})} \subseteq [m_0, M_0]$. Maintenant, pour $c \in [m_0, M_0]$, $\partial \mathbb{I}_{[m_0,M_0]}(c)$ est non vide et pour tout $e \in \partial \mathbb{I}_{[m_0,M_0]}(c)$, il existe $f \in L^1(\Omega)$, telle que $\displaystyle -\!\!\!\!\!\!\int_\Omega f = e$, alors $f \in \mathcal{A}^{\infty}(c)$ et on déduit que $\mathcal{A}^{\infty}(c) \neq \emptyset$, et $c \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{\infty})$. □

Afin d'établir le résultat du théorème 2.1 lorsque la réaction devient est trés rapide, nous aurions besoin étudier le comportement asymptotique lorsque $t \to \infty$ de la solution du problème d' obstacle $P^{d,\infty}$. Nous rappelons que, $[m_0,\ M_0]$ est inclu dans l'ensemble des solutions stationnaires du problème $P^{d,\,\infty}$, c'est-à-dire que pour tout z tel que $m_0 \leqslant z \leqslant M_0$ et $\forall\ t \geqslant 0$ on a $e^{-t\,\mathcal{A}^{d,\,\infty}} z = z$. En effet, puisque $m_0 \leqslant z \leqslant M_0$ alors on vérifie facilement que $(I + \lambda \mathcal{A}^{d,\,\infty})^{-1} z = z$, pour tout $\lambda > 0$, alors

$$e^{-t\,\mathcal{A}^{d,\,\infty}} z = L^1 - \lim_{n \to \infty} \Big(I + \frac{t}{n} \mathcal{A}^{d,\,\infty} \Big)^{-n} z = z.$$

Pour montrer le Théorème 2.2, nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 3.7. —

1. *Pour tout sous ensemble borné B de $L^\infty(\Omega)$ on a* $\big(I + \lambda \mathcal{A}^{d,\,\infty}\big)^{-1}(B)$ *est relativement compact dans* $L^1(\Omega)$.

2. *Pour tout* $z_0 \in L^\infty(\Omega)$ *tel que* $m(x) \leqslant z_0(x) \leqslant M(x)$ *p.p.* $x \in \Omega$, *l'orbite* $\gamma(z_0) = \left\{ e^{-t\,\mathcal{A}^{d,\infty}} z_0 \,:\, t \geqslant 0 \right\}$ *est relativement compact dans* $L^1(\Omega)$.

Preuve. —

1. Prenons $(f_n) \subset B$ et soit $v_n = \left(I + \lambda \mathcal{A}^{d,\infty}\right)^{-1} f_n$. La fonction v_n est obtenue en passant à la limite dans $S^{d,r}(f_n)$ lorsque $r \to \infty$ donc $||v_n||_{L^\infty(\Omega)} \leqslant ||f_n||_{L^\infty(\Omega)}$. Puisque f_n est bornée dans $L^\infty(\Omega)$ alors v_n l'est aussi et en utilisant le fait que $Im(\beta) = \mathbb{R}$ nous déduisons que w_n est bornée dans $L^\infty(\Omega)$. D'autre part prenons $\xi = 0$ comme fonction test dans la définition de la solution du problème $S^{d,\infty}(f_n)$ et d'après la monotonie de a, g, β, la propriètè (H_1) et (H_2) nous obtenons
$$\alpha \int_\Omega |Dw_n|^p d\,x \leqslant \int_\Omega w_n f_n \leqslant ||w_n||_{L^\infty(\Omega)} ||f_n||_{L^1(\Omega)}$$
d'où w_n est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$ par suite w_n converge vers w dans $L^p(\Omega)$ alors $v_n = \beta(w_n)$ converge vers $v = \beta(w)$ dans $L^1(\Omega)$. Par conséquent, pour tout $\lambda > 0$ fixé on a $\left(I + \lambda \mathcal{A}^{d,\infty}\right)^{-1}(B)$ est relativement compact dans $L^1(\Omega)$.

2. Il vient que
$$||e^{-t\,\mathcal{A}^{d,\infty}} z_0||_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \lim_{r\to\infty} ||e^{-t\,\mathcal{A}^{d,r}} z_0||_{L^\infty(\Omega)} \leqslant ||\,z_0||_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{pour tout } t \geqslant 0.$$
D'après 1) on a $\left(I+\lambda\mathcal{A}^{d,\infty}\right)^{-1}\left(\gamma(z_0)\right)$ est relativement compact dans $L^1(\Omega)$. D'autre part, on a
$$||e^{-t\,\mathcal{A}^{d,\infty}} z_0 - \left(I + \lambda \mathcal{A}^{d,\infty}\right)^{-1}\left(e^{-t\,\mathcal{A}^{d,\infty}} z_0\right)||_{L^1(\Omega)} \leqslant \lambda \inf\left\{ ||v||_{L^1(\Omega)} \,:\, v \in \mathcal{A}^{d,\infty} z_0 \right\}.$$
On déduit que $\gamma(\,z_0)$ est relativement compact dans $L^1(\Omega)$. Ce qui nous donne le résultat désiré. $\square$

Pour tout $z_0 \in L^1(\Omega)$ tel que $m(x) \leqslant z_0(x) \leqslant M(x)$ p.p. $x \in \Omega$, on défini l'ensemble ω- limite de z_0 :
$$\omega(z_0) = \left\{ v \in L^1(\Omega);\; v = L^1 - \lim_{t_n\to\infty} e^{-t_n\,\mathcal{A}^{d,\infty}} z_0 \quad \text{pour les suites } \; t_n \to \infty \right\}$$

Remarque 3.8. — Il est possible que cette ensemble soit vide et il est bien connu que si $\gamma(z_0)$ est relativement compact alors $\omega(z_0)$ est un sous ensemble compact et non vide de $L^1(\Omega)$, alors il vient du Lemme 3.7 que pour tout $z_0 \in L^\infty(\Omega)$ on a $\omega(z_0) \neq \emptyset$. De plus, $\omega(z_0) \subseteq [m_0, M_0]$.

Preuve du Théorème 2.2. — Soit $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ alors ils existent $u \in L^\infty(Q)$, $w \in L^p\big(0,T, W^{1,p}(\Omega)\big) \cap L^\infty(Q)$ telles que $u = \beta(w)$ p.p. Ω et $u(t) = e^{-t\,\mathcal{A}^{d,\,\infty}}\underline{u}_0$. Puisque u, w sont obtenus en passant à la limite dans le problème $P^{d,r}(\underline{u}_0, 0)$ lorsque $r \to \infty$, d'après la proposition 3.2 (cf. [19]) on a

$$\int_0^\infty \int_\Omega |Dw|^p \leqslant \liminf_{r\to\infty} \int_0^\infty \int_\Omega |Dw^{d,r}|^p \leqslant C(\alpha,\, \underline{u}_0,\, \Omega).$$

Alors, il existe une suite $t_n \to \infty$ telle que $\displaystyle\int_\Omega |Dw(t_n)|^p \to 0$ et $w(t_n)$ est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$, lorsque $t_n \to \infty$. D'après le Lemme 3.7, il existe une sous suite (t_{n_p}) telle que, lorsque $t_{n_p} \to \infty$, on a $u(t_n) \to v$ dans $L^1(\Omega)$, $w(t_n) \to \underline{w} := c$ faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$, fortement dans $L^p(\Omega)$ et $v = \beta(\underline{w})$ p.p. dans Ω, d'ou v est constant et $v \in [m_0,\, M_0]$. D'autre part, pour tout $t \geqslant t_{n_p}$, on a

$$\begin{aligned}
||e^{-t\,\mathcal{A}^{d,\infty}}\underline{u}_0 - v||_{L^1(\Omega)} &= ||e^{-(t-t_{n_p})\,\mathcal{A}^{d,\infty}}e^{-t_{n_p}\,\mathcal{A}^{d,\infty}}\underline{u}_0 - v||_{L^1(\Omega)}\\
&= ||e^{-(t-t_{n_p})\mathcal{A}^{d,\infty}}e^{-t_{n_p}\mathcal{A}^{d,\infty}}\underline{u}_0 - e^{-(t-t_{n_p})\,\mathcal{A}^{d,\infty}}v||_{L^1(\Omega)}\\
&\leqslant ||e^{-t_{n_p}\,\mathcal{A}^{d,\infty}}\underline{u}_0 - v||_{L^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

alors, lorsque t_{n_p} tend vers ∞, on obtient

$$\lim_{t\to\infty} ||e^{-t\,\mathcal{A}^{d,\,\infty}}\underline{u}_0 - v||_{L^1(\Omega)} = 0.$$

Ce qui achève la preuve de la Proposition. □

Maintenant, on est en mesure de donner la preuve du Théorème 2.1 et nous allons commencer par étudier le cas d'une grande diffusion.

3.1. Grande diffusion

Dans ce paragraphe, on fixe r et on fait tendre d vers ∞. D'après le Théorème 2.3 (cf. [18]), la caractérisation de la donnée initiale du problème limite est liée au comportement asymptotique du problème :

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div} a(x,\ Dw) = 0 \qquad u = \beta(w) & \text{sur } \ Q \\ a(x,\ Dw).\vec{n} = 0 & \text{sur } \Sigma \\ u(0) = u_0 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \tag{3.8}$$

Le comportement asymptotique lorsque $t \to \infty$ de la solution du problème (3.8) est donnée par la moyenne de u_0. Plus précisement, si u est la solution du problème (3.8). Alors,

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \fint_\Omega u_0.$$

La preuve de ce résultat est bien connue dans le cas de l'opérateur Laplacian (cf. [17], [21]) et aussi pour l'opérateur de Lerray-Lions avec $\beta = I_{\mathbb{R}}$ (cf. [1]). Dans le cas où β est une fonction continue croissante telle que $Im(\beta) = \mathbb{R}$, la preuve se fait de la même manière que pour le problème d'obstacle (cf. Théorème 2.2).

Nous appliquons le Théorème 2.3 (cf. [18]) et nous montrons la Proposition suivante :

Proposition 3.9. — *Soit $u^{d,r}$ la solution du problème $P^{d,\,r}(u_0, f)$. Alors, lorsque $d \to \infty$,*

$$u^{d,r} \to c \qquad \textit{dans} \quad \mathcal{C}\big((0,T),\ L^1(\Omega)\big)$$

où $c \in \mathcal{C}^1\big([0,T)\big)$ est l'unique solution de l'EDO

$$\begin{cases} c_t + r\displaystyle\fint_\Omega g(x,c)\,dx = \fint_\Omega f \qquad \textit{sur} \qquad (0,T) \\ c(0) = \displaystyle\fint_\Omega u_0. \end{cases} \tag{3.9}$$

De plus, si $f = 0$ alors

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = m_0 \vee \big(M_0 \wedge \fint_\Omega u_0\big).$$

Preuve. — Nous rappelons que $u^{d,r}$ est aussi *bonne solution* du problème $CP^{d,r}(u_0, f)$. D'après le Lemme 3.5 l'opérateur $A + \dfrac{r}{d}B$ converge vers A lorsque $d \to \infty$. Puisque $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-tA}u_0 = \fint_\Omega u_0$ et $\fint_\Omega u_0 \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{\infty,\,r})}$, alors nous appliquons le Théorème 2.3 (cf. [18]), nous déduisons que $u^{d,r} \to u$ dans $\mathcal{C}\big((0,T);\ L^1(\Omega)\big)$, avec u est la *bonne solution* du problème

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t + \mathcal{A}^{\infty,r} u \ni f & \text{sur } (0,T) \\ \\ u(0) = \displaystyle -\!\!\!\!\!\!\int_\Omega u_0. & \end{array}\right. \tag{3.10}$$

or, pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$, on a

$$(I+\lambda\mathcal{A}^{\infty,r})^{-1}(f) = (I+\lambda\mathcal{A}^{\infty,r})^{-1}\Big(-\!\!\!\!\!\!\int_\Omega f\Big) = \Big(I+\lambda\int_\Omega g(x,.)dx\Big)^{-1}\Big(-\!\!\!\!\!\!\int_\Omega f\Big),$$

alors la bonne solution de (3.10) est solution de

$$\left\{\begin{array}{ll} c_t + r \displaystyle -\!\!\!\!\!\!\int_\Omega g(x,c)dx = -\!\!\!\!\!\!\int_\Omega f & \text{sur } (0,T) \\ \\ c(0) = \displaystyle -\!\!\!\!\!\!\int_\Omega u_0. & \end{array}\right. \tag{3.11}$$

Ce qui termine la première partie de la preuve.

Maintenant, pour démontrer la deuxième partie de la proposition nous supposons que $f \equiv 0$, alors d'après la théorie des opérateurs maximaux monotones (Cf. [8]) il existe une fonction mesurable $c_\infty \in \mathbb{R}$, telle que, lorsque $t \to \infty$, $c(t) \to c_\infty$, et $\displaystyle\int_\Omega g(x,c_\infty)dx = 0$. Il reste à prouver que $c_\infty = m_0 \vee (-\!\!\!\!\!\!\int_\Omega u_0 \wedge M_0)$. Si $m_0 \leqslant -\!\!\!\!\!\!\int_\Omega u_0 \leqslant M_0$, alors, $c(t) = c(0) := -\!\!\!\!\!\!\int_\Omega u_0$, pour tout $t \geqslant 0$ et $c_\infty = -\!\!\!\!\!\!\int_\Omega u_0$. Maintenant, si $-\!\!\!\!\!\!\int_\Omega u_0 \geqslant M_0$, alors $c(t) \geqslant M_0$, par suite $c_\infty \geqslant M_0 \geqslant 0$, d'autre part on a $\displaystyle\int_\Omega g(x,c_\infty)dx = 0$ donc $g(x,c_\infty) = 0$ p.p. Ω, et $c_\infty \leqslant M_0$, par conséquent $c_\infty = M_0$. De la même manière, on montre que si $-\!\!\!\!\!\!\int_\Omega u_0 \leqslant m_0$, alors $c_\infty = m_0$ et la preuve de la Proposition est terminée. □

3.2. Réaction rapide

Maintenant, nous fixerons $d > 0$ et nous allons traiter le problème $P^{d,r}(u_0,f)$ lorsque le coefficient de réaction devient très grand, pour cela nous considèrons d'abord le problème sans diffusion suivant :

$$(E_g) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \psi_t + g(.,\psi) = 0 & \text{sur } (0,T) \\ \psi(0) = \psi_0. & \end{array}\right.$$

Il est clair que l'étude du comportement asymptotique de (E_g) lorsque $t \to \infty$ est relié à l'ensemble de ses points d'équilibre. Pour p.p. $x \in \Omega$ on a $g(x, .)$ est continue croissante, alors d'après la théorie des opérateurs maximaux monotones (cf. [8]) pour tout $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, il existe $\mathcal{C}\big((0, \infty),\ L^2(\Omega)\big)$ solution de (E_g) au sens suivant : pour tout $t > 0$ et p.p. $x \in \Omega$, $\dfrac{\partial}{\partial t} u(t, x) + g(x, u(t, x)) = 0$. De plus, $u \in W^{1,\infty}\big((0, \infty),\ L^1(\Omega)\big)$ et de la même manière que Lemme 3.7 (cf. [18]) nous montrons que

$$\lim_{t \to \infty} u(t,\ x) = m(x)\ \vee \big(u_0(x)\ \wedge\ M(x)\big) \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Proposition 3.10. — *Soient $f \in L^\infty(Q)$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $u^{d,r}$ la solution du problème $P^{d,\, r}(u_0,\ f)$. Alors, lorsque $r \to \infty$, $u^{d,\, r} \to u$ dans $\mathcal{C}((0, T),\ L^1(\Omega))$ et u est l'unique solution du problème $P^{d,\, \infty}(\underline{u}_0,\ f)$ au sens (1.2), avec $\underline{u}_0(x) = m(x) \vee \big(u_0(x) \wedge M(x)\big)$ p.p. Ω.*

Preuve. — D'abord, nous rappelons que

$$\lim_{t \,\to\, \infty} e^{-tB} u_0 = m(x) \vee (u_0(x) \wedge M(x)) =: \underline{u}_0(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

D'autre part, on a $\mathcal{A}^{d,r} \to \mathcal{A}^{d,\infty}$ et $\underline{u}_0 \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^{d,\,\infty})}$, donc nous utilisons le Théorème 2.3 (cf. [18]) et nous montrons que lorsque $r \to \infty$ on a $u^{d,r} \to u$ dans $\mathcal{C}\big((0, T);\ L^1(\Omega)\big)$, et u est la *bonne solution* du problème

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{A}^{d,\,\infty} u \ni f & \text{sur } (0, T) \\[2ex] u(0) = \underline{u}_0. \end{cases}$$

Or, d'après [18] on a u est aussi solution du problème $P^{d,\infty}(\underline{u}_0,\ f)$ au sens (1.2). Ce qui termine la preuve de la Proposition. $\square$

3.3. Compétition Réaction-Diffusion

Dans ce paragraphe, nous allons étudier le cas où le coefficient de réaction et de diffusion sont très grands. Dans ce cas, on distingue entre le cas où l'un des coefficients est plus important que l'autre. On suppose que $d = d_\varepsilon$ et $r = r_\varepsilon$, avec $\lim_{\varepsilon \to 0} d_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} r_\varepsilon = \infty$. Et, on considère d'abord le cas où

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d_\varepsilon}{r_\varepsilon} = 0, \tag{3.12}$$

alors, on a :

Lemme 3.11. — *Sous la condition (3.12), $u^{d,r} \to c$ dans $\mathcal{C}\big((0,T);L^1(\Omega)\big)$, avec c est la solution de l'EDO*

$$\begin{cases} c_t + \partial \mathbb{I}_{[m_0,M_0]}(c) \ni \displaystyle\fint_\Omega f & \text{sur } (0,T) \\ c(0) = \underline{\underline{u}}_0 \end{cases}$$

où, $\underline{\underline{u}}_0 =: v$ est donnée par le Théorème 2.2.

Preuve. — Nous rappelons que $d_\varepsilon A + r_\varepsilon B \to \mathcal{A}^\infty$, $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{r_\varepsilon}{d_\varepsilon} = \infty$, $\lim_{t\to\infty} e^{-tB} u_0 = m \vee (u_0 \wedge M)$ et $\underline{\underline{u}}_0 = \lim_{t\to\infty} e^{-t\mathcal{A}^{1,\infty}}\big(m\vee(u_0\wedge M)\big) \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^\infty)}$. Alors, le résultat du lemme est une conséquence directe du Théorème 2.3 (cf. [18]). □

Afin de terminer la preuve du théorème 2.1, nous considérons le cas où

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{d_\varepsilon}{r_\varepsilon} = \infty \tag{3.13}$$

c'est-à-dire que la diffusion est plus importante que la réaction, alors

Lemme 3.12. — *Sous l'hypothèse (3.13), $u^{d,r} \to c$ dans $\mathcal{C}((0,T);L^1(\Omega))$, avec c est la solution de l' EDO*

$$\begin{cases} c_t + \partial \mathbb{I}_{[m_0,M_0]}(c) \ni \displaystyle\fint_\Omega f & \text{dans } (0,T) \\ c(0) = m_0 \vee (\displaystyle\fint_\Omega u_0 \wedge M_0). \end{cases} \tag{3.14}$$

Preuve. — D'après le Lemme 3.5 on a $A + \varepsilon\, B \to A$, au sens de la résolvante lorsque $\varepsilon \to 0$. D' autre part, rappelons que $\lim_{t\to\infty} e^{-tA} u_0 = \fint_\Omega u_0$ et $\fint_\Omega u_0 \notin \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^\infty)}$. Alors, nous considérons l'opérateur défini par :

$$H_\varepsilon := \frac{d_\varepsilon}{r_\varepsilon}\, A + B.$$

Puisque $\frac{d_\varepsilon}{r_\varepsilon} \to \infty$, alors le Corollaire 3.3 nous donne

$$H_\varepsilon \to \mathcal{A}^{\infty,1}.$$

Nous utilisons le Théorème 2.3 (cf. [18]) et nous considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{A}^{\infty,1} u \ni 0 \quad \text{sur } (0,\infty) \\ \\ u(0) = \displaystyle⨍_\Omega u_0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Puisque la *bonne solution* de (3.15) est une solution de l' EDO suivante :

$$\begin{cases} c_t + \displaystyle⨍_\Omega g(x,\, c) d\, x = 0 \quad \text{sur } (0,\infty) \\ \\ c(0) = \displaystyle⨍_\Omega u_0 \end{cases}$$

alors d'après la proposition 3.9 on a $\lim_{t\to\infty} c(t) = m_0 \vee (⨍_\Omega u_0 \wedge M_0) \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A}^\infty)}$, ce qui achève la démonstration du lemme. $\square$

Bibliographie

[1] Andreu (F.), Mazon (J. M.), Toledo (J.). — Asymptotic behaviour of solutions of quasi-linear parabolic equations with non linear flux, Comput. Appl. Math. 17, p. 201-215 (1998).

[2] Arrieta (J.), Carvalho (A. N.) and Rodrigues-Bernal (A.). — Upper semi-continuity for attractors of parabolic problems with localized large diffusion and nonlinear boundary conditions, J. Diff. Equations, 168, p. 33-59 (2000).

[3] Benilan (Ph.), Boccardo (L.), Gallouet (Th.), Gariepy (R.), Pierre (M.) and Vazquez (J.L.). — An L^1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 22(2) p. 241-273 (1995).

[4] Benilan (Ph.). — Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications, Thesis, Univ. Orsay (1972).

[5] Benilan (Ph.), Crandall (M. G.) and Pazy (A.). — Evolution Equations Governed by Accretive Operators, Book to appear.

[6] Bothe (D.) and Hilhorst (D.). — A reaction-diffusion system with fast reversible reaction, Adv. Differential Equations, 6, no. 10, p. 1173-1218 (2001).

[7] Bothe (D.). — The instantaneous limit of a reaction-diffusion system. Evolution equations and their applications in physical and life sciences (Bad Herrenalb, 1998), p. 215-224, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 215, Dekker, New York, 2001.

[8] Brezis (H.). — Opérateurs maximaux Monotones et semi-groupes de contractions dans les Espaces de Hilbert, Oxford Univ. Press, Oxford, (1984).

[9] Brezis (H.) and Pazy (A.). — Convergence And Approximation of Semigroupes of Nonlinear Operators in Banach Spaces, J . Func. Anal., 9, p. 63-74 (1972).

[10] Crooks (E. C. M.), Dancer (E. N.), Hilhorst (D.), Mimura (M.) and Ninomiya (H.). — Spatial segregation limit of a competition-diffusion system with Dirichlet boundary conditions, Nonlinear Anal. Real World Appl. 5, no. 4, p. 645-665 (2004).

[11] Evans (L. C.), Feldman (M.) and Gariepy (R. F.). — Fast/Slow diffusion and collapsing sandpiles, J. Differential Equations, 137, p. 166-209 (1997).

[12] Henry (M.), Hilhorst (D.) and Nishiura (Y.). — Singular limit of a second order nonlocal parabolic equation of conservative type arising in the micro-phase separation of diblock copolymers, Hokkaido Math. J. 32, no. 3, 561-622 (2003).

[13] Hilhorst (D.), Mimura (M.) and Weidenfeld (R.). — Singular limit of a class of non-cooperative reaction-diffusion systems, Taiwanese J. Math. 7, no. 3, p. 391-421 (2003).

[14] Hale (J. K.). — Large diffusivity and asymptotic behavior in parabolic systems, J. Math. Anal. Appl. 1181, p. 455-466 (986).

[15] Hilhorst (D.), van der Hout (R.) and Peletier (L.). — A. Nonlinear diffusion in the presence of fast reaction, Nonlinear Anal. 41 (2000), no. 5-6, Ser. A: Theory Methods, p. 803-823.

[16] Lions (J.L.). — Quelques méthodes de Résolution des problèmes aux Limites non Linéaires, Paris : Dunod (1969).

[17] Igbida (N.). — Stabilization for degenerate diffusion with absorption, Nonlinear Analysis 54, p. 93-107 (2003).

[18] Igbida (N.) and Karami (F.). — Some competition Phenomena in Evolution Equations, Adv. Math. Sci. Appli. Vol. 17, No. 2, p. 559-587 (2007).

[19] Igbida (N.) and Karami (F.). — Elliptic-Parabolic Equation with Absorption of Obstacle type, à paraître dans Advanced Nonlinear Studies.

[20] N. Igbida, A nonlinear diffusion problem with localized large diffusion, Comm. Partial Differential Equations, 29, no. 5-6, p. 647-670 (2004).

[21] Mazon (J. M.) and Toledo (J.). — Asymptotic behavior of solutions of the filtration equation in bounded domains, Dynam. Systems Appl, 3, p. 275-295 (1994).

[22] Mimura (M.). — Reaction-diffusion systems arising in biological and chemical systems: application of singular limit procedures. Mathematical aspects of evolving interfaces(Funchal, 2000), 89-121, Lecture Notes in Math, (1812), Springer, Berlin, (2003).

[23] Rodrigues-Bernal (A.). — Localized spatial homogenization and large diffusion, SIAM J. Math. Anal. 29, p. 1361-1380 (1998).