

# ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

EL HADJI MALICK DIA

*Sur les résidus de Baum-Bott*

Tome XIX, n° 2 (2010), p. 363-403.

[http://afst.cedram.org/item?id=AFST\\_2010\\_6\\_19\\_2\\_363\\_0](http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2010_6_19_2_363_0)

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2010, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

## Sur les résidus de Baum-Bott

EL HADJI MALICK DIA<sup>(1)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — On se donne une variété complexe  $V$ , compacte, de dimension complexe  $n$ , un champ de vecteurs  $v$  holomorphe sur  $V$ , un fibré vectoriel  $E$  de rang  $r$  au dessus de  $V$  et une  $\mathbb{C}$ -action  $\theta_v$  sur  $E$ . Il est bien connu que si  $v$  n'a pas de singularité, tous les nombres de Chern  $c_I(E) \frown [V]$  sont nuls ( $|I| = n$ ). Si  $v$  a des singularités, Bott a démontré que ces nombres de Chern se localisent près de ces singularités donnant lieu à des résidus. Ces résidus ont été calculés d'abord par Bott dans le cas d'une singularité isolée non dégénérée, ensuite par Bott dans le cas d'une sous-variété non dégénérée et enfin, par Baum et Bott dans le cas d'une singularité isolée éventuellement dégénérée. Ce travail fournit une généralisation des résultats précédents en étudiant, sous réserve de quelques hypothèses simplificatrices, le cas d'une sous-variété holomorphe  $W$ , composante non-singulière du lieu singulier de  $v$ , éventuellement dégénérée. Quelques exemples sont donnés.

**ABSTRACT.** — Given a compact complex manifold  $V$  of complex dimension  $n$ , a holomorphic vector-fields  $v$  on  $V$ , a vector bundle  $E$  of rank  $r$  on  $V$ , and a  $\mathbb{C}$ -action  $\theta_v$  on  $E$ . It is well known that if  $v$  has not singularity, all the Chern numbers  $c_I(E) \frown [V]$  are zero ( $|I| = n$ ). If  $v$  has singularities, and if there exists a  $\mathbb{C}$ -action  $\theta_v$  on  $E$ , Bott has proved that the Chern numbers "localize" near these singularities, giving residues. These residues are computed first, by Bott, in the case of a non degenerate isolated point, then, by Bott, in the case of a non degenerate holomorphic submanifold, at last, by Baum-Bott, in the case of a degenerate isolated point. This work gives a generalization of these results by studying the case of a degenerate holomorphic submanifold. Examples are given.

---

---

(\*) Reçu le 31/12/2008, accepté le 26/06/2009

(1) Faculté des Sciences et Technologies de l'Education et de la Formation BP 5036, Dakar-Fann, Sénégal.  
el.dia@ucad.edu.sn

## Introduction

On se donne :

- une variété holomorphe  $V$ , compacte, de dimension complexe  $n$ ,
- un champ de vecteurs  $v$  holomorphe sur  $V$ ,
- un fibré vectoriel  $E$  de rang  $r$  au dessus de  $V$ ,
- une  $\mathbb{C}$ -action  $\theta_v$  sur  $E$ , c'est-à-dire un endomorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire de l'espace  $\Gamma(E)$  des sections  $C^\infty$  de  $E$ , qui préserve les sections holomorphes de  $E$  et vérifie la formule suivante :

$$\theta_v(u \sigma) = (v \cdot u) \sigma + u \theta_v(\sigma), \quad \forall \sigma \in \Gamma(E), \quad \forall u \in C^\infty(V).$$

[Par exemple,  $v$  définit toujours une  $\mathbb{C}$ -action  $\theta_v^0$  sur le fibré tangent complexe  $TV$  en posant :  $\theta_v^0(X) = [v, X]$ .]

Si  $v$  n'a pas de singularité, les nombres de Chern  $c_I(E) \frown [V]$  sont tous nuls ( $|I| = n$ ), et en particulier les nombres de Chern  $c_I(V) \frown [V]$  de  $TV$  : c'est le **théorème d'annulation** de Bott [4].

Si  $v$  a maintenant des singularités, Bott a alors démontré que les nombres de Chern de  $E$  se localisent près de ces singularités au sens suivant. Notons  $S = \coprod_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha$  l'ensemble singulier de  $v$ , réunion de ses composantes connexes  $S_\alpha$ . Il existe alors, pour tout  $\alpha$ , des nombres complexes  $\text{Rés}(c_I, \theta_v, S_\alpha)$ , appelés «résidus» de  $c_I(E)$  en  $S_\alpha$ , relativement à  $\theta_v$ , ne dépendant que du comportement local de  $v$  et de l'action  $\theta_v$  sur un voisinage arbitrairement petit de  $S_\alpha$  dans  $V$ , tels que la formule suivante soit vérifiée :

$$c_I(E) \frown [V] = \sum_{\alpha \in \Lambda} \text{Rés}(c_I, \theta_v, S_\alpha).$$

C'est le **théorème d'existence des résidus**.

Avant de résumer les résultats connus concernant le calcul des résidus, rappelons les faits suivants : soit  $W$  une composante connexe de  $S$ , sous-variété compacte lisse de  $V$ .

– Pour toute connexion  $\nabla^0$  sur  $E$ ,  $\theta_v - \nabla_v^0$  est un endomorphisme linéaire de  $E$  dont la restriction  $\Theta$  à  $W$  ne dépend pas de  $\nabla^0$ .

– La compacité de la variété holomorphe  $W$  implique que les valeurs propres  $\rho_1, \dots, \rho_r$  de l'endomorphisme  $\Theta_m$  de la fibre  $E_m$  en un point  $m$  de  $W$ , comptées avec leur ordre de multiplicité, ne dépendent pas de  $m$ .

– L'action  $\theta_v^0$  de  $v$  sur  $TV$  induit un endomorphisme  $\theta_v^N$  du fibré normal  $N_W$  de  $W$  dans  $V$  (dont la donnée équivaut à celle de la partie linéaire  $v_\alpha$

de  $v$  en  $m_\alpha$  lorsque  $W$  est un point isolé  $m_\alpha$ ). Pour les mêmes raisons que ci-dessus (compacité et holomorphie de  $W$ ), les valeurs propres  $h_1, \dots, h_q$  de l'endomorphisme  $(\theta_v^N)$  de l'espace normal  $N_m$  à  $W$  en un point  $m$ , ainsi que leur ordre de multiplicité, ne dépendent pas de  $m$ . On dit alors que  $v$  est non dégénéré le long de  $W$  si toutes ces valeurs propres sont non nulles, c'est-à-dire si  $(\theta_v^N)$  est un automorphisme.

Le résidu  $\text{Rés}(c_I, \theta_v, S_\alpha)$  a d'abord été calculé pour  $E = TV$ , dans le cas où  $S_\alpha$  est une singularité isolée non dégénérée  $m_\alpha$  de  $v$  (toutes les valeurs propres  $h_1, \dots, h_n$  de  $(\theta_v)|_{m_\alpha}$  sont non nulles (Bott[4]) :

$$\text{Rés}(c_I, \theta_v, m_\alpha) = c_I((\theta_v)|_{m_\alpha})/c_n((\theta_v)|_{m_\alpha}).$$

Cette formule a ensuite été généralisée dans deux directions :

1) Pour un fibré  $E$  arbitraire dans le cas où  $S_\alpha$  est une sous-variété holomorphe  $W$  de  $V$  le long de laquelle  $v$  est non dégénéré (Bott [3]) :

$$\text{Rés}(c_I, \theta_v, W) = \left( c_I(\Theta|_W + E|_W) \right) \cdot \left( c_q(\theta_v^N + N_W) \right)^{-1} \frown [W].$$

Dans cette formule  $E|_W$  et  $N_W$  désignent respectivement les matrices diagonales  $(x_1, \dots, x_r)$  et  $(y_1, \dots, y_q)$  à coefficients dans  $H^2(W)$ , telles que  $c_j(E|_W)$  (resp.  $c_j(N_W)$ ) soit la  $j$ -ième fonction symétrique élémentaire des  $x_a$  (resp. des  $y_b$ ). Ces classes  $x_a$  et  $y_b$  ne sont pas en général bien définies (à moins que  $E|_W$  ou  $N_W$  ne puissent se décomposer en somme de fibrés en droites complexes), mais elles n'interviennent dans la formule des résidus qu'à travers les fonctions symétriques  $\sigma_j(x_1, \dots, x_r)$  et  $\sigma_j(y_1, \dots, y_q)$ . Par exemple, si toutes les valeurs propres  $\rho_1, \dots, \rho_r$  de  $\theta_v$  d'une part,  $h_1, \dots, h_q$  de  $\theta_v^N$  d'autre part sont distinctes,

$$\begin{aligned} & \left( c_I(\Theta|_W + E|_W) \right) \cdot \left( c_q(\theta_v^N + N_W) \right)^{-1} \\ &= \left( \sigma_I(\rho_1 + x_1, \dots, \rho_r + x_r) \right) \cdot \left( \sigma_q(h_1 + y_1, \dots, h_q + y_q) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

2) Dans le cas où  $S_\alpha$  est une singularité isolée  $m_\alpha$  éventuellement dégénérée (Baum-Bott [1]) :

$$\text{Rés}(c_I, \theta_v, m_\alpha) = \left[ \begin{array}{c} c_I(\theta_v) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \\ A_1 \cdots A_n \end{array} \right]_{m_\alpha}$$

où  $v = \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial}{\partial z_i}$  au voisinage de  $m_\alpha$ , relativement à des coordonnées locales holomorphes  $(z_1, \dots, z_n)$ , le terme de droite désignant le symbole

résidu de Grothendieck. [Ce dernier cas, a été encore généralisé par Baum-Bott dans [2], en remplaçant champ de vecteurs  $v$  par feuilletage holomorphe de dimension un]. Dans [1], n'est considéré que le cas  $E = TV$ , mais le cas d'un fibré  $E$  arbitraire était certainement connu de Baum et Bott (cf. par exemple [7] pour une rédaction dans le cas où  $E$  est quelconque).

Le problème se pose de généraliser ces résultats au cas où  $v$  est éventuellement dégénéré le long d'une sous-variété holomorphe  $W$  de dimension positive. Ce travail fournit des résultats partiels dans cette direction. Nous avons en effet fait deux types d'hypothèses simplificatrices :

- d'une part, nous avons supposé qu'il existait un bi-holomorphisme d'un voisinage  $U$  de  $W$  sur un voisinage de la section nulle du fibré normal  $N_W$  de  $W$  dans  $V$  appliquant  $W$  à la section nulle de  $N_W$  (il existe toujours au moins un difféomorphisme  $C^\infty$ ),

- d'autre part, dans la mesure où ce sont en général les polynômes caractéristiques de  $\Theta|_W$  et de  $\theta_v^N$ , et non les polynômes minimaux qui sont constants le long de  $W$ , nous avons parfois supposé que ces endomorphismes avaient des valeurs propres distinctes. Résumons les résultats obtenus :

Après un premier résultat (Théorème A) où l'on calcule les résidus en utilisant le recouvrement  $U_H \cup \bigcup_\lambda U_\lambda$  de  $U \setminus W$ , on s'intéressera au cas où l'on peut se passer de l'ouvert  $U_H$  pour recouvrir  $U \setminus W$ , on obtient le théorème B. Le théorème C est obtenu lorsque l'on peut se passer de l'un des ouverts  $U_\lambda$ . Ces résidus ont été aussi calculés dans le cas d'une variété produit ; c'est le théorème D. Enfin des exemples d'application de ces résultats seront fournis.

La suite de ce travail est organisée de la manière suivante :

- à la section 1, après avoir précisé quelques notations et rappelé quelques outils fondamentaux, on redémontrera le théorème d'existence des résidus,
- la section 2 est consacrée aux résultats nouveaux,
- des exemples sont fournis à la section 3.

## 1. Rappels et notations

### 1.1. Théorie de Chern-Weil pour les classes caractéristiques

On fera référence essentiellement à ([5] et [10])

**Attention :** Dans cette partie, nous suivons la convention de signe de Bott qui est différente de celle utilisée dans [10].

Soit  $End F$  l'algèbre de Lie des endomorphismes d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $F$  de dimension  $r$ . Notons  $\sigma_i : End F \rightarrow \mathbb{C}$  la  $i$ -ième fonction symétrique élémentaire des valeurs propres d'un tel endomorphisme, et posons  $c_j = \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^j \sigma_j$ . L'algèbre graduée  $I^*(F) = \mathbb{C}[c_1, c_2, \dots, c_r]$  des polynômes sur  $End F$ , invariants par la représentation adjointe de  $GL(F)$ , est engendrée par les monômes  $c_j$ , lesquels sont en outre algébriquement indépendants.

Pour tout multi-indice  $I = (i_1, \dots, i_r)$ , on définit plus généralement le monôme  $c_I = (c_1)^{i_1} \dots (c_r)^{i_r}$ .  $c_I$  est un polynôme de degré  $|I| = i_1 + 2i_2 + \dots + ri_r$  sur  $End F$ .

Pour toute  $\mathbb{C}$ -algèbre commutative  $A$ , on notera encore  $c_j$  et  $c_I$  l'extension  $End(F \otimes A) \rightarrow A$  des monômes précédents aux endomorphismes de  $F \otimes A$ .

*Remarque 1.1.* — On autorise l'algèbre  $A$  à être graduée, et les coefficients de l'élément dans  $End(F \otimes A)$  à être hétérogènes. Par exemple,  $A$  peut être l'algèbre  $\Omega^{pair}(V)$  des formes différentielles de degré pair sur une variété  $V$ , ou l'algèbre de cohomologie  $H^{pair}(V)$ .

On notera  $\widehat{c}_I$  la forme multilinéaire, symétrique associée au polynôme  $c_I$  (c'est une généralisation de la forme polaire associée à une forme quadratique).

**DÉFINITION 1.2.** — *Etant donnée une connexion  $\nabla$  sur  $E$ , l'homomorphisme d'algèbres  $\mathbb{C}[c_1, c_2, \dots, c_r] \rightarrow \Omega^*(V)$  à valeurs dans l'algèbre de de Rham, qui associe la  $2|I|$ -forme  $c_I(\nabla)$  au monôme  $c_I$ , est appelé **homomorphisme de Chern-Weil**.*

Plus généralement, étant données  $k + 1$  connexions  $\nabla^0, \nabla^1, \dots, \nabla^k$  sur  $E$ , Bott a défini un opérateur, qui, à un monôme  $c_I$ , associe la  $(2d - k)$ -forme  $c_I(\nabla^0, \dots, \nabla^k)$  sur  $V$ . Cet opérateur est appelé différence itérée de Bott et coïncide avec l'homomorphisme de Chern-Weil pour  $k = 0$

Il a la propriété suivante :

$$dc_I(\nabla^0, \dots, \nabla^k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i c_I(\nabla^0, \dots, \widehat{\nabla^i}, \dots, \nabla^k).$$

## 1.2. Complexe de Čech-de Rham – Intégration – Dualités

### 1.2.1. Définition et propriétés

Soit  $V$  une variété  $\mathcal{C}^\infty$  de dimension complexe  $n$ ,  $I$  un multi-indice et  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  un recouvrement fini de  $V$ . Posons :  $I_p = \{\alpha_0, \dots, \alpha_p ; \alpha_0 < \dots < \alpha_p, \alpha_\nu \in I\}$ .

Rappelons que l'ensemble des  $p$ -cochaines de  $q$ -formes sur  $\mathcal{U}$  noté  $\mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \Omega^q)$  est défini par

$$\mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \Omega^q) = \bigoplus_{(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in I_{p+1}} \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$$

Notons  $CDR^r(\mathcal{U})$  le complexe :  $CDR^r(\mathcal{U}) = \bigoplus_{p+q=r} \mathcal{C}^p(\mathcal{U}, \Omega^q)$ .

Soit  $D : CDR^r(\mathcal{U}) \longrightarrow CDR^{r+1}(\mathcal{U})$  l'opérateur de différentiation défini par

$$(D\sigma)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} = \sum_{\nu=0}^p (-1)^\nu \sigma_{\alpha_0 \dots \widehat{\alpha_\nu} \dots \alpha_p} + (-1)^p d\sigma_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$$

et le produit extérieur :  $CDR^r(\mathcal{U}) \times CDR^s(\mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} CDR^{r+s}(\mathcal{U})$  défini par :

$$(\sigma \smile \tau)_{\alpha_0 \dots \alpha_p} = \sum_{\nu=0}^p (-1)^{(r-\nu)(p-\nu)} \sigma_{\alpha_0, \dots, \alpha_\nu} \wedge \tau_{\alpha_\nu \dots \alpha_p}.$$

**DÉFINITION 1.3.** — *Le complexe  $CDR^*(\mathcal{U})$  muni de l'opérateur de différentiation  $D$  et du produit extérieur  $\smile$  est appelé complexe total de Čech-de Rham associé au recouvrement  $\mathcal{U}$ .*

*Remarque 1.4.* — Le complexe total de Čech-de Rham associé à un recouvrement à deux ouverts est appelé le complexe de Mayer-Vietoris associé à ce recouvrement.

On a la propriété suivante :

**PROPRIÉTÉ 1.5.** — *L'opérateur de différentiation  $D$  et le produit extérieur  $\smile$  vérifient :*

$$D(\sigma \smile \tau) = D\sigma \smile \tau + (-1)^{|\sigma|} \sigma \smile D\tau.$$

*Remarque 1.6.* — Soit  $\iota : \Omega^*(V) \longrightarrow CDR^*(\mathcal{U})$  l'application naturelle définie par

$$(\iota(\alpha))_i = \alpha|_{U_i} \quad \text{et} \quad (\iota(\alpha))_{i_1 \dots i_k} = 0 \quad \text{pour} \quad k \geq 2$$

C'est un homomorphisme injectif qui induit un isomorphisme en cohomologie. Il permet d'identifier l'algèbre de cohomologie  $H^*(CDR^*(\mathcal{U}))$  du complexe de Čech-de Rham avec la cohomologie de de Rham  $H_{DR}^*(V; \mathbb{C})$ .

### 1.2.2. Intégration et dualités

Soit  $V$  une variété de dimension réelle  $2n$ , orientée,  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  un recouvrement ouvert de  $V$  et  $\{R_\alpha\}_{\alpha \in I}$  un système d'alvéoles (voir [7] ou [8] pour cette notion) subordonné à ce recouvrement. On définit l'intégration

$$\int_V : CDR^{2n}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

par la formule : 
$$\int_V \sigma = \sum_{p=0}^{2n} \left( \sum_{(\alpha_0 \dots \alpha_p) \in I_p} \int_{R_{\alpha_0 \dots \alpha_p}} \sigma_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \right) \quad \forall \sigma \in CDR^{2n}(\mathcal{U}).$$

Cette intégration a les propriétés suivantes :

- (i) Elle prolonge l'intégration usuelle des formes différentielles.
- (ii) Si  $D\sigma = 0$  alors l'intégrale  $\int_V \sigma$  ne dépend pas du choix de  $\{R_\alpha\}$ .
- (iii) Si  $\sigma$  est un cobord, c'est-à-dire  $\sigma \in D(CDR^{2n-1}(\mathcal{U}))$ , alors  $\int_V \sigma$  est nulle.

#### *Cas particulier : intégration sur le complexe de Mayer-Vietoris*

C'est le cas où le recouvrement  $\mathcal{U}$  est constitué de deux ouverts.

Soit  $S$  une partie fermée de  $V$  et  $U_1$  un voisinage régulier de  $S$ . On pose  $U_0 = V \setminus S$  et  $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ .

L'inclusion

$$\begin{aligned} \iota : \Omega^*(V) &\longrightarrow MV^*(\mathcal{U}) \\ \alpha &\longmapsto (\alpha|_{U_0}, \alpha|_{U_1}, 0) \end{aligned}$$

est un morphisme d'algèbres différentielles graduées qui induit un isomorphisme en cohomologie, noté  $\iota^*$ . Elle permet d'identifier l'algèbre de cohomologie  $H^*(MV^*(\mathcal{U}))$  du complexe de Mayer-Vietoris avec celle de de Rham  $H_{DR}^*(V; \mathbb{C})$ .

Les projections naturelles  $MV^*(\mathcal{U}) \rightarrow \Omega^*(U_0)$  et  $MV^*(\mathcal{U}) \rightarrow \Omega^*(U_1)$  étant surjectives, leurs noyaux respectifs  $MV^*(\mathcal{U}, U_0)$  et  $CDR^*(\mathcal{U}, S)$  ont pour cohomologie  $H^*(V; V \setminus S; \mathbb{C})$  et  $H^*(V; S; \mathbb{C})$ .

Supposons maintenant que  $V$  soit compacte, connexe et orientée.

Soit  $\mathcal{T}$  une sous variété à bord de  $U_1$ , de même dimension réelle  $2n$  que  $V$ , dont on notera  $\partial\mathcal{T}$  le bord, telle que  $S \subset \mathcal{T}$  et  $\partial\mathcal{T} \cap S = \emptyset$ .

Si  $\sigma = (\xi_0, \xi_1, \xi_{01})$  est un élément de  $MV^{2n}(\mathcal{U})$ , alors :  $\int_V \sigma = \int_{V-\overset{\circ}{\mathcal{T}}} \xi_0 + \int_{\mathcal{T}} \xi_1 - \int_{\partial\mathcal{T}} \xi_{01}$ .

L'application :

$$\begin{aligned} & (\xi_0, \xi_1, \xi_{01}) \rightarrow \\ & \left[ (\xi'_0, \xi'_1, \xi'_{01}) \rightarrow \int_{V-\overset{\circ}{\mathcal{T}}} \xi_0 \wedge \xi'_0 + \int_{\mathcal{T}} \xi_1 \wedge \xi'_1 - \int_{\partial\mathcal{T}} \xi_{01} \wedge \xi'_{01} + (-1)^{|\xi_0|} \xi_0 \wedge \xi'_{01} \right], \end{aligned}$$

de  $MV^k(\mathcal{U})$  dans  $Hom(CDR^{2n-k}(\mathcal{U}, \mathbb{C}))$  induit la **dualité de Poincaré** :

$$\mathcal{P}_V : H^k(V, \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} H_{2n-k}(V, \mathbb{C})$$

Si  $\xi = (0, \xi_0, \xi_{01}) \in CDR^{2n}(\mathcal{U}, U_0)$ , l'intégrale  $\int_V \xi = \int_{\mathcal{T}} \xi_1 - \int_{\partial\mathcal{T}} \xi_{01}$  est bien définie.

D'autre part, pour  $\sigma = (0, \sigma_0, \sigma_{01}) \in CDR^k(\mathcal{U}, U_0)$  et  $\tau = (\tau_0, \tau_1, \tau_{01}) \in MV^{2n-k}(\mathcal{U}, U_0)$ , le cup-produit :  $(0, \sigma_1, \sigma_{01}) \smile (\tau_0, \tau_1, \tau_{01}) = (0, \sigma_1 \wedge \tau_1, \sigma_{01} \wedge \tau_{01})$  ne dépend ni de  $\tau_0$  ni de  $\tau_{01}$ .

L'application :  $(0, \sigma_1, \sigma_{01}) \mapsto [\tau_1 \mapsto \int_{\mathcal{T}} \sigma_{01} \wedge \tau_1 - \int_{\partial\mathcal{T}} \sigma_{01} \wedge \tau_1]$  de  $MV^k(U, U_0)$  dans  $Hom(\Omega^{2n-k}(U^1), \mathbb{C})$  induit la **dualité d'Alexander-Lefschetz** : [6] [9]

$$AL : H^k(V, U_0, \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} H_{2n-k}(S; \mathbb{C})$$

### 1.3. Connexions spéciales et existence des résidus

#### 1.3.1. Connexions spéciales

**DÉFINITION 1.7** ([3]). — *Soient  $v$  un champ de vecteurs holomorphe sur une variété holomorphe  $V$  et  $\theta_v$  une action de  $v$  sur un fibré vectoriel holomorphe  $E$  de base  $V$ . Une connexion  $\nabla$  sur  $E$  est dite  $\theta_v$ -spéciale si :*

- elle est de type  $(1, 0)$ .
- $\forall \sigma \in \Gamma(E|_{V \setminus S}), \nabla_v(\sigma) = \theta_v(\sigma)$ .

PROPOSITION 1.8 [3]. — *Si  $v$  est un champ de vecteurs sans singularité sur  $V$  et  $\theta_v$  une action de  $v$  sur un fibré vectoriel holomorphe  $E$ , alors il existe une connexion  $\theta_v$ -spéciale sur  $E$ .*

THÉORÈME 1.9 (**d'annulation**). — *Soit  $\nabla$  une connexion  $\theta_v$ -spéciale sur un fibré vectoriel holomorphe  $E$ . Alors, pour tout multi-indice  $I$  tel que  $|I| = n$ , la  $2n$ -forme  $c_I(\nabla)$  est nulle.*

COROLLAIRE 1.10. — *S'il existe un champ de vecteurs  $v$  sans singularité sur  $V$  et une action  $\theta_v$  sur  $E$ , alors, pour  $|I| = n$ , tous les nombres de Chern  $c_I(E) \frown V$  sont nuls.*

*Démonstration du théorème 1.9.* — Notons  $F$  un supplémentaire ( $C^\infty$ ) du fibré vectoriel  $\{v\}$  engendré par  $v$  dans  $TV$  (par exemple le supplémentaire orthogonal pour une structure hermitienne sur  $TV$ ) :  $T_{\mathbb{C}}V = \{v\} \oplus F \oplus \overline{TV}$ . Soient  $(e_2, \dots, e_n)$  une trivialisatation locale  $C^\infty$  de  $F$ , et  $(Z_1, \dots, Z_n)$  une trivialisatation locale de  $\overline{TV}$  :  $(v, e_2, \dots, e_n, Z_1, \dots, Z_n)$  est alors une trivialisatation locale de  $T_{\mathbb{C}}V$ , dont on notera  $(\eta, \xi_2, \dots, \xi_n, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$  le dual.

Notant  $k$  la courbure de  $\nabla$ , on a :  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, K(v, Z_i) = 0$  et  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, K(Z_i, Z_j) = 0$ .

Les coefficients  $K_\lambda^\mu$  de la matrice de courbure relative à une trivialisatation locale par des sections holomorphes sont du type :  $K_\lambda^\mu = A(\eta \wedge \xi_\alpha) + B(\xi_\alpha \wedge \xi_\beta) + C(\xi_\alpha \wedge \zeta_\beta)$  où  $A, B$  et  $C$  sont des fonctions définies sur  $V$ . Par conséquent, les termes  $K_{\lambda_1}^{\mu_1} \wedge K_{\lambda_2}^{\mu_2} \wedge \dots \wedge K_{\lambda_n}^{\mu_n}$  sont nuls car chacun d'eux contient un terme du type  $\xi_\mu \wedge \xi_\nu$  et que les  $\xi_\lambda$  sont au nombre de  $n - 1$ .  $\square$

Plus généralement :

PROPOSITION 1.11. — *Soit  $(\nabla^0, \dots, \nabla^k)$  une famille de  $k+1$  connexions  $\theta_v$ -spéciales. Pour tout multi-indice  $I$  tel que  $|I| = n$ , la  $(2n - k)$ -forme  $c_I(\nabla^0, \dots, \nabla^k)$  est nulle.*

### 1.3.2. Existence des résidus

Soient  $v$  un champ de vecteurs holomorphe sur une variété holomorphe  $V$  de dimension complexe  $n$ ,  $E$  un fibré vectoriel holomorphe de base  $V$  de rang  $r$  et  $I$  un multi-indice de hauteur égale à  $n$ . Le théorème d'annulation

de Bott signifie que si  $v$  n'a pas de singularités et s'il existe une action  $\theta_v$  de  $v$  sur  $E$ , alors le monôme de Chern  $c_I(E)$  est nulle. Lorsqu'une telle action n'est définie qu'en dehors d'un fermé  $S = \coprod_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha$  de  $V$ , on va montrer que les classes de Chern  $c_I(E)$  se « localisent » au voisinage des singularités de  $v$ .

Soit  $S = \coprod_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha$  le lieu singulier de  $v$ , c'est-à-dire l'ensemble des points de  $V$  sur lesquels  $v$  s'annule.

Soient  $\theta_v$  une action holomorphe sur  $E|_{V \setminus S}$ ,  $\mathcal{U} = \{V \setminus S, U\}$  un recouvrement ouvert de  $V$  où  $U$  est un voisinage ouvert de  $S$ ,  $\nabla$  une connexion  $\theta_v$ -spéciale sur  $E|_{V \setminus S}$  et  $\nabla_0$  une connexion sur  $E|_U$ .

$$\text{On pose : } \rho_I(\theta_v) = \left(0, c_I(\nabla^0), c_I(\nabla, \nabla^0)\right)$$

LEMME 1.12. — *L'élément  $\rho_I(\theta_v)$  de  $MV^{2n}(\mathcal{U}, V \setminus S)$  est un cocycle dont la classe de cohomologie,  $[\rho_I(\theta_v)]$ , dans  $H^{2n}(\mathcal{U}, V \setminus S) = H^{2n}(U, U \setminus S)$ , ne dépend ni de  $\nabla$ , ni de  $\nabla^0$  ; elle ne dépend que de  $c_I$  et du comportement de  $\theta_v$  au voisinage de  $S$ .*

DÉFINITION 1.13. — *La classe de cohomologie  $[\rho_I(\theta_v)]$  de  $\rho_I(\theta_v)$  dans  $H^{2n}(\mathcal{U}, V \setminus S, \mathbb{C}) = H^{2n}(U, U \setminus S, \mathbb{C})$  est appelée **classe caractéristique résiduelle de Bott** relative à  $c_I$  et à  $\theta_v$ .*

THÉORÈME DE LOCALISATION. — *L'image de la classe caractéristique résiduelle de Bott  $[\rho_I(\theta_v)]$  par l'homomorphisme canonique  $j^* : H^*(\mathcal{U}, V \setminus S, \mathbb{C}) \longrightarrow H^*(V, \mathbb{C})$  est le monôme de Chern  $c_I(E)$ .*

Ce théorème signifie que le monôme de Chern  $c_I(E)$  ne dépend que de  $c_I$  et du comportement de  $\theta_v$  au voisinage de  $S$ . Si on suppose  $S$  compact, (ce qui est le cas si  $V$  est compacte), on définit le résidu à partir de la classe caractéristique résiduelle.

DÉFINITION 1.14. — *Si l'ensemble singulier  $S$  de  $v$  est compacte, le résidu  $\text{Rés}(c_I, \theta_v, S)$  de  $\theta_v$ , relativement à  $c_I$  et  $S$  est l'image de la classe caractéristique résiduelle de Bott  $[\rho_I(\theta_v)]$  par l'isomorphisme d'Alexander-Lefschetz  $AL_S : H^*(V, V \setminus S) \longrightarrow H_{2n-*}(S)$ .*

On voit alors que  $\text{Rés}(c_I, \theta_v, S)$  est un élément de  $H_0(S)$ . D'autre part, si  $S = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha$  où  $S_\alpha$  est une composante connexe de  $S$ , alors,  $H_0(S)$  est isomorphe à  $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} H_0(S_\alpha)$ .

On notera  $\text{Rés}(c_I, \theta_v, S_\alpha)$  la contribution de la composante connexe  $S_\alpha$  au résidu. Cet élément du groupe d'homologie  $H_0(S_\alpha)$  est obtenu de la façon suivante :

si  $U_\alpha$  un voisinage ouvert régulier de  $S_\alpha$  et  $\mathcal{T}_\alpha$  une variété à bord compacte de dimension réelle  $2n$  vérifiant :  $S \subset \mathcal{T}_\alpha \subset U_\alpha$  et  $\partial\mathcal{T}_\alpha \cap S_\alpha = \emptyset$ , alors, on a :

$$\text{Rés}(c_I, \theta_v, S_\alpha) = \int_{\mathcal{T}_\alpha} c_I(\nabla_\alpha^0) + \int_{\partial\mathcal{T}_\alpha} c_I(\nabla_\alpha^0, \nabla),$$

où  $\nabla_\alpha^0$  est une connexion sur  $E|_{U_\alpha}$  et  $\nabla$  une connexion  $\theta_v$ -spéciale sur  $E|_{V \setminus S_\alpha}$ , et  $\partial\mathcal{T}_\alpha$  étant orienté par la normale sortante de  $\mathcal{T}_\alpha$ .

**THÉORÈME D'EXISTENCE DES RÉSIDUS.** — *Il existe, pour tout  $\alpha$ , des nombres complexes  $\text{Rés}(c_I, \theta_v, S_\alpha)$  ne dépendant que du comportement local de  $v$  et de l'action  $\theta_v$  sur la restriction du fibré à un voisinage arbitrairement petit de  $S_\alpha$  dans  $V$ , tels que la formule suivante soit vérifiée, lorsque  $V$  est compacte :*

$$\sum_{\alpha \in A} \text{Rés}(c_I, \theta_v, S_\alpha) = c_I(E) \frown [V].$$

### 1.3.3. Cas où $S_\alpha$ est une sous-variété holomorphe $W$ de $V$

On peut choisir pour  $U_\alpha$  un voisinage tubulaire de  $W$  dans  $V$  admettant une rétraction par déformations différentiable  $\pi$  sur  $W$  : il existe donc un isomorphisme différentiable  $\Phi : \pi^{-1}(TV|_W) \xrightarrow{\cong} TU$ . Si l'on choisit pour  $\nabla^0$  la connexion  $\Phi(\pi^{-1}(\overline{\nabla}^0))$  correspondant par  $\Phi$  à l'image réciproque d'une connexion  $\overline{\nabla}^0$  sur  $E|_W$ , alors, pour des raisons de dimension,  $\int_{\mathcal{T}_\alpha} c_I(\nabla^0) = 0$ . D'où :

**PROPOSITION 1.15.** — *Avec les choix de  $U$  et  $\nabla^0$  faits ci-dessus, et  $\nabla$  désignant toujours une connexion  $\theta_v$ -spéciale sur  $E|_{V \setminus S_\alpha}$ , on a :*

$$\text{Rés}(c_I, \theta_v, W) = \int_{\partial\mathcal{T}_\alpha} c_I(\nabla^0, \nabla).$$

## 2. Résultats nouveaux

Dans toute cette section, on supposera (**hypothèse dite du « biholomorphisme »**) :

– que  $W$  désigne une composante connexe du lieu singulier de  $v$  qui est une sous-variété lisse de  $V$ ,

– qu'il existe un biholomorphisme d'un voisinage régulier  $U$  de  $W$  dans  $V$  sur un voisinage de la section nulle dans l'espace total du fibré normal  $N_W$ , appliquant  $W$  sur la section nulle de  $N_W$ .

Cette hypothèse est en particulier satisfaite dans les cas suivants :

- la sous-variété  $W$  est un sous espace projectif d'un espace projectif,
- la sous-variété  $W$  est une sous-variété de Hopf d'une variété de Hopf,
- la sous-variété  $W$  est le produit cartésien de sous-variétés des types précédents,
- la sous-variété  $W$  est un point isolé.

On identifie désormais  $U$  à un voisinage de la section nulle dans  $N_W$ . Soit  $\nabla^N$  une connexion sur  $N_W$ . Notant  $\pi$  la projection de  $N_W$  sur  $W$ , on a alors :  $TU = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$ , où  $\mathcal{H}$  désigne le fibré des vecteurs tangents à  $U$  qui sont horizontaux pour  $\nabla^N$ , et  $\mathcal{V}$  le fibré des vecteurs « verticaux », c'est-à-dire tangents aux fibres de  $\pi$ .

De plus  $\mathcal{H}$  est canoniquement isomorphe (on dira désormais « égal ») à  $\pi^{-1}(TW)$  et  $\mathcal{V}$  à  $\pi^{-1}(N_W)$  :

$$TU = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V} \text{ où } \mathcal{H} = \pi^{-1}(TW) \text{ et } \mathcal{V} = \pi^{-1}(N_W).$$

## 2.1. Construction de repères adaptés de TU

Soit  $\theta_v^0$  l'action de  $v$  sur  $TV$  définie par  $\theta_v^0(Y) = [v, Y]$  pour toute section  $Y$  de  $TU$ . Cette action induit un endomorphisme  $\theta_v^N$  du fibré normal  $N_W$  de  $W$ . Comme  $W$  est compacte et que, pour tout élément  $m$  de  $W$ , le polynôme caractéristique associé à  $(\theta_v^N)_m$  est à coefficients holomorphes, il est constant. Par conséquent, les valeurs propres de  $(\theta_v^N)_m$ , ainsi que leur ordre de multiplicité, ne dépendent pas de  $m$ . Notant  $\Lambda$  l'ensemble des valeurs propres de  $\theta_v^N$ ,  $N_W$  est alors égal à  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ ,  $N_\lambda$  désignant le sous-fibré de  $N_W$  dont la fibre au dessus d'un élément  $m$  de  $W$  est le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre  $\lambda$ . On a alors :  $TU = \pi^{-1}(TW) \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \pi^{-1}(N_\lambda)$ .

Pour tout point  $\tilde{m}$  de  $U$ , notons  $m = \pi(\tilde{m})$  son projeté sur  $W$ .

**Dans toute la suite, nous supposons que  $\theta_v^N$  admet  $q$  valeurs propres distinctes.**

$N_W$  se décompose alors sous la forme suivante :  $N_W = \bigoplus_{\lambda=1}^q N_\lambda$  ( $N_\lambda$  désigne le sous-fibré de  $N_W$  dont la fibre au dessus d'un élément  $m$  de  $W$  est le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda$ ). Par conséquent,  $TU = \pi^{-1}(TW) \oplus \bigoplus_{\lambda=1}^q \pi^{-1}(N_\lambda)$ . Considérons un point fixé  $m_0$  de  $W$ . Soient  $(x_1, \dots, x_{n-q})$  un système de coordonnées locales holomorphes définies sur un voisinage  $T$  de  $m_0$  dans  $W$ , et  $(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$  une trivialisatation holomorphe de  $N_W|_T$  adaptée à la décomposition de  $N_W|_T$  en sous-fibrés caractéristiques ; pour tout  $\tilde{m} \in \pi^{-1}(T)$ , on note  $(y_1, \dots, y_q)$  les coordonnées de  $\tilde{m}$  par rapport à la base  $(\sigma_1(m), \dots, \sigma_q(m))$  de  $(N_W)_{\tilde{m}}$ , c'est-à-dire :  $\tilde{m} = \sum_{\lambda=1}^q y_\lambda \sigma_\lambda(m)$ .

Posant  $\tilde{x}_i = x_i \circ \pi$ ,  $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-q}, y_1, \dots, y_q)$  est alors un système de coordonnées holomorphes sur  $\pi^{-1}(T)$  par rapport auxquelles la sous-variété  $W$  est définie par les équations :  $y_\lambda = 0, \forall \lambda \in \{1, 2, \dots, q\}$ .

Soit  $\nabla^N$  une connexion adaptée à la décomposition de  $N_W$ ; on a :

$$\nabla^N \sigma_\lambda = a_\lambda \sigma_\lambda \quad \forall \lambda \in \{1, 2, \dots, q\} \quad \text{où } a_\lambda \text{ est une 1-forme locale sur } W.$$

*Notations.* —  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  sera noté  $\partial_i$ ,  $\frac{\partial}{\partial y_\lambda}$  sera noté  $\partial_\lambda$  et  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  sera noté  $\tilde{\partial}_i$ .

S'il n'y a pas de confusion possible, on écrira  $\partial_i$  à la place de  $\tilde{\partial}_i$ . Notons  $\partial_i^*$  le relevé horizontal de  $\partial_i$  relativement à  $\nabla^N$  dans l'ouvert  $\pi^{-1}(T)$ .

Plus généralement, notons  $h^*$  le relevé horizontal d'un champ de vecteur  $h$  tangent à  $W$ .

LEMME 2.1. — *La famille  $(\partial_i^*, \partial_\lambda)_{1 \leq i \leq n-q, 1 \leq \lambda \leq q}$  est une base de sections locales de  $TU$ , et on a :*

$$\partial_i^* = \tilde{\partial}_i - \sum_{\lambda=1}^q (y_\lambda \pi^* a_\lambda(\partial_i)) \partial_\lambda.$$

*La base duale  $(dx_i^*, \xi_\lambda)$  de  $(\partial_i^*, \partial_\lambda)_{1 \leq i \leq n-q, 1 \leq \lambda \leq q}$ , vérifie :*

$$(\mathbf{dx}_i)^* = \mathbf{dx}_i, \quad (1 \leq i \leq n-q) \quad \text{et} \quad \xi_\lambda = \mathbf{dy}_\lambda + \mathbf{y}_\lambda \pi^* (\mathbf{a}_\lambda), \quad (1 \leq \lambda \leq q).$$

*Démonstration.* — 1) Montrons d'abord la formule suivante :

$$\partial_i^* = \tilde{\partial}_i - \sum_{\lambda=1}^q (y_\lambda a_\lambda(\partial_i)) \partial_\lambda \quad (*).$$

Soit  $\gamma_i$  la courbe sur  $W$  passant par  $m$  définie par :  $x_i(t) = x_i(m) + t$ ,  $x_j(t) = x_j(m)$  pour  $j \neq i$  qui admet  $\partial_i$  comme champ de vecteurs

tangents. Soit  $\tilde{\gamma}_i$  le relevé horizontal de  $\gamma_i$  relativement à  $\nabla^N$ . Dans les coordonnées ci-dessus, on a :  $\tilde{\gamma}_i = (\tilde{x}(t), y(t))$ , avec  $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_{n-q}(t))$  et  $\tilde{x}_i(t) = \tilde{x}_i(m) + t$ ,  $\tilde{x}_j(t) = \tilde{x}_j(m)$  pour  $j \neq i$ .

Ecrivant que  $\partial_i^*$  est tangent à  $\tilde{\gamma}_i$ , on obtient :

$$\partial_i^* = \sum_{j=1}^{n-q} \frac{dx_j(t)}{dt} \partial_j + \sum_{\lambda=1}^q \frac{dy_\lambda}{dt} \partial_\lambda,$$

soit 
$$\partial_i^* = \partial_i + \sum_{\lambda=1}^q \frac{dy_\lambda}{dt} \partial_\lambda.$$

Ecrivant que  $\tilde{\gamma}_i$  est une courbe horizontale, la section  $s_i(\gamma(t)) = \sum_{\lambda=1}^q y_\lambda(t) \sigma_\lambda(\gamma(t))$  de  $N_W$  a une dérivée covariante nulle, soit :  $\sum_{\lambda=1}^q \left( \frac{dy_\lambda}{dt} + y_\lambda a_\lambda(\partial_i) \right) \sigma_\lambda = 0$ , c'est-à-dire :  $\frac{dy_\lambda}{dt} + y_\lambda a_\lambda(\partial_i) = 0, \forall \lambda \in \{1, 2, \dots, q\}$ . ce qui achève la preuve de la formule.

On dispose maintenant de deux trivialisations locales de  $TU$  :

- la première est  $\mathcal{B}_1 = \left( (\partial_i)_{i=1 \dots n-q}, (\partial_\lambda)_{\lambda=1 \dots q} \right)$  de trivialisations duales  $\mathcal{B}_1^* = \left( (dx_i)_{i=1 \dots n-q}, (dy_\lambda)_{\lambda=1 \dots q} \right)$ .

Le champ de vecteur  $v$  s'écrit :

$$v = \sum_{i=1}^{n-q} A_i \partial_i + \sum_{\lambda=1}^q \overline{B}_\lambda \partial_\lambda$$

- la deuxième est  $\mathcal{B}_2 = \left( (\tilde{\partial}_i^*)_{i=1 \dots n-q}, (\partial_\lambda)_{\lambda=1 \dots q} \right)$  de trivialisations duales  $\mathcal{B}_2^* = \left( (dx_i)^*_{i=1 \dots n-q}, (\xi_\lambda)_{\lambda=1 \dots q} \right)$ . Le champ de vecteur  $v$  s'écrit :

$$v = \sum_{i=1}^{n-q} A_i \tilde{\partial}_i^* + \sum_{\lambda=1}^q B_\lambda \partial_\lambda$$

2) Il reste à démontrer la deuxième partie du lemme.

D'une part, il est facile de vérifier que  $dx_i$  et  $dx_i^*$  vérifient les mêmes propriétés par rapport  $\mathcal{B}_2$

Donc : 
$$dx_i^* = dx_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n - q\}$$

D'autre part pour toute forme  $\xi_\lambda$ , on peut écrire : 
$$\xi_\lambda = \sum_{\mu=1}^q A_\gamma^\mu dy_\mu + \sum_{j=1}^{n-q} B_\gamma^j dx_j.$$

Or,  $\xi_\lambda$  doit vérifier les conditions suivantes :

$$\xi_\lambda(\partial_\lambda) = 1, \quad \xi_\lambda(\partial_\mu) = 0 \text{ (pour } \lambda \neq \mu) \text{ et } \xi_\lambda(\partial_i^*) = 0 \text{ (pour tout } i).$$

$$\text{On en déduit : } A_\lambda^\mu = 0 \text{ (pour } \mu \neq \lambda), \quad A_\lambda^\lambda = 1, \quad B_\lambda^i = y_\lambda \pi^* a_\lambda(\partial_i).$$

Donc,  $\xi_\lambda = dy_\lambda + \sum_{j=1}^{n-q} y_\lambda \pi^* a_\lambda(\tilde{\partial}_j) dx_j$ . Mais  $\sum_{j=1}^{n-q} \pi^* a_\lambda(\tilde{\partial}_j) dx_j = \pi^* a_\lambda$ .

$$\text{Finalement} \quad \xi_\lambda = dy_\lambda + y_\lambda \pi^* a_\lambda.$$

LEMME 2.2. — *Les formes différentielles  $\frac{\xi_\lambda}{y_\lambda}$ , ( $\lambda = 1 \dots q$ ) ne dépendent pas de la trivialisation choisie.*

*Démonstration.* — Soient  $(\sigma_1, \dots, \sigma_q)$  et  $(\sigma'_1, \dots, \sigma'_q)$  deux trivialisations holomorphes de  $N_W$  au dessus d'un ouvert de  $W$ , adaptées à la décomposition de  $N_W$ . Il existe des 1-formes locales  $a_\lambda$  (resp.  $a'_\lambda$ ) sur  $W$  telle que :

$$\nabla^N \sigma_\lambda = a_\lambda \sigma_\lambda, \quad (\text{resp. } \nabla^N \sigma'_\lambda = a'_\lambda \sigma'_\lambda).$$

Il existe alors, pour tout  $\lambda$ , une fonction  $f_\lambda$ , holomorphe, partout non nulle sur l'intersection des deux ouverts, telle que :  $\sigma'_\lambda = f_\lambda \sigma_\lambda$ .

On en déduit :  $y_\lambda = f_\lambda y'_\lambda$  et  $a'_\lambda = a_\lambda + \frac{df_\lambda}{f_\lambda}$ . Or,  $\xi_\lambda = dy_\lambda + y_\lambda \pi^* a_\lambda$  et  $\xi'_\lambda = dy'_\lambda + y'_\lambda \pi^* a'_\lambda$ .

$$\text{On vérifie alors : } \frac{\xi_\lambda}{y_\lambda} = \frac{\xi'_\lambda}{y'_\lambda}.$$

Le lemme 2.2 implique que les formes différentielles locales  $\frac{\xi_\lambda}{y_\lambda}$  se recollent en une 1-forme différentielle globale sur tout l'ouvert  $U \setminus W$ , que l'on notera encore  $\frac{\xi_\lambda}{y_\lambda}$ .

## 2.2. Lemme fondamental

Rappelons que  $\theta_v^N$  admet  $q$  valeurs propres distinctes (dont une éventuellement nulle).

$$TU = \pi^{-1}(TW) \oplus \bigoplus_{\lambda=1}^q \pi^{-1}(N_\lambda)$$

où  $N_\lambda$  est le sous fibré de  $N_W$  dont la fibre au dessus d'un élément  $x$  de  $W$  est le sous espace vectoriel de la fibre de  $N_W$  au dessus de  $x$  correspondant

à l'espace propre associée à la valeur propre  $\alpha_\lambda$ . Le champ de vecteurs  $v$  peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$v = v_H + \sum_{\lambda=1}^q v_\lambda \quad \text{où} \quad v_H \in \mathcal{H} = \pi^{-1}(TW) \quad \text{et} \quad v_\lambda \in \mathcal{V} = \pi^{-1}(N_\lambda).$$

Posons :  $U^H = \{m \in U \setminus W; v_H(m) \neq 0\}$  et  $U^\lambda = \{m \in U \setminus W; v_\lambda(m) \neq 0\}$ .  
Ainsi :  $U \setminus W = U^H \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U^\lambda$ .

On va maintenant chercher à calculer le résidu

$$\text{Rés}(c_I, \theta_v, W) = \int_{\partial \mathcal{T}} c_I(\nabla^0, \nabla)$$

en construisant des connexions adaptées en un certain sens au recouvrement ci-dessus, et en utilisant l'intégration sur le complexe de Čech-de Rham correspondant.

### 2.2.1. Connexions $\mu$ -adaptées

DÉFINITION 2.3. — Soit  $\mu \in \{1, \dots, q\}$

On dira qu'une connexion  $\nabla$  sur  $E$  est  $\mu$ -adaptée si :

- $\nabla$  est de type  $(1, 0)$
- $\nabla_X(\tilde{\sigma}) = 0$  pour tout  $X$  dans  $\pi^{-1}N_\mu$  et pour toute section  $\pi$ -invariante  $\tilde{\sigma}$ .  
(c'est-à-dire telle que  $\tilde{\sigma} = \pi^{-1}(\sigma)$  où  $\sigma$  est une section de  $E|_W$ ).

PROPOSITION 2.4. — De telles connexions existent toujours.

THÉORÈME 2.5. — Si  $\nabla_0, \dots, \nabla_k$  sont  $k + 1$  connexions  $\mu$ -adaptées ( $k \geq 0$ ),  $c_I(\nabla_0, \dots, \nabla_k) = 0$  pour  $|I| = n$ .

Démonstration. — On a :  $T_{\mathbb{C}}U = TU \oplus \overline{TU}$ , où  $T^{(1,0)}U = TU$  et  $T^{(0,1)}U = \overline{TU}$ .

Mais,  $TU = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$  où  $\mathcal{H} \simeq \pi^{-1}(TW)$  et  $\mathcal{V} \simeq \bigoplus_{\lambda=1}^q \pi^{-1}(N_\lambda)$ .

Soit  $\mathcal{B} = (h_1, \dots, h_{n-q}, \partial_1, \dots, \partial_\mu, \dots, \partial_\lambda, \dots, \partial_q, \overline{Z}_1, \dots, \overline{Z}_n)$  une trivialisatation locale de  $T_{\mathbb{C}}U$  adaptée à la décomposition précédente. La trivialisatation duale sera notée

$\mathcal{B}^* = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-q}, \xi_1, \dots, \xi_\mu, \dots, \xi_\lambda, \dots, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$  où  $(\varepsilon_i)$  est le dual de  $(h_i)$ ,  $(\xi_\lambda)$  celui de  $(\partial_\lambda)$  et  $(\zeta_k)$  celui de  $(\overline{Z}_k)$ .

**Si  $k = 0$  :** Soit  $\nabla_0$  une connexion  $\mu$ -adaptée ; on note  $K$  sa courbure.

Si  $X$  et  $Y$  sont des champs de vecteurs purs relativement à la décomposition précédente de  $T_{\mathbb{C}}U$ ,  $K(X, Y)$  n'est non nul que si l'un des vecteurs  $X$  ou  $Y$  est dans  $\bigoplus_{\lambda \neq \mu} \pi^{-1}(N_{\lambda}) \oplus \mathcal{H}$ . Par suite, les coefficients  $K_{\alpha}^{\beta}$  de  $K$  s'écrivent :  $K_{\alpha}^{\beta} = \sum_{1,j} A_{ij} \varepsilon_i \wedge \tau_j + \sum_{\lambda,k} \xi_{\lambda} \wedge \tau_k$  avec  $\lambda \neq \mu$  et  $\tau \in \Gamma(TU)$ .

On en déduit :  $K_{\alpha_1}^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge K_{\alpha_n}^{\beta_n} = 0$ , d'où  $c_I(\nabla_0) = 0$ .

Si  $k > 0$ , on procède de la même manière que pour la preuve de la proposition 1.11.

### 2.2.2. Choix de connexions spéciales

(i) Soit  $\nabla$  une connexion  $\theta_v$ -spéciale sur  $TU|_{V \setminus W}$  c'est-à-dire :

- $\nabla$  est de type  $(1,0)$ ,
- $\nabla_v = \theta_v$ .

(ii)  $\nabla^0 = \pi^*(\bar{\nabla}^0)$  où  $\bar{\nabla}^0$  est une connexion sur  $E|_W$ .

(iii)  $v$  et  $v^{\mu} (\mu \neq \lambda)$  n'étant pas colinéaires sur  $U^{\lambda}$ , on choisit  $\nabla^{\lambda}$  sur  $E|_{U^{\lambda}}$  de la manière suivante :

- $\nabla^{\lambda}$  est  $\theta_v$ -spéciale,
- $\nabla_X^{\lambda} = \nabla_X^0$  pour tout  $X$  dans  $\mathcal{H} \oplus \bigoplus_{\mu, \mu \neq \lambda} \pi^{-1}(N_{\mu})$  au dessus de  $U^{\lambda}$ .

(iv) On choisit  $\nabla^H$  de la manière suivante :

- $\nabla^H$  est  $\theta_v$ -spéciale,
- $\nabla^H$  est  $\mu$ -adaptée pour tout  $\mu$  appartenant à  $\Lambda$ ,
- $\nabla_X^H = \nabla_X^0$  pour tout  $X$  appartenant à un sous-fibré  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{H}$  dont la fibre au dessus d'un point  $m$  de  $U^H$  est un supplémentaire de l'espace vectoriel engendré par  $v^H(m)$  dans la fibre  $\mathcal{H}_m$  de  $\mathcal{H}$  au dessus de  $m$ .

Il est facile de voir que les formules suivantes sont vérifiées :

$$(1) \quad \nabla^{\lambda} = \nabla^0 + \frac{\xi_{\lambda}}{B_{\lambda}} \otimes \Theta \quad \text{et} \quad (2) \quad \nabla^H = \nabla^0 + \zeta \otimes \Theta \quad \text{où}$$

- $\Theta = \theta_v - \nabla_v^0$ ,
- $\xi_{\lambda}$  est la 1-forme différentielle sur  $U^{\lambda}$  telle que :  $\xi_{\lambda}(v_{\lambda}) = 1$  et  $\xi_{\lambda} = 0$  sur  $\mathcal{H} \oplus \bigoplus_{\mu, \mu \neq \lambda} \pi^{-1}(N_{\mu})$ .
- $\zeta$  est la 1-forme différentielle sur  $U^H$  telle que :  $\zeta(v_H) = 1$  et  $\zeta = 0$  sur  $\mathcal{K} \oplus \bigoplus_{\mu \in \Lambda} \pi^{-1}(N_{\mu})$

### 2.2.3. Enoncé et démonstration du lemme fondamental

On se donne maintenant le recouvrement ouvert  $\mathcal{U} = \{U^1, \dots, U^q, U^H\}$  de  $U \setminus W$ . On notera  $\{1, 2, \dots, q, i_H\}$  l'ensemble des 0-simplexes du nerf  $\mathcal{N}(U)$  du recouvrement. Plus généralement, la dimension  $|\sigma|$  d'un simplexe ordonné  $\sigma$  de  $\mathcal{N}(U)$  est  $s$  si  $\sigma = (i_0 \cdots i_s)$ , et  $s + 1$  si  $\sigma = (i_0 \cdots i_s i_H)$ .

LEMME FONDAMENTAL. — Les cochaines  $\alpha$  et  $\beta$  de  $CDR^*(\mathcal{U})$  définies par

- $\alpha = (\alpha_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{N}(U)}$  où :

$$\alpha_\sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } |\sigma| < q - 1 \\ 0 & \text{si } \sigma = (i_0 \cdots i_s H), \quad s < q - 1 \\ (-1)^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \dots, \nabla^q) & \text{si } \sigma = (i_0 \cdots i_{q-1}) \\ (-1)^{\lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \dots, \nabla^q, \nabla^H) & \text{si } \sigma = (i_0 \cdots i_{q-1} H) \end{cases}$$

- $\beta = (\beta_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{N}(U)}$  où :

$$\beta_\sigma = \begin{cases} c_I(\nabla^0, \nabla) & \text{si } |\sigma| = 0 \\ 0 & \text{si } |\sigma| > 0. \end{cases}$$

sont des cocycles et sont cohomologues dans  $CDR^*(\mathcal{U})$ .

*Démonstration.* — Considérons l'élément  $\rho$  de  $CDR^{2n-2}(\mathcal{U})$  défini par :

- $\rho_{i_0, \dots, i_s} = (-1)^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} c_I(\nabla^0, \nabla, \nabla^{i_0}, \dots, \nabla^{i_s})$
- $\rho_{i_0, \dots, i_s H} = (-1)^{\lfloor \frac{s+1}{2} \rfloor} c_I(\nabla^0, \nabla, \nabla^{i_0}, \dots, \nabla^{i_s}, \nabla^H)$

$D\rho$  contient quatre types de termes :

Les termes du type  $(D\rho)_i$ , les termes du type  $(D\rho)_H$ , les termes du type  $(D\rho)_{i_0, \dots, i_s}$  ( $s \geq 1$ ) et les termes du type  $(D\rho)_{i_0, \dots, i_s H}$  ( $s \geq 1$ ).

#### Calcul de $(D\rho)_i$ .

$$\begin{aligned} (D\rho)_i &= dc_I(\nabla^0, \nabla, \nabla^i) \\ &= c_I(\nabla, \nabla^i) - c_I(\nabla^0, \nabla^i) + c_I(\nabla^0, \nabla) \\ &= c_I(\nabla^0, \nabla). \end{aligned}$$

Calcul de  $(D\rho)_H$ .

$$\begin{aligned} (D\rho)_H &= dc_I(\nabla^0, \nabla, \nabla^H) \\ &= c_I(\nabla, \nabla^H) - c_I(\nabla^0, \nabla^H) + c_I(\nabla^0, \nabla) \\ &= c_I(\nabla^0, \nabla). \end{aligned}$$

calcul de  $(D\rho)_{i_0, \dots, i_s}$  ( $s \geq 1$ )

$$\begin{aligned} (D\rho)_{i_0 \dots i_s} &= (-1)^s d(\rho_{i_0 \dots i_s}) + \sum_{k=0}^s (-1)^k \rho_{i_0 \dots \widehat{i}_k \dots i_s} \\ &= (-1)^s (-1)^{[\frac{s}{2}]} \left( \sum_{k=0}^s (-1)^k c_I(\nabla^0, \nabla, \nabla^{i_0}, \dots, \widehat{\nabla^{i_k}}, \dots, \nabla^{i_s}) \right. \\ &\quad \left. + c_I(\nabla, \nabla^{i_0}, \dots, \nabla^{i_s}) - c_I(\nabla^0, \nabla^{i_0}, \dots, \nabla^{i_s}) \right) \\ &\quad + (-1)^{[\frac{s-1}{2}]} \sum_{k=0}^s (-1)^k c_I(\nabla^0, \nabla, \nabla^{i_0}, \dots, \widehat{\nabla^{i_k}}, \dots, \nabla^{i_s}). \\ &= \left( (-1)^{s+[\frac{s}{2}]} + (-1)^{[\frac{s-1}{2}]} \right) \left( \sum_{k=0}^s (-1)^k c_I(\nabla^0, \nabla, \right. \\ &\quad \left. \nabla^{i_0}, \dots, \widehat{\nabla^{i_k}}, \dots, \nabla^{i_s}) \right) \\ &\quad + (-1)^{s+[\frac{s}{2}]} \left( c_I(\nabla, \nabla^{i_0}, \dots, \nabla^{i_s}) - c_I(\nabla^0, \nabla^{i_0}, \dots, \nabla^{i_s}) \right) \end{aligned}$$

or,

$$(-1)^{s+[\frac{s}{2}]} = (-1)^{[\frac{s+1}{2}]} \quad \text{et} \quad (-1)^{[\frac{s+1}{2}]} + (-1)^{[\frac{s-1}{2}]} = 0.$$

D'autre part,

$$c_I(\nabla, \nabla^{i_0}, \dots, \nabla^{i_s}) = 0$$

car les connexions  $\nabla$  et  $\nabla^{i_k}$ , ( $k = 1, \dots, s$ ) sont toutes  $\theta_v$ -spéciales.

Donc

$$(D\rho)_{i_0 \dots i_s} = -(-1)^{[\frac{s+1}{2}]} c_I(\nabla^0, \nabla^{i_0}, \dots, \nabla^{i_s}).$$

Ainsi :

- Si  $s < q - 1$ ,  $(D\rho)_{i_0 \dots i_s} = 0$  car  $\nabla^0, \nabla^{i_0}, \dots, \nabla^{i_s}$  sont toutes  $\mu$ -adaptées pour  $\mu \neq i_0, \dots, i_s$

- Si  $s = q - 1$ ,  $(D\rho)_{i_0 \dots i_s} = -(-1)^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \dots, \nabla^q)$ .

calcul de  $(D\rho)_{i_0, \dots, i_s H}$ ,  $s \geq 1$

$$\begin{aligned}
 (D\rho)_{i_0 \dots i_s H} &= (-1)^{s+1} d(\rho_{i_0 \dots i_s H}) + \sum_{k=0}^s (-1)^k \rho_{i_0 \dots \widehat{i_k} \dots i_s H} + (-1)^{s+1} \rho_{i_0 \dots i_s} \\
 &= (-1)^{s+1} (-1)^{\lfloor \frac{s+1}{2} \rfloor} \left[ c_I(\nabla, \nabla^{i_0}, \dots, \nabla^{i_s} \nabla^H) - c_I(\nabla^0, \nabla^{i_0}, \dots, \nabla^{i_s} \nabla^H) \right. \\
 &\quad + \sum_{k=0}^s (-1)^k c_I(\nabla^0, \nabla, \nabla^{i_0}, \dots, \widehat{\nabla^{i_k}}, \dots, \nabla^{i_s}, \nabla^H) \\
 &\quad \left. + (-1)^{s+1} c_I(\nabla^0, \nabla, \nabla^{i_0}, \dots, \nabla^{i_s}, ) \right] \\
 &\quad + (-1)^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} \sum_{k=0}^s (-1)^k c_I(\nabla^0, \nabla, \nabla^{i_0}, \dots, \widehat{\nabla^{i_k}}, \dots, \nabla^{i_s}, \nabla^H) \\
 &\quad + (-1)^{s+1} \times (-1)^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} c_I(\nabla^0, \nabla, \nabla^{i_0}, \dots, \nabla^{i_s}, ).
 \end{aligned}$$

Or

$$(-1)^{s+1+\lfloor \frac{s+1}{2} \rfloor} + (-1)^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} = 0 \quad \text{et} \quad (-1)^{\lfloor \frac{s+1}{2} \rfloor} + (-1)^{s+1+\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} = 0.$$

De plus,  $c_I(\nabla, \nabla^{i_0}, \dots, \nabla^{i_s}, \nabla^H) = 0$  car ces connexions sont toutes  $\theta_v$ -spéciales. Donc

$$(D\rho)_{i_0, \dots, i_s H} = \begin{cases} 0 & \text{si } s < q - 1 \\ -(-1)^{\lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \dots, \nabla^q, \nabla^H) & \text{si } s = q - 1 \end{cases}$$

*Remarque 2.6.* — La preuve du lemme 2.2 montre que si l'on peut recourir  $U \setminus W$  en omettant l'un des ouverts  $U^{\lambda^i}$ ,  $c_I(\nabla_0, \nabla)$  est alors cohomologue à 0 : cf. 2.4.3 ci-après (théorème C).

### 2.3. Les formules de résidu

#### 2.3.1. Cas général : (où l'on ne peut se passer d'aucun des ouverts $U^H$ ou $U^\lambda$ )

THÉORÈME A. — Si  $\theta_v^N$  admet  $q$  valeurs propres distinctes, alors

$$\begin{aligned} \text{Rés}\left(c_I, \theta_v, W\right) = \\ (-1)^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^n \int_{R_{12\dots q}} \frac{\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_q}{y_1 \dots y_q} \frac{1}{\prod_{\lambda=1}^q \widetilde{B}_\lambda} \left[ c_I\left(\Omega_0^E + \Theta\right) \left[ c_q\left(\text{Id} - \frac{1}{B} \pi^* \Omega^N\right) \right]^{-1} \right]_{n-q} \\ + (-1)^{\lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor} \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^n \int_{R_{12\dots qH}} \frac{\zeta}{1-d\zeta} \wedge \frac{\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_q}{y_1 \dots y_q} \frac{1}{\prod \widetilde{B}_\lambda} \left[ c_I\left(\Omega_0^E + \Theta\right) \left[ c_q\left(\text{Id} - \frac{1}{B} \pi^* \Omega^N\right) \right]^{-1} \right]_{n-q-1} \end{aligned}$$

- $B_\lambda = \widetilde{B}_\lambda y_\lambda$ , avec  $v = \sum A_i \partial_i^* + \sum B_\lambda \partial_\lambda$ ,
- $\Theta = \theta_v - \nabla_v^0$ ,  $\Omega_0^E$  est la courbure de  $\nabla^0$  sur  $E$ ,  $\Omega^N$  est la courbure de  $\nabla^N$  sur  $N_W$ ,
- $\frac{1}{B} \pi^* \Omega^N$  est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont :  
 $\frac{1}{B_\lambda} \pi^* da_\lambda, (\lambda = 1 \dots q)$ .
- $\left((R_\lambda)_\lambda, R_H\right)$  est un système d'alvéoles sur  $\partial\mathcal{T}$  subordonné au recouvrement induit par le recouvrement  $\left((U_\lambda)_\lambda, U_H\right)$

*Démonstration.* — Le résidu à calculer devient :

$$\begin{aligned} \text{Rés}(c_I, \theta_v, W) = (-1)^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \int_{R_{12\dots q}} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \dots, \nabla^q) \\ + (-1)^{\lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor} \int_{R_{12\dots qH}} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \dots, \nabla^q, \nabla^H). \end{aligned}$$

1) Calcul de  $(-1)^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \int_{R_{12\dots q}} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \dots, \nabla^q)$  :

Pour calculer  $c_I(\nabla^0, \nabla^1, \dots, \nabla^q)$ , on introduit la connexion  $\widetilde{\nabla}$  définie sur le fibré  $E|_{U^1 \cap U^2 \cap \dots \cap U^q} \times \Delta^q \mapsto U^1 \cap U^2 \cap \dots \cap U^q \times \Delta^q$  par

$$\widetilde{\nabla} = \left(1 - \sum_{\lambda=1}^q t_\lambda\right) \nabla^0 + \sum_{\lambda=1}^q t_\lambda \nabla^\lambda.$$

où  $\Delta^q$  est le  $q$ -simplexe standard de  $\mathbb{R}^q$ .

Comme

$$\nabla^\lambda = \nabla^0 + \frac{\xi_\lambda}{y_\lambda} \times \frac{1}{\widetilde{B}_\lambda} \Theta,$$

on a :

$$\widetilde{\nabla} = \nabla^0 + \sum_\lambda t_\lambda \frac{\xi_\lambda}{y_\lambda} \times \frac{1}{\widetilde{B}_\lambda} \Theta.$$

Sa courbure est :

$$\widetilde{\Omega} = \Omega_0 + \sum_{\lambda=1}^q \left( dt_\lambda \wedge \frac{\xi_\lambda}{y_\lambda} \times \frac{1}{\widetilde{B}_\lambda} \right) \Theta + \sum_{\lambda=1}^q \left( t_\lambda \frac{1}{\widetilde{B}_\lambda} \Omega_N^\lambda \right) \Theta + R.$$

où  $R$  est un terme qui contient  $\xi_\lambda$ .

Ainsi,

$$\widetilde{\Omega}^n = \frac{n!}{q!(n-q)!} \left( \sum_{\lambda=1}^q dt_\lambda \wedge \frac{\xi_\lambda}{y_\lambda} \frac{1}{\widetilde{B}_\lambda} \right)^q \Theta^q \wedge \left( \Omega_0 + \sum_{\lambda=1}^q \left( t_\lambda \frac{1}{\widetilde{B}_\lambda} \Omega_N^\lambda \right) \Theta + R \right)^{n-q} + Q.$$

où  $Q$  est un terme de degré inférieur à  $q$  en  $dt_1, \dots, dt_\lambda$ . D'où :

$$c_I(\widetilde{\Omega}) = \frac{n!}{q!(n-q)!} \left( \sum_{\lambda=1}^q dt_\lambda \wedge \frac{\xi_\lambda}{B_\lambda} \right)^q \widehat{c}_I \left( \Theta^q, \left( \Omega_0 + \left( \sum_{\lambda=1}^q \left( \frac{t_\lambda}{\widetilde{B}_\lambda} \Omega_N^\lambda \right) \Theta \right) \right)^{n-q} \right) \\ + \text{terme de degré inférieur à } q \text{ en } dt_1, \dots, dt_\lambda \wedge \dots.$$

Par conséquent,

$$\int c_I(\widetilde{\nabla}) = (-1)^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \left( \frac{-1}{2i\pi} \right)^n \frac{n!}{q!(n-q)!} q! \\ \int_{\Delta^q} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_q \wedge \frac{\xi_1}{B_1} \wedge \dots \wedge \frac{\xi_q}{B_q} \widehat{c}_I \left( \Theta^q, (\Omega_0 + A\Theta)^{n-q} \right)$$

où

- $A = \sum_{\lambda=1}^q \frac{t_\lambda}{\widetilde{B}_\lambda} y_\lambda \left( \Omega_N \right)_\lambda$
- $\int$  désigne l'intégration le long de la fibre  $\Delta^q$  pour la projection  $V \times \Delta^q \rightarrow V$ .

Puisque  $c_I(\nabla^0, \nabla^1, \dots, \nabla^q) = (-1)^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \int_{\Delta^q} c_I(\widetilde{\nabla}), c_I(\nabla^0, \nabla^1, \dots, \nabla^q)$  est égal à

$$\frac{n!}{(n-q)!} \left( \frac{-1}{2i\pi} \right)^n \int_{\Delta^q} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_q \wedge \frac{\xi_1}{B_1} \wedge \dots \wedge \frac{\xi_q}{B_q} \sum_{k=0}^{n-q} \frac{(n-q)!}{k!(n-q-k)!} A^k \widehat{c}_I \left( \Theta^{k+q}, \Omega_0^{n-q-k} \right)$$

Or, 
$$A^k = \sum_{J/|J|=k} \frac{|J|!}{J!} \left( \frac{t}{\widetilde{B}} \Omega_N \right)^J \quad \text{où on a posé } B_\lambda = y_\lambda \widetilde{B}_\lambda$$

(Notation :  $D^J = D_1^{j_1} . D_2^{j_2} \dots . D_q^{j_q}$  et  $J = (j_1, j_2, \dots, j_q)$  est un multi-indice,  $J! = j_1! j_2! \dots j_q!$ )

et, 
$$\int_{\Delta^q} t^J dt_1 \wedge \dots \wedge dt_q = \frac{J!}{(|J| + q)!}$$

donc, 
$$c_I(\nabla_0, \nabla^1, \dots, \nabla^q) =$$

$$\left( \frac{-1}{2i\pi} \right)^n \frac{\xi_1}{B_1} \wedge \dots \wedge \frac{\xi_q}{B_q} \sum_{J/|J| \leq n-q} \frac{n!}{(|J| + q)!(n - q - |J|)!} \left( \frac{\Omega_N}{\widetilde{B}} \right)^J \widehat{c}_I(\Theta^{|J|+q}, \Omega_0^{n-q-|J|})$$

Calculons maintenant, 
$$\left[ c_I(\Omega_0^E + \Theta) \left( c_q \left( \text{Id} - \frac{1}{\widetilde{B}} \Omega_0^N \right) \right)^{-1} \right]_{n-q}$$

D'une part, 
$$\left[ c_I(\Omega_0^E + \Theta) \right]_{n-q} = \sum_{s \leq n-q} \frac{n!}{s!(n-s)!} \widehat{c}_I((\Omega_0^E)^s, \Theta^{n-s})$$

D'autre part,

$$\left[ c_q \left( \text{Id} - \frac{1}{\widetilde{B}} \pi^* \Omega^N \right) \right]^{-1} = \frac{1}{\prod_{\lambda=1}^q \left( 1 - \frac{1}{B_\lambda} \pi^* \Omega_\lambda^N \right)}$$

En posant :  $p_\lambda = \frac{1}{B_\lambda} \pi^* \Omega_\lambda^N$ , on obtient

$$\left[ c_q \left( \text{Id} - \frac{1}{\widetilde{B}} \pi^* \Omega^N \right) \right]^{-1} = \prod_{\lambda=1}^q (1 + p_\lambda + p_\lambda^2 + \dots)$$

ou encore

$$\left[ c_q \left( \text{Id} - \frac{1}{\widetilde{B}} \pi^* \Omega^N \right) \right]^{-1} = \sum_{s \geq 0} W_s(p_1, \dots, p_q),$$

$W_s$  étant la fonction symétrique complète de degré  $s$  en  $p_1, \dots, p_q$ .

De plus, 
$$\sum_{|J|=j} P^J = 1 + W_1(p_1, \dots, p_q) + \dots + W_s(p_1, \dots, p_q)$$

donc, 
$$\left[ c_q \left( (Id - \pi^* \Omega^N) \right) \right]^{-1} = \sum_{|J|=j} \left( \frac{1}{B} \Omega_N \right)^J.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \left[ c_I \left( \Omega_0^E + \Theta \right) \left[ c_q \left( Id - \pi^* \Omega^N \right) \right]^{-1} \right]_{n-q} \\ &= \sum_{s \leq n-q} \frac{n!}{s!(n-s)!} \widehat{c}_I \left( (\pi^* \Omega_0^E)^s, \Theta^{n-s} \right) \sum_{|J|=j} \left( \frac{1}{B} \pi^* \Omega^N \right)^J \end{aligned}$$

En posant  $s = n - q - |J|$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \left[ c_I \left( \Omega_0^E + \Theta \right) \left[ c_q \left( Id - \pi^* \Omega^N \right) \right]^{-1} \right]_{n-q} = \\ & \sum_{|J| \leq n-q} \left( \frac{1}{B} \pi^* \Omega^N \right)^J \frac{n!}{(n-q-|J|)! (|J|+q)!} \widehat{c}_I \left( (\pi^* \Omega_0^E)^{n-q-|J|}, \Theta^{|J|+q} \right) \end{aligned}$$

Finalement, on a la formule voulue.

2) Calcul de  $(-1)^{\lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor} \int_{R_{12 \dots qH}} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \dots, \nabla^q, \nabla^H) :$

Là aussi, on introduit la connexion  $\widetilde{\nabla}$  définie sur  $\widetilde{E}|_{U^1 \cap \dots \cap U^H} \rightarrow U^1 \cap \dots \cap U^H \times \Delta^{q+1}$  par :

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla} &= \left( 1 - t_0 - \sum_{\lambda=1}^q t_\lambda \right) \nabla_0 + t_0 \nabla_H + \sum_{\lambda=1}^q t_\lambda \nabla_\lambda. \\ &= \nabla_0 + \left( t_0 \zeta + \sum_{\lambda=1}^q t_\lambda \frac{\xi_\lambda}{B_\lambda} \right) \otimes \Theta. \end{aligned}$$

Donc, la courbure  $\widetilde{\Omega}$  peut s'écrire :  $\widetilde{\Omega} = \rho \otimes \Theta + R$

où  $\rho = dt_0 \wedge \zeta + \sum_{\lambda=1}^q dt_\lambda \wedge \frac{\xi_\lambda}{y_\lambda} \frac{1}{B_\lambda}$  et  $R = \Omega_0 + \left( t_0 d\zeta + \sum_{\lambda=1}^q t_\lambda \frac{d\xi_\lambda}{B_\lambda} \right) \otimes \overline{M}$   
+ termes en  $\xi_\lambda$  ou en  $\zeta$ . Donc,

$$\begin{aligned} \widetilde{\Omega}^n &= (\rho \otimes \Theta + R)^n. \\ &= \frac{n!}{(q+1)!(n-q-1)!} \rho^{q+1} \otimes \Theta^{q+1} \otimes (\Omega_0 + A\Theta)^{n-q-1} \\ &+ \text{termes de degrés inférieurs à } q+1 \text{ en } dt_0, \dots, dt_q. \end{aligned}$$

Avec  $A = t_0 d\zeta + \sum_{\lambda=1}^q t_\lambda \wedge \frac{d\xi_\lambda}{B_\lambda}$

$$\begin{aligned} c_I(\tilde{\Omega}) &= (-1)^{\lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor} \frac{n!}{(n-q-1)!} dt_0 \wedge \cdots \wedge dt_q \wedge \zeta \wedge \frac{\xi_1}{B_1} \wedge \cdots \\ &\quad \frac{\xi_q}{B_q} \widehat{c}_I(\Theta^{q+1}, (\Omega_0 + A\Theta)^{n-q-1}) \\ &= (-1)^{\lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor} \frac{n!}{(q+1)!(n-q-1)!} (q+1)! dt_0 \wedge \cdots \wedge dt_q \wedge \zeta \wedge \frac{\xi_1}{B_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\xi_q}{B_q} \\ &\quad \otimes \sum_{k=0}^{n-q-1} \frac{(n-q-1)!}{k!(n-q-1-k)!} A^k \widehat{c}_I(\Theta^{k+q+1}, \Omega_0^{n-q-1-k}). \end{aligned}$$

$$\text{Or,} \quad A^k = \sum_{J; |J|=k} \frac{(|J|)!}{J!} t^J (d\zeta \wedge \frac{d\xi}{B})^J.$$

Donc,

$$\begin{aligned} c_I(\tilde{\Omega}) &= (-1)^{\lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor} dt_0 \wedge dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_q \wedge \zeta \wedge \frac{\xi_1}{B_1} \wedge \frac{\xi_2}{B_2} \wedge \cdots \wedge \frac{\xi_q}{B_q} \\ &\quad \wedge n! \sum_{J; |J| \leq n-q-1} t^J (d\zeta \wedge \frac{d\xi}{B})^J \times \frac{|J|!}{|J|!(n-q-1-|J|)!J!} \\ &\quad \times \widehat{c}_I(\overline{M}^{|J|+q+1}, \Omega_0^{n-q-1-|J|}) \end{aligned}$$

Mais,

$$\int_{\Delta_{q+1}} t^J dt^J = \frac{J!}{(|J|+q+1)!}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} (-1)^{\lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor} \int_{\Delta_{q+1}} c_I(\tilde{\Omega}) &= \zeta \wedge \frac{\xi_1}{B_1} \wedge \frac{\xi_2}{B_2} \wedge \cdots \wedge \frac{\xi_q}{B_q} \\ &\quad \sum_{J; |J| \leq n-q-1} C_n^{|J|+q+1} \widehat{c}_I(\Theta^{|J|+q+1}, \Omega_0^{n-q-1-|J|}) (d\zeta \wedge \frac{d\xi}{B})^J. \end{aligned}$$

On vérifie, en se référant au calcul analogue fait dans la sous-section précédente,

$$\begin{aligned} (-1)^{\lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor} \int_{\Delta_{q+1}} c_I(\tilde{\Omega}) &= \frac{1}{\prod_{\lambda=1}^q \widetilde{B}_\lambda} \frac{\zeta}{1-d\zeta} \wedge \frac{\xi_1}{y_1} \wedge \cdots \\ &\quad \wedge \frac{\xi_q}{y_q} \left[ c_I(\Omega_0 + \Theta) \left[ c_q \left( Id_q - \frac{1}{B} \Omega_N \right) \right]^{-1} \right]_{n-q-1}. \quad \square \end{aligned}$$

Il peut arriver, dans certains cas, qu'on n'ait pas besoin de l'un des ouverts précédents pour recouvrir  $U \setminus W$ . Le calcul des résidus se fait alors de manière plus simple.

**2.3.2. Recouvrement ne nécessitant pas  $U^H$  (Recouvrement par les seuls  $(U^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ )**

THÉORÈME B. — Avec les hypothèses du théorème A, et lorsqu'en plus  $U \setminus W \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ , alors :

$$\text{Rés}(c_I, \theta_v, W) = (-1)^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \left( \frac{-1}{2i\pi} \right)^n \int_{R'_{12\dots q}} \frac{\xi_1}{y_1} \wedge \dots \wedge \frac{\xi_q}{y_q} \frac{1}{\prod_{\lambda=1}^q \widetilde{B}_\lambda} \left[ c_I(\Omega_0^E + \Theta) \left[ c_q \left( Id - \frac{1}{B} \pi^* \Omega^N \right) \right]^{-1} \right]_{n-q},$$

où  $(R'_\lambda)_\lambda$  est un système d'alvéoles subordonné au recouvrement  $(U_\lambda \cap \partial T)_{\lambda \in \Lambda}$  de  $\partial T$  et  $R'_{12\dots q} = \cap_{\lambda=1}^q (R'_\lambda)$ .

*Remarque 2.7.* — Si  $R_{12\dots q}$  fibre au dessus de  $W$ , on peut remplacer  $\frac{\xi_1}{y_1} \wedge \dots \wedge \frac{\xi_q}{y_q}$  par  $\frac{dy_1}{y_1} \wedge \dots \wedge \frac{dy_q}{y_q}$  dans l'intégrale le long de la fibre, laquelle peut donc se calculer comme un résidu de Grothendieck. Il faut en effet remarquer que l'expression à intégrer, qui n'est pas nécessairement holomorphe par rapport aux variables  $x$ , est holomorphe en  $y$  pour  $x$  fixé.

Cette remarque vaut aussi pour le théorème B, en ce qui concerne l'intégrale  $\int_{R_{12\dots q}}$ .

*Démonstration du théorème B.* — Considérons le recouvrement  $U' = (U_\lambda)$  de  $U \setminus W$ . La démonstration du lemme 2.2 montre que les cocycles  $\alpha$  et  $\beta$  de  $CDR^*(U)$  définis par

- $\alpha = (\alpha_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{N}(U)}$  où :

$$\alpha_\sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } |\sigma| < q - 1 \\ (-1)^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \dots, \nabla^q) & \text{si } \sigma = (i_0 \dots i_{q-1}) \end{cases}$$

- $\beta = (\beta_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{N}(U)}$  où :

$$\beta_\sigma = \begin{cases} c_I(\nabla^0, \nabla) & \text{si } |\sigma| = 0 \\ 0 & \text{si } |\sigma| > 0. \end{cases}$$

sont alors cohomologues dans  $CDR(\mathcal{U}')$ . Il en résulte que

$$\text{Rés}(c_I, \theta_v, W) = (-1)^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \int_{R'_1 \cap \dots \cap R'_q} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \dots, \nabla^q)$$

où  $(R'_\lambda)_{1 \leq \lambda \leq q}$  est un système d'alvéoles subordonné au recouvrement  $\mathcal{U}'(\partial T)$  induit par le recouvrement  $\mathcal{U}'$  de  $U \setminus W$  et  $R'_1 \cap \dots \cap R'_q = R'_1 \cap R'_2 \cap \dots \cap R'_q$ .

Un calcul analogue à celui fait dans 3.3.1 nous conduit au résultat.  $\square$

On va voir maintenant que le théorème B est une généralisation du théorème de calcul des résidus le long d'une sous-variété non dégénérée ainsi que du théorème de calcul des résidus relativement à un point singulier isolé.

**COROLLAIRE 1** (Bott [3]). — *Si  $W$  est une composante connexe non dégénérée de l'ensemble singulier, alors*

$$\text{Rés}(c_I, \theta_v, W) = \left[ \frac{c_I(E|_W + \theta_v)}{c_q(N_W + \theta_v^N)} \right]_{n-q} \frown [W].$$

Pour démontrer ce corollaire, on a besoin du lemme suivant :

**LEMME 2.8.** — *Si  $W$  est non dégénérée, les ouverts  $U^\lambda$  suffisent à recouvrir  $U \setminus W$ , sans qu'il soit besoin de  $U_H$ .*

*Démonstration du lemme.* — Soit  $M_W$  la matrice de  $\theta_v^N$  relativement au projeté de la trivialisaton  $\mathcal{B}_2$  de  $TU$  sur  $N_W$ . On a alors

$$M_W = - \begin{pmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial y_1} & \frac{\partial B_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial B_1}{\partial y_q} \\ \frac{\partial B_2}{\partial y_1} & \frac{\partial B_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial B_2}{\partial y_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial B_q}{\partial y_1} & \frac{\partial B_q}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial B_q}{\partial y_q} \end{pmatrix}$$

D'autre part, dans la même trivialisaton  $\mathcal{B}_2$ ,

$$M_W = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_q \end{pmatrix}$$

On en déduit, pour tout  $\lambda$ ,

$$B_\lambda(x, y) = -\alpha_\lambda y_\lambda \left(1 + \epsilon(x, y)\right)^{-1} \quad \text{avec} \quad \epsilon(x, 0) = 0.$$

Donnons nous maintenant un point  $m$  dans  $U \setminus W$  suffisamment voisin de  $W$ .

Il existe alors  $\lambda \in \Lambda$  tel que  $y_\lambda \neq 0$  et par suite  $B_\lambda(x, y) \neq 0$  puisque l'hypothèse de non-dégénérescence implique  $\alpha_\lambda \neq 0$ . On en déduit  $m \in U^\lambda$ .  $\square$

*Démonstration du corollaire 1.* — Puisque

$$\begin{aligned} \xi_\lambda &= dy_\lambda + y_\lambda \pi^* a_\lambda, \\ \frac{\xi_\lambda}{y_\lambda} &= \frac{dy_\lambda}{y_\lambda} + \pi^* a_\lambda. \end{aligned}$$

Comme on suppose que la restriction à  $R'_{12\dots q}$  de la fibration sur  $W$  est encore une fibration, le résidu  $\text{Rés}(c_I, \theta_v, W)$  est égal à

$$\begin{aligned} (-1)^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^n \int_W (-1)^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \left( \int \frac{dy_1}{y_1} \wedge \dots \wedge \frac{dy_q}{y_q} \frac{1}{\prod \widetilde{B}_\lambda} \right. \\ \left. \left[ c_I(\Omega_0^E + \Theta) \left[ c_q \left( \left( Id - \frac{1}{\widetilde{B}} \pi^* \Omega^N \right) \right)^{-1} \right] \right]_{n-q} + R \right), \end{aligned}$$

soit

$$\left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^n \int_W \left( \int \frac{dy_1}{y_1} \wedge \dots \wedge \frac{dy_q}{y_q} \times \frac{1}{\prod \widetilde{B}_\lambda} \left[ c_I(\Omega_0^E + \Theta) \left[ c_q \left( \left( Id - \frac{1}{\widetilde{B}} \pi^* \Omega^N \right) \right)^{-1} \right] \right]_{n-q} \right),$$

puisque  $dx_i$  figure dans  $R$  à une puissance  $> n - q$ . Mais, puisque  $v$  est non dégénéré le long de  $W$ , les termes  $(\widetilde{B}_\lambda)^{-1}$  sont holomorphes en  $y$  ( $y$  compris en  $y = 0$  où ils prennent la valeur  $-\alpha_\lambda$ ), et par conséquent, la forme

différentielle  $\frac{1}{\prod \widetilde{B}_\lambda} \left[ c_I(\Omega_0^E + \Theta) \left[ c_q \left( \left( Id - \frac{1}{\widetilde{B}} \pi^* \Omega^N \right) \right)^{-1} \right] \right]_{n-q}$  peut s'écrire

sous la forme  $f(x, y) dx \wedge d\bar{x}$  où  $f$  est holomorphe en  $y$ ,  $y$  compris en  $y = 0$ . Ainsi, pour  $x$  fixé,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\prod \widetilde{B}_\lambda} \left[ c_I(\Omega_0^E + \Theta) \left[ c_q \left( \left( Id - \frac{1}{\widetilde{B}} \pi^* \Omega^N \right) \right)^{-1} \right] \right]_{n-q} \frac{dy_1}{y_1} \wedge \dots \wedge \frac{dy_q}{y_q} \\ = (2i\pi)^q \times (-1)^q \left[ c_I(\Omega_0^{E|W} + \theta_v) [c_q(\Omega_N + \theta_v^N)] \right]_{n-q}^{-1}. \end{aligned}$$

D'autre part,  $c_I(E|_W + \theta_v)$  est égal à la classe de cohomologie de  $\left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^n c_I(\Omega_0^{E|_W} + \theta_v)$ , tandis que  $c_q(N_W + \theta_v^N)$  est égal à celle de  $\left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^q c_q(\Omega_N + \theta_v^N)$ , d'où la formule cherchée.  $\square$

**COROLLAIRE 2** (Baum-Bott [1]). — *Si  $W$  est une singularité isolée  $m_0$ , éventuellement dégénérée, du champ de vecteurs holomorphe  $v = \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial}{\partial y_i}$ , les coordonnées locales holomorphes  $(y_1, \dots, y_n)$  étant nulles en  $m_0$ ,*

$$\text{Rés}(c_I, \theta_v, m_0) = \left[ \begin{array}{c} c_I(\theta_v) \, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \\ B_1 \cdots B_n \end{array} \right]_0.$$

*Démonstration.* — Il suffit de remarquer que les courbures  $\Omega_0^E$  et  $\Omega^N$  sont nulles. Donc,

$$c_I(\Omega_0^E + \Theta) = c_I(\theta_v) \text{ et } c_q\left(\text{Id} - \frac{1}{B} \pi^* \Omega^N\right) = 1$$

Comme  $\widetilde{\xi}_\lambda$  peut être remplacé par  $dy_\lambda$  dans l'intégration le long de la fibre et  $y_\lambda \widetilde{B}_\lambda = B_\lambda$ , on obtient la formule voulue.

## 2.4. Recouvrement ne nécessitant pas l'un des ouverts $U^\lambda$

Dans le cas où l'on peut se passer de l'un des  $U^\lambda$  pour recouvrir  $U \setminus W$  sans, on obtient :

**THÉORÈME C.** — *S'il existe  $\lambda_0 \in \Lambda$  tel que  $U \setminus W = U_H \cup \bigcup_{\lambda \neq \lambda_0} U_\lambda$ , le résidu est alors nul :*

$$\text{Rés}(c_I, \theta_v, W) = 0.$$

*Démonstration.* — C'est une conséquence immédiate de la remarque 2.6.

## 2.5. Cas d'une variété produit

Soient :

- une variété holomorphe  $V_0$  de dimension complexe  $q$ ,
- une variété holomorphe  $W$  de dimension complexe  $n - q$ ,
- un champ de vecteurs  $v_0$  holomorphe sur  $V_0$  d'ensemble singulier  $S_0 = \coprod_\alpha S_\alpha$ ,

- la variété produit  $V = W \times V_0$  (projections de  $V$  sur  $W$  et  $V_0$  notées respectivement  $p_1$  et  $p_2$ ), de telle sorte que

$$TV = (p_1)^{-1}(TW) \bigoplus (p_2)^{-1}(TV_0).$$

Notons  $\rho$  l'homomorphisme  $\rho : \mathbb{R}[c_1, \dots, c_n] \longrightarrow \mathbb{R}[c'_1, \dots, c'_{n-q}] \otimes \mathbb{R}[c''_1, \dots, c''_q]$  induit par l'inclusion  $GL_{n-q} \times GL_q \hookrightarrow GL_n$  :

$$\rho(1 + c_1 + \dots + c_n) = (1 + c'_1 + \dots + c'_{n-q})(1 + c''_1 + \dots + c''_q).$$

Pour tout monôme  $c_I$  tel que  $|I| = n$ , posons :

$$\rho(c_I) = \sum_{|J|=n-q, |K|=q} n_{J,K}^I c'_J c''_K \text{ où}$$

- $c'_j$  est élément de  $I^*(\mathfrak{gl}(n-q, \mathbb{C}))$
- $c''_k$  est élément de  $I^*(\mathfrak{gl}(q, \mathbb{C}))$
- $n_{J,K}^I$  est un coefficient entier qui ne dépend que des multi-indices  $I, J$  et  $K$ .

Soit  $v$  le champ de vecteurs  $v = (0, v_0)$  sur  $V$  dont l'ensemble singulier

$$S = \coprod_{\alpha} W_{\alpha} \quad \text{où} \quad W_{\alpha} = W \times S_{\alpha}.$$

THÉORÈME D. — *Le résidu de  $c_I(V)$ , relativement à  $\theta_v$  et  $W_{\alpha}$  est donné par la formule suivante :*

$$R\acute{e}s(c_I, \theta_v, W_{\alpha}) = \sum_{|J|=n-q, |K|=q} n_{J,K}^I \left( c_J(W) \frown [W] \right) \times R\acute{e}s(c_K, \theta_{v_0}, S_{\alpha})$$

DÉMONSTRATION. — Rappelons (voir proposition 1.4.1) la formule  $R\acute{e}s(c_I, \theta_v, W_{\alpha}) = \int_{\partial T} c_I(\nabla_0, \nabla)$  dans laquelle

- $\nabla_0 = \pi^*(\overline{\nabla}^0)$  ( $\overline{\nabla}^0$  désignant t une connexion sur  $TV|_{W_{\alpha}}$ ),
- $\pi : U = N_{W_{\alpha}} \longrightarrow W_{\alpha}$ ,
- $\nabla$  est une connexion  $\theta_v$ -spéciale sur  $TV|_{V \setminus W_{\alpha}}$ .

soit  $\overline{\nabla}^0 = \overline{\nabla}_{W_{\alpha}}^0 + \overline{\nabla}_N^0$  où  $\overline{\nabla}_{W_{\alpha}}^0$  est une connexion sur  $TW_{\alpha}$  et  $\overline{\nabla}_N^0$  une connexion sur  $N_{W_{\alpha}}$ . Comme  $N_{W_{\alpha}} = p_2^{-1}(N_{S_{\alpha}}(V_0))$  ( $p_2$  étant la projection de  $V$  sur  $V_0$ ),  $\pi^{-1}(\overline{\nabla}_N^0) = 0$ . Donc,  $\nabla^0 = \pi^*(\overline{\nabla}_{W_{\alpha}}^0)$ .

Dans la trivialisation  $\{\partial_i^*, \partial_\lambda\}$ , on a :

$$\omega_0^V = \begin{pmatrix} \omega_0^W & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

où  $\omega_0^W$  est la forme de connexion associée à la connexion  $\nabla_0^W$  sur  $p_1^{-1}(TW)$ . Soit  $\Theta = \theta_v - \nabla_v^0$ ,  $M$  la matrice de  $\theta_v$  relativement à la la trivialisation  $\{\partial_i^*, \partial_\lambda\}$  et  $\overline{M}$  la matrice de  $\Theta$  relativement cette même trivialisation. Comme  $\omega_0(v) = 0$ , on a :

$$\overline{M} = M = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & -J_0 \end{pmatrix}.$$

où

$$J_0 = \left( \left( \frac{D(B_1, \cdots B_q)}{D(y_1, \cdots y_q)} \right) \right).$$

Enfin, on se donne une connexion  $\overline{\nabla}^V$  sur  $TV_0$ ,  $\theta_{v_0}$ -spéciale et  $\eta_0$  une 1-forme de type  $(1, 0)$  telle que :  $\eta_0(v_0) = 1$ . Soit  $\eta$  la 1-forme sur  $TV$  définie par :

$$\eta \equiv \begin{cases} p_2^* \eta_0 & \text{sur } p_2^{-1}(TV_0) \\ 0 & \text{sur } p_1^{-1}(TW) \end{cases}$$

On définit une connexion  $\nabla^V$  sur  $TV|_{V \setminus W_\alpha}$  définie par :  $\nabla^V = \nabla^0 + \eta \Theta$ . Il est clair que  $\nabla^V$  est  $\theta_v$ -spéciale. En effet,  $\nabla_v = \nabla_v^0 + \eta(v) \Theta = \theta_v$ . Sa courbure est :  $\tilde{\Omega} = \Omega_0^V + d(t \eta) \theta_v$  où

$$\Omega_0^V = \begin{pmatrix} \Omega_0^W & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & -d(t p_2^* \eta_0) J_0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$c_I(\tilde{\Omega}) = \sum_{|J|=n-q, |K|=q} n_{J,K}^I c_J(\Omega_0^W) \cdot c_K''(d(t \eta_0) (-J_0)).$$

Par conséquent :

$$c_I(\nabla_0^V, \nabla^V) = \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^n \sum_{|J|=n-q, |K|=q} n_{J,K}^I c'_J(\Omega_0^W) \cdot \int_0^1 c''_K(d(t\eta_0)(-J_0)).$$

Donc

$$\text{Rés}(c_I, \theta_v, W_\alpha) = \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^n \sum_{|J|=n-q, |K|=q} n_{J,K}^I \int_{\partial\mathcal{T}} \left[ c_J(\Omega_0^W) \cdot \int_0^1 c''_K(d(t\eta_0)(-J_0)) \right].$$

Mais,  $\partial\mathcal{T}$  peut se décomposer sous la forme suivante :  $\partial\mathcal{T} = W \times \partial\mathcal{T}_0$  où  $\mathcal{T}_0$  est un voisinage tubulaire de  $S_\alpha$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \text{Rés}(c_I, \theta_v, W_\alpha) &= \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^n \sum_{|J|=n-q, |K|=q} n_{J,K}^I \int_W c'_J(\Omega_0^W) \\ &\quad \int_{\partial\mathcal{T}_0} \left( \int_0^1 c''_K(d(t\eta_0)(-J_0)) \right) \\ &= \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^n \sum_{|J|=n-q, |K|=q} n_{J,K}^I \cdot (-2i\pi)^{n-q} \left( c'_J(W) \frown [W] \right) \\ &\quad \times (-2i\pi)^q \text{Rés}(c''_K, \theta_{v_0}, S_\alpha). \end{aligned}$$

### 3. Exemples

Dans toute cette section, le champ de vecteurs  $\frac{\partial}{\partial x}$  sera noté  $\partial_x$  et on fera de même avec les autres variables.

#### 3.1. Exemple d'application du théorème A

On notera  $[X, Y, Z, T]$  les coordonnées homogènes dans  $\mathbb{P}_3$  et  $(x, y, z)$  les coordonnées sur l'ouvert affine  $U_T : T \neq 0$ .

Le lieu singulier de  $v$  est  $S = W \cup \{m_Y\}$  où  $W : Y = Z = 0$  et  $m_Y[0, 1, 0, 0]$ .

Soit  $v$  le champ de vecteur sur  $\mathbb{P}_3$  dont la restriction à  $\mathbb{C}^3$  est définie par :

$$v = z \partial_x + h y \partial_y \quad (h \neq 0).$$

Prenons pour  $E$  le fibré  $T\mathbb{P}_3$  et pour  $\theta_v$  le crochet  $[v, \cdot]$  par  $v$ .

Dans la trivialisation  $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ ,  $v$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$v = A\partial_x + \overline{B}\partial_y + \overline{C}\partial_z \quad \text{où} \quad A = z, \overline{B} = h y \text{ et } \overline{C} = 0.$$

Dans la trivialisation  $(\partial_x^*, \partial_y, \partial_z)$ ,  $v$  s'écrit :

$$v = A\partial_x^* + B\partial_y + C\partial_z \quad \text{où} \quad B = y(h - z\varphi) \text{ et } C = -z^2\varphi \text{ avec } \varphi(x) = \frac{\overline{x}}{1 + x\overline{x}}.$$

On pose :  $B = y\tilde{B}$  et  $C = z\tilde{C}$  c'est-à-dire  $\tilde{B} = (h - z\varphi(x))$  et  $\tilde{C} = -z\varphi(x)$ .

De manière analogue, relativement aux coordonnées affines  $t' = \frac{T}{X}$ ,  $y' = \frac{Y}{X}$ ,  $z' = \frac{Z}{X}$   $v = A'\partial_t' + \overline{B'}\partial_y' + \overline{C'}\partial_z'$  où  $A' = -t'z'$ ,  $\overline{B'} = y'(h - z')$  et  $\overline{C'} = -z'^2$ .

On en déduit :  $v = A'\partial_t'^* + B'\partial_y' + C'\partial_z'$  où  $B' = y'(h - z'\Delta')$  et  $C' = -z'^2\Delta'$  avec  $\Delta' = 1 - t'\varphi(t')$ .

On pose :  $B' = y'\widetilde{B'}$  et  $C' = z'\widetilde{C'}$  c'est-à-dire  $\widetilde{B'} = (h - z'\Delta')$  et  $\widetilde{C'} = -z'\Delta'$ .

**Calcul des résidus en  $m_Y$**  : L'expression de  $v$  au voisinage de  $m_Y$ , relativement aux coordonnées affines  $t'' = \frac{T}{Y}$ ,  $x'' = \frac{X}{Y}$ ,  $z'' = \frac{Z}{Y}$  est :  $v = (z'' - hx'')\partial_x'' - hz''\partial_z'' - ht''\partial_t''$ .

$\theta_v$  admet  $h$  pour valeur propre multiple ;  $m_Y$  est alors une singularité non dégénérée de  $v$ .

La formule de Bott donne alors :  $\text{Rés}(c_1)^3 = 27$ ,  $\text{Rés}(c_1c_2) = 9$  et  $\text{Rés}(c_3) = 1$ .

**Recouvrement de  $U' = U \setminus W$**  où  $U = \mathbb{P}_3 \setminus (m_Y m_Z)$

On définit les ouverts  $U^H, U^1, U^2$  respectivement par  $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$ . Ces définitions se traduisent en coordonnées affines de la manière suivante :  $U^H : z \neq 0, U^1 : (y \neq 0; h - z\varphi(x) \neq 0), U^2 : (z \neq 0; \varphi(x) \neq 0)$ . On a :  $U \setminus W = U^H \cup U^1 \cup U^2$ .

Pour recouvrir,  $U \setminus W$ , on ne peut se passer d'aucun des ouverts précédents. En effet :

- les points de  $U' \cap (m_X m_Y)$  n'appartiennent qu'à  $U^1$ .
- les points de  $U' \cap (m_T m_Z)$  n'appartiennent qu'à  $U^H$ .
- les points de  $U' \cap (m_X m_Z)$  n'appartiennent qu'à  $U^2$ .

Le résidu est alors :

$$\text{Rés}(c_I, \theta_v, W) = - \int_{R_{12}} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \nabla^2) - \int_{R_{12H}} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \nabla^2, \nabla^H) \text{ où}$$

- $\partial\mathcal{T} = \left\{ |X| = |Z|; |T| \leq |Z| \right\} \cup \left\{ |X| \leq |Z|; |T| = |Z| \right\}$ .
- $\nabla^0, \nabla^1, \nabla^2, \nabla^H$  sont des connexions définies respectivement sur  $TU, TU|_{U^1}, TU|_{U^2}, TU|_{U^H}$ .
- $R_{12} = R_1 \cap R_2$  ;  $R_{12H} = R_1 \cap R_2 \cap R_H$  où  $R_1, R_2$  ;  $R_H$  sont des régions de  $\partial\mathcal{T}$  définies par ( $\varepsilon > 0$ ) :
  - $R_1 = \left\{ [X, Y, Z, T] \in \partial\mathcal{T}; |Y| \geq |Z| \right\}$ .
  - $R_2 = \left\{ [X, Y, Z, T] \in \partial\mathcal{T}; |Y| \leq |Z| ; |X| \geq \varepsilon |T| \right\}$ .
  - $R_H = \left\{ [X, Y, Z, T] \in \partial\mathcal{T}; |Y| \leq |Z| ; |X| \leq \varepsilon |T| \right\}$ .

$\{R_1, R_2, R_H\}$  est un système d'alvéoles subordonné au recouvrement  $\mathcal{U}(\partial\mathcal{T})$  induit par le recouvrement  $\mathcal{U} = \{U^H, U^1, U^2\}$  de  $U'$ .

### 3.1.1. Définition des connexions

Rappelons d'abord la formule suivante :  $(T\mathbb{P}_3)|_W = TW \oplus N_W$ .

Or,  $TW = \check{L}^{\otimes 2}$  et  $N_W = \check{L} \oplus \check{L}$  où  $\check{L}$  est le dual du fibré tautologique sur  $\mathbb{P}_1$ . On définit une connexion sur  $\check{L}$  dont la forme de connexion associée, relativement à la trivialisatio ( $\partial_x$ ), est :  $a_0 = -\varphi dx$  où  $\varphi(x) = \frac{\bar{x}}{1+x\bar{x}}$ . On définit ainsi une connexion  $\bar{\nabla}^0$  sur  $T\mathbb{P}_3|_W$  puis une connexion  $\nabla^0$  dont la forme de connexion, relativement à la trivialisatio ( $\partial_x^*, \partial_y, \partial_z$ ), est :

$$\omega_0 = -\varphi dx \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\nabla^1, \nabla^2$  et  $\nabla^H$  sont définies comme dans (2.2.2). Les formes de connexion associées sont :

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{\xi_1}{B} \otimes \bar{M}, \quad \omega_2 = \omega_0 + \frac{\xi_2}{C} \otimes \bar{M} \quad \text{et} \quad \omega_H = \omega_0 + \frac{dx}{A} \otimes \bar{M}, \quad \text{où}$$

- $\xi_1 = dy - y \varphi dx, \quad \xi_2 = dz - z \varphi dx$ .

- $M$  et  $\overline{M}$  sont respectivement les matrices représentant  $\theta_v$  et  $\Theta = \theta_v - \nabla_v^0$  relativement à la trivialisaton  $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ .

On a :

$$M = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit que la matrice de  $\theta_v^N$  est :

$$- \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc,  $W$  est une sous-variété dégénérée.

Dans cette même trivialisaton,

$$\omega_0 = \begin{pmatrix} -2\varphi dx & 0 & 0 \\ -\varphi dy - y(\varphi^2 dx + d\varphi) & -\varphi dx & 0 \\ -\varphi dz - z(\varphi^2 dx + d\varphi) & 0 & -\varphi dx \end{pmatrix}$$

On obtient :  $Tr(\overline{M}) = 4z \varphi - h$ .

On vérifie aussi :  $Tr(\Omega_0) = 4dx \wedge d''\varphi$  où  $\Omega_0$  est la courbure de  $\nabla^0$  et  $d''\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}} d\bar{x}$ .

### 3.1.2. Calcul de $\int_{R_{12}} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \nabla^2)$

On vérifie :

$$\begin{aligned} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \nabla^2) &= \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^3 \frac{\xi_1}{B} \wedge \frac{\xi_2}{C} \left[ -3\widehat{c}_I(\overline{M}, \overline{M}, \Omega_0) - \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right) c_I(\overline{M}) \right] \\ &= \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^3 (K_1 + K_2 + K_3) \text{ où :} \end{aligned}$$

$$K_1 = -3 \frac{\xi_1}{B} \wedge \frac{\xi_2}{C} \widehat{c}_I(\overline{M}, \overline{M}, \Omega_0), \quad K_2 = \frac{-1}{B} \frac{\xi_1}{B} \wedge \frac{\xi_2}{C} \wedge dx \wedge d''\varphi c_I(\overline{M})$$

et

$$K_3 = \frac{-1}{C} \frac{\xi_1}{B} \wedge \frac{\xi_2}{C} \wedge dx \wedge d''\varphi c_I(\overline{M}).$$

$$\begin{aligned}
 K_1 &= -3 \frac{dy}{y(h-z\varphi)} \wedge \frac{dz}{(-z^2\varphi)} (Tr(\overline{M}))^2 Tr(\Omega_0) \\
 &= 12 dx \wedge d''\varphi \frac{dy}{y} \wedge \frac{dz}{z^2} \times \frac{1}{h-z\varphi} \times \frac{1}{\varphi} \times (4z\varphi - h)^2.
 \end{aligned}$$

Comme  $R_{12}$  fibre sur  $W$ , en notant  $\int$  le long de la fibre, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \int K_1 &= 12 dx \wedge d''\varphi \int \frac{dy}{y} \wedge \frac{dz}{z^2} \times \frac{1}{h-z\varphi(x)} \times \frac{1}{\varphi} \times (4z\varphi - h)^2. \\
 &= -84 \times (2i\pi)^2 dx \wedge d''\varphi.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_2 &= \frac{-1}{\widetilde{B}} \frac{\xi_1}{B} \wedge \frac{\xi_2}{C} \wedge dx \wedge d''\varphi(x) c_I(\overline{M}) \\
 &= -\frac{1}{h-z\varphi} \times dx \wedge d''\varphi \frac{dy}{y(h-z\varphi)} \wedge \frac{dz}{(-z^2\varphi)} (Tr(\overline{M}))^3
 \end{aligned}$$

Là aussi, en intégrant le long de la fibre, on obtient :  $\int K_2 = 10 \times (2i\pi)^2 dx \wedge d''\varphi$ .

$$\begin{aligned}
 K_3 &= \frac{-1}{\widetilde{C}} \frac{\xi_1}{B} \wedge \frac{\xi_2}{C} \wedge dx \wedge d''\varphi c_I(\overline{M}) \\
 &= -\frac{1}{(-z\varphi)} \times dx \wedge d''\varphi \frac{dy}{y(h-z\varphi)} \wedge \frac{dz}{(-z^2\varphi)} (Tr(\overline{M}))^3
 \end{aligned}$$

L'intégrale le long de la fibre donne :  $\int K_3 = 37 \times (2i\pi)^2 dx \wedge d''\varphi$ .  
 Donc,  $\int (c_1)^3(\nabla^0, \nabla^1, \nabla^2) = \frac{-1}{2i\pi} \times 37 \times dx \wedge d''\varphi$ .  
 Comme  $\int_W dx \wedge d''\varphi = 2i\pi$  puisque  $c_1(\check{L}) \frown [\mathbb{P}_1] = 1$ , on obtient :

$$\int_{R_{12}} (c_1)^3(\nabla^0, \nabla^1, \nabla^2) = -37(1 - \rho_\varepsilon) \quad \text{où} \quad \rho_\varepsilon = \frac{1}{2i\pi} \int_{|x| \leq \varepsilon} dx \wedge d''\varphi.$$

Notons que  $\rho_\varepsilon$  tend vers 0 quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

### 3.1.3. Calcul de $\int_{R_{12H}} c_I(\nabla^0, \nabla^1, \nabla^2, \nabla^H)$

$$\text{On vérifie : } c_I(\nabla^0, \nabla^1, \nabla^2, \nabla^H) = \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^3 \frac{dx}{A} \wedge \frac{\xi_1}{B} \wedge \frac{\xi_2}{C} c_I(\overline{M}).$$

Donc

$$\begin{aligned}
 (c_1)^3(\nabla^0, \nabla^1, \nabla^2, \nabla^H) &= \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^3 \frac{dx}{A} \wedge \frac{\xi_1}{B} \wedge \frac{\xi_2}{C} (Tr(\overline{M}))^3. \\
 &= \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^3 \frac{dx}{z} \wedge \frac{dy}{y(h-z\varphi)} \wedge \frac{dz}{(-z^2\varphi)} (4z\varphi - h)^3.
 \end{aligned}$$

En intégrant le long de la fibre en  $x$ , on obtient :  $f(c_1)^3(\nabla^0, \nabla^1, \nabla^2, \nabla^H) = \frac{-1}{2i\pi} \times 37 \times \varphi dx$ .

Pour achever le calcul de  $\int_{R_{12H}} (c_1)^3(\nabla^0, \nabla^1, \nabla^2, \nabla^H)$ , il reste à intégrer la 1-forme  $\frac{-1}{2i\pi} \times 37 \times \varphi dx$ .

Rappelons que  $R_{12H}$  est définie par :  $|Y| = |Z|; |X| = \varepsilon|T|$ . En particulier,  $|x| = \varepsilon$  dans  $R_{12H}$ .

Posons :  $x = \varepsilon e^{i\gamma}$ ,  $\gamma \in \mathbb{R} \pmod{2\pi \mathbb{Z}}$ .

$$\begin{aligned}
 \int_{R_{12H}} (c_1)^3(\nabla^0, \nabla^1, \nabla^2, \nabla^H) &= \frac{-1}{2i\pi} \times 37 \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon e^{-i\gamma}}{1 + \varepsilon^2} \times i\varepsilon e^{i\gamma} d\gamma \\
 &= \frac{-1}{2i\pi} \times 37 \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} d\gamma \\
 &= \frac{-37\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}.
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
 \text{Rés}((c_1)^3, \theta_v, W) &= -\left[-37(1 - \rho_\varepsilon)\right] - \left[\frac{-37\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}\right] \\
 &= 37 \times \left(\frac{1 + 2\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} - \rho_\varepsilon\right).
 \end{aligned}$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on obtient :

$$\text{Rés}((c_1)^3, \theta_v, W) = 37.$$

On peut remarquer que la somme des résidus de  $(c_1)^3$  est bien égale au nombre de Chern  $(c_1)^3 \frown [\mathbb{P}^3]$ .

### 3.2. Exemple d'application des théorèmes B et D

On notera  $[Y, Z, T]$  les coordonnées homogènes dans  $\mathbb{P}_2$  et  $(y, z)$  les coordonnées affines  $y = \frac{Y}{T}$  et  $z = \frac{Z}{T}$  sur l'ouvert  $U_T^0$  défini par  $T \neq 0$ .

Le lieu singulier de  $v_0$  est :  $S_0 = \{m_T, m_Z\}$  où  $m_T = [0, 0, 1]$ . et  $m_Z = [0, 1, 0]$ .

Soit  $v_0$  le champ de vecteurs sur  $\mathbb{P}_2$  dont la restriction à  $\mathbb{C}^2$  est :

$$v_0(y, z) = y^2 \partial_y + z(y + b) \partial_z, \quad (b \neq 0).$$

Considérons maintenant le champ de vecteurs  $v = (0, v_0)$  sur  $V$ . Notant  $[X, R]$  les coordonnées homogènes dans  $\mathbb{P}_1$ , le lieu singulier de  $v$  est :

$$S = W_T \cup W_Z \quad \text{où} \quad W_T = \mathbb{P}_1 \times \{m_T\} \quad \text{et} \quad W_Z = \mathbb{P}_1 \times \{m_Z\}.$$

#### Expressions de $v$

En posant  $x = \frac{X}{R}$ , l'expression de  $v$  dans  $\mathbb{P}_1 \times U_T$  est :  $v(x, y, z) = 0 \partial_x + B(x, y, z) \partial_y + C(x, y, z) \partial_z$  où  $B(x, y, z) = y^2$  et  $C(x, y, z) = z(y + z)$ .

Dans  $\mathbb{P}_1 \times U_Z$ , l'expression de  $v$  est :  $v(x, y'', t'') = 0 \partial_x + B''(x, y'', t'') \partial_{y''} + C''(x, y'', t'') \partial_{t''}$  où  $B''(x, y'', t'') = -by''$  et  $C''(x, y'', t'') = -(y'' + bt'')$ .

#### Expressions des restrictions des monômes de Chern

La restriction  $\rho : I^*(\mathcal{G}l(3, \mathbb{C})) \longrightarrow I^*(\mathcal{G}l(1, \mathbb{C})) \otimes I^*(\mathcal{G}l(2, \mathbb{C}))$  donne :

$$\rho(c_1) = c'_1 + c''_1, \quad \rho(c_2) = c'_1 c''_1 + c''_2, \quad \rho(c_3) = c'_1 c''_2.$$

On en déduit :  $\rho((c_1)^3) = 3 c'_1 c''_1{}^2$ ,  $\rho(c_1 c_2) = c'_1 (c''_2 + c''_1{}^2)$ ,  $\rho(c_3) = c'_1 c''_2$ .

#### Calcul des résidus en $W_T$

D'après le théorème D,

$$\text{Rés}\left((c_1)^3, \theta_v, W_T\right) = 3 c'_1(\mathbb{P}_1) \frown [\mathbb{P}_1] \times \text{Rés}\left((c''_1)^2, \theta_{v_0}, m_T\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Rés}\left((c_1 c_2), \theta_v, W_T\right) &= c'_1(\mathbb{P}_1) \frown [\mathbb{P}_1] \times \left( \text{Rés}\left((c''_2), \theta_{v_0}, m_T\right) \right. \\ &\quad \left. + \text{Rés}\left((c''_1)^2, \theta_{v_0}, m_T\right) \right). \end{aligned}$$

$$\text{Rés}\left((c_3), \theta_v, W_T\right) = c'_1(\mathbb{P}_1) \frown [\mathbb{P}_1] \times \text{Rés}\left((c''_2), \theta_{v_0}, m_T\right).$$

Notons tout de suite :  $c'_1(\mathbb{P}_1) \frown [\mathbb{P}_1] = 2$ .

Pour calculer les résidus en  $m_T$ , on calcule d'abord la matrice Jacobienne  $J_0 = \frac{D(B,C)}{D(y,z)}$ .

$$J_0 = \begin{pmatrix} 2y & 0 \\ z & y+b \end{pmatrix}.$$

Il apparaît alors que  $m_T$  est une singularité dégénérée de  $v$ . Ainsi :

$$\text{Rés}(c_K, \theta_{v_0}, m_T) = \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^2 \int \frac{dy}{y^2} \wedge \frac{dz}{z(y+b)} c_K(-J_0).$$

Or,  $(c_1)^2(-J_0) = (3y+b)^2$ ,  $(c_2)(-J_0) = 2y(y+b)$ . Donc,

$$\begin{aligned} \text{Rés}\left((c_1)^2, \theta_{v_0}, m_T\right) &= \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^2 \int \frac{dy}{y^2} \wedge \frac{dz}{z(y+b)} (3y+b)^2 \\ &= 5. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Rés}\left((c_2), \theta_{v_0}, m_T\right) &= \left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^2 \int \frac{dy}{y^2} \wedge \frac{dz}{z(y+b)} 2y(y+b) \\ &= 2. \end{aligned}$$

On en déduit :

- $\text{Rés}\left((c_1)^3, \theta_v, W_T\right) = 3 \times 2 \times 5 = 30$ .
- $\text{Rés}\left((c_1 c_2), \theta_v, W_T\right) = 2 \times (2 + 5) = 14$ .
- $\text{Rés}\left((c_3), \theta_v, W_T\right) = 2 \times 2 = 4$ .

*Remarque 1.* —  $W_T$  est une sous-variété dégénérée de  $V$ .

*Remarque 2.* — Posons :

- $U_0 = \mathbb{P}_2 \setminus \{m_Z\}$  et  $U = \mathbb{P}_1 \times U_0$ .
- $U = \mathbb{P}_1 \times U_0$ .
- $U^B = \{m(x, y, z) \in U \setminus W_T ; B(y, z) \neq 0\}$ .
- $U^C = \{m(x, y, z) \in U \setminus W_T ; C(y, z) \neq 0\}$ .

On a :  $U \setminus W_T = U^B \cup U^C$ .

Cela signifie qu'on a un recouvrement de  $U \setminus W_T$  sans  $U^H$ . Le théorème C est donc applicable.

### Calcul des résidus en $W_Z$

Le théorème D permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \text{Rés}\left((c_1)^3, \theta_v, W_Z\right) &= 3 c'_1(\mathbb{P}_1) \frown [\mathbb{P}_1] \times \text{Rés}\left((c'_1)''^2, \theta_{v_0}, m_Z\right). \\ \text{Rés}\left((c_1 c_2), \theta_v, W_Z\right) &= c'_1(\mathbb{P}_1) \frown [\mathbb{P}_1] \times \left( \text{Rés}\left((c'_2)''\right), \theta_{v_0}, m_Z\right) \\ &\quad + \text{Rés}\left((c'_1)''^2, \theta_{v_0}, m_Z\right) \Big). \\ \text{Rés}\left((c_3), \theta_v, W_Z\right) &= c'_1(\mathbb{P}_1) \frown [\mathbb{P}_1] \times \text{Rés}\left((c'_2)''\right), \theta_{v_0}, m_Z \Big). \end{aligned}$$

La matrice jacobienne est

$$J''_0 = \frac{D(B'', C'')}{D(y'', t'')} = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ -1 & -b \end{pmatrix}.$$

Il apparaît alors que  $m_Z$  est une singularité non dégénérée de  $v_0$ .

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \text{Rés}\left((c_1)^2, \theta_{v_0}, m_Z\right) &= 4 \text{ et } \text{Rés}\left((c_2), \theta_{v_0}, m_Z\right) = 1. \text{ Donc} \\ \text{Rés}\left((c_1)^3, \theta_v, W_Z\right) &= 24, \text{ Rés}\left((c_1 c_2), \theta_v, W_Z\right) = 10, \text{ Rés}\left((c_3), \theta_v, W_T\right) = 2. \end{aligned}$$

Là aussi, on remarque que, pour chaque  $c_I$ , la somme des résidus est égale au nombre de Chern.

### 3.3. Exemple d'application du Théorème C

Soit  $\lambda$  un nombre complexe différent de 0 et de 1.

Dans  $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ , on définit la relation d'équivalence suivante :  $(x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ . L'espace quotient  $[\mathbb{C}^3 \setminus \{0\} / \sim]$  est appelé variété de Hopf de dimension 3 et est noté  $\mathbb{H}_3$ .

Soit  $v$  le champ de vecteurs sur  $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$  défini par :  $v = (y+z) \partial_x + y \partial_y$ . Le lieu singulier de  $v$  est la droite  $W : y = z = 0$  privée de l'origine. Notons  $p : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{H}_3$  l'application de passage aux quotients, et  $\tilde{v}$  le champ

de vecteurs sur  $\mathbb{H}_3$  donné par  $v$  en passant au quotient. Le lieu singulier de  $\tilde{v}$  est  $\widetilde{W} = p(W)$ . Les sections  $(x \partial_y, x \partial_z)$  trivialisent le fibré normal  $N_W$ . De plus cette trivialisatation passe aux quotients. En choisissant une connexion triviale sur  $N_W$ , on a :  $\partial_x^* = \partial_x$ . Le champ de vecteurs  $v$  s'écrit :  $v = A \partial_x^* + B \partial_y + C \partial_z$  où  $A = y + z$ ,  $B = y$ ,  $C = 0$ .

Posons :  $U = \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ ,  $U' = U \setminus W$ . On définit les ouverts  $U^H$ ,  $U^1$  et  $U^2$  respectivement par  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$  et  $C \neq 0$ . Ces définitions se traduisent par :  $U^H : y \neq 0$ ,  $U^1 : y + z \neq 0$ . Il est clair que  $U'$  est recouvert par  $U^H$  et  $U^1$ . En posant :  $\widetilde{U} = \mathbb{H}_3$ ,  $\widetilde{U}' = \widetilde{U} \setminus \widetilde{W}$   $\widetilde{U}^H = p(U^H)$ ,  $\widetilde{U}^1 = p(U^1)$ , on voit que  $\widetilde{U}'$  est recouvert par  $\widetilde{U}^H$  et  $\widetilde{U}^1$ . D'après le théorème C, pour  $|I| = 3$ ,  $\text{Rés}(c_I, \theta_{\tilde{v}}, \widetilde{W}) = 0$ .

On a encore la formule donnant la somme des résidus qui est vérifiée.

**Remerciements.** — Je remercie très vivement le Professeur Daniel Lehmann pour m'avoir proposé ce projet et aidé dans sa réalisation.

Je ne saurai oublier El Hadji Cheikh Mbacké DIOP pour tout le soutien qu'il m'a apporté tout au long de ce travail.

### Bibliographie

- [1] BAUM (P.) and BOTT (R.). — On the zeroes of meromorphic vector-fields, In Haefliger A. and Narasimhan Raghavan, editors, Essays on topology and related topics, Mémoires dédiés à Georges de Rham. Springer-Verlag, (1970).
- [2] BAUM (P.) and BOTT (R.). — Singularities of holomorphic foliations, J. Differential Geometry, 7 (1972).
- [3] BOTT (R.). — A residue formula for holomorphic vector fields, J. Differential Geometry, 1(3-4) p. 311-330 (1967).
- [4] BOTT (R.). — Vector fields and characteristics numbers, Michigan math J, 14(2), p. 231-244 (1967).
- [5] BOTT (R.). — Lectures on characteristics classes and foliation, Springer. Lecture Notes, 279, (1972).
- [6] LEHMANN (D.). — Classes caractéristiques résiduelles. In Differential Geometry and its Applications, proc. Conf., pages 85-108, Brno, Czechoslovakia, Aug 27-sept 2 (1989), World Scientific, Singapore (1989).
- [7] LEHMANN (D.). — Résidus des sous variétés invariantes d'un feuilletage singulier. Ann. Inst. Fourier, 41(1) p. 211-258 (1991).
- [8] LEHMANN (D.). — Systèmes d'alvéoles et intégration sur le complexe de Čechderham. In Publications de l'IRMA, Université de Lille I, N°VI, volume 23 (1991).
- [9] LEHMANN (D.) and SUWA (T.). — Generalization of variations and baum-bott résidus for holomorphic foliations on singular varieties. International Journal of Mathematics, Vol 10(3) p. 367-384 (1999).
- [10] SUWA (T.). — Indices of Vector Fields and Residues of Singular Holomorphic Foliations. Hermann, Paris, (1998).