ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

Fernando Alcalde Cuesta

Moyennes harmoniques

Tome XIX, nº 3-4 (2010), p. 493-512.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2010_6_19_3-4_493_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XIX, n° 3-4, 2010
pp. 493–512

Moyennes harmoniques

Fernando Alcalde Cuesta[1]

Résumé. — Nous introduisons une notion de moyenne harmonique pour une marche aléatoire sur une relation d'équivalence mesurée graphée, qui généralise la notion classique de moyenne invariante. Pour les graphages à géométrie bornée, une telle moyenne existe toujours. Nous prouvons qu'une moyenne harmonique devient invariante lorsque la marche aléatoire sur presque toute orbite jouit de bonnes propriétés asymptotiques telles que la propriété de Liouville ou la récurrence.

Abstract. — We introduce a notion of stationary mean for random walks on graphed measured equivalence relations, which generalizes the classical notion of invariant mean. For graphings of bounded geometry, such mean always exists. We prove that any stationary mean becomes invariant if the random walk on a.e. orbit has good asymptotic properties such as triviality of Poisson boundary or recurrence.

1. Introduction

Les groupes moyennables furent introduits par J. von Neumann en 1929, mais l'étude des moyennes invariantes remonte aux travaux de H. Lebesgue qui posa la question de l'existence d'une mesure finiment additive invariante par translation sur $\mathbb{R}$. Ce ne fut que vingt ans plus tard que M. M. Day interpréta une moyenne invariante comme *une forme linéaire continue*

(*) Reçu le 12/12/2008, accepté le 28/05/2009

Ce travail a été financé par les ministères espagnols de la Science et de la Technologie BFM2002-04439-C01 et de l'Éducation et de la Science MTM2004-08214

(1) Departamento de Xeometría e Topoloxía, Universidade de Santiago de Compostela, E-15782 Santiago de Compostela (Espagne)
fernando.alcalde@usc.es

sur l'algèbre de Banach des fonctions essentiellement bornées qui est positive, unitaire et invariante par translation. Il démontra que la donnée d'une moyenne invariante est équivalente à celle d'une suite de moyennes asymptotiquement invariantes, ainsi que le théorème de point fixe qui porte son nom [13, 25, 31]. Nous nous contenterons de rappeler la première condition pour un groupe discret dénombrable Γ [15, 17] :

(CD_0) *Il y a une suite de mesures de probabilité λ_n sur Γ telle que la norme $\| \lambda_n - \gamma.\lambda_n \|_1 \to 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.*

Soit Γ un groupe dénombrable d'automorphismes d'un espace borélien standard X, muni d'une mesure de probabilité quasi-invariante μ. Supposons que l'ensemble de points fixes est de mesure nulle. L'action de Γ sur X induit une action de Γ sur $L^\infty(X,\mu)$ définie par l'opérateur de Koopman $(\gamma.f)(x) = f(\gamma^{-1}(x))$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $x \in X$. De même, l'action diagonale sur $\Gamma \times X$ induit une action sur $L^\infty(\Gamma \times X, \widetilde{\mu})$ où $\widetilde{\mu}$ est le produit de la mesure de comptage sur Γ par μ. D'après les travaux de R. J. Zimmer [30, 31], la moyennabilité de l'action de Γ sur X est équivalente à la donnée de :

(MG_1) *une application $L^\infty(X,\mu)$-linéaire $m : L^\infty(\Gamma \times X, \widetilde{\mu}) \to L^\infty(X,\mu)$ qui est positive, unitaire et équivariante pour les actions naturelles de Γ;*

(ML_1) *un système mesurable m de moyennes m_x sur les orbites $\Gamma.x$ tel que pour μ-presque tout $x \in X$ et tout $y \in \Gamma.x$, on a $m_x = m_y$.*

Pour étendre la condition de Day, il suffit de remplacer chaque mesure λ_n par un système mesurable de mesures de probabilité sur les orbites :

(CD_1) *Il existe une suite de systèmes mesurables λ_n de mesures de probabilité λ_n^x sur $\Gamma.x$ telle que $\| \lambda_n^x - \lambda_n^y \|_1 \to 0$ pour μ-presque tout $x \in X$ et tout $y \in \Gamma.x$.*

L'action de Γ sur X s'identifie avec la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par les orbites car $(\beta,\alpha) : (\gamma,x) \in \Gamma \times X \mapsto (x,\gamma^{-1}(x)) \in X \times X$ définit un isomorphisme de groupoïdes boréliens entre le groupoïde transformationnel $\Gamma \times X$ et le graphe de $\mathcal{R}$ hors d'un ensemble saturé négligeable. Les critères ci-dessus s'étendent donc facilement aux relations d'équivalence mesurables discrètes. Soit X un espace borélien standard, muni d'une mesure de probabilité μ. Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur X est *mesurable discrète* si le graphe de $\mathcal{R}$ est un borélien de $X \times X$ et toute classe d'équivalence $\mathcal{R}[x]$ est dénombrable. La mesure μ est *quasi-invariante* si le saturé d'un borélien de mesure nulle reste de mesure nulle. On dit alors que $(\mathcal{R}, X, \mu)$ est une *relation d'équivalence mesurée discrète* [9]. En identifiant $\mathcal{R}$ avec son graphe, on peut munir $\mathcal{R}$ de la mesure $\widetilde{\mu}$ obtenue par intégration de la mesure de comptage contre μ. Pour tout borélien A de $\mathcal{R}$, on a donc $\widetilde{\mu}(A) = \int |\, A^x \,|\, d\mu(x)$ où $|\, A^x \,|$ est le nombre d'éléments de $A^x = \{y \in X/(x,y) \in A\} \subset \mathcal{R}[x]$. Si on note δ la dérivée de Radon-Nikodym de $\widetilde{\mu}$ par rapport à son image $\widetilde{\mu}^{-1}$ par l'inversion $\iota(x,y) = (y,x)$, alors $\widetilde{\mu}(A) = \int \mathbf{1}_A(x,y) d\widetilde{\mu}(x,y) = \int \mathbf{1}_A(x,y)\delta(x,y) d\widetilde{\mu}(y,x) = \int |\, A_y\,|_y \, d\mu(y)$ où $A_y = \{\, x \in X \,/\, (x,y) \in A\,\} \subset \mathcal{R}[y]$ et $|\, x\,|_y = \delta(x,y)$. En fait, toute relation d'équivalence mesurée discrète est définie par l'action d'un pseudogroupe mesurable Γ, engendré par une famille dénombrable Φ d'isomorphismes boréliens $\varphi_i : A_i \to B_i$ entre parties boréliennes de X qui préservent les ensembles de mesure nulle. Grâce au système de générateurs Φ, on peut réaliser chaque classe $\mathcal{R}[x]$ comme l'ensemble de sommets d'un graphe $\mathcal{R}_\Phi[x]$, muni de la distance d_Φ définie par la longueur des Φ-mots. Il suffit de relier deux sommets $y \neq z$ par une arête (et l'on écrira $y \sim_\Phi z$ avec $d_\Phi(y,z) = 1$) s'il existe un générateur $\varphi \in \Phi$ tel que $z = \varphi^{\pm 1}(y)$. On dira que Φ est un *graphage* de $\mathcal{R}$. Il est *à géométrie bornée* si le nombre $v_\Phi(x)$ d'arêtes incidentes à x et le cocycle de Radon-Nikodym $\delta(x,y) = d\mu(x)/d\mu(y)$ avec $x \sim_\Phi y$ sont uniformément bornés pour μ-presque tout $x \in X$.

D'après un théorème de A. Connes, J. Feldman et W. Weiss [6], une relation d'équivalence mesurée discrète $(\mathcal{R}, X, \mu)$ est moyennable si et seulement si elle est *hyperfinie*, i.e. il existe une suite croissante de relations d'équivalence finies $\mathcal{R}_n$ telle que $\mathcal{R}[x] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}_n[x]$ pour μ-presque tout $x \in X$. Ce résultat est l'aboutissement d'une longue suite de travaux. Dans [7], H. A. Dye a démontré que toute action libre de $\mathbb{Z}$ préservant une mesure de probabilité sans atome définit une relation d'équivalence hyperfinie, puis il a étendu ce résultat aux groupes à croissance polynomiale [8]. Plus tard, C. Series a prouvé l'analogue pour les relations d'équivalence mesurables [28], alors que M. Samuélidès a enlevé la condition d'invariance rendant le résultat valable pour toute mesure quasi-invariante [27].

Dans ce travail, nous introduirons une notion de *moyenne harmonique* sur une relation d'équivalence mesurée graphée $(\mathcal{R}, X, \mu, \Phi)$, dégagée de [6], dans l'esprit des mesures harmoniques définies par L. Garnett [12]. Il s'agit d'une moyenne qui n'est plus préservée par les transformations partielles de $\mathcal{R}$, mais par la marche aléatoire sur les orbites de Φ. Cela veut dire qu'on choisit un point $x \in X$ au hasard pour μ, puis on se déplace au hasard dans $\mathcal{R}_\Phi[x]$ avec une certaine probabilité de passage d'un sommet à l'un de ses voisins. Comme les mesures harmoniques, les moyennes harmoniques *"ont l'avantage d'exister"* mais le prix à payer est leur dépendance de la marche aléatoire. Cela comporte la perte d'une propriété importante des moyennes invariantes, à savoir qu'une relation d'équivalence induite sur une partie borélienne hérite d'une relation d'équivalence moyennable une moyenne invariante, mais c'est le cœur du travail. En fait, bien que l'existence d'une moyenne invariante soit une propriété dynamique, la plupart des critères connus dépendent de propriétés métriques des orbites. Nous verrons qu'une moyenne harmonique devient invariante lorsque les orbites génériques jouissent de bonnes propriétés asymptotiques telles que la *récurrence* (i.e. toute fonction superharmonique positive est constante) ou la *propriété de Liouville* (i.e. toute fonction harmonique bornée est constante), cf. [6, 18]. Nous retrouverons ainsi les résultats de C. Series et M. Samuélidès, ainsi que leurs généralisations en termes de croissance sous-exponentielle [17] et de nombre de branchement [3] lorsque μ est harmonique.

2. Définitions et préliminaires

Soit $(\mathcal{R}, X, \mu, \Phi)$ une relation d'équivalence mesurée graphée. Avant d'introduire la notion de moyenne harmonique, nous aurons besoin de quelques préliminaires.

2.1. Marche aléatoire sur $\mathcal{R}$

Un *noyau de transition* est une application mesurable π à valeurs dans $]0,1]$, définie sur les arêtes des orbites $\mathcal{R}_\Phi[x]$ et dont la restriction aux arêtes issues de μ-presque tout point x est markovienne, i.e. $\sum_{x \sim_\Phi y} \pi(x,y) = 1$. Nous venons d'identifier abusivement l'ensemble des arêtes avec $\mathcal{K} = \{(x,y) \in \mathcal{R} / x \sim_\Phi y\}$. L'application induite sur $\mathcal{K}$ s'étend en une application sur $\mathcal{R}$, notée encore π, qu'on identifie au système mesurable de mesures de probabilité $\pi(x,-)$ sur $\mathcal{R}[x]$ où $\pi(x,y)$ est la probabilité de passage de x à y si $x \sim_\Phi y$ et $\pi(x,y) = 0$ sinon.

On appelle *marche aléatoire* sur $\mathcal{R}_\Phi[x]$ l'ensemble des trajectoires $Z = \{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, muni de la σ-algèbre engendrée par les cylindres $\{Z \in \mathcal{R}[x]^{\mathbb{N}} / Z_0 = x_0, \dots, Z_n = x_n\}$ où $x_0, \dots, x_n \in \mathcal{R}[x]$ et de la mesure de probabilité

$$P_x[Z_0 = x_0, \dots, Z_n = x_n] = \pi_0^x(x_0)\pi(x_0,x_1)\dots\pi(x_{n-1},x_n) \qquad (2.1)$$

où π_0^x est la mesure de Dirac en x. On appelle *distribution de la marche aléatoire au temps* n la mesure de probabilité $\pi_n(x,-) = (\alpha_n)_* P_x$ induite par la projection $\alpha_n : Z \in \mathcal{R}[x]^{\mathbb{N}} \mapsto Z_n \in \mathcal{R}[x]$. Les mesures π_0^x et $\pi(x,-)$ sont donc les distributions de la marche aléatoire aux temps

$n = 0$ et $n = 1$. La *marche aléatoire* sur $\mathcal{R}$ est la moyenne pour μ des marches aléatoires sur les orbites $\mathcal{R}_\Phi[x]$ [26], c'est-à-dire l'ensemble des trajectoires $\Omega = \bigcup_{x \in X} \mathcal{R}[x]^{\mathbb{N}}$, muni de la σ-algèbre engendrée par les cylindres $C = \{Z \in \Omega / Z_0 \in B_0, \ldots, Z_n \in B_n\}$ où $B_0, \ldots, B_n$ sont des boréliens de X et de la mesure de probabilité $P = \int P_x d\mu(x)$ donnée par :

$$P(C) = \int P_x(C \cap \mathcal{R}[x]^{\mathbb{N}})\, d\mu(x). \tag{2.2}$$

Dans le langage probabiliste, c'est une chaîne de Markov Z d'espace d'états X avec probabilité de transition π et distribution initiale μ.

Exemples 2.1. — i) Si les orbites $\mathcal{R}_\Phi[x]$ sont localement finies, on peut supposer que le passage d'un sommet à l'un de ses voisins est équiprobable. On obtient ainsi le noyau de transition $\pi(x,y) = \frac{1}{v_\Phi(x)}$ définissant la *marche aléatoire simple.* La marche aléatoire *réversible* est caractérisée par la donnée d'une fonction mesurable $c : X \to]0, +\infty[$ telle que $c(x)\pi(x,y) = c(y)\pi(y,x)$ pour μ-presque tout $x \in X$ et tout $y \sim_\Phi x$. On appelle *conductance* de l'arête reliant x à y la quantité $c(x,y) = c(x)\pi(x,y)$ et *conductance totale* de x la quantité $c(x) = \sum_{y \sim_\Phi x} c(x,y)$.

ii) Soit Γ un groupe discret dénombrable, muni d'une mesure de probabilité π. On appelle *marche aléatoire à droite* la chaîne de Markov d'espace d'états Γ ayant probabilité de transition $\pi_R(\gamma,\eta) = \pi(\gamma^{-1}\eta)$ avec $\gamma, \eta \in \Gamma$ [19]. Cela signifie qu'un état γ_n de la marche aléatoire au temps n s'obtient à partir d'un état initial γ_0 par composition à droite avec des éléments $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ choisis au hasard. L'ensemble des éléments de Γ qui sont atteignables à partir de l'élément neutre e coïncide avec le semi-groupe engendré par le support de π. De même, la *marche aléatoire à gauche* est définie en remplaçant π_R par $\pi_L(\gamma,\eta) = \pi(\eta\gamma^{-1})$ ou π par $\check{\pi}(\gamma) = \pi(\gamma^{-1})$. Le choix d'une distribution initiale π_0 permet de munir l'ensemble $\Gamma^{\mathbb{N}}$ d'une mesure de probabilité

$$P[Z_0 = \gamma_0, \ldots, Z_n = \gamma_n] = P(C_{\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n}) = \pi_0(\gamma_0)\pi(\gamma_0^{-1}\gamma_1)\ldots\pi(\gamma_{n-1}^{-1}\gamma_n)$$

obtenue comme l'image de la mesure $\pi_0 \otimes (\bigotimes_{i=1}^{\infty} \pi)$ sur $\Gamma^{\mathbb{N}} = \Gamma \times (\prod_{i=1}^{\infty} \Gamma)$ par l'application $(\gamma_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots) \in \Gamma^{\mathbb{N}} \mapsto (\gamma_0, \gamma_0\varphi_1, \gamma_0\varphi_1\varphi_2, \ldots) \in \Gamma^{\mathbb{N}}$. Si π_0 est la mesure de Dirac en e, alors la distribution de la marche aléatoire au temps $n \geqslant 0$ se réduit au produit de convolution $\pi_n = \pi * \overset{n}{\ldots} * \pi$. Enfin, π définit une structure de graphe orienté sur Γ de manière que deux sommets $\gamma, \eta \in \Gamma$ sont reliés par une arête si $\pi(\gamma^{-1}\eta) > 0$. Si π est *non dégénérée* (i.e. Γ est égal au semi-groupe engendré par son support), ce graphe est connexe.

2.2. Mesures harmoniques

On appelle *opérateur de diffusion* l'opérateur markovien

$$D_\pi : L^\infty(X,\mu) \to L^\infty(X,\mu)$$

défini par :

$$D_\pi f(x) = \sum_{y \sim_\Phi x} \pi(x,y) f(y). \tag{2.3}$$

On appelle *laplacien* l'opérateur $\Delta_\pi : L^\infty(X,\mu) \to L^\infty(X,\mu)$ défini par :

$$\Delta_\pi f(x) = D_\pi f(x) - f(x) = \sum_{y \sim_\Phi x} \pi(x,y) f(y) - f(x). \tag{2.4}$$

L'opérateur D_π agit par dualité sur les mesures sur X. En particulier, les itérés de l'opérateur dual D_π^* appliqués à μ redonnent les distributions $(\alpha_n)_* P$. En effet, les distributions $\pi_n(x,-) = (\alpha_n)_* P_x$ coïncident avec les mesures $(D_\pi^*)^n \pi_0^x$ obtenues par diffusion de π_0^x et donc

$$\begin{aligned}
(\alpha_n)_* P(B) &= \int \Big(\int \mathbf{1}_B(Z_n)\, dP_x(Z) \Big)\, d\mu(x) \\
&= \int \Big(\sum_{x_i \sim_\Phi x_{i+1}} \pi(x,x_1) \dots \pi(x_{n-1},x_n) \mathbf{1}_B(x_n) \Big)\, d\mu(x) \\
&= \int D_\pi^n \mathbf{1}_B(x)\, d\mu(x) \\
&= (D_\pi^*)^n \mu(B).
\end{aligned}$$

pour tout borélien B de X.

Définition 2.2. — *Une mesure quasi-invariante m sur X est dite π-*harmonique *ou π-*stationnaire *[12, 19, 26] si elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :*

i) m est préservée par l'opérateur D_π^*;

ii) pour toute fonction mesurable bornée $f : X \to \mathbb{R}$, on a $\int \Delta_\pi f\, dm = 0$.

Soit $h : X \to \mathbb{R}$ la fonction intégrable (essentiellement bornée lorsque Φ est à géométrie bornée) définie par $h(x) = \sum_{y \sim_\Phi x} \pi(y,x)\delta(y,x)$ et qui vérifie :

$$\int h(x)\, d\mu(x) = \int \sum_{y \sim_\Phi x} \pi(y,x)\delta(y,x)\, d\mu(x) = \int \mathbf{1}_X(y)\, d\mu(y) = 1. \tag{2.5}$$

De même, pour toute fonction mesurable bornée $f : X \to \mathbb{R}$, on a :

$$\int D_\pi f(x)\, d\mu(x) = \int h(y) f(y)\, d\mu(y) \tag{2.6}$$

et donc h est la dérivée de Radon-Nikodym de $D_\pi^* \mu$ par rapport à μ. Si on pose $|\ |_x = \delta(-, x)$, alors $D_\pi^* \delta(-, x)(y) = \sum_{z \in \mathcal{R}[y]} D_\pi \mathbf{1}_{\{y\}}(z) \delta(z, x) = \sum_{z \sim_\Phi y} \pi(z, y) \delta(z, x) = h(y) \delta(y, x)$ pour tout $y \in \mathcal{R}[x]$. Il en résulte que :

Lemme 2.3. — *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

i) la mesure μ est π-harmonique ;

ii) la fonction $h = \mathbf{1}_X$ presque partout ;

iii) pour μ-presque tout $x \in X$, la mesure $|\ |_x$ est π-harmonique.

La mesure de probabilité P définie par la formule (2.2) se projette par l'application $(\alpha_0, \alpha_1) : \Omega \to \mathcal{R} \subset X \times X$ en une mesure de probabilité $\widehat{\mu}$ sur $\mathcal{R}$. Ses images par les projections

$$\beta : (x, y) \in \mathcal{R} \mapsto x \in X \quad \text{et} \quad \alpha : (x, y) \in \mathcal{R} \mapsto y \in X$$

coïncident avec les distributions μ et $D_\pi^* \mu$ aux temps $n = 0$ et $n = 1$ respectivement. Si $\sigma : \Omega \to \Omega$ est le décalage $\sigma(\{Z_n\}) = \{Z_{n+1}\}$, alors la distribution de P au temps $n = 1$ coïncide avec la distribution de $\sigma_* P$ au temps $n = 0$. Ces deux remarques impliquent le résultat suivant [12, 26] :

Lemme 2.4. — *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

i) la mesure μ est π-harmonique ;

ii) les mesures de probabilité $\alpha_* \widehat{\mu}$ et $\beta_* \widehat{\mu}$ sur X sont égales ;

iii) la mesure de probabilité P sur Ω est invariante par le décalage σ.

2.3. L^1-extension, dualité et diffusion sur $\mathcal{R}$

Si Φ est à géométrie bornée, l'opérateur D_π s'étend à $L^1(X, \mu)$ et l'extension est donnée par :

$$D_\pi g(x) = \sum_{y \sim_\Phi x} \pi(x, y) g(y) \tag{2.7}$$

pour tout $g \in L^1(X, \mu)$. C'est un opérateur linéaire continu avec $\| D_\pi \| \leqslant \| h \|_\infty$, qui préserve les fonctions constantes et qui est positif sur les fonctions positives. L'opérateur dual $D_\pi^* : L^\infty(X,\mu) \to L^\infty(X,\mu)$ est donné par :

$$D_\pi^* f(x) = \sum_{y \sim_\Phi x} \pi(y,x) f(y) \delta(y,x) \tag{2.8}$$

pour tout $f \in L^\infty(X,\mu)$. Il s'agit encore d'un opérateur linéaire continu, qui préserve les fonctions positives, mais tel que $D_\pi^*(\mathbf{1}_X) = h$. Il est markovien si et seulement si μ est π-harmonique. En fait, D_π^* est l'opérateur de diffusion $D_{\check\pi}$ où $\check\pi(x,y) = \pi(y,x)\delta(y,x)$ si $y \sim_\Phi x$ et $\check\pi(x,y) = 0$ sinon.

Tous ces opérateurs s'étendent sans peine au graphe d'une relation d'équivalence mesurée graphée $(\mathcal{R}, X, \mu, \Phi)$. D'abord, on appelle *opérateur de diffusion à gauche sur* $\mathcal{R}$ l'opérateur markovien $D_\pi : L^\infty(\mathcal{R}, \widetilde{\mu}) \to L^\infty(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})$ défini par :

$$D_\pi F(x,z) = \sum_{y \sim_\Phi x} \pi(x,y) F(y,z) \tag{2.9}$$

pour tout $F \in L^\infty(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})$ et $\widetilde{\mu}$-presque tout $(x,z) \in \mathcal{R}$. Si Φ est à géométrie bornée, D_π est extensible à $L^1(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})$, i.e. sa restriction à $L^1(\mathcal{R}, \widetilde{\mu}) \cap L^\infty(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})$ l'est. En effet, par analogie avec la formule (2.7), l'extension est donnée par :

$$D_\pi G(x,z) = \sum_{y \sim_\Phi x} \pi(x,y) G(y,z) \tag{2.10}$$

pour tout $G \in L^1(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})$ et $\widetilde{\mu}$-presque tout $(x,z) \in \mathcal{R}$. C'est un opérateur linéaire continu avec $\| D_\pi \| \leqslant \| h \|_\infty$, qui préserve les fonctions constantes et qui est positif sur les fonctions positives. Par analogie avec la formule (2.8), l'opérateur dual est donné par :

$$D_\pi^* F(x,z) = \sum_{y \sim_\Phi x} \pi(y,x) F(y,z) \delta(y,x) \tag{2.11}$$

pour tout $F \in L^\infty(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})$ et $\widetilde{\mu}$-presque tout $(x,z) \in \mathcal{R}$. Dans ce cas, on a $D_\pi^*(\mathbf{1}_\mathcal{R}) = \beta^* h$. Comme d'habitude, on peut définir un *opérateur laplacien à gauche* Δ_π sur $L^\infty(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})$, une extension Δ_π à $L^1(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})$ et un opérateur dual Δ_π^* sur $L^\infty(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})$.

Soient $\beta^* : L^\infty(X,\mu) \to L^\infty(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})$ et $\alpha^* : L^\infty(X,\mu) \to L^\infty(\mathcal{R}, \widetilde{\mu}^{-1})$ les plongements isométriques induits par les projections $\beta(x,y) = x$ et $\alpha(x,y) = y$. Soit $\iota^* : L^\infty(\mathcal{R}, \widetilde{\mu}) \to L^\infty(\mathcal{R}, \widetilde{\mu}^{-1})$ l'isométrie induite par l'inversion $\iota(x,y) = (y,x)$. Notons encore α^* et ι^* les applications obtenues en remplaçant $\widetilde{\mu}^{-1}$ par $\widetilde{\mu}$.

Définition 2.5. — *Une fonction* $F \in L^\infty(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})$ *est dite* invariante à droite *(resp.* à gauche*) si* F *appartient à l'image de* β^* *(resp.* α^**), i.e.* $F(x,z) = F(x,w)$ *(resp.* $F(z,x) = F(w,x)$*) pour* μ*-presque tout point* $x \in X$ *et tout couple* $z, w \in \mathcal{R}[x]$*. Elle est dite* harmonique à gauche *si* $\Delta_\pi F = 0$*. Toute fonction invariante à gauche est harmonique à gauche.*

2.4. Systèmes de mesures de probabilité et convolution

Tout système mesurable $\lambda = \{\lambda^x\}_{x \in X}$ de mesures de probabilité λ^x sur $\mathcal{R}[x]$ s'identifie avec la fonction mesurable $\lambda : (x,z) \in \mathcal{R} \mapsto \lambda^x(z) \in \mathbb{R}$. Ces fonctions forment un sous-ensemble convexe $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ de $L^1(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})$, qui est préservé par D_π. Si $\pi_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$ s'identifie au système de mesures de Dirac π_0^x, alors $\pi = D_\pi \pi_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$ est la fonction définie par le noyau de transition sur $\mathcal{R}$. Plus généralement, la fonction $\pi_n = D_\pi^n \pi_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$ correspond aux distributions $\pi_n(x, -) = (D_\pi^*)^n \pi_0^x$.

Pour conclure, nous verrons que les opérateurs de diffusion sur $\mathcal{R}$ sont définis par convolution. Considérons les actions par convolution de $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ sur $L^\infty(X,\mu)$ et $L^1(X,\mu)$ induites par l'action à gauche de $\mathcal{R}$ sur X :

$$L(\lambda)(f)(x) = (\lambda * f)(x) = \sum_{y \in \mathcal{R}[x]} \lambda(x,y) f(y), \tag{2.12}$$

$$L(\lambda)(g)(x) = (\check{\lambda} * g)(x) = \sum_{y \in \mathcal{R}[x]} \lambda(y,x) g(y) \delta(y,x), \tag{2.13}$$

où $\lambda \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$, $f \in L^\infty(X,\mu)$, $g \in L^1(X,\mu)$ et $x \in X$ [4]. Alors $D_\pi = L(\pi)$ et $D_\pi^* = L(\check{\pi})$ lorsque μ est π-harmonique. De même, pour tout $\lambda \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$, on définit des opérateurs de convolution :

$$L(\lambda)(F)(x,z) = (\lambda * F)(x,z) = \sum_{y \in \mathcal{R}[x]} \lambda(x,y) F(y,z) \tag{2.14}$$

$$L(\lambda)(G)(x,z) = (\check{\lambda} * G)(x,z) = \sum_{y \in \mathcal{R}[x]} \lambda(y,x) G(y,z) \delta(y,x) \tag{2.15}$$

où $F \in L^\infty(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})$, $G \in L^1(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})$ et $(x,z) \in \mathcal{R}$. Les opérateurs de diffusion à gauche sur $L^\infty(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})$ et $L^1(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})$ coïncident avec $L(\pi)$ et $L(\check{\pi})$ respectivement.

3. Moyennes harmoniques

Nous introduirons ici la notion de *moyenne harmonique* pour une relation d'équivalence mesurée graphée $(\mathcal{R}, X, \mu, \Phi)$, munie d'un noyau de transition π. Le graphage Φ sera toujours supposé à géométrie bornée dans la suite.

Définition 3.1. — *On appelle* moyenne globale *un opérateur $L^\infty(X,\mu)$-linéaire continu $m : L^\infty(\mathcal{R},\widetilde{\mu}) \to L^\infty(X,\mu)$, qui est positif et unitaire. Une telle moyenne est* π-harmonique *ou* stationnaire pour la marche aléatoire sur $\mathcal{R}$ *si m préserve les fonctions harmoniques, i.e. pour toute fonction $F \in L^\infty(\mathcal{R},\widetilde{\mu})$ harmonique à gauche, la fonction $m(F) \in L^\infty(X,\mu)$ est harmonique.*

Définition 3.2. — *Un* système de moyennes locales *est un système $m = \{m_x\}_{x\in X}$ de moyennes m_x sur les classes $\mathcal{R}[x]$. C'est-à-dire $m_x \in l^\infty(\mathcal{R}[x])^*$ est une forme linéaire positive et unitaire. Un tel système est* mesurable *si pour toute fonction mesurable $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$, la fonction $m(F) : X \to \mathbb{R}$ définie par $m(F)(x) = m_x(F(x,-))$ l'est aussi. Il est* π-harmonique *si $m_x = \sum_{y\sim_\Phi x} \pi(x,y)m_y$ pour μ-presque tout $x \in X$.*

Définition 3.3. — *Considérons une suite de systèmes mesurables $\lambda_n = \{\lambda_n^x\}_{x\in X}$ de mesures de probabilité λ_n^x sur les classes d'équivalence $\mathcal{R}[x]$. Ils sont* asymptotiquement π-harmoniques *si*

$$\Big\| \sum_{y\sim_\Phi x} \pi(x,y)\lambda_n^y - \lambda_n^x \Big\|_1 \to 0$$

pour μ-presque tout $x \in X$. Si on identifie chaque système $\lambda_n = \{\lambda_n^x\}_{x\in X}$ avec une fonction $\lambda_n \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$, alors

$$\begin{aligned} \|\Delta_\pi\lambda_n\|_1 &= \|D_\pi\lambda_n - \lambda_n\|_1 \\ &= \int \Big| \sum_{y\sim_\Phi x} \pi(x,y)\lambda_n(y,z) - \lambda_n(x,z) \Big| \, d\widetilde{\mu}(x,z) \qquad (3.1) \\ &= \int \Big\| \sum_{y\sim_\Phi x} \pi(x,y)\lambda_n^y - \lambda_n^x \Big\|_1 d\mu(x). \end{aligned}$$

Les fonctions $\lambda_n \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$ sont donc asymptotiquement π-harmoniques *si et seulement si $\|\Delta_\pi\lambda_n\|_1 = \|D_\pi\lambda_n - \lambda_n\|_1 \to 0$.*

Théorème 3.4. — *Soit $(\mathcal{R},X,\mu)$ une relation d'équivalence mesurée discrète, munie d'un graphage Φ à géométrie bornée et d'un noyau de transition π. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(MG) Il existe une moyenne π-harmonique $m : L^\infty(\mathcal{R},\widetilde{\mu}) \to L^\infty(X,\mu)$.

(ML) Il existe un système π-harmonique de moyennes locales $m = \{m_x\}_{x\in X}$.

(CD) Il existe une suite de systèmes mesurables asymptotiquement π-harmoniques $\lambda_n = \{\lambda_n^x\}_{x\in X}$ de mesures de probabilité λ_n^x sur les classes $\mathcal{R}[x]$;

Démonstration. — Pour avoir l'équivalence $(MG) \Leftrightarrow (ML)$, il suffit de remarquer qu'une moyenne globale m et un système mesurable de moyennes locales $m = \{m_x\}_{x\in X}$ sont reliées par l'égalité $m(F)(x) = m_x(F(x,-))$ avec $F \in L^\infty(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})$ et $x \in X$.

Pour montrer l'implication $(CD) \Rightarrow (ML)$, on considère une suite de fonctions $\lambda_n \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$ dont chacune définit une moyenne globale sur $\mathcal{R}$. En effet, à chaque $F \in L^\infty(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})$, on lui associe la fonction $\lambda_n(F) \in L^\infty(X,\mu)$ définie par $\lambda_n(F)(x) = \lambda_n^x(F(x,-)) = \sum_{z\in\mathcal{R}[x]} F(x,z)\lambda_n^x(z)$ pour μ-presque tout $x \in X$. On définit la moyenne locale $m(F)(x) = m_x(F(x,-))$ comme la *limite médiale* [22] des moyennes $\lambda_n(F)(x) = \lambda_n^x(F(x,-))$. Ce système de moyennes locales est mesurable car $m(F)$ est mesurable d'après le théorème 2 de [22]. Si les fonctions λ_n sont asymptotiquement π-harmoniques, les fonctions $(\Delta_\pi\lambda_n)(F)(x) = \sum_{y\sim_\Phi x} \pi(x,y)\lambda_n^y(F(x,-)) - \lambda_n^x(F(x,-))$ convergent vers 0 dans $L^1(X,\mu)$ et leur limite médiale est nulle μ-presque partout [22].

Pour démontrer la réciproque $(ML) \Rightarrow (CD)$, considérons le plongement isométrique de $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ dans $L^\infty(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})_1^{*+}$ induit par l'inclusion canonique de $L^1(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})$ dans son bidual $L^\infty(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})^*$. À chaque fonction $\lambda \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$, on lui associe la forme linéaire positive et unitaire $l(\lambda) \in L^\infty(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})_1^{*+}$ définie par :

$$l(\lambda)(F) = \int F(x,z)\lambda(x,z)\, d\widetilde{\mu}(x,z) = \int \lambda^x(F(x,-))d\mu(x) \qquad (3.2)$$

pour tout $F \in L^\infty(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})$. La dualité entre les opérateurs D_π et D_π^* agissant sur $L^1(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})$ et $L^\infty(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})$ implique que $l(D_\pi\lambda)(F) = l(\lambda)(D_\pi^* F)$ et donc

$$l(\Delta_\pi\lambda)(F) = l(\lambda)(\Delta_\pi^* F). \qquad (3.3)$$

De même, tout système mesurable de moyennes locales $m = \{m_x\}_{x\in X}$ définit une forme linéaire $l \in L^\infty(\mathcal{R}, \widetilde{\mu})_1^{*+}$ donnée par

$$l(F) = \int m_x(F(x,-))d\mu(x).$$

Par application du théorème de Hahn-Banach, l appartient à la fermeture faible de l'image de $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ [4]. Si m est π-harmonique, alors :

$$l\circ\Delta_\pi^* = l\circ D_\pi^* - l = 0 \qquad (3.4)$$

car

$$
\begin{aligned}
l(F) &= \int m_x(F(x,-))\,d\mu(x) \\
&= \int \sum_{y\sim_\Phi x} \pi(x,y)m_y((F(x,-))\,d\mu(x) \\
&= \int \sum_{y\sim_\Phi x} \pi(x,y)m_y((F(x,-))\,\delta(x,y)\,d\mu(y) \\
&= \int m_y(\sum_{x\sim_\Phi y} \pi(x,y)F(x,-)\delta(x,y))\,d\mu(y) \\
&= \int m_y((D_\pi^* F)(y,-))\,d\mu(y) \;=\; l(D_\pi^* F).
\end{aligned}
$$

Pour conclure, considérons le sous-ensemble convexe $\mathcal{Q} = \{\, \Delta_\pi\lambda \,/\, \lambda \in \mathcal{P}(\mathcal{R})\,\}$ de $L^1(\mathcal{R},\widetilde{\mu})$. Les conditions de compatibilité (3.3) et d'harmonicité (3.4) impliquent que 0 appartient à la fermeture faible de l'image de $\mathcal{Q}$ dans $L^\infty(\mathcal{R},\widetilde{\mu})^*$. Il s'ensuit que 0 appartient à la fermeture faible $\mathcal{Q}$ dans $L^1(\mathcal{R},\widetilde{\mu})$. Par convexité de $\mathcal{Q}$, d'après le théorème de Mazur, 0 appartient à la fermeture normique de Q. Il existe donc une suite de fonctions $\lambda_n \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$ telle que $\|\,\Delta_\pi\lambda_n\,\|_1 \to 0$. D'où le théorème. $\square$

Chacune des conditions ci-dessus peut être vue comme le pendant harmonique des conditions d'invariance (GM), (LM) et (AI) de [15]. Quel que soit le noyau de transition considéré, ces conditions entraînent les conditions (MG), (ML) et (CD). Notre but est de prouver la réciproque lorsque le noyau π jouit de bonnes propriétés.

Pour illustrer les définitions ci-desssus, nous allons revenir sur l'exemple 2.1. Considérons un groupe dénombrable Γ, muni d'un système fini de générateurs Φ. Pour simplifier, supposons que Φ est symétrique et qu'il ne contient pas l'élément neutre e. Alors Γ est l'ensemble de sommets d'un graphe non orienté, sans boucle, ni arête multiple, appelé le *graphe de Cayley de* Γ, où deux sommets $\gamma,\eta \in \Gamma$ sont reliés par une arête si $\gamma^{-1}\eta \in \Phi$. La marche aléatoire simple sur ce graphe coïncide avec la marche aléatoire à droite sur Γ, muni de la mesure de probabilité $\pi = \frac{1}{|\Phi|}\mathbf{1}_\Phi$, non dégénérée de période $d=2$. Pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$\pi_n = \pi * \overset{n}{\ldots} * \pi = \frac{1}{|\,\Phi\,|^n}\mathbf{1}_{\Phi^n}$$

où Φ^n est l'ensemble des Φ-mots de longueur $\leqslant n$ ayant la même parité que n. Donc π_n et π_{n+1} sont mutuellement singulières avec $\|\,\pi_{n+1} - \pi_n\,\|_1 = 2$.

Néanmoins, si on ajoute e à Φ (ce qui revient à ajouter une boucle à chaque sommet), π devient apériodique, π_n et π_{n+1} ne sont plus mutuellement singulières et

$$\| \Delta_\pi^* \pi_n \|_1 = \| D_\pi^* \pi_n - \pi_n \|_1 = \| \pi_{n+1} - \pi_n \|_1 \to 0. \tag{3.5}$$

En général, les mesures $\widehat{\pi}_n = \frac{\pi_n + \pi_{n+1}}{2}$ et $\widehat{\pi}_{n+1} = \frac{\pi_{n+1} + \pi_{n+2}}{2}$ vérifient :

$$\| \Delta_\pi^* \widehat{\pi}_n \|_1 = \| \widehat{\pi}_{n+1} - \widehat{\pi}_n \|_1 \to 0. \tag{3.6}$$

Les mesures π_n ou $\widehat{\pi}_n$ définissent des moyennes dans $l^\infty(\Gamma)_1^{*+}$. Par compacité faible de $l^\infty(\Gamma)_1^{*+}$, ces moyennes ont un point d'accumulation m. Les conditions (3.5) et (3.6) montrent que $m(\Delta_\pi f) = 0$ pour toute fonction $f \in l^\infty(\Gamma)$. Ceci nous amène à introduire la définition suivante :

DÉFINITION 3.5. — *Soit* (Γ, π) *un groupe dénombrable mesuré. Nous dirons qu'une moyenne* m *est* π-harmonique à droite *ou* stationnaire pour la marche aléatoire à droite sur (Γ, π) *si* $m(\Delta_\pi f) = 0$ *pour toute fonction* $f \in l^\infty(\Gamma)$.

Nous venons de prouver qu'un graphe de Cayley admet toujours une moyenne stationnaire pour la marche aléatoire simple. De même, nous avons la condition suffisante suivante (dont la réciproque s'obtient en procédant comme dans la preuve du théorème 3.4) :

PROPOSITION 3.6. — *Pour qu'un groupe dénombrable* Γ *possède une moyenne harmonique à droite pour une mesure de probabilité* π*, il faut et il suffit qu'il existe une suite de mesures de probabilité* λ_n *sur* Γ *telle que* $\| \Delta_\pi^* \lambda_n \|_1 \to 0$.

Pour les graphes de Cayley, l'existence d'une moyenne harmonique découle d'un calcul direct qui illustre la loi 0-2 pour les opérateurs markoviens [11, 24]. Nous allons rappeler ici une version discrète d'un résultat de S. R. Foguel sur les itérés d'une convolution [10]. Dans notre contexte, si π est une mesure de probabilité non dégénérée de période $d \geqslant 1$, alors les mesures π_n et π_{n+k} sont mutuellement singulières avec $\| \pi_{n+k} - \pi_n \|_1 = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $0 \leqslant k < d$, mais $\lim_{n\to+\infty} \| \pi_{n+d} - \pi_n \| = 0$. Comme auparavant, les mesures $\widehat{\pi}_n = \frac{\pi_n + \ldots + \pi_{n+d}}{d}$ vérifient :

$$\lim_{n\to+\infty} \| \Delta_\pi^* \widehat{\pi}_n \|_1 = \lim_{n\to+\infty} \| \widehat{\pi}_{n+1} - \widehat{\pi}_n \|_1 = 0$$

car $\widehat{\pi}_n$ et $\widehat{\pi}_{n+1}$ ne sont pas mutuellement singulières. Nous aurons donc :

Proposition 3.7. — *Soit* Γ *un groupe dénombrable, muni d'une mesure de probabilité non dégénérée* π. *Alors la marche aléatoire à droite sur* (Γ, π) *possède une moyenne stationnaire.*

4. Existence de moyennes harmoniques

Le but de cette section est de prouver qu'une relation d'équivalence mesurée graphée $(\mathcal{R}, X, \mu, \Phi)$, munie d'un noyau de transition π, possède toujours une moyenne π-harmonique. Dans un premier temps, nous appliquerons la même démarche utilisée pour les groupes dénombrables. Pour cela, rappelons que le produit de convolution à droite par π définit une contraction positive $D_\pi^* : l^1(\Gamma) \to l^1(\Gamma)$ dont l'opérateur sous-markovien dual est l'opérateur de diffusion $D_\pi : l^\infty(\Gamma) \to l^\infty(\Gamma)$. Le résultat de Foguel est donc une extension de la loi 0-2 pour les opérateurs markoviens ergodiques et conservatifs agissant sur L^1 prouvée dans [24]. En général, l'opérateur de diffusion $D_\pi : L^\infty(X, \mu) \to L^\infty(X, \mu)$ agit par dualité sur l'espace de mesures sur X. Puisque les mesures finies absolument continues par rapport à μ s'identifient aux éléments de $L^1(X, \mu)$, on obtient une contraction positive $T = D_\pi^* : L^1(X, \mu) \to L^1(X, \mu)$ qui envoie chaque dérivée de Radon-Nikodym $g = d\nu/d\mu$ sur $T(g) = dD_\pi^*\nu/d\mu$. L'opérateur sous-markovien dual $T^* : L^\infty(X, \mu) \to L^\infty(X, \mu)$ coïncide avec D_π.

Définition 4.1 ([24]). — *La contraction* $T = D_\pi^* : L^1(X, \mu) \to L^1(X, \mu)$ *(resp.* $T^* = D_\pi : L^\infty(X, \mu) \to L^\infty(X, \mu)$*) est dite* ergodique conservative *si la somme* $\sum_{i=0}^\infty T^i g$ *(resp.* $\sum_{i=0}^\infty D_\pi^i f$*) est soit infinie, soit nulle pour toute fonction* $g \in L^1(X, \mu)$ *(resp.* $f \in L^\infty(X, \mu)$*) positive ou nulle.*

D'une part, $T = D_\pi^*$ et $T^* = D_\pi$ sont ergodiques si μ est ergodique. Pour montrer qu'elles sont conservatives, il faut considérer les opérateurs de Perron-Fröbenius σ_* et de Koopman σ^* induits par le décalage σ de la marche aléatoire sur $\mathcal{R}$. Avec les notations précédentes, pour toute fonction $g \in L^1(X, \mu)$ positive ou nulle, la mesure $D_\pi^*\nu$ est la distribution initiale de l'image par σ_* de la mesure de probabilité sur Ω ayant comme distribution initiale ν. Si l'opérateur σ_* est conservatif, la somme $\sum_{i=0}^\infty T^i g$ ne prend que les valeurs $+\infty$ ou 0 (car il en est ainsi pour $\sum_{i=0}^\infty \sigma_*^i(g \circ \alpha_0)$). Pour toute fonction $f \in L^\infty(X, \mu)$ positive ou nulle, la fonction $D_\pi f$ est la moyenne des $\sigma^*(f \circ \alpha_0) \in L^\infty(\Omega, P)$ pour le système mesurable de mesures de probabilité P_x sur les fibres $\alpha_0^{-1}(x)$ de la projection $\alpha_0 : \mathcal{R} \to X$. Si l'opérateur σ^* est conservatif, la somme $\sum_{i=0}^\infty D_\pi^i f$ ne prend encore que les valeurs $+\infty$ ou 0 (car il en est ainsi pour $\sum_{i=0}^\infty (f \circ \alpha_0) \circ \sigma^i$). On sait d'ailleurs que les opérateurs σ_* et σ^* sont conservatifs si et seulement si le décalage σ est *conservatif*, i.e. il n'admet pas d'ensemble errant de mesure positive [20]. Nous dirons alors que la mesure μ est *π-conservative.* En particulier, toute mesure π-harmonique est π-conservative.

Théorème 4.2. — *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence mesurable discrète sur un espace borélien standard X, munie d'un graphage Φ à géométrie bornée, d'un noyau de transition π et d'une mesure de probabilité π-conservative μ. Alors il existe une moyenne π-harmonique.*

Démonstration. — D'abord, quitte à remplacer μ par chacune de ses composantes ergodiques, nous pourrons supposer que μ est ergodique. Soient $\pi_n = D_\pi^n \pi_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$ les fonctions obtenues par diffusion à gauche de la fonction de Dirac π_0. Pour tout $x \in X$, on a :

$$\Delta_\pi \pi_n(x,-) = D_\pi^{n+1}\pi_0(x,-) - D_\pi^n \pi_0 = \pi_{n+1}(x,-) - \pi_n(x,-).$$

D'après la loi 0-2, la suite $\parallel \Delta_\pi \pi_n \parallel_1 = \int \parallel \Delta_\pi \pi_n(x,-) \parallel_1 d\mu(x)$ converge soit vers 0, soit vers 2. Si la limite est nulle, les fonctions $\pi_n \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$ sont asymptotiquement π-harmoniques. C'est le cas si l'opérateur de diffusion D_π sur $L^\infty(X,\mu)$ est apériodique. En général, puisque la probabilité d'emprunter une arête est positive, cet opérateur est soit apériodique, soit de période 2. Néanmoins, pour éviter le problème de l'existence d'une période, D. Ornstein et L. Sucheston démontrent que la loi 0-2 reste valable pour les contractions conservatives de L^1 (ou de L^∞) définies par un noyau stochastique dont tous les itérés sont ergodiques [24]. Dans notre cas, les puissances impaires de D_π sont ergodiques. En fait, toutes les puissances de $\widehat{D}_\pi = \frac{Id + D_\pi}{2}$ sont ergodiques. Enfin, nous considérons les fonctions $\widehat{\pi}_n = \widehat{D}_\pi^n \pi_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$ telles que :

$$\widehat{\pi}_{n+1} - \widehat{\pi}_n = \widehat{D}_\pi \widehat{\pi}_n - \widehat{\pi}_n = \frac{\Delta_\pi \widehat{\pi}_n}{2}$$

D'après le théorème 3.4 de [24], la suite $\parallel \widehat{\pi}_{n+1} - \widehat{\pi}_n \parallel_1$ converge vers 0, ou bien la norme $\parallel \widehat{\pi}_{n+1} - \widehat{\pi}_n \parallel_1 = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que les fonctions $\widehat{\pi}_n$ sont asymptotiquement π-harmoniques. $\square$

En réalité, aucune contrainte n'est vraiment nécessaire pour prouver l'existence d'une moyenne harmonique :

Théorème 4.3. — *Toute marche aléatoire sur une relation d'équivalence mesurée graphée admet une moyenne stationnaire ou harmonique.*

Démonstration. — Considérons les sommes de Cèsaro

$$\lambda_n = \frac{\pi_0 + \ldots + \pi_{n-1}}{n} \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$$

des produits de convolution $\pi_n \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$. Ces fonctions sont asymptotiquement π-harmoniques car la suite $\| \Delta_\pi \lambda_n \|_1 = \frac{1}{n} \| \pi_n - \pi_0 \|_1 \leqslant \frac{2}{n}$ tend vers 0. $\square$

5. Critères de moyennabilité

Nous démontrerons ici que toute moyenne harmonique devient invariante lorsque la marche aléatoire se comporte bien. Grâce à cette propriété, nous retrouverons quelques critères de moyennabilité.

5.1. Propriété de Liouville

Nous dirons qu'une marche aléatoire sur une relation d'équivalence mesurée graphée $(\mathcal{R}, X, \mu, \Phi)$ a la *propriété de Liouville* si μ-presque toute orbite $\mathcal{R}_\Phi[x]$ n'a pas de fonction harmonique bornée non constante. Dans [6], on démontre que cette propriété implique la moyennabilité de $\mathcal{R}$ pour μ. En fait, cela est valable pour tout groupoïde mesuré d'après [18]. Nous retrouvons l'implication grâce au résultat élémentaire suivant :

Lemme 5.1. — *Soit $(\mathcal{R}, X, \mu, \Phi)$ une relation d'équivalence mesurée graphée, munie d'un noyau de transition π. Si la marche aléatoire sur $\mathcal{R}$ a la propriété de Liouville, alors toute moyenne π-harmonique sur $\mathcal{R}$ est invariante.*

Démonstration. — Soit $m = \{m_x\}_{x \in X}$ un système de moyennes locales π-harmonique. Pour μ-presque tout $x \in X$, à chaque fonction $f \in l^\infty(\mathcal{R}[x])$, on lui associe une fonction $h_f \in l^\infty(\mathcal{R}[x])$ définie par $h_f(y) = m_y(f)$ pour tout $y \in \mathcal{R}[x]$. Puisque les moyennes m_y sont π-harmoniques, la fonction h_f l'est aussi. En effet, $D_\pi h_f(y) = \sum_{z \sim_\Phi y} \pi(y,z) h_f(z) = \sum_{z \sim_\Phi y} \pi(y,z) m_z(f)$ $= m_y(f) = h_f(y)$ pour tout $y \in \mathcal{R}[x]$. Par hypothèse, h_f est constante et donc $m_y = m_x$ pour tout $y \in \mathcal{R}[x]$. $\square$

Théorème 5.2 ([6]). — *Soit $(\mathcal{R}, X, \mu, \Phi)$ une relation d'équivalence mesurée graphée, munie d'un noyau de transition π. Si la marche aléatoire sur $\mathcal{R}$ a la propriété de Liouville pour μ, alors $\mathcal{R}$ est moyennable pour μ.*

Définition 5.3. — *Une relation d'équivalence mesurée graphée $(\mathcal{R}, X, \mu, \Phi)$ est dite* à δ-croissance polynomiale *(resp.* sous-exponentielle*) si pour μ-presque tout point $x \in X$, la fonction de volume*

$$v_{x,\delta}(n) = | B_{d_\Phi}(x,n) |_x = \sum_{d_\Phi(y,x) \leqslant n} \delta(y,x)$$

est à croissance polynomiale (resp. sous-exponentielle), i.e. $v_{x,\delta}$ *est dominée par un polynôme (resp.* $\underline{Gr}_\delta(x) = \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} log(v_{x,\delta}(n)) = 0$*). C'est la définition employée par M. Samuélidès dans [27]. Si* μ *est invariante, alors* $v_{x,\delta}$ *est le volume usuel* $v_x(n) = \mid B_{d_\Phi}(x,n) \mid$ *et cette définition coïncide avec la définition usuelle. En général, si* μ *est ergodique, le taux de* δ*-croissance exponentielle* $\underline{Gr}_\delta(x)$ *est constant* μ*-presque partout [3].*

D'après [14], si $\mathcal{R}$ est croissance sous-exponentielle et si μ est harmonique, alors $\mathcal{R}$ a la propriété de Liouville pour μ. En combinant ce résultat avec le théorème 5.2, nous retrouvons les résultats de C. Series [28] et V. Kaimanovich [17] rappelés dans l'introduction :

COROLLAIRE 5.4. — *Soit* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence mesurable discrète sur un espace borélien standard* X*, munie d'un graphage* Φ *à géométrie bornée, d'un noyau de transition réversible* π *ayant un système de conductances minoré et majoré et d'une mesure de probabilité* π*-harmonique* μ*. Si* $\mathcal{R}$ *est à croissance sous-exponentielle pour* μ*, alors* $\mathcal{R}$ *est moyennable pour* μ*.*

Dans les conditions du corollaire, la mesure μ est de fait invariante. Cependant, grâce au théorème 1.1 de [29], il reste valable quand on remplace la condition de croissance sous-exponentielle par celle de δ-croissance sous-exponentielle (et l'on retrouve ainsi le résultat de [27] dans le cas harmonique). En effet, l'entropie de la marche aléatoire sur $\mathcal{R}$ devient nulle [3, 16] et donc $\mathcal{R}$ a la propriété de Liouville pour μ.

Par ailleurs, il y a une manière de définir le nombre moyen d'arêtes issues d'un sommet d'un arbre d'après R. Lyons [21]. Cette quantité, appelé *nombre de branchement*, joue un rôle important dans certains processus probabilistes comme la marche aléatoire et la percolation. Dans [3], on étend cette notion aux relations d'équivalence mesurées graphées et on prouve un critère de moyennabilité plus général que ceux de C. Series et V. Kaimanovich :

COROLLAIRE 5.5. — *Dans les conditions du corollaire 5.4, si le nombre de branchement de* $\mathcal{R}$ *est égal à* 1*, alors* $\mathcal{R}$ *est moyennable pour* μ*.*

5.2. Récurrence

Nous dirons qu'une marche aléatoire sur une relation d'équivalence mesurée graphée $(\mathcal{R}, X, \mu, \Phi)$ est *récurrente* si μ-presque toute orbite $\mathcal{R}_\Phi[x]$ n'a pas de fonction superharmonique positive non constante. L'effet de cette propriété sur les moyennes π-harmoniques est identique à celui de la propriété de Liouville :

LEMME 5.6. — *Si la marche aléatoire sur $\mathcal{R}$ est récurrente pour μ, alors toute moyenne π-harmonique sur $\mathcal{R}$ est invariante.*

Le nombre de bouts des orbites est une autre propriété métrique employée dans l'étude de la moyennabilité des relations d'équivalence. Dans [1], S. Adams démontre qu'une relation d'équivalence mesurée arborée est moyennable si presque toute orbite a un nombre fini de bouts. L'arborage est essentiel si les orbites ont 1 bout, mais il est inutile dans le cas où les orbites génériques ont 2 bouts [5]. Pour toute relation d'équivalence mesurée graphée, les relations d'équivalence induites sur les réunions des orbites finies et des orbites ayant un nombre fini de bouts > 2 sont *dissipatives*, en ce sens qu'il existe des boréliens qui rencontrent chaque orbite suivant un point. Toute moyenne harmonique est invariante sur la réunion des orbites finies. Par approximation, il en est de même pour toute relation dissipative [2]. Grâce au résultat suivant, qui regroupe ces remarques, nous pourrons supposer que les relations d'équivalence considérées sont conservatives :

LEMME 5.7. — *Toute moyenne π-harmonique est invariante sur la partie dissipative de $\mathcal{R}$.*

Pour voir l'effet du nombre de bouts sur la marche aléatoire, nous nous servirons du critère de récurrence de Nash-Williams [23] :

LEMME 5.8. — *Soit $(\mathcal{R}, X, \mu, \Phi)$ une relation d'équivalence mesurée graphée à géométrie bornée, munie d'un noyau de transition réversible π ayant un système de conductances majoré. Si μ-presque toute orbite $\mathcal{R}_\Phi[x]$ est un arbre ayant un nombre fini de bouts, ou bien si μ-presque toute orbite $\mathcal{R}_\Phi[x]$ a exactement 2 bouts, alors la marche aléatoire sur $\mathcal{R}$ est récurrente.*

Démonstration. — Chaque orbite $\mathcal{R}_\Phi[x]$ est la réunion d'une suite croissante de graphes finis F_n dont le bord $\partial_\Phi F_n = \{(y,z) \in \mathcal{K} / y \in F_n, z \notin F_n\}$ est une séparatrice (i.e. tout rayon issu de x contient une arête de $\partial_\Phi F_n$) et l'extrémité de toute arête de $\partial_\Phi F_n$ appartient à F_{n+1}. Si $\mathcal{R}_\Phi[x]$ vérifie l'une des conditions ci-dessus, le nombre d'éléments de $\partial_\Phi F_n$ est majoré. Si le système de conductances est majoré, la somme des conductances est aussi majorée. Si l'on note $c(\partial_\Phi F_n)$ cette quantité, le réseau électrique défini par le système de conductances sur $\mathcal{R}_\Phi[x]$ est *lentement rempli* au sens de [23] car la série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{c(\partial_\Phi F_n)}$ diverge. D'après le critère de récurrence de [23], la marche aléatoire sur $\mathcal{R}_\Phi[x]$ est récurrente. $\square$

La donnée du noyau de transition simple permet d'énoncer le résultat suivant (où le cas arboré peut se ramener au cas de 2 bouts car toute moyenne π-harmonique est préservée par l'élagage des arêtes terminales [2]) :

THÉORÈME 5.9 ([1, 5]). — *Soit* $(\mathcal{R}, X, \mu, \Phi)$ *une relation d'équivalence mesurée graphée. Si* μ*-presque toute orbite est un arbre ayant un nombre fini de bouts, ou bien si* μ*-presque toute orbite a exactement* 2 *bouts, alors* $\mathcal{R}$ *est moyennable pour* μ.

Bibliographie

[1] ADAMS (S.). — Trees and amenable equivalence relations. Ergodic Theory Dynam. Systems, 10, p. 1-14 (1990).

[2] ALCALDE CUESTA (F.), BERMÚDEZ (M.). — Une remarque sur les relations d'équivalence graphées, munies de mesures harmoniques. C. R. Acad. Sci. Paris, 332, p. 637-640 (2001).

[3] ALCALDE CUESTA (F.), FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA (M. P.). — Nombre de branchement d'un pseudogroupe. À paraître dans Monatshefte für Mathematik. DOI 10.1007/s00605-010-0230-z.

[4] ANANTHARAMAN-DELAROCHE (C.), RENAULT (J.). — Amenable groupoids. Monographies de L'Enseignement Mathématique, 36. L'Enseignement Mathématique, Genève (2000).

[5] BLANC (E.). — Propriétés génériques des laminations. Thèse UCB-Lyon 1 (2001).

[6] CONNES (A.), FELDMAN (J.), WEISS (B.). — An amenable equivalence relation is generated by a single transformation. Ergodic Theory Dynam. Systems, 1, p. 431-450 (1981).

[7] DYE (H. A.). — On groups of measure preserving transformations, I. Amer. J. Math., 81, p. 119-1159 (1959).

[8] DYE (H. A.). — On groups of measure preserving transformations, II. Amer. J. Math., 85, p. 551-576 (1963).

[9] FELDMAN (J.), MOORE (C.). — Ergodic equivalence relations, cohomology and Von Neumann algebras, I. Trans. Amer. Math. Soc., 234, p. 289-324 (1977).

[10] FOGUEL (S. R.). — Iterates if a convolution on a non abelian group. Ann. Inst. Henri Poincaré Section B, 11, p. 199-202 (1975).

[11] FOGUEL (S. R.). — Harris operators. Israel J. Math., 33, p. 281-309 (1979).

[12] GARNETT (L.). — Foliations, The Ergodic Theorem and Brownian Motion. J. Funct. Anal., 51, p. 285-311 (1983).

[13] GREENLEAF (F. P.). — Invariant means on topological groups. Van Nostrand Math. Studies 16, Van Nostrand, New York (1969).

[14] KAIMANOVICH (V. A.). — Brownian motion on foliations : entropy, invariant measures, mixing. Funct. Anal. Appl., 22, p. 326-328 (1988).

[15] KAIMANOVICH (V. A.). — Amenability, hyperfiniteness, and isoperimetric inequalities. C. R. Acad. Sc. Paris, 325, p. 999-1004 (1997).

[16] Kaimanovich (V. A.). — Hausdorff dimension of the harmonic measure on trees. Ergodic Theory Dynam. Systems, 18 (1998), 631-660.

[17] Kaimanovich (V. A.). — Equivalence relations with amenable leaves need not be amenables. Amer. Math. Soc. Transl., 202, 151-166 (2001).

[18] Kaimanovich (V. A.). — Amenability and the Liouville property. Israel J. Math., 149, p. 45-85 (2005).

[19] Kaimanovich (V. A.), Vershik (A. M.). — Random walks on discrete groups : boundary and entropy. Ann. Probab., 11, p. 457-490 (1983).

[20] Krengel (U.). — Ergodic Theorems. Walter de Gruyter, Berlin (1985).

[21] Lyons (R.). — Random walks and percolation on trees. Ann. Probab., 18 p. 931-958 (1990).

[22] Meyer (p. A.). — Limites médiales d'après Mokobodzki, in Séminaire de Probabilités VII, Université de Strasbourg. Lecture Notes in Math. 321, Springer, Berlin, p. 198-204 (1973).

[23] Nash-Willliams (C. St. J. A.). — Random walks and electric currents in networks. Proc. Cambridge Philos. Soc. 55, p. 181-194 (1959).

[24] Ornstein (D.), Sucheston (L.). — An operator theorem on L_1 convergence to zero with applications to Markov kernels. Ann. Math. Statist., 41, p. 1631-1639 (1970).

[25] Paterson (A. L.). — Amenability. American Mathematical Society, Providence (1988).

[26] Paulin (F.). — Propriétés asymptotiques des relations d'équivalences mesurées discrètes. Markov Process. Related Fields, 5, p. 163-200 (1999).

[27] Samuélidès (M.). — Tout feuilletage à croissance polynomiale est hyperfini. J. Funct. Anal., 34, p. 363-369 (1979).

[28] Series (C.). — Foliations of polynomial growth are hyperfinite. Israel J. Math., 34, p. 245-258 (1979).

[29] Virág (B.). — On the speed of random walks on graphs. Ann. Probab., 28, p. 379-394 (2000).

[30] Zimmer (R. J.). — Hyperfinite factors and amenable ergodic actions. Invent. Math., 41, p. 23-31 (1977).

[31] Zimmer (R. J.). — Ergodic Theory and Semisimple Groups. Birkhäuser, Boston (1984).