ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

Didier Arnal, Najla Dahmene

Relèvements de formalités

Tome XX, nº 1 (2011), p. 215-229.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2011_6_20_1_215_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XX, n° 1, 2011
pp. 215–229

Relèvements de formalités

Didier Arnal, Najla Dahmene[1]

Résumé. — Nous étudions les notions de relevés formels de champs de tenseurs, d'opérateurs multidifférentiels, de formalités et de star produits de $\mathbb{R}^d$ à TR^d et d'une variété M à son fibré tangent TM.

Abstract. — We study the notion of formal lifts for polyvector fields, multidifferential operators, formalities and star products from $\mathbb{R}^d$ to $T\mathbb{R}^d$ and from a manifold M to its tangent bundle TM.

0. Introduction

Dans [K], M. Kontsevich a introduit la notion de formalité sur une variété M: c'est un L_∞-quasi-isomorphisme entre les algèbres de Lie différentielles graduées $T_{poly}(M)$ et $D_{poly}(M)$. Il a montré l'existence d'une formalité sur toute variété et donné une construction explicite dans le cas de $\mathbb{R}^d$.

Cependant, à part cette formalité explicite sur $\mathbb{R}^d$, on connaît trés peu les propriétés des formalités elles même, en particulier on ne sait pas comparer deux formalités sur une même variété.

Dans cet article, aprés avoir généralisé les notions de relevés de [GU] dans le cas de $\mathbb{R}^d$, nous avons défini deux algèbres de Lie différentielles

(*) Reçu le 16/02/2007, accepté le 16/09/2010
(1) D. Arnal, Institut de Mathématiques de Bourgogne, UMR CNRS 5584, Université de Bourgogne, U.F.R. Sciences et Techniques B.P. 47870, F-21078 Dijon Cedex, France
Didier.Arnal@u-bourgogne.fr
N. Dahmene, Département de Mathématiques, Unité de Recherche Physique Mathématique, Faculté des Sciences de Monastir, Avenue de l'environnement, 5019 Monastir, Tunisie
najla.dahmene@fsg.rnu.tn

graduées $T_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$ et $D_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$ qui sont les relevés naturels de $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ et $D_{poly}(\mathbb{R}^d)$. La formalité de Kontsevich sur $\mathbb{R}^d$ se relève alors en un L_∞-quasi-isomorphisme entre $T_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$ et $D_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$.

Nous donnons ensuite une condition qui doit être vérifiée par une formalité $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{R}^{2d}$ pour pouvoir étendre cette application en un L_∞-quasi-isomorphisme entre $T_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$ et $D_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$. Nous constatons que la formalité de Kontsevich sur $\mathbb{R}^{2d}$ satisfait cette hypothèse et que son extension est le relevé de la formalité de Kontsevich sur $\mathbb{R}^d$. Nous montrons de plus que plusieurs formalités sur $\mathbb{R}^{2d}$ peuvent avoir la même extension à $T_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$. On applique ensuite ces résultats à la construction de star produits sur $T\mathbb{R}^d$.

Enfin, grâce à la notion d'application exponentielle formelle, nous pouvons, par des méthodes similaires, relever une formalité sur une variété M à un voisinage de la section nulle du fibré tangent TM.

1. Relèvements verticaux et complets

Soit M une variété différentielle et $\pi : TM \longrightarrow M$ le fibré tangent à M. On sait relever les fonctions C^∞ sur M, resp. les champs de vecteurs, resp. les tenseurs sur TM des manières suivantes :

1/ Pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, on définit deux fonctions f^v et f^c dans $C^\infty(TM)$ appelées respectivement relevé vertical et relevé complet de f en posant :

$$f^v = f \circ \pi \quad \text{et} \quad f^c = df.$$

2/ A un champ de vecteurs $\xi \in \mathcal{X}(M)$, on associe deux champs de vecteurs ξ^v et ξ^c sur TM appelés respectivement relevé vertical et relevé complet de X en posant :

$$\begin{array}{ll} \xi^v f^v = 0, & \xi^v f^c = (\xi f)^v \\ \xi^c f^v = (\xi f)^v, & \xi^c f^c = (\xi f)^c. \end{array}$$

3/ Pour définir les relevés vertical et complet d'un tenseur α totalement antisymétrique sur M, on posera, si $\alpha = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_k$,

$$\alpha^v = \xi_1^v \wedge \xi_2^v \wedge \ldots \wedge \xi_k^v \quad \text{et} \quad \alpha^c = \sum_{j=1}^{k} \xi_1^v \wedge \ldots \wedge \xi_{j-1}^v \wedge \xi_j^c \wedge \xi_{j+1}^v \wedge \ldots \wedge \xi_k^v.$$

Prenons un système de coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^d)$, centré au point x_0 de M. Notons $(x^1, \ldots, x^d,\ y^1, \ldots, y^d)$ le système de coordonnées de TM canoniquement associé : un vecteur X tangent en x de coordonnées $(x^1, \ldots, x^d)$ à M s'écrit $X = \sum_{i=1}^d y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Dans ces nouvelles coordonnées, on a alors :

$$f^v(x,y) = f(x), \quad f^c(x,y) = \sum_{i=1}^d y^i \frac{\partial f}{\partial x^i}|_x$$

et si $\xi = \sum_{i=1}^d \xi^i(x)\partial_{x^i}$ est un champ de vecteurs, alors on a

$$\xi^v = \sum_{i=1}^d \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \xi^c = \sum_{i=1}^d \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^d \left(\sum_{k=1}^d y^k \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}|_x\right)\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Remarquons que bien que $f^v g^v = (fg)^v$, on n'a pas $f^c g^c = (fg)^c$ mais

$$(fg)^c = f^c g^v + f^v g^c.$$

De même, bien qu'on ait $(\xi \wedge \eta)^v = \xi^v \wedge \eta^v$, on a par définition :

$$(\xi \wedge \eta)^c = \xi^c \wedge \eta^v + \xi^v \wedge \eta^c.$$

Enfin on a $\xi^v f^v = 0$, $\xi^v f^c = \xi^c f^v = (\xi f)^v$ et $\xi^c f^c = (\xi f)^c$. Ces relations sont des cas particuliers des relations générales suivantes sur le crochet $[\ ,\ ]_S$ de Schouten (cf [GU]) :

$$[\alpha^v, \beta^v]_S = 0, \quad [\alpha^v, \beta^c]_S = [\alpha^c, \beta^v]_S = [\alpha, \beta]_S^v \quad \text{et} \quad [\alpha^c, \beta^c]_S = [\alpha, \beta]_S^c.$$

Rappelons en effet que le crochet de Schouten de deux tenseurs est défini comme l'unique bidérivation qui prolonge le crochet des champs de vecteurs, c'est-à-dire :

$$[\xi, f]_S = [f, \xi]_S = \xi f, \quad [\xi, \eta]_S = [\xi, \eta]$$

et

$$[\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n, \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_m]_S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (-1)^{i+j}[\xi_i, \eta_j] \wedge \xi_1 \wedge \ldots \hat{i} \ldots \wedge \xi_n \wedge \eta_1 \wedge \ldots \hat{j} \ldots \wedge \eta_m.$$

Il est à remarquer que si α est un bivecteur de Poisson sur M alors α^c en est aussi un sur TM.

2. Relèvements formels : cas de $\mathbb{R}^d$

Plaçons nous dans le cas $M = \mathbb{R}^d$ muni des coordonnées globales $(x^1, \ldots, x^d)$. Alors l'espace total du fibré tangent $\pi : T\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^{2d}$, avec les coordonnées globales $(x^1, \ldots, x^d, y^1, \ldots, y^d)$. Les coordonnées d'un élément X de $T\mathbb{R}^d$, vecteur tangent à $\mathbb{R}^d$ au point $\pi(X)$, sont $(x^1, \ldots, x^d, y^1, \ldots, y^d)$ si et seulement si celles de $\pi(X)$ sont $(x^1, \ldots, x^d)$ et $X = \sum_i y^i \partial_{x^i}|_x$.

Pour chaque x de $\mathbb{R}^d$, on a ainsi un difféomorphisme $\Phi_x : T_x\mathbb{R}^d \simeq \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, donné par

$$\Phi_x(y) = \Phi_x\left(\sum_i y^i \partial_{x^i}|_x\right) = x + y.$$

2.1. Relèvement d'une fonction

Soit f une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^d$. Le développement en série de Taylor en 0 de la fonction $f \circ \Phi_x$ ($f \circ \Phi_x(y) = f(x+y)$) est donné par :

$$Tayl_0(f \circ \Phi_x)(y) = f(x) + \sum_{i=1}^{d} \partial_{x^i} f(x) y^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \partial^2_{x^i x^j} f(x) y^i y^j + \ldots$$

On regarde ce développement comme une série formelle en posant $deg(y^j) = 1$ pour tout j et $deg(f(x)) = 0$ pour toute fonction f de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Definition 2.1.1. — *On appelle relevé formel de $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ la série formelle $\widetilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)[[y]]$ définie par :*

$$\widetilde{f}(x,y) = Tayl_0(f \circ \Phi_x)(y).$$

Remarquons que l'on a $\widetilde{f}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\widetilde{f}(x,y)\right)^{(k)}$ où $\left(\widetilde{f}(x,y)\right)^{(k)}$ est le terme de degré k dans la série formelle $\widetilde{f}$. On voit alors que :

$$\left(\widetilde{f}(x,y)\right)^{(0)} = f^v(x,y), \quad \left(\widetilde{f}(x,y)\right)^{(1)} = f^c(x,y).$$

Notons enfin $Fonc_{relev}(T\mathbb{R}^d)$ l'espace des séries formelles $\widetilde{f}$ pour $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, il est clair que cet espace est doté d'une structure d'algèbre associative .

2.2. Relèvement formel d'un champ de vecteurs ou d'un tenseur

Definition 2.2.1. — *Soit $\xi = \sum_i \xi^i(x)\partial_{x^i}$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$. Le relevé formel de ξ est le champ de vecteurs formel $\widetilde{\xi}$ défini sur $T\mathbb{R}^d$ par :*

$$\widetilde{\xi} = \frac{1}{2}\sum_i \widetilde{\xi^i}(x,y)\left(\partial_{x^i} + \partial_{y^i}\right).$$

Dans cette définition, le facteur $\frac{1}{2}$ assure la validité de l'égalité suivante :

$$\widetilde{\xi}\widetilde{f} = \widetilde{\xi f}.$$

On pose maintenant $deg(\partial_{x^j}) = 0$ et $deg(\partial_{y^j}) = -1$ (on a toujours $deg(y^j) = 1$). Alors, on a $\widetilde{\xi} = \sum_{k=-1}^{\infty} \widetilde{\xi}^{(k)}$ et on remarque que :

$$\widetilde{\xi}^{(-1)} = \frac{1}{2}\xi^v \quad \text{et} \quad \widetilde{\xi}^{(0)} = \frac{1}{2}\xi^c.$$

On note $\mathcal{X}_{relev}(T\mathbb{R}^d)$ l'espace des relevés formels $\widetilde{\xi}$ des champs $\xi \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^d)$.

Definition 2.2.2. — *Soit $\alpha = \sum \alpha^{i_1\ldots i_k}\partial_{x^{i_1}} \wedge \ldots \wedge \partial_{x^{i_k}}$ un k-tenseur sur $\mathbb{R}^d$. On définit le k-tenseur*

$$\widetilde{\alpha} = \frac{1}{2^k}\sum \widetilde{\alpha^{i_1\ldots i_k}}(\partial_{x^{i_1}} + \partial_{y^{i_1}}) \wedge \ldots \wedge (\partial_{x^{i_k}} + \partial_{y^{i_k}}).$$

On dit que $\widetilde{\alpha}$ est le relevé formel de α.

Le tenseur $\widetilde{\alpha}$ se décompose en une somme de termes $\widetilde{\alpha}^{(\ell)}$, homogènes de degré ℓ, avec $\ell \geqslant -k$. On a alors :

$$\widetilde{\alpha}^{(-k)} = \frac{1}{2^k}\alpha^v \quad \text{et} \quad \widetilde{\alpha}^{(-k+1)} = \frac{1}{2^k}\alpha^c.$$

On note $T_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$ l'espace des relevés formels $\widetilde{\alpha}$ des tenseurs $\alpha \in T_{poly}(\mathbb{R}^d)$.

2.3. Relèvement d'un opérateur différentiel ou multidifférentiel

Definition 2.3.1. — *Soit $D = \sum a^{i_1\ldots i_m}\partial^m_{x^{i_1}\ldots x^{i_m}}$ un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^d$. On définit l'opérateur différentiel $\widetilde{D}$, relevé de D par :*

$$\widetilde{D} = \sum \widetilde{a^{i_1\ldots i_m}}\,\widetilde{\partial^m_{x^{i_1}\ldots x^{i_m}}} \quad \text{où} \quad \widetilde{\partial^m_{x^{i_1}\ldots x^{i_m}}} = \frac{1}{2^m}\left(\partial_{x^{i_1}} + \partial_{y^{i_1}}\right)\circ\ldots\circ\left(\partial_{x^{i_m}} + \partial_{y^{i_m}}\right).$$

(Ici $\circ$ est la composition usuelle des opérateurs différentiels.)

Si $D = D_1 \otimes \ldots \otimes D_n$ est un opérateur multidifférentiel (les D_j sont des opérateurs différentiels), le relevé $\widetilde{D}$ de D est

$$\widetilde{D} = \widetilde{D_1} \otimes \ldots \otimes \widetilde{D_n}.$$

On notera $D_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$ l'espace des relevés $\widetilde{D}$ des opérateurs multidifférentiels $D \in D_{poly}(\mathbb{R}^d)$.

Rappelons qu'un opérateur différentiel a un ordre : dans chaque D_j, il y a des compositions d'au plus ℓ_j dérivations. On peut donc définir le degré $deg(\widetilde{D})$ du relevé d'un opérateur différentiel comme ci-dessus, grâce à $deg(y^i) = 1$, $deg(\partial_{y^i}) = -1$. De même pour les opérateurs multidifférentiels $deg(\widetilde{D_1} \otimes \ldots \otimes \widetilde{D_n}) = \sum deg(\widetilde{D_i})$.

2.4. Propriétés des relèvements

A partir des définitions précédentes, on voit que l'application relévement formel est injective et on aura immédiatement :

- 1/ $\widetilde{f}.\widetilde{g} = \widetilde{fg}$, pour tout f, g de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$,
- 2/ $\widetilde{\alpha} \wedge \widetilde{\beta} = \widetilde{\alpha \wedge \beta}$, pour tout α, β de $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$
- 3/ $\widetilde{D_1} \otimes \widetilde{D_2} = \widetilde{D_1 \otimes D_2}$, pour tout D_1, D_2 de $D_{poly}(\mathbb{R}^d)$

Rappelons que $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ et $D_{poly}(\mathbb{R}^d)$ sont naturellement gradués par $|\alpha| = k - 1$ si α est un k-tenseur et $|D| = m - 1$ si D est un opérateur m-différentiel. Les relations ci-dessus permettent de doter $T_{poly,relev}$ et $D_{poly,relev}$ d'une graduation définie par

$$|\widetilde{\alpha}| = |\alpha| \quad \text{et} \quad |\widetilde{D}| = |D|.$$

Cette graduation, avec $deg(\alpha)$ et $deg(D)$ qu'on a définis plus haut font de ces espaces des espaces gradués par $\mathbb{Z}^2$.

Proposition 2.4.1. — *On a aussi les propriétés suivantes :*

- *4/ $\widetilde{\xi}\widetilde{f} = \widetilde{\xi f}$ pour tout ξ de $\mathcal{X}(\mathbb{R}^d)$ et tout f de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$,*
- *5/ $\widetilde{D}(\widetilde{f_1}, \ldots, \widetilde{f_m}) = \widetilde{D(f_1, \ldots, f_m)}$, pour tout D de $D_{poly}(\mathbb{R}^d)$ et tout $f_1, \ldots, f_m$ de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$,*

Preuve. — L'assertion (4) s'obtient facilement grâce à la relation $\partial_{x^i}\widetilde{f} = \partial_{y^i}\widetilde{f} = \widetilde{\partial_{x^i} f}$.

La propriété (5) est une conséquence de (3) et(4) puisqu'on a $\widetilde{\partial^m_{x^{i_1}\dots x^{i_m}}} = \widetilde{\partial_{x^{i_1}}} \circ \dots \circ \widetilde{\partial_{x^{i_m}}}$. □

Pour chaque variété M, sur $T_{poly}(M)$ on a aussi la structure d'algèbre de Lie graduée donnée par le crochet de Schouten $[\ ,\ ]_S$. De même sur $D_{poly}(M)$ on a la structure définie par le crochet de Gerstenhaber $[\ ,\ ]_G$. Celui-ci est défini par :

$$[D_1, D_2]_G = D_1 \circ D_2 - (-1)^{|D_1||D_2|} D_2 \circ D_1,$$

où la composition $\circ$ est, si $|D_1| = m_1 - 1$ et $|D_2| = m_2 - 1$,

$$D_1 \circ D_2(f_1, \dots, f_{m_1+m_2-1}) =$$
$$\sum_{i=1}^{m_1} (-1)^{(m_2-1)(i-1)} D_1(f_1, \dots, f_{i-1}, D_2(f_i, \dots, f_{i+m_2-1}), f_{i+m_2}, \dots, f_{m_1+m_2-1}).$$

Proposition 2.4.2. — *Le relèvement préserve les crochets. C'est-à-dire :*

- *6/ Pour tout α, β de $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$, on a :*

$$\left[\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\right]_S = \widetilde{[\alpha, \beta]_S}.$$

En particulier si α est un 2-tenseur de Poisson, $\widetilde{\alpha}$ est aussi un 2-tenseur de Poisson (formel).

- *7/ Pour tout D_1, D_2 de $D_{poly}(\mathbb{R}^d)$, on a :*

$$\left[\widetilde{D_1}, \widetilde{D_2}\right]_G = \widetilde{[D_1, D_2]_G}.$$

Preuve. — Il suffit de montrer que pour des champs de vecteurs X et Y sur $\mathbb{R}^d$ on a : $\left[\widetilde{X}, \widetilde{Y}\right]_S = \widetilde{[X, Y]_S}$, en fait un calcul relatif au système de coordonnées $(x^1, \dots, x^d, y^1, \dots, y^d)$ sur $T\mathbb{R}^d$ permet de formuler immédiatement cette relation. La propriété (7) se déduit facilement de la formule : $\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2} = \widetilde{D_1 \circ D_2}$ qui est une conséquence immédiate de (5). □

Remarque. — Si ξ et η sont par exemple des champs de vecteurs, on peut développer $[\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}]_S$, on trouve successivement :

$$\left[\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}\right]_S^{(-2)} = \left[\widetilde{\xi}^{(-1)}, \widetilde{\eta}^{(-1)}\right]_S = \frac{1}{4}\left[\xi^v, \eta^v\right] = \widetilde{[\xi, \eta]}^{(-2)} = 0,$$

et

$$\begin{aligned}\left[\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}\right]_S^{(-1)} &= \left[\widetilde{\xi}^{(-1)},\widetilde{\eta}^{(0)}\right]_S + \left[\widetilde{\xi}^{(0)},\widetilde{\eta}^{(-1)}\right]_S = \frac{1}{4}\left[\xi^v,\eta^c\right] + \frac{1}{4}\left[\xi^c,\eta^v\right] \\ &= \widetilde{[\xi,\eta]}^{(-1)} = \frac{1}{2}[\xi,\eta]^v,\end{aligned}$$

relations déjà trouvées mais aussi :

$$\begin{aligned}\left[\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}\right]_S^{(0)} &= \left[\widetilde{\xi}^{(0)},\widetilde{\eta}^{(0)}\right]_S + \left[\widetilde{\xi}^{(-1)},\widetilde{\eta}^{(1)}\right]_S + \left[\widetilde{\xi}^{(1)},\widetilde{\eta}^{(-1)}\right]_S \\ &= \frac{1}{4}\left[\xi^c,\eta^c\right] + \frac{1}{4}\left[\xi^v,\eta^{(1)}\right]\frac{1}{4}\left[\xi^{(1)},\eta^v\right] = \widetilde{[\xi,\eta]}^{(0)} = \frac{1}{2}[\xi,\eta]^c,\end{aligned}$$

On trouve donc la nouvelle relation $[\xi^v,\eta^{(1)}]+[\xi^{(1)},\eta^v]=[\xi,\eta]^c$.

Corollaire 2.4.3. —

- *(1) L'espace $T_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$, gradué par $|\ |$ est une algèbre de Lie différentielle graduée lorsqu'on le munit de la différentielle nulle et du crochet de Schouten.*
- *(2) L'espace $D_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$, gradué par $|\ |$ est une algèbre de Lie différentielle graduée lorsqu'on le munit de la différentielle $d=-d_H$, si d_H est l'opérateur de cobord de Hochschild et du crochet de Gerstenhaber.*

3. Relèvement d'une formalité de $\mathbb{R}^d$

3.1. Relèvement d'une formalité

Supposons maintenant qu'on ait une formalité $\mathcal{F}=\sum\mathcal{F}_n$, c'est-à-dire un L_∞ quasi isomorphisme entre $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ et $D_{poly}(\mathbb{R}^d)$ (voir [K] pour la définition de cette notion). Afin de relever $\mathcal{F}$, on posera pour tout $n\geqslant 1$:

$$\widetilde{\mathcal{F}_n}(\widetilde{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes\widetilde{\alpha_n}) = \mathcal{F}_n(\alpha_1\widetilde{\otimes\ldots}\otimes\alpha_n).$$

Proposition 3.1.1. — *L'application formelle $\widetilde{\mathcal{F}}=\sum_n\widetilde{\mathcal{F}_n}$ est une formalité entre $T_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$ et $D_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$.*

Preuve. — On écrit l'équation vérifiée par la formalité $\mathcal{F}$ puis on passe aux relevés. En tenant compte des propriétés du relèvement, on obtient l'équation de formalité pour $\widetilde{\mathcal{F}}$:

$$\sum_{I\cup J=\{1,\ldots,n\}} \pm[\widetilde{\mathcal{F}_{|I|}}(\widetilde{\alpha_I}),\widetilde{\mathcal{F}_{|J|}}(\widetilde{\alpha_J})]_G$$

$$+\sum_{i\neq j}\pm\widetilde{\mathcal{F}_{n-1}}([\widetilde{\alpha_i},\widetilde{\alpha_j}]\otimes\widetilde{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes\breve{\widetilde{\alpha_i}}\otimes\ldots\otimes\breve{\widetilde{\alpha_j}}\otimes\ldots\otimes\widetilde{\alpha_n})=0.$$

3.2. Restriction d'une formalité sur $T\mathbb{R}^d$ à $T_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$

A cette étape, il est intéressant de savoir si le relevé $\widetilde{\mathcal{F}}$ de la formalité $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{R}^d$, muni des coordonnées $(x^1,\ldots,x^d)$, "provient" d'une formalité $\mathcal{G}$ sur $T\mathbb{R}^d\simeq\mathbb{R}^{2d}$, muni des coordonnées $(x^1,\ldots,x^d,y^1,\ldots,y^d)$.

Comme les espaces $T_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$ et $D_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$ sont des espaces de séries formelles, une formalité $\mathcal{G}$ sur $T\mathbb{R}^d$ ne s'étend pas nécessairement en une application entre ces deux espaces.

Nous dirons qu'une formalité $\mathcal{G}$ sur $T\mathbb{R}^d\simeq\mathbb{R}^{2d}$ est polynomiale en y si pour chaque n-uple $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ de tenseurs à coefficients polynomiaux en y (i.e. $\alpha^{i_1\cdots i_k}\in C^\infty(\mathbb{R}^d)[y^1,\ldots,y^d]$ pour tout $i_1,\ldots,i_k$), $\mathcal{G}(\alpha_1\otimes\ldots\otimes\alpha_n)$ est un opérateur multidifférentiel à coefficients polynomiaux en y.

Pour une telle formalité, chaque $\mathcal{G}_n$ peut se décomposer en composantes $\mathcal{G}_n^{(r)}$ homogènes de degré r :

$$deg\left(\mathcal{G}_n^{(r)}(\alpha_1\otimes\ldots\otimes\alpha_n)\right)=r+\sum_i deg(\alpha_i).$$

Les espaces $T_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$ et $D_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$ étant les complétés respectifs de l'espace des tenseurs polynomiaux en y, respectivement des opérateurs multidifférentiels polynomiaux en y, pour la topologie deg-adique définie par le degré deg, une formalité $\mathcal{G}$ polynomiale en y définit une formalité $\widehat{\mathcal{G}}$ entre $T_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$ et $D_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$ si chaque $\mathcal{G}_n$ est continu c'est-à-dire si pour chaque n, il existe R_n tel que $\mathcal{G}_n^{(r)}=0$ si $r<R_n$.

Cette notion s'applique bien aux formalités $\mathcal{K}^x$ et $\mathcal{K}^{x,y}$ définies explicitement par Kontsevich sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^{2d}$ dans [K].

Théorème 3.2.1. — *La formalité de Kontsevich $\mathcal{K}^{x,y}$ sur $\mathbb{R}^{2d}$ est polynomiale, elle est homogène de degré 0 et s'étend donc en une formalité $\widehat{\mathcal{K}^{x,y}}$ entre $T_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$ et $D_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$.*

De plus on a :

$$\widehat{\mathcal{K}^{x,y}}=\widetilde{\mathcal{K}^x}.$$

Preuve. — Dans [K] on trouve la formule explicite de la formalité de Kontsevich sur $\mathbb{R}^d$:

$$\mathcal{K}^x{}_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)(f_1,\ldots,f_m)=\sum_{\Gamma\in G_{n,m}} w_\Gamma B_\Gamma(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)(f_1,\ldots,f_m).$$

Par définition des opérateurs B_Γ et de l'application du relèvement on peut écrire :

$$\widetilde{\mathcal{K}^x}_n(\widetilde{\alpha_1},\ldots,\widetilde{\alpha_n})(\widetilde{f_1},\ldots,\widetilde{f_m})=\sum_{\Gamma\in G_{n,m}} w_\Gamma B_\Gamma(\widetilde{\alpha_1},\ldots,\widetilde{\alpha_n})(\widetilde{f_1},\ldots,\widetilde{f_m})$$

$$=\widehat{\mathcal{K}^{x,y}}(\widetilde{\alpha_1},\ldots,\widetilde{\alpha_n})(\widetilde{f_1},\ldots,\widetilde{f_m}).$$

□

Cependant, même si le relevé d'une formalité $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{R}^d$ provient d'une formalité $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{R}^{2d}$, c'est-à-dire si on a $\widetilde{\mathcal{F}}=\widehat{\mathcal{G}}$, cette dernière n'est pas unique. Les formalités de Kontsevich dans divers systèmes de coordonnées nous donnent un exemple de ce phénomène. Afin de procéder à des changements de variables, nous allons nous restreindre à des tenseurs polynomiaux et à des fonctions polynomiales.

Lemme 3.2.2. — *La formalité de Kontsevich $\mathcal{K}^{x,y}$ est complètement déterminée par sa restriction aux tenseurs à coefficients polynomiaux et aux fonctions polynomiales.*

Preuve. — Fixons $R>0$ et $N\in\mathbb{N}$. Soit f une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^{2d}$ de coordonnées (x,y). Il existe une suite (φ_p) de fonctions polynomiales en x et y telle que

$$\lim_{p\to\infty}\sup_{\|(x,y)\|\leqslant R}\left|\partial^r_{j^1\ldots j^r}\varphi_p-\partial^r_{j^1\ldots j^r}f\right|=0\quad\forall|r|\leqslant N.$$

Calculons le terme $\mathcal{K}^{x,y}(\alpha_1\otimes\ldots\otimes\alpha_n)(f_1,\ldots,f_m)$. Cette quantité ne contient que des opérateurs différentiels d'ordre au plus $2n+m-2$ à coefficients constants agissant sur les fonctions $\alpha_j^{i_1\ldots i_k}$ et f_s. Si on approche ces fonctions par des fonctions polynômes $a_{j,p}^{i_1\ldots i_k}$ et $\varphi_{s,p}$ uniformément sur $\overline{B(0,R)}$, on a donc :

$$\lim_{p\to\infty}\mathcal{K}^{x,y}(a_{1,p}\otimes\ldots\otimes a_{n,p})(\varphi_{1,p},\ldots,\varphi_{m,p})=\mathcal{K}^{x,y}(\alpha_1\otimes\ldots\otimes\alpha_n)(f_1,\ldots,f_m)$$

uniformément sur tout compact de $T\mathbb{R}^d$. On peut donc se restreindre au cas de fonctions f_s polynomiales et de tenseurs α_j à coefficients polynomiaux.

Effectuons maintenant le changement de variables :

$$u^i = x^i + y^i, \quad v^i = \frac{x^i - y^i}{2}.$$

Ce changement de variables étant linéaire, on a ([K]) :

$$\mathcal{K}^{u,v} = \mathcal{K}^{x,y}.$$

Quand on se restreint aux relevés des tenseurs à coeffcients polynomiaux α_j et aux relevés des fonctions polynomiales f_s (dans les variables x^i), on peut écrire cette formalité ainsi :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_n^{x,y}(\widetilde{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \widetilde{\alpha_n}) \quad & (\widetilde{f_1}, \ldots, \widetilde{f_m})|_{(x,y)} \\ & = \mathcal{K}_n^{u,v}(\widetilde{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \widetilde{\alpha_n})(\widetilde{f_1}, \ldots, \widetilde{f_m})|_{(u=x+y, v=\frac{1}{2}(x-y))} \\ & = \mathcal{K}_n^{u}(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_n)(f_1, \ldots, f_m)|_{(u=x+y)}.\end{aligned}$$

En effet les fonctions $\widetilde{\alpha_j^{i_1 \ldots i_k}}$ et $\widetilde{f_s}$ sont les fonctions $\alpha_j^{i_1 \ldots i_k}$ et f_s calculées au point $u = x + y$, les seules dérivations apparaissant dans cette expression sont de la forme

$$\frac{1}{2}\left(\partial_{x^i} + \partial_{y^i}\right) = \partial_{u^i}.$$

Donc $\widetilde{\mathcal{K}^x}$ est le prolongement par continuité de la formalité $\mathcal{K}^u$ calculée sur les polynômes au point $u = x + y$.

Maintenant effectuons un nouveau changement, non linéaire :

$$u = x + y, \quad w = \varphi(\frac{x - y}{2}).$$

Alors les deux formalités $\mathcal{K}^{x,y} = \mathcal{K}^{u,v}$ et $\mathcal{K}^{u,w}$ sur $\mathbb{R}^{2d}$ sont différentes. Par exemple

$$\mathcal{K}_2^{u,v}(\xi, \alpha)(f) = \mathcal{K}_2^{u,w}(\xi, \alpha)(f) + \text{termes} \quad \text{en} \quad \partial_{w^j}(\varphi^{-1})^k \quad \text{et} \quad \partial^2_{w^i w^j}(\varphi^{-1})^k.$$

Mais les restrictions de ces deux formalités à des tenseurs à coefficients polynomiaux en u ne contiennent pas de termes ∂_{v^i} (ou ce qui est équivalent pas de termes ∂_{w^i}). Ces restrictions coïncident. On a donc :

$$\mathcal{K}^{u,v} \neq \mathcal{K}^{u,w} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathcal{K}^{u,v}} = \widehat{\mathcal{K}^{u,w}} = \widetilde{\mathcal{K}^x}.$$

□

Proposition 3.2.3. — *Les formalités $\mathcal{K}^{u,v}$ et $\mathcal{K}^{u,w}$ s'étendent toutes deux en la même formalité de $T_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$ dans $D_{poly,relev}(T\mathbb{R}^d)$ bien qu'elles soient distinctes.*

4. Relèvement d'un produit star

Proposition 4.0.4. — *Soient $\mathcal{F}$ une formalité et α un 2-tenseur de Poisson sur $\mathbb{R}^d$. Alors il existe un produit associatif $\widetilde{\star}$ sur l'espace $Fonc_{relev}(\mathbb{R}^d)$ défini par :*

$$\widetilde{f}\widetilde{\star}\widetilde{g} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} \widetilde{\mathcal{F}_n}(\widetilde{\alpha} \otimes \ldots \otimes \widetilde{\alpha})(\widetilde{f}, \widetilde{g}).$$

Preuve. — La formalité $\mathcal{F}$ permet d'associer au 2-tenseur de Poisson α un produit star $\star$ c'est-à-dire une déformation associative pilotée par $\{f, g\} = \langle df \wedge dg, \alpha\rangle$, donnée par :

$$f \star g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} \mathcal{F}_n(\alpha \otimes \ldots \otimes \alpha)(f, g).$$

Or on a : $\widetilde{\mathcal{F}_n}(\widetilde{\alpha} \otimes \ldots \otimes \widetilde{\alpha})(\widetilde{f}, \widetilde{g}) = \widetilde{\mathcal{F}_n(\alpha \otimes \ldots \otimes \alpha)(f, g)}$. C'est-à-dire $\widetilde{f \star g} = \widetilde{f} \,\widetilde{\star}\, \widetilde{g}$. Donc l'associativité du produit $\widetilde{\star}$ résulte immédiatement de celle du produit $\star$.

Proposition 4.0.5. — *Soient $\mathcal{K}$ la formalité de Kontsevich et α un 2-tenseur de Poisson sur $\mathbb{R}^d$. Pour tout F et G dans $C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ on pose :*

$$F\widetilde{\star}G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} \widehat{\mathcal{K}_n}(\widetilde{\alpha} \otimes \ldots \otimes \widetilde{\alpha})(F, G).$$

Alors $\widetilde{\star}$ est un produit star sur $\mathbb{R}^{2d}$.

Preuve. — Grâce à la proposition précédente on définit d'abord le produit associatif $\widetilde{\star}$ sur l'espace $Fonc_{relev}(\mathbb{R}^d)$. Ensuite, on peut l'étendre en un produit sur l'espace $C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ en vertu de la relation

$$\widehat{\mathcal{K}^{x,y}} = \widehat{\mathcal{K}^{u,v}} = \widetilde{\mathcal{K}^x}.$$

Il reste à vérifier qu'il est encore associatif sur $C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$. Il suffit de l'affirmer lorsque le bivecteur de Poisson α est à coefficients polynomiaux en x et les fonctions F et G sont polynomiales en (x, y) (ou en (u, v)). Dans ce cas on a $\widetilde{\alpha}|_{(u,v)} = \alpha|_u$ alors on peut écrire :

$$F\widetilde{\star}G|_{(u,v)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar^n}{n!} \mathcal{K}_n^u(\alpha \otimes \ldots \otimes \alpha)(F, G)|_{(u,v)}.$$

Pour conclure on utilise l'associativité du produit star défini par la formalité de Kontsevich $\mathcal{K}^u$ et dépendant du paramètre v.

5. Relèvement d'une formalité sur le fibré tangent

La construction d'une formalité relevée peut se généraliser au cas d'une variété M en considèrant des applications exponentielles généralisées :

Definitions 5.0.1 *(Applications exponentielles généralisées et formelles)*

1/ Soient M une variété différentielle de dimension d, $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert de la section nulle du fibré tangent TM et ϕ une application C^∞ de $\mathcal{V}$ dans M. On note $\phi_x(y)$ l'image par ϕ de $(x, y) \in \mathcal{V}$. On dit que ϕ est une application exponentielle généralisée lorsqu'on a pour tout $x \in M$:

- $\phi_x(0) = x$,
- $d\phi_x(0) = id$.

2/ Deux applications exponentielles généralisées ϕ et ψ sont dites équivalentes lorsque pour tout $x \in M$, les dérivés partielles en 0 de ϕ_x et ψ_x coïncident à chaque ordre.

3/ Une classe d'équivalence d'une application exponentielle généralisée(ou encore son jet d'ordre infini en $y = 0$) est appelée application exponentielle formelle.

Remarques. — 1/ Si ϕ est une application exponentielle généralisée définie sur un ouvert $\mathcal{V}$ voisinage de la section nulle du fibré tangent TM, alors, pour tout $x \in M$, l'application ϕ_x est un difféomorphisme de $T_xM \cap \mathcal{V}$ sur un ouvert U voisinage de $x \in M$.

2/ Soit $x \in M$, on désigne par $\Phi_x(y)$ le jet d'ordre infini en 0_x de ϕ_x alors on peut écrire :

$$\Phi_x(y) = x + y + \frac{1}{2}\Phi_x^{(2)}(y) + \frac{1}{3!}\Phi_x^{(3)}(y) + \dots$$

où chaque $\Phi_x^{(i)}(y)$ est une série formelle en y à coefficients C^∞ en x.

5.1. Relèvement via une application exponentielle formelle

Soit $\Phi = [\phi]$ une application exponentielle formelle sur M.

1/ Pour tout x de M, on peut définir la fonction image réciproque de $f \in C^\infty(M)$ par ϕ_x. Il est clair que le développement en série de Taylor en 0 de la fonction $y \longmapsto f \circ \phi_x(y)$ ne dépent pas du choix du représentant de Φ, on le note alors $f_\Phi(x; y)$ et on l'appelle relevé formel de f via l'application exponentielle formelle Φ.

Notons $Fonc_\Phi(TM)$ l'espace des séries formelles f_Φ.

2/ Soit ξ un champ de vecteurs sur M. On peut construire sur un voisinage de $0_x \in T_xM \cap \mathcal{V}$ le champ de vecteur $(\phi_x^{-1})_*\xi$. Le relevé de ξ par l'application exponentielle formelle Φ est le champ de vecteurs formel ξ_Φ défini par le développement de Taylor en $y = 0$ de $(\phi_x^{-1})_*\xi$.

On note $\mathcal{X}_\Phi(\mathcal{V})$ l'espace des relevés formels ξ_Φ des champs $\xi \in \mathcal{X}(M)$.

Si on écrit dans un système de coordonnées locales $\xi = \xi^i(x)\partial_{x^i}$ alors on aura :

$$\xi_\Phi = \frac{1}{2}{\xi^i}_\Phi(x,y)\left[\left((\partial_x\Phi(x;y))^{-1}\right)_i^j\partial_{x^j} + \left((\partial_y\Phi(x;y))^{-1}\right)_i^j\partial_{y^j}\right].$$

3/ Une construction analogue permet de définir le relevé d'un tenseur α sur M en posant :

$$\alpha_\Phi = Tayl_{y=0}\left((\phi_x^{-1})_*\alpha\right).$$

On note $T_{poly,\Phi}(TM)$ l'espace des relevés formels α_Φ des tenseurs $\alpha \in T_{poly}(M)$.

4/ Soit D un opérateur m-différentiel sur M. On a par définition

$$((\phi_x^{-1})_*D)(f_1 \circ \phi_x, \ldots, f_m \circ \phi_x) = D(f_1, \ldots, f_m) \circ \phi_x.$$

On appelle relevé de D via l'application exponentielle formelle Φ l'opérateur m-différentiel D_Φ défini par :

$$D_\Phi(f_{1,\Phi}, \ldots, f_{m,\Phi}) = (D(f_1, \ldots, f_m))_\Phi.$$

On note $D_{poly,\Phi}(TM)$ l'espace des relevés D_Φ des opérateurs multidifférentiels $D \in D_{poly}(M)$.

Remarque. — Si on prend $M = \mathbb{R}^d$ et $\Phi_x(y) = x + y$ alors on retrouve les notions et les espaces étudiés dans les paragraphes précédents.

Proposition 5.1.1. —

On a les propriétés suivantes :

- $f_\Phi.g_\Phi = (fg)_\Phi$, *pour tout* f, $g \in C^\infty(M)$,
- $\xi_\Phi f_\Phi = (\xi f)_\Phi$ *pour tout* $\xi \in \mathcal{X}(M)$ *et tout* $f \in C^\infty(M)$,
- $\alpha_\Phi \wedge \beta_\Phi = (\alpha \wedge \beta)_\Phi$, *pour tous* α, $\beta \in T_{poly}(M)$
- $D_{1,\Phi} \otimes D_{2,\Phi} = (D_1 \otimes D_2)_\Phi$, *pour tout* D_1, $D_2 \in D_{poly}(M)$

- $[\alpha_\Phi, \beta_\Phi]_S = ([\alpha, \beta]_S)_\Phi$, *pour tous* α, $\beta \in T_{poly}(M)$,
- $[D_{1,\Phi}, D_{2,\Phi}]_G = ([D_1, D_2]_G)_\Phi$, *pour tout* D_1, $D_2 \in D_{poly}(M)$

Preuve. — La première relation résulte du fait que le produit de deux développements de Taylor en 0 est le développement de Taylor en 0 du produit.

La deuxième relation s'appuie sur la définition $((\phi_x^{-1})_*\xi)(f \circ \phi_x) = (\xi f) \circ \phi_x$.

Toutes les autres relations s'en déduisent directement. □

Ces propriétés permettent d'obtenir les résultats suivants :

Proposition 5.1.2. — *Les espaces* $T_{poly,\Phi}(TM)$ *et* $D_{poly,\Phi}(TM)$ *sont des algèbres de Lie différentielles graduées.*

Proposition 5.1.3 *(Relèvement d'une formalité). — Soit* $\mathcal{F} = \sum \mathcal{F}_n$ *une formalité sur* M*. Pour tout* $n \geqslant 1$*, on pose :*

$$\mathcal{F}_{n,\Phi}(\alpha_{1,\Phi} \otimes \ldots \otimes \alpha_{n,\Phi}) = (\mathcal{F}_n(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_n))_\Phi.$$

L'application formelle $\mathcal{F}_\Phi = \sum_n \mathcal{F}_{n,\Phi}$ *est une formalité entre* $T_{poly,\Phi}(TM)$ *et* $D_{poly,\Phi}(TM)$*.*

Preuve. — Il suffit d'écrire l'équation de formalité pour $\mathcal{F}$ sur M puis le relever par Φ. On en déduit alors l'équation de formalité pour $\mathcal{F}_\Phi$ entre les espaces $T_{poly,\Phi}(TM)$ et $D_{poly,\Phi}(TM)$. □

Bibliographie

[CFT] Cattaneo (A.), Felder (G.) and Tomassini (L.). — "From local to global deformation quantization of Poisson manifolds", Duke Math. J. 115, no. 2 , p.329-352 (math.QA/0012228) (2002).

[CF] Cattaneo (A.) and Felder (G.). — "On the globalization of Kontsevich's star product and the perturbative sigma model", Prop. Theor. Phys. Suppl. 144, p. 38-53 (hep-th/0111028) (2001).

[GU] Grabowski (J.) and Urabanski (P.). — "Tangent lifts of Poisson and related structures",J.Phys.A 28, p. 6743-6777 (1995).

[K] Kontsevich (M.). — "Deformation quantization of Poisson manifolds,I", Lett. Math. Phys. 66, p. 157-216 (q-alg/9709040) (2003).