ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

Philippe Rambour, Abdellatif Seghier

Inversion des matrices de Toeplitz dont le symbole admet un zéro d'ordre rationnel positif, valeur propre minimale

Tome XXI, nº 1 (2012), p. 173-211.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2012_6_21_1_173_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XXI, n° 1, 2012
pp. 173–211

Inversion des matrices de Toeplitz dont le symbole admet un zéro d'ordre rationnel positif, valeur propre minimale

Philippe Rambour[(1)], Abdellatif Seghier[(2)]

Résumé. — Cet article présente trois résultats distincts. Dans une première partie nous donnons l'asymptotique quand N tend vers l'infini des coefficients des polynômes orthogonaux de degré N associés au poids $\varphi_\alpha(\theta) = |1 - e^{i\theta}|^{2\alpha} f_1(e^{i\theta})$, où f_1 est une fonction strictement positive suffisamment régulière et $\alpha > \frac{1}{2}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Nous en déduisons l'asymptotique des éléments de l'inverse de la matrice de Toeplitz $T_N(\varphi_\alpha)$ au moyen d'un noyau intégral G_α. Nous prolongeons ensuite un résultat de A. Böttcher et H. Windom relatif à l'asymptotique de la valeur propre minimale des matrices de Toepliz de symbole φ_α. On sait que dans ce cas la plus petite valeur propre de cette matrice admet une asymptotique, quand N tend vers l'infini, de la forme $\frac{c_\alpha}{N^{2\alpha}} f_1(1)$. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$ A. Böttcher et H. Windom obtiennent une asymptotique de c_α quand α tend vers l'infini, et un encadrement de c_α dans les autres cas. Nous obtenons ici le même type de résultat, mais pour $\alpha \in]\frac{1}{2}, +\infty[\setminus\mathbb{N}$.

Abstract. — Three results are stated in this paper. The first one is devoted to the study of the orthogonal polynomial with respect of the weight $\varphi_\alpha(\theta) = |1 - e^{i\theta}|^{2\alpha} f_1(e^{i\theta})$, with $\alpha > \frac{1}{2}$ and $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, and f_1 a regular function. We obtain an asymptotic expansion of the coefficients of these polynomials, and we deduce an asymptotic of the entries of $(T_N(\varphi_\alpha))^{-1}$ where $T_N(\varphi_\alpha)$ is the Toeplitz matrix with symbol φ_α. Then we extend a

(*) Reçu le 27/04/2010, accepté le 07/01/2012

(1) Université de Paris Sud, Bâtiment 425; F-91405 Orsay Cedex.
philippe.rambour@math.u-psud.fr
(2) Université de Paris Sud, Bâtiment 425; F-91405 Orsay Cedex.
abdelatif.seghier@math.u-psud.fr

Article proposé par Gilles Carron.

result of A. Böttcher and H. Widom result related to the minimal eigenvalue of the Toeplitz matrix $T_N(\varphi_\alpha)$. For N goes to the infinity it is well known that this minimal eigenvalue admits as asymptotic $\frac{c_\alpha}{N^{2\alpha}} f_1(1)$. When $\alpha \in \mathbb{N}$ the previous authors obtain an asymptotic of c_α for α going to the infinity, and they have the bounds of c_α for the other cases. Here we obtain the same type of results but for $\alpha \in]\frac{1}{2}, +\infty[\setminus\mathbb{N}$.

1. Introduction

Dans tout cet article nous noterons par χ la fonction $\theta \to e^{i\theta}$ et par $\hat{h}(j)$ le coefficient de Fourier d'ordre j d'une fonction h. Rappelons également que si f est une fonction de $L^1(\mathbb{T})$ on appelle matrice de Toeplitz d'ordre N de symbole f, et on note $T_N(f)$, la matrice $(N+1)\times(N+1)$ telle que $(T_N(f))_{k+1,l+1} = \hat{f}(l-k) \quad \forall\, k,l \quad 0 \leqslant k,l \leqslant N$ (voir [4]). Une fonction de $L^1(\mathbb{T})$ strictement positive sur le tore est appelée une fonction régulière. Ici nous nous intéressons plus précisément aux matrices de Toeplitz de symbole $\varphi_\alpha = |1-\chi|^{2\alpha} f_1$ où f_1 est une fonction régulière et où α est un réel non entier strictement supérieur à $\frac{1}{2}$. Quand $f_1 = 1$ on dira qu'on a un symbole pur.

Un des buts de cet article est, dans une première partie, de compléter les résultats de [20] et de [22]. C'est à dire de donner une expression asymptotique des termes $(T_N(\varphi_\alpha))^{-1}_{k,l}$ et des termes $(T_N(\varphi_\alpha))^{-1}_{k,1}$ avec $k = [Nx]$ et $l = [Ny]$, $0 < x, y < 1$ (voir les théorèmes 2.2 et 2.4). Autrement dit nous nous intéressons aux éléments du « coeur » de l'inverse de la matrice $T_N(\varphi_\alpha)$ et au « coeur » de l'ensemble des coefficients du polynôme orthogonal de degré N associé au symbole f. Nous avons fourni ces résultats pour $\alpha \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ dans [22] et pour α entier positif dans [20] (voir aussi, bien sûr, [27], et [1]). Le résultat pour $\alpha = 1$ est dû à Spitzer-Stone ([24]) et aussi à Courant, Friedrichs, et Lewy ([7]). On remarque que ces asymptotiques sont donnés par des noyaux dont l'expression est toujours la même dans le cas des coefficients $(T_N(\varphi_\alpha))^{-1}_{k,1}$, $k = [Nx]$, $0 < x < 1$. De plus les noyaux G_α donnant l'asymptotique de $(T_N(\varphi_\alpha))^{-1}_{k,l}$, $k = [Nx]$ et $l = [Ny]$, $0 < x < 1, y < 1$, sont de la même forme pour tous les α dans $]0, +\infty[$.

Des auteurs ont donné, récemment, le comportement asymptotique lorsque N tend vers l'infini du polynôme orthogonal de degré N associé à un poids régulier ou à un poids du type $\theta \to W(\theta)\prod_{j=1}^{r} |1-e^{i\theta}|^{2\alpha_j}$ où W est une fonction régulière sur le tore (voir [16] et [15]) . Cependant l'asymptotique des coefficients de ces polynômes n'avait jamais été précisée. On peut remarquer que dans la démonstration du théorème 2.2 nous donnons également une asymptotique du « bord » de l'ensemble des coefficients de ce polynôme orthogonal (voir le théorème 4.4 et les propriétés (H_1) et (H_3)).

Un autre problème classique lié aux matrices de Toeplitz est celui du comportement de leurs valeurs propres et particulièrement de leurs valeurs propres extrémales ([11],[28], [26], [27], [25]) et notamment de la plus petite. Si λ_α désigne la valeur propre minimale de $T_N(\varphi_\alpha)$ on sait que dans le cas où l'exposant α est un entier naturel strictement positif ([5], [6]), il existe une constante c_α telle que pour N tendant vers l'infini

$$\lambda_\alpha \sim f_1(1)\frac{c_\alpha}{N^{2\alpha}}.$$

Kac, Murdoch et Szegö ont montré dans [12] que c_1 existe et vaut $= \pi^2$, et Parter a obtenu dans [17] l'existence de c_2 et $c_2 = 500,5467$. Dans [19] et [18] Parter a montré l'existence de c_α dans le cas général pour des exposants entiers. C'est donc un problème ancien que d'évaluer ou au moins d'encadrer le réel c_α et aussi de chercher un équivalent de cette constante quand α tend vers l'infini. Dans [5] Böttcher et Widom répondent à cette question pour α entier. Nous reprenons ici ce problème pour des exposants α qui sont des réels positifs non entiers. Dans le théorème 3.2 nous montrons l'existence des constantes c_α et nous donnons une expression formelle de c_α pour tout $\alpha > \frac{1}{2}$. Nous en déduisons ensuite des encadrements des constantes c_α pour les valeurs de α non entières situées dans les intervalles $]\frac{1}{2}, 1[$ et $]1, +\infty[$ (corollaire 3.3). Enfin nous retrouvons dans le cas où α est un réel positif, l'équivalent de c_α donné par Böttcher et Widom dans le cas entier (théorème 3.5). Dans le cas d'exposants réels négatifs, $\alpha \in]-\frac{1}{2}, 0[$ on pourra consulter [2]. Enfin nous tenons à remercier le referee des Annales Scientifiques de la Faculté des Sciences de Toulouse pour l'intérêt qu'il a manifesté pour notre travail et pour ses nombreuses remarques constructives qui nous ont permis d'améliorer notablement cet article.

2. Inverse des matrices de Toeplitz de symbole $|1 - e^{i\theta}|^{2\alpha} f_1$

Nous considérons maintenant les matrices de Toeplitz $T_N(|1 - e^{i\theta}|^{2\alpha} f_1)$ où α est un réel non entier strictement supérieur à $\frac{1}{2}$, la fonction f_1 étant régulière. On suppose de plus que f_1 appartient à l'ensemble $A(\mathbb{T}, 3/2)$ avec $A(\mathbb{T}, \nu) = \{c \in L^2(\mathbb{T}) / \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^\nu |\hat{c}(n)| < \infty\}$. Nous savons (voir [25]) qu'il existe des fonctions g et g_1 dans $H_2^+ = \{c \in L^2(\mathbb{T}) / \hat{c}(n) = 0 \iff n < 0\}$ telles que $|1 - e^{i\theta}|^{2\alpha} f_1 = g\bar{g}$, $f_1 = g_1\bar{g_1}$ (avec $g = (1 - e^{i\theta})^\alpha g_1$). Dans la suite pour tout entier positif nous notons $\beta_n^{(\alpha)}$ le coefficient d'ordre n du développement de $\frac{1}{g}(z)$ en série entière pour $|z|<1$. On peut remarquer que si $\alpha \in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ on a $\beta_n^{(\alpha)} = \widehat{(1/g)}(n)$. Dans tous les cas on a $\beta_n^{(\alpha)} = 0$ pour tout entier $n<0$. Rappelons qu'au voisinage de l'infini on a $\beta_n^{(\alpha)} \sim g_1^{-1}(1)\frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ (voir [29] volume 1 p.76 et 77, et aussi l'appendice pour le cas général). On remarque que dans le cas du symbole pur on a $\beta_0^{(\alpha)} = 1$ pour tout $\alpha > -\frac{1}{2}$, nous avons donc dans le cas général $\beta_0^{(\alpha)} = \beta_0^{(\alpha+1)}$ toujours pour $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Il faut noter que pour α entier naturel strictement supérieur à 1 les théorèmes 2.2 et 2.4 ont été complètement établis dans [20], et dans le cas où α est un réel contenu dans l'intervalle $]\frac{-1}{2},\frac{1}{2}]$ ils ont été démontrés dans [22]. Ici nous en donnons les démonstrations pour α un réel non entier strictement supérieur à $\frac{1}{2}$.

Remarque 2.1. — Dans la suite nous supposerons que $\widehat{g_1^{-1}}(0)$ est un réel strictement positif, cas auquel nous pouvons toujours nous ramener ([11],p.24). Nous avons donc $\beta_0^{(\alpha)} > 0$ pour tout $\alpha > \frac{1}{2}$.

THÉORÈME 2.2. — *Soit* $Q_N(e^{i\theta}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \delta_k^{(\alpha)} e^{ik\theta}$ *le polynôme orthogonal de degré* N *associé au poids* $|1-\chi|^{2\alpha} f_1$. *Alors si* $\alpha > \frac{1}{2}$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ *et* $f_1 \in A(\mathbb{T}, 3/2)$, *nous obtenons pour* $0<x<1$,

$$g_1(1)\delta_{[Nx]}^{(\alpha)} = N^{\alpha-1}\frac{\beta_0^{(\alpha)}}{\Gamma(\alpha)}(1-x)^{\alpha-1}x^{\alpha} + o(N^{\alpha-1}),$$

uniformément pour x *dans* $[\delta_1,\delta_2]$, $0<\delta_1<\delta_2<1$.

COROLLAIRE 2.3. — *Si* $\alpha > \frac{1}{2}$ *on a, avec les mêmes hypothèses que pour le théorème 2.2,*

$$f_1(1)\mathrm{Tr}\left(\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1\right)^{-1}\right) = N^{2\alpha}\frac{B(2\alpha,2\alpha)}{\Gamma^2(\alpha)(2\alpha-1)} + o(N^{2\alpha}).$$

Ce résultat a été obtenu pour $\alpha \in \mathbb{N}$ par A. Böttcher dans [1]. Dans le cas où $-\frac{1}{2}<\alpha<0$ ou $0<\alpha<\frac{1}{2}$ ce résultat a été établi dans [21].

THÉORÈME 2.4. — *Si* $0<x,y<1$ *pour* $\alpha > \frac{1}{2}$ $\alpha \notin \mathbb{N}$, *et* $f_1 \in A(\mathbb{T},3/2)$, *nous obtenons*

$$f_1(1)\Big(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\Big)^{-1}_{[Nx]+1,[Ny]+1} = N^{2\alpha-1}\frac{(\beta_0^{(\alpha)})^2}{\Gamma^2(\alpha)}\Big(G_\alpha(x,y)\Big) + o(N^{2\alpha-1})$$

uniformément en (x,y) *pour* $0 < \delta_1 \leqslant x, y \leqslant \delta_2 < 1$ *avec*

$$G_\alpha(x,y) = x^\alpha y^\alpha \int_{\max(x,y)}^1 \frac{(t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}}{t^{2\alpha}} dt.$$

3. Valeurs propres minimales

Donnons tout d'abord la définition suivante

DÉFINITION 3.1. — *Si* f *est une fonction de* $L^2([0,1]\times[0,1])$ *et* n *un entier naturel, nous noterons* $*^n f$ *la fonction définie sur* $[0,1]\times[0,1]$ *par*

$$*^n f(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,x_1) \int_0^1 f(x_1,x_2) \cdots$$

$$\int_0^1 f(x_{n-1},x_n) f(x_n,y) dx_n dx_{n-1} \cdots dx_2 dx_1$$

THÉORÈME 3.2. — *Si* $f_1 \in A(\mathbb{T}, 3/2)$ *et si* $\lambda_{min}\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)$ *désigne la valeur propre minimale de* $T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)$ *avec* $\lambda_{min}\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right) \sim \frac{c_\alpha}{N^{2\alpha}} f_1(1)$ *on a, pour tout réel* $\alpha > \frac{1}{2}$, $\alpha \notin \mathbb{N}$

$$\frac{f_1(1)}{N^{2\alpha}} \left(\lim_{s\to+\infty} \left(\int_0^1 *^s G_\alpha(t,t) dt \right)^{1/s} \right) = \frac{1}{c_\alpha} \left(1 + o(1)\right).$$

COROLLAIRE 3.3. — *En gardant les mêmes notations et hypothèses que pour le théorème précédent on a les encadrements suivants pour la constante* c_α.

1. *Si* $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ *alors*

$$\frac{\Gamma(4\alpha)\Gamma^2(\alpha)(2\alpha-1)}{\Gamma^2(2\alpha)} \leqslant c_\alpha \leqslant \Gamma^2(\alpha) \frac{(2\alpha+1)(2\alpha+2)(2\alpha+3)}{2}.$$

2. *Si* $\alpha \in]1, +\infty[\setminus \mathbb{N}^*$ *alors*

$$\frac{\Gamma^2(\alpha)\Gamma(4\alpha)}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\alpha+1)} \leqslant c_\alpha \leqslant \frac{\Gamma^2(\alpha)}{2}(2\alpha-1)(4\alpha-1)(2^{4\alpha-1}).$$

Pour α entier supérieur ou égal à 1 Böttcher et Widom obtiennent dans [5] l'encadrement

$$\frac{\Gamma^2(\alpha)\Gamma(4\alpha)}{\Gamma(2\alpha-1)\Gamma(2\alpha+1)} \leqslant c_\alpha \leqslant \frac{4\alpha+1}{2\alpha+1}\frac{\Gamma(4\alpha+1)\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma^2(2\alpha+1)}.$$

Nous ne pouvons pas récupérer le majorant dans le cas où α est un réel positif non entier, les arguments utilisés étant spécifiques aux entiers. Néanmoins notre majorant est d'ordre comparable.

La valeur propre minimale est beaucoup plus difficile à évaluer dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$. Néanmoins en utilisant un résultat de [22] nous obtenons la propriété

Propriété 3.4. — *Si $\alpha = \frac{1}{2}$ on a*

$$\lambda_{min}\left(T_N(|1-\chi|f_1)\right) \geqslant \frac{\pi}{N\ln N}.$$

Enfin de la même manière que Böttcher et Widom dans [22] nous obtenons l'asymptotique de c_α lorsque α tend vers l'infini.

Théorème 3.5. — *Avec les hypothèses du corollaire précédent nous pouvons écrire, pour α tendant vers plus l'infini*

$$c_\alpha = \sqrt{8\pi\alpha}\left(\frac{4\alpha}{e}\right)^{2\alpha}\left(1+O(1/\sqrt{\alpha})\right).$$

4. Démonstration du théoréme 2.2. Coefficients des polynômes orthogonaux

4.1. Position du problème

Dans cette partie nous considérerons un symbole de la forme $f = |1-\chi|^{2\alpha}f_1$ avec f_1 une fonction régulière qui s'écrit $f_1 = g_1\bar{g}_1$ et où α est un réel strictement supérieur à $\frac{1}{2}$. Dans la suite de la démonstration nous supposerons, pour simplifier les notations, que $g_1(1) \in \mathbb{R}$. Rappelons que les théorèmes 2.2 et 2.4 ont été établis dans [22] pour $\alpha \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et dans [20] pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$. On pourra aussi consulter [23].

Nous utilisons d'une manière déterminante la propriété fondamentale des polynômes prédicteurs. Rappelons que si $h \in L^1(\mathbb{T})$ le polynôme prédicteur de h est le polynôme trigonométrique dont les coefficients sont obtenus en divisant les termes de la première colonne de l'inverse de $T_N(h)$ par $\left(T_N^{-1}(h)\right)_{1,1}^{1/2}$ (voir [14]).

Rappelons ici la propriété fondamentale des polynômes prédicteurs ainsi que la formule de Gohberg-Semencul [10].

Propriété 4.1. — *Si P_N désigne le polynôme prédicteur de degré N du symbole h alors*

$$\forall s, \quad -N \leqslant s \leqslant N \quad \widehat{h}(s) = \left(\widehat{\frac{1}{|P_N|^2}}\right)(s).$$

D'autre part si Q_N est le polynôme orthogonal associé au poids h rappelons que

$$Q_N(z) = z^N \overline{P_N}\left(\frac{1}{z}\right). \tag{4.1}$$

Le calcul des coefficients $(T_N(f))^{-1}_{k+1,l+1}$ $0 \leqslant l, k \leqslant N$ donne donc également les coefficients des polynômes orthogonaux. On a alors

$$T_N(h) = T_N\left(\frac{1}{|P_N|^2}\right). \tag{4.2}$$

Rappelons la propriété suivante

Propriété 4.2. — *Quelque soit l'entier naturel N et le complexe z appartenant à $\mathbb{T}$ on a $P_N(z) \neq 0$ et $Q_N(z) \neq 0$.*

Propriété 4.3 *(Gohberg-Semencul). — Si $K_N = \displaystyle\sum_{u=0}^{N} \omega_u \chi^u$ un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à N ne s'annulant pas sur le tore, on a, si $0 \leqslant k \leqslant l \leqslant N$*

$$T_N(\frac{1}{|K_N|^2})^{-1}_{k+1,l+1} = \sum_{u=0}^{k} \bar{\omega}_{k-u}\omega_{l-u} - \sum_{N-l}^{N+k-l} \omega_u \bar{\omega}_{u+l-k}.$$

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, on remarque que la formule de Gohberg-Semencul et aussi la propriété 4.1 permettent de calculer, en toute généralité, les coefficients $(T_N(f))^{-1}_{h+1,l+1}$, $0 \leqslant h \leqslant N$, $\quad 0 \leqslant l \leqslant N$ quand on connaît les coefficients

$(T_N(f))^{-1}_{k+1,1}$ $0 \leqslant k \leqslant N$. La démarche naturelle est donc d'obtenir d'abord le théorème 2.2 et d'en déduire le théorème 2.4.

Dans le cas où $\alpha > \frac{1}{2}$ la propriété fondamentale des polynômes prédicteurs et la formule de récursion (4.5) ci-dessous permettent de déterminer les termes $\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha+2} f_1)\right)^{-1}_{k+1,1}$ pour $0 \leqslant k \leqslant N$ en fonction des termes $\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}_{u+1,1}$, $0 \leqslant u \leqslant N$. Il est donc naturel d'utiliser un raisonnement par récurrence pour obtenir les coefficients $\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}_{u+1,1}$, $0 \leqslant u \leqslant N$, pour tous les réels $\alpha > \frac{1}{2}$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ à partir des éléments $\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha-2} f_1)\right)^{-1}_{k+1,1}$, $0 \leqslant k \leqslant N$. Dans le cas où $-\frac{1}{2} < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ ces coefficients sont connus explicitement (voir [22]), nous pouvons donc initialiser aiément la récurrence. Plus précisément pour un entier positif p et si α est un réel appartenant à l'ensemble $]p-\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}] \setminus \{p\}$ nous allons déduire, à l'aide de la formule (4.5), les coefficients de la première colonne de $\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}$ (pour $\alpha > \frac{1}{2}$) de ceux de $\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha-2} f_1)\right)^{-1}$ que nous supposerons connus.

4.2. Formules préliminaires.

Citons tout d'abord le résultat suivant établi, comme nous l'avons déjà dit, dans [22].

Théorème 4.4. — *Si* $\frac{-1}{2} < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ *et* $0 < x < 1$

$$g_1(1)\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}_{[Nx]+1,1} = N^{\alpha-1} \frac{\beta_0^{(\alpha)}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\alpha} + o(N^{\alpha-1})$$

uniformément par rapport à x, sur tout intervalle $[\delta_1, \delta_2]$, $0 < \delta_1 < \delta_2 < 1$.

Théorème 4.5. — *Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème précédent nous avons, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $\lim_{N\to\infty} \frac{k}{N} = 0$, les relations suivantes*

1.

$$\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}_{k+1,1} = \beta_0^{(\alpha)} \left(\beta_k^{(\alpha)} - \left(\frac{\alpha^2}{N} \beta_k^{(\alpha+1)} (1+o(1))\right)\right), \; N \to \infty \tag{4.3}$$

2.

$$\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}_{N+1-k,1} = \beta_0^{(\alpha)} \left(\beta_k^{(\alpha+1)}\right) \frac{\alpha}{N} (1+o(1)), \; N \to \infty, \tag{4.4}$$

les deux formules étant uniformes en k pour $k \in [0, [N\epsilon]]$, ϵ étant un réel suffisamment petit.

Remarque 4.6. — C'est-à-dire que pour tout réel $\epsilon_1 > 0$ il existe un entier N_0 et un réel $\epsilon > 0$ tels que si $N \geqslant N_0$ on ait pour tout $k \in [0, [N\epsilon]]$

1.
$$\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}_{k+1,1} = \beta_0^{(\alpha)} \left(\beta_k^{(\alpha)} - \left(\frac{\alpha^2}{N}\beta_k^{(\alpha+1)}(1+r_k)\right)\right),$$
avec $|r_k| \leqslant \epsilon_1$,

2.
$$\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}_{N+1-k,1} = \beta_0^{(\alpha)} \left(\beta_k^{(\alpha+1)}\right) \frac{\alpha}{N}(1+r'_k)$$
avec $|r'_k| \leqslant \epsilon_1$.

(On pourra consulter [13] pour la démonstration du point 2 de ce dernier théorème. La démonstration du point 1 est donnée dans l'appendice du présent article).

Dans la suite de la démonstration nous allons utiliser une formule de récursion permettant de calculer les coefficients $\left(T_{N,|1-\chi|^2/|K_{N+1}|^2}\right)^{-1}_{k+1,1}$ en fonction des coefficients du polynôme K_{N+1} qui est supposé de degré inférieur ou égal à $N+1$. Cette formule a été établie dans [20]. Nous allons la rappeler ici. Si $K_{N+1} = \sum_{u=0}^{N+1} \omega_u \chi^u$ un polynôme trigonométrique ne s'annulant pas sur $\mathbb{T}$, on a :

$$\left(T_{N,|1-\chi|^2/|K_{N+1}|^2}\right)^{-1}_{k+1,1} = \overline{\omega_0} \left(\sum_{u=0}^{k} \omega_{k-u} + \frac{1}{N+1+A(K_{N+1})} A_{N,k}\right) \tag{4.5}$$

avec :

1. $A_{N,k} = \left(Q_{2,k} K_{N+1}(1)/\bar{K}_{N+1}(1) - Q_{1,k}\right)$,
2. $A(K_{N+1}) = -2\Re(\bar{K}'_{N+1}(1) K_{N+1}(1))/|K_{N+1}(1)|^2$
3. $Q_{2,k} = \sum_{u=N+2-k}^{N+1} \bar{\omega}_u (u-(N+1)+k) \quad Q_{1,k} = \sum_{u=0}^{k} \omega_u (k-u+1).$

Il est clair que si $h \in L^2(\mathbb{T})$ ces équations permettent de calculer le polynôme prédicteur de $|1-\chi|^2 h$ en fonction de celui de h. C'est ce que nous allons faire dans la suite de la démonstration. Pour cela nous noterons par $P_{N+1,\alpha}$ le polynôme prédicteur de degré $N+1$ de $|1-\chi|^{2\alpha} f_1$, et nous poserons : $P_{N+1,\alpha} = \sum_{u=0}^{N+1} \gamma_u^{(\alpha)} \chi^u$. Il est facile de se convaincre que pour pouvoir utiliser la formule (4.5) pour passer de la connaissance de $\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}_{k+1,1}$ à celle de $\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha+2} f_1)\right)^{-1}_{k+1,1}$ nous avons besoin de connaître les quantités

i)
$$\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}_{k+1,1} \quad \text{quand} \quad \lim_{N\to+\infty} k/N = 0$$

ii)
$$\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}_{k+1,1} \quad \text{quand} \quad \lim_{N\to+\infty} k/N = x,\ 0<x<1$$

iii)
$$\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}_{N-k+1,1} \quad \text{quand} \quad \lim_{N\to+\infty} k/N = 1$$

iv)
$$P_{N+1,\alpha}(1) \quad \text{et} \quad P'_{N+1,\alpha}(1).$$

Pour $\alpha \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, nous connaissons les trois premières quantités, ce sont les théorèmes 4.4 et 4.5. Il nous faut obtenir les deux dernières, c'est-à-dire $P_{N+1,\alpha}(1)$ et $P'_{N+1,\alpha}(1)$. Ces valeurs peuvent se déduire des résultats par un passage à la limite dans le théorème 1.4 de l'article [15].

Nous sommes finalement conduits à établir par récurrence les énoncés suivants, qui doivent être vérifiés pour tout entier naturel p.

Propriétés $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$, $H_4(p)$. — Pour tout entier $p\in\mathbb{N}$ et tout réel $\alpha \in]p-\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}] \setminus \{p\}$ nous avons les relations suivantes

1. $H_1(p)$
$$\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}_{k+1,1} = \overline{\beta_0^{(\alpha)}} \beta_k^{(\alpha)} \left(1+o(1)\right)$$
uniformément pour $k \in [0, N\epsilon]$ où ϵ est un réel assez petit.

2. $H_2(p)$
Si $\lim_{N\to+\infty} k/N = x$, $0<x<1$ nous avons
$$g_1(1) \left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}_{k+1,1} = N^{\alpha-1} \frac{\overline{\beta_0^{(\alpha)}}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\alpha} + o(N^{\alpha-1})$$
uniformément pour $x \in [\delta_1, \delta_2]$, $0<\delta_1<\delta_2<1$.

3. $H_3(p)$
$$\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}_{N-k+1,1} = O\left(\max\left(N^{\alpha-1}, \frac{1}{N}\right)\right)$$
uniformément pour $k \in [0, N\epsilon]$ où $\epsilon > 0$ est un réel assez petit.

4. $H_4(p)$
$$g_1(1) \quad P_{N+1,\alpha}(1) = N^\alpha \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} + o(N^\alpha),$$
$$g_1(1) P'_{N+1,\alpha}(1) = N^{\alpha+1} \frac{\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+2)\Gamma(\alpha)} + o(N^{\alpha+1}).$$

Remarque 4.7. — Pour la propriété $H_1(p)$ l'uniformité est à comprendre comme dans le théorème 4.5. C'est-à-dire :
pour tout $\epsilon_1 > 0$ il existe un réel $\epsilon > 0$ et un entier N_0 tel que $\forall N \geqslant N_0$ on ait pour tout entier k dans $[0, [N\epsilon]]$
$$\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}_{k+1,1} = \beta_0^{(\alpha)} \beta_k^{(\alpha)} (1 + R_k)$$
avec $|R_k| < \epsilon_1$.

Par contre pour ce qui est de la propriété $H_3(p)$ elle peut se traduire de la manière suivante :
pour tout réel $\epsilon > 0$ suffisamment petit il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout entier k dans $[0, [N\epsilon]]$ on ait
$$\left|\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}_{N-k+1,1}\right| \leqslant M\left(\max(N^{\alpha-1}), \frac{1}{N}\right).$$

Pour $p = 0$ (c'est-à-dire $\alpha \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$) ces points sont établis. Il nous faut maintenant les établir pour les entiers p strictement positifs en utilisant une démonstration par récurrence, c'est-à-dire que nous supposerons ces propiétés établies pour $p \geqslant 0$ et nous les obtiendrons pour $p+1$. Cependant certains calculs demandent un traitement différent selon que le réel α est positif ou négatif. Nous serons donc amenés à distinguer parfois ces deux cas dans nos démonstrations. Remarquons enfin que l'uniformité de l'expression asymptotique passe de α à $\alpha' = \alpha + 1$ grâce à la relation (4.5).

4.3. Démonstration des propriétés $H_1(p+1)$, $H_2(p+1)$, $H_3(p+1)$, $H_4(p+1)$

4.3.1. Démonstration de la propriété $H_1(p+1)$

Il nous faut calculer l'asymptotique de $\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha+2} f_1)\right)^{-1}_{k+1,1}$ quand $\lim_{N\to+\infty} k/N = 0$. Pour ce faire nous pouvons remarquer que dans le cas qui nous occupe ici, c'est-à-dire, où P_{N+1} est le polynôme prédicteur de degré $N+1$ de $|1-\chi|^{2\alpha} f_1$ avec $\alpha \in]p-\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}] \setminus \{p\}$ la propriété $H_4(p)$ permet d'écrire si $g_1(1)=1$, la formule (4.5) sous la forme simplifiée suivante

$$\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha+2} f_1)\right)^{-1}_{k+1,1} =$$

$$\overline{\gamma_0^{(\alpha)}} \left(\sum_{u=0}^{k} \gamma_k^{(\alpha)} + \frac{2\alpha+1}{N} \left(1+o(1)\right) \left(Q_{2,k}(1+o(1)) - Q_{1,k}\right) \right). \qquad (4.6)$$

Dans un premier temps il est facile de vérifier que l'hypothèse de récurrence, jointe à la formule (4.6) et à la construction des coefficients du polynôme prédicteur (ne pas oublier de diviser $\left(T_N(|1-\chi|^2/|P_{N+1,\alpha}|^2)\right)^{-1}_{k+1,1}$ par $\left(\left(T_N(|1-\chi|^2/|P_{N+1,\alpha}|^2)\right)^{-1}_{1,1}\right)^{1/2}$) donne, pour tout $\alpha > -\frac{1}{2}$ (en se souvenant que $\beta_0^{(\alpha)} > 0$),

$$\gamma_0^{(\alpha+1)} = \frac{\left(\beta_0^{(\alpha)}\right)^2 + O(\frac{1}{N})}{\beta_0^{(\alpha)}\left(1+o(1)\right)} = \beta_0^{(\alpha)} + O(\frac{1}{N}) = |\beta_0^{(\alpha+1)}| + O(\frac{1}{N}).$$

Si maintenant $\frac{k}{N} \to 0$ quand N tend vers l'infini, la formule (4.5) devient

$$\left(T_N(|1-\chi|^2/|P_{N+1,\alpha}|^2)\right)^{-1}_{k+1,1}$$

$$\sim \overline{\gamma_0^{(\alpha)}} \left(\sum_{u=0}^{k} \gamma_u^{(\alpha)} + \frac{2\alpha+1}{N} \left(-(k+1) \sum_{u=0}^{k} \gamma_u^{(\alpha)} + \sum_{u=0}^{k} u \gamma_u^{(\alpha)} \right) \right).$$

Si $\epsilon_1 > 0$ est un réel fixé, on peut se donner, indépendamment de N, un entier k_0 tel que si $k \geqslant k_0$ on ait $\beta_k^{(\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha) g_1(1)} k^{\alpha-1} + \tau_k$ avec $|\tau_k| < \epsilon_1$ et $\beta_k^{(\alpha+1)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1) g_1(1)} k^{\alpha} + \tau'_k$ avec $|\tau'_k| < \epsilon_1$.
Si k prend une valeur suffisamment petite ($k = 0, 1, 2 \cdots, k_0$), le résultat est obtenu immédiatement pour $\alpha+1$ en utilisant que $\beta_0^{(\alpha)} = \beta_0^{(\alpha+1)}$ et la relation (voir [29] p77)

$$\sum_{u=0}^{k} \beta_u^{(\alpha)} = \beta_k^{(\alpha+1)}. \qquad (4.7)$$

Si ce n'est pas le cas nous devons faire un calcul plus détaillé.

i) **Supposons $\alpha > 0$.** Soit un entier $k \in [k_0, N\epsilon]$, $\epsilon > 0$ étant fourni par la propriété $H_1(p)$, nous avons :

$$\overline{\gamma_0^{(\alpha)}} \sum_{u=0}^{k} \gamma_u^{(\alpha)} = \left(\beta_0^{(\alpha)}\right)^2 \sum_{u=0}^{k} \beta_u^{(\alpha)}(1 + r_u)$$

avec $|r_u| \leqslant \epsilon_1$ pour tout $u \in [0, k] \subset [0, N\epsilon]$. On obtient alors

$$\Big|\sum_{u=0}^{k} \beta_u^{(\alpha)} r_u\Big| \leqslant \sum_{u=0}^{k} |\beta_u^{(\alpha)}|\epsilon_1 = O(k^\alpha \epsilon_1) = o(|\beta_k^{(\alpha+1)}|)$$

et en utilisant l'égalité (4.7) nous pouvons conclure

$$\overline{\gamma_0^{(\alpha)}} \sum_{u=0}^{k} \gamma_u^{(\alpha)} = \left(\beta_0^{(\alpha)}\right)^2 \beta_k^{(\alpha+1)} \left(1 + o(1)\right).$$

ii) **Supposons $0 > \alpha > -\frac{1}{2}$.** On se donne encore une fois un entier $k \in [k_0, N\epsilon]$, ϵ étant comme dans le cas précédent. On utilise cette fois le point 1 du théorème 4.5. Pour connaître $\overline{\gamma_0^{(\alpha)}} \sum_{u=0}^{k} \gamma_u^{(\alpha)}$ il nous faut maintenant calculer $\sum_{u=0}^{k} \beta_u^{(\alpha)}$ d'une part, et d'autre part la somme $\sum_u^k \frac{\alpha^2}{N} \beta_u^{(\alpha+1)} + \sum_u^k \frac{\alpha^2}{N} \beta_u^{(\alpha+1)} r_u$, r_u défini comme ci-dessus. Puisque $\alpha + 1 > 0$ nous avons

$$\sum_0^k \frac{\alpha^2}{N} \beta_u^{(\alpha+1)} = O(\frac{\alpha^2}{N} k^{\alpha+1}) = O(k^\alpha \epsilon) = o(k^\alpha),$$

et de même

$$\Big|\sum_0^k \frac{\alpha^2}{N} \beta_u^{(\alpha+1)} r_u\Big| \leqslant \epsilon_1 \sum_0^k \frac{\alpha^2}{N} |\beta_u^{(\alpha+1)}| = o(k^\alpha).$$

De nouveau l'égalité (4.7) nous donne

$$\overline{\gamma_0^{(\alpha)}} \sum_{u=0}^{k} \gamma_u^{(\alpha)} = \left(\beta_0^{(\alpha)}\right)^2 \beta_k^{(\alpha+1)} \left(1 + o(1)\right).$$

De même dans tous les cas nous avons : $\left|\sum_{u=0}^{k} u\beta_u^{(\alpha)} r_u\right| = O\left(k\beta_k^{(\alpha+1)}\epsilon_1\right) = o(|k\beta_k^{(\alpha+1)}|)$, et par la formule d'Euler et Mac-Laurin

$$\sum_{u=0}^{k} u\beta_u^{(\alpha)} = O\left(k\beta_k^{(\alpha+1)}\right),$$

c'est-à-dire que finalement

$$\sum_{u=0}^{k} u\gamma_u^{(\alpha)} = O\left(k\beta_k^{(\alpha+1)}\right).$$

En conclusion nous pouvons alors écrire, uniformément par rapport à k quand $\frac{k}{N} \to 0$ quand N tend vers l'infini

$$\left(T_N(|1-\chi|^2/|P_{N+1,\alpha}|^2)\right)^{-1}_{k+1,1} = (\beta_0^{(\alpha)})^2 \left(\beta_k^{(\alpha+1)}\right)(1+o(1)).$$

ce qui donne, avec la normalisation et $\beta_0^{(\alpha)} = \beta_0^{(\alpha+1)}$

$$\left(T_N(|1-\chi|^{2(\alpha+1)} f_1\right)^{-1}_{k+1,1} = \beta_0^{(\alpha+1)}\beta_k^{(\alpha+1)}(1+o(1)).$$

Ce qui donne la propriètè H_1 à l'ordre $p+1$.

4.3.2. Démonstration de la propriété $H_2(p+1)$

Cette démonstration se ramène au calcul de l'asymptotique de $\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}_{k+1,1}$ quand $\lim\limits_{N\to+\infty} k/N = x, 0 < x < 1$. Dans ce cas nous pouvons écrire la formule (4.6) de la manière suivante

$$\left(T_N(|1-\chi|^2/|P_{N+1}|)\right)^{-1}_{k+1,1} = \overline{\gamma_0^{(\alpha)}}\left(\sum_{u=0}^{k}\gamma_{k-u}^{(\alpha)} + \frac{2\alpha+1}{N}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\sum_{u=N+2-k}^{N+1}\overline{\gamma_u^{(\alpha)}}(u-(N+1)+k)(1+o(1)) - \sum_{u=0}^{k}\gamma_u^{(\alpha)}(k-u+1)\right)\right)$$
$$(1+O(1/N))$$

Calcul de la somme $\overline{\gamma_0^{(\alpha)}}\sum_{u=0}^{k}\gamma_{k-u}^{(\alpha)}$.

Cas $\alpha < 0$.
Ce cas correspond à la situation suivante : $\alpha \in]-\frac{1}{2}, 0[$ et on passe de $H_2(0)$ à $H_2(1)$.

Ecrivons $\overline{\gamma_0^{(\alpha)}}\sum_{u=0}^{k}\gamma_{k-u}^{(\alpha)} = S_1+S_2$ avec $S_1 = \overline{\gamma_0^{(\alpha)}}\sum_{u=0}^{[N\epsilon]}\gamma_u^{(\alpha)}$ et $S_2 = \overline{\gamma_0^{(\alpha)}}\sum_{[N\epsilon]+1}^{k}\gamma_u^{(\alpha)}$, avec ϵ un réel positif qui tend vers zéro. On trouve

$$S_1 = \frac{\beta_0^{(\alpha)}}{\Gamma(\alpha+1)g_1(1)}[N\epsilon]^\alpha + o(N^\alpha),$$

cette somme ayant déjà été calculée dans la preuve de la propriété $H_1(p+1)$. Nous avons de plus

$$\begin{array}{rcl} S_2 & = & \frac{\beta_0^{(\alpha)}}{\Gamma(\alpha)g_1(1)}N^\alpha\left(\int_{([N\epsilon]+1)/N}^{x} t^{\alpha-1}\left((1-t)^\alpha-1\right)dt + \int_{[N\epsilon]+1)/N}^{x} t^{\alpha-1}\right) \\ & & +o(N^\alpha) \\ & = & \frac{\beta_0^{(\alpha)}}{\Gamma(\alpha)g_1(1)}\left(N^\alpha\int_{([N\epsilon]+1)/N}^{x} t^{\alpha-1}\left((1-t)^\alpha-1\right)dt + \frac{N^\alpha x^\alpha}{\alpha} - \frac{[N\epsilon]^\alpha}{\alpha}\right) \\ & & +o(N^\alpha) \end{array}$$

l'uniformité étant fournie par l'uniformité de l'approximation de $\beta_u^{(\alpha)}$ par $\frac{u^{\alpha-1}}{g_1(1)\Gamma(\alpha)}$ et par le reste de la formule d'Euler et Mac-Laurin. Ce qui donne finalement

$$\overline{\gamma_0^{(\alpha)}}\sum_{u=0}^{k}\gamma_{k-u}^{(\alpha)} = \frac{\beta_0^{(\alpha)}}{\Gamma(\alpha)g_1(1)}N^\alpha\left(\int_{([N\epsilon]+1)/N}^{x} t^{\alpha-1}\left((1-t)^\alpha-1\right)dt + \frac{x^\alpha}{\alpha}\right)+o(N^\alpha).$$

Cas $\alpha > 0$.

La formule d'Euler Mac-Laurin donne immédiatement

$$\sum_{u=0}^{k}\gamma_{k-u}^{(\alpha)} = \frac{\beta_0^{(\alpha)}}{\Gamma(\alpha)g_1(1)}N^\alpha\int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^\alpha dt + o(N^\alpha).$$

Calcul de la somme $\overline{\gamma_0^{(\alpha)}}\sum_{u=0}^{k}u\gamma_u^{(\alpha)}$**.**

Dans tous les cas on obtient

$$\overline{\gamma_0^{(\alpha)}}\sum_{u=0}^{k} u\gamma_u^{(\alpha)} = \frac{\beta_0^{(\alpha)}}{\Gamma(\alpha)g_1(1)} N^{\alpha+1}\left(\int_{[N\epsilon]+1)/N}^{x} t^\alpha\left((1-t)^\alpha-1\right)dt+\frac{x^\alpha}{\alpha}\right)+o(N^{\alpha+1}).$$

Calcul de la somme $\overline{\gamma_0^{(\alpha)}}\sum_{u=N+2-k}^{N+1} u\gamma_u^{(\alpha)}$.

Là aussi la formule d'Euler Mac-Laurin donne immédiatement dans tous les cas

$$\sum_{u=N+2-k}^{N+1} u\gamma_u^{(\alpha)} = N^{\alpha+1}\frac{\beta_0^{(\alpha)}}{\Gamma(\alpha)g_1(1)}\int_{1-x}^{1} t^\alpha(1-t)^\alpha dt + o(N^{\alpha+1}).$$

Calcul de la somme $\overline{\gamma_0^{(\alpha)}}\sum_{u=N+2-k}^{N+1} \gamma_u^{(\alpha)}$.

On obtient de même, en utilisant les propriétés $H_2(p)$ et $H_3(p)$

$$\overline{\gamma_0^{(\alpha)}}\sum_{u=N+2-k}^{N+1}\gamma_u^{(\alpha)}(k-N-1)$$

$$= \frac{\beta_0^{(\alpha)}}{\Gamma(\alpha)g_1(1)} N^{\alpha+1}(k-N-1)\int_{1-x}^{1} t^{\alpha-1}(1-t)^\alpha dt + o(N^{\alpha+1}).$$

En effet nous pouvons écrire, en prenant ϵ un réel strictement positif assez petit

$$\sum_{u=N+2-k}^{N+1}\gamma_u^{(\alpha)}(k-N-1) = \sum_{u=N+2-k}^{N+1-[N\epsilon]}\gamma_u^{(\alpha)}(k-N-1)+\sum_{u=N+1-[N\epsilon]}^{N+1}\gamma_u^{(\alpha)}(k-N-1).$$

Il nous faut alors distinguer les cas α négatif et α positif.
Pour $\alpha\in]-\frac{1}{2},0[$ donnons nous $\epsilon_1>0$ bien choisi. Nous savons alors, en utilisant le théorème 4.5, qu'il existe un réel $\epsilon>0$ tel que pour tout $u\in[N-N\epsilon,N]$ on ait

$$\gamma_u^{(\alpha)} = \beta_0^{(\alpha)}\frac{\alpha}{N}\beta_{N-u}^{(\alpha+1)}(1+r_u)$$

avec $|r_u|\leqslant\epsilon_1$. On obtient alors

$$\sum_{u=N+1-[N\epsilon]}^{N+1}\gamma_u^{(\alpha)}(k-N-1) = O(\sum_{v=0}^{[N\epsilon]} v^\alpha) = N^{\alpha+1}\epsilon^{\alpha+1}.$$

On procède de même dans le cas $\alpha > 0$ en utilisant la propiété $H_3(p)$ à l'ordre p.

Fin de la démonstration de la propriété $H_2(p+1)$.

Nous avons obtenu :

- si $\alpha < 0$

$$\left(T_N\left(\frac{|1-\chi|^{2(\alpha+1)}}{|P_{N+1}|^2}\right)\right)^{-1}_{k+1,1} = N^\alpha \frac{\beta_0^\alpha}{\Gamma(\alpha)g_1(1)} k_{\alpha,1}(x) + o(N^\alpha),$$

avec

$$\begin{aligned} k_{\alpha,1}(x) = & \int_0^x t^{\alpha-1}\left((1-t)^\alpha - 1\right)dt + \frac{x^\alpha}{\alpha} + \\ & + \ (2\alpha+1)\left(\int_{1-x}^1 t^{\alpha-1}(1-t)^\alpha(t+x-1)dt + \int_0^x t^\alpha(1-t)^\alpha dt \right. \\ & - \ \left. \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha} - x\int_0^x t^{\alpha-1}\left((1-t)^\alpha - 1\right)dt\right), \end{aligned}$$

- si $\alpha > 0$

$$\left(T_N\left(\frac{|1-\chi|^{2(\alpha+1)}}{|P_{N+1}|^2}\right)\right)^{-1}_{k+1,1} = N^\alpha \frac{\beta_0^\alpha}{\Gamma(\alpha)g_1(1)} k_{\alpha,2}(x) + o(N^\alpha),$$

avec

$$k_{\alpha,2}(x) = \int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^\alpha dt + (2\alpha+1)$$
$$\left(\int_{1-x}^1 t^{\alpha-1}(1-t)^\alpha(t+x-1)dt + \int_0^x t^\alpha(1-t)^\alpha dt - x\int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^\alpha dt\right).$$

On vérifie par un calcul immédiat que

$$\frac{d^2}{dx^2}k_{\alpha,1}(x) = \frac{d^2}{dx^2}k_{\alpha,2}(x) = \frac{1}{\alpha}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^\alpha(1-x)^{\alpha+1}\right).$$

Puisque le développement en série entière de ces trois fonctions est une somme de termes en $t^{\alpha+j}, j \in \mathbb{N}^*$ ces fonctions ne peuvent différer d'un polynôme de degré un. Elles sont donc égales, ce qui achève de prouver la propriété $H_2(p+1)$.

4.3.3. Démonstration de la propriété $H_3(p+1)$

Cette démonstration se ramène finalement au calcul de l'asymptotique du terme $\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}_{N-k+1,1}$ quand $N-k=[N\epsilon]$ avec $\lim\limits_{N\to+\infty} \epsilon = 0$. La formule de récursion (4.5) nous conduit à considérer la somme

$$S = \sum_{u=N+1-k}^{N+1} \gamma_u^{(\alpha)}(u-(N+1)+k).$$

Dans le cas où $\alpha<0$ on écrit, avec le théorème 4.5

$$S = O\left(\sum_{u=N+1-k}^{N+1} \frac{\beta^{(\alpha+1)}_{N-u}}{N}(u+[N\epsilon])\right) = o(N^{\alpha+1}).$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\left(T_N(|1-\chi|^2/|P_{N+1}|)\right)^{-1}_{k+1,1} \sim P_{N+1}(1) + \\
&+\frac{2\alpha+1}{N}\left(o(N^{\alpha+1}) + \left(\overline{P'_{N+1}(1)}\right) - NP_{N+1}(1)\right) \\
&= O(N^\alpha) = O\left((\max(N^{(\alpha+1)-1}, \frac{1}{N})\right).
\end{aligned}$$

Si $\alpha>0$ on a

$$\begin{aligned}
S &= O\left(\sum_{u=N+1-k}^{N+1} \max\left(N^{\alpha-1}, \frac{1}{N}\right)(u+[N\epsilon])\right) \\
&= O\left(\max N^{\alpha+1}\epsilon, N\epsilon\right) = o(N^{\alpha+1}).
\end{aligned}$$

Le calcul se poursuit ensuite comme ci-dessus.

Nous obtenons ainsi l'égalité annoncée, c'est à dire la propriété $H_3(p+1)$

4.3.4. Démonstration de la propriété $H_4(p+1)$

Ces quantités sont établies pour $\alpha \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Le calcul dans le cas général est une simple application des propriétés $H_1(p+1)$, $H_2(p+1)$, $H_3(p+1)$ et de la formule d'Euler et Mac-Laurin. Cette dernière propriété peut aussi s'obtenir par calcul direct à partir des résultats de [15].

5. Démonstration du corollaire 2.3 et du théorème 2.4

5.1. Calcul de la trace quand $\alpha > \frac{1}{2}$

La propriété 4.3 permet d'écrire, quand $l = k$

$$\mathrm{Tr}\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{u=0}^{k} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 - \sum_{u=N-k}^{N} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 \right).$$

Si $1 > \epsilon > 0$ nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1} &= \sum_{k=0}^{[N\epsilon]} \left(\sum_{u=0}^{k} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 - \sum_{u=N-k}^{N} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 \right) \\ &+ \sum_{k=[N\epsilon]+1}^{N-[N\epsilon]} \left(\sum_{u=0}^{k} |\gamma_u(\alpha)|^2 - \sum_{u=N-k}^{N} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 \right) \\ &+ \sum_{k=N-[N\epsilon]+1}^{N} \left(\sum_{u=0}^{k} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 - \sum_{u=N-k}^{N} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 \right). \end{aligned}$$

Lemme 5.1. — *Les propriétés $H_1(p)$ et $H_3(p)$ pour p tel que $\alpha \in]p - \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}]$ permettent d'affirmer que si ϵ est convenablement choisi*

$$\sum_{u=0}^{k} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 - \sum_{u=N-k}^{N} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 = o(N^{2\alpha-1}) \quad \forall k \in [0, [N\epsilon]]$$

$$\sum_{u=0}^{k} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 - \sum_{u=N-k}^{N} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 = o(N^{2\alpha-1}) \quad \forall k \in [N - [N\epsilon] + 1, N].$$

uniformément par rapport à k dans $[0, [N\epsilon]]$.

Démontrons ce lemme.

Pour cela donnons-nous $\epsilon_1 > 0$ et prenons pour ϵ la valeur fournit par la propiété $H_1(p)$ et écrivons que, pour tout $k \in [0, [N\epsilon]]$,

$$\sum_{u=0}^{k} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 = \left(\beta_0^{(\alpha)}\right)^2 \left(\sum_{u=0}^{k} |\beta_u^{(\alpha)}|^2 (1 + r_u) \right)$$

avec toujours $|r_u| < \epsilon_1$ uniformément pour tout entier $u \in [0, [N\epsilon]]$. Finalement, puisque $2\alpha - 1 > 0$, nous pouvons conclure qu'il existe un entier $M > 0$

tel que pour tout entier k dans l'intervalle considéré $\sum_{u=0}^{k} |\gamma_u|^2 \leqslant Mk^{2\alpha-1}$ c'est-à-dire $\sum_{u=0}^{k} |\gamma_u|^2 = O(N^{2\alpha-1}\epsilon^{2\alpha-1}) = o(N^{2\alpha-1})$ uniformément par rapport à k dans $[0, [N\epsilon]]$. De même, quitte à réduire ϵ pour pouvoir utiliser la propriété $H_3(p)$, nous pouvons écrire

$$\sum_{u=N-k}^{N} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 = O(N^{2\alpha-1}\epsilon) = o(N^{2\alpha-1}) \quad \forall k \in [0, [N\epsilon]].$$

On remarque ensuite que si k est suffisamment près de N

$$\sum_{u=0}^{k} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 - \sum_{u=N-k}^{N} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 = \sum_{u=0}^{N-k} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 - \sum_{u=k}^{N} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2$$

et on procède comme plus haut pour terminer la démonstration du lemme.

Utilisons maintenant la décomposition, avec ϵ assez petit,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=[N\epsilon]}^{N-[N\epsilon]} \left(\sum_{u=0}^{k} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 - \sum_{u=N-k}^{N} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 \right) \\ = &\sum_{k=[N\epsilon]}^{N-[N\epsilon]} \left(\sum_{u=0}^{[N\epsilon]} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 + \sum_{[N\epsilon]}^{k} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 \right) \\ - &\sum_{k=[N\epsilon]}^{N-[N\epsilon]} \left(\sum_{u=N-k}^{N-[N\epsilon]} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 + \sum_{N-[N\epsilon]}^{N} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 \right). \end{aligned}$$

Les mêmes propriétés que ci-dessus permettent d'écrire que

$$\sum_{k=[N\epsilon]}^{N-[N\epsilon]} \sum_{u=0}^{[N\epsilon]} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 = o(N^{2\alpha})$$

et

$$\sum_{k=[N\epsilon]}^{N-[N\epsilon]} \sum_{N-[N\epsilon]}^{N} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 = o(N^{2\alpha}).$$

Etudions maintenant la somme $\displaystyle\sum_{k=[N\epsilon]}^{N-[N\epsilon]} \left(\sum_{u=[N\epsilon]}^{k} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 - \sum_{u=N-k}^{N-[N\epsilon]} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 \right).$

Le théorème 2.2 et la formule d'Euler et Mac-Laurin (que l'on applique deux fois) permettent d'écrire

$$\sum_{u=[N\epsilon]}^{k} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 = \frac{N^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \left(H_{1,k,\epsilon} + o(1)\right)$$

avec

$$H_{1,k,\epsilon} = \int_{\epsilon}^{k/N} (1-t)^{2\alpha}\, t^{2\alpha-2} dt$$

et de même

$$\sum_{u=N-k}^{N-[N\epsilon]} |\gamma_u^{(\alpha)}|^2 = \frac{N^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \left(H_{2,k,\epsilon} + o(1)\right)$$

avec

$$H_{2,k,\epsilon} = \int_{1-k/N}^{1-\epsilon} (1-t)^{2\alpha} t^{2\alpha-2} dt$$

ce qui donne, avec le changement de variable $v = 1-t$

$$H_{2,k,\epsilon} = \int_{\epsilon}^{k/N} v^{2\alpha}(1-v)^{2\alpha-2} dv.$$

Nous pouvons donc finalement écrire

$$\mathrm{Tr}\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1} = \frac{N^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \sum_{k=[N\epsilon]}^{N-[N\epsilon]} \left(H_{k,\epsilon} + o(1)\right) \tag{5.8}$$

avec

$$H_{k,\epsilon} = \int_{\epsilon}^{k/N} (v-v^2)^{2\alpha-2}(1-2v) dv.$$

En appliquant de nouveau la formule d'Euler et Mac-Laurin dans l'équation 5.8 et en faisant tendre ϵ vers 0 il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1} &= \frac{N^{2\alpha}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \int_0^1 \int_0^x (v-v^2)^{2\alpha-2}(1-2v) dv \\
&\quad + o(N^{2\alpha}) \\
&= \frac{N^{2\alpha}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \int_0^1 x^{2\alpha-1}(x-1)^{2\alpha-1} dx \\
&\quad + o(N^{2\alpha}) \\
&= \frac{N^{2\alpha}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} B(2\alpha, 2\alpha) + o(N^{2\alpha}).
\end{aligned}$$

5.2. Démonstration du théorème 2.4

Nous avons démontré le théorème pour $\alpha \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ dans [22], et pour le cas où α est un entier naturel strictement supérieur à 1 dans [20]. Ici nous le démontrons pour $\alpha \in]p-\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}]$ avec p entier naturel non nul. Pour cela nous allons bien sûr utiliser les résultats du théorème 2.2. Rappelons que l'uniformité de l'approximation est donnée automatiquement par les propriétés $H_1(p)$, $H_2(p)$, et $H_3(p)$.

La propriété 4.3 donne, pour $k \leqslant l$,

$$\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha-2} f_1)\right)^{-1}_{k+1,l+1} = \sum_{u=0}^{k} \overline{\gamma_{k-u}^{(\alpha)}} \gamma_{l-u}^{(\alpha)} - \sum_{v=N-l}^{N+k-l} \gamma_v^{(\alpha)} \overline{\gamma_{v+l-k}^{(\alpha)}},$$

avec toujours, si $k = [Nx], 0 < x < 1$

$$\gamma_k^{(\alpha)} = N^{\alpha-1} \frac{\beta_0^{(\alpha)}}{\Gamma(\alpha) g_1(1)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\alpha} + o(N^{\alpha-1}).$$

Posons $k = [Nx], l = [Ny], 0 < x \leqslant y < 1$. Si $k_0 = [N\epsilon]$, où ϵ est un réel qui vérifie $1 > x > \epsilon > 0$, nous pouvons écrire

$$\sum_{u=0}^{k} \overline{\gamma_{k-u}^{(\alpha)}} \gamma_{l-u}^{(\alpha)} = \sum_{u=0}^{k-k_0} \overline{\gamma_{k-u}^{(\alpha)}} \gamma_{l-u}^{(\alpha)} + \sum_{u=k-k_0+1}^{k} \overline{\gamma_{k-u}^{(\alpha)}} \gamma_{l-u}^{(\alpha)}.$$

On a

$$\sum_{u=k-k_0+1}^{k} \overline{\gamma_{k-u}^{(\alpha)}} \gamma_{l-u}^{(\alpha)} = o(N^{2\alpha-1}).$$

i) **Supposons tout d'abord qu'il existe un réel δ strictement compris entre 0 et 1 tel que** $l - k \geqslant \delta N$ (ce qui implique $y \neq x$). Soit $\epsilon_1 > 0$ un réel fixé la propriété $H_1(p)$ nous permet d'écrire, en choisissant ϵ assez petit :

$$\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}_{h+1,1} = \overline{\beta_0^{(\alpha)}} \beta_h^{(\alpha)} \left(1 + R_h\right),$$

$$\text{avec} \quad |R_h| < \epsilon_1 \quad \forall h \in [0, k_0] \bigcap \mathbb{N}.$$

Nous obtenons alors, en posant $w = k - u$

$$\sum_{w=0}^{k_0-1} \overline{\gamma_w^{(\alpha)}} \gamma_{l-k+w}^{(\alpha)} = N^{\alpha-1} \frac{|\beta_0^{(\alpha)}|^2}{\Gamma(\alpha) g_1(1)} (y-x)^{\alpha-1} (1-y+x)^{\alpha}$$
$$\left(\sum_{w=0}^{k_0-1} \beta_w^{(\alpha)} (1+R_w) \right) \left(1 + O(\frac{1}{N}) \right).$$

Puisque $\alpha > \frac{1}{2}$ nous avons $\sum_{w=0}^{k_0-1} \beta_w^{(\alpha)} = O(k_0^{\alpha}) = O(N^{\alpha} \epsilon^{\alpha})$, ce qui nous permet d'obtenir finalement

$$\sum_{w=0}^{k_0-1} \overline{\gamma_w^{(\alpha)}} \gamma_{l-k+w}^{(\alpha)} = O\left(N^{2\alpha-1} \epsilon^{\alpha}\right) = o\left(N^{2\alpha-1}\right).$$

ii) **Supposons maintenant que** $l - k < k_1 = \delta_1 N$. Si ϵ_1 est toujours un réel fixé nous pouvons écrire, quitte à prendre δ_1 et ϵ assez petits (on a toujours $k_0 = [N\epsilon]$),

$$\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}_{h+1,1} = \overline{\beta_0^{(\alpha)}} \beta_h^{(\alpha)} (1 + R_h),$$

$$\text{avec} \quad |R_h| < \epsilon_1 \quad \forall h \in [0, k_0 + N\delta_1] \bigcap \mathbb{N}.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \sum_{u=0}^{k_0-1} \overline{\gamma_{k-u}^{(\alpha)}} \gamma_{l-u}^{(\alpha)} &= O\left(\sum_{u=0}^{k_0-1} \overline{\beta_{k-u}^{(\alpha)}} \beta_{l-u}^{(\alpha)} \right) \\ &= O\left(N^{2\alpha-1} \int_0^{\epsilon} (x-t)^{\alpha-1} (y-t)^{\alpha-1} dt \right) \\ &= o(N^{2\alpha-1}) \end{aligned}$$

D'autre part en utilisant l'approximation donnée par le théorème 2.2, et avec le fait que cette approximation est uniforme pour les entiers contenus dans les intervalles $[k_0, k]$ et $[l - k + k_0, l]$, nous arrivons à l'égalité :

$$\sum_{u=0}^{k-k_0} \overline{\gamma_{k-u}^{(\alpha)}} \gamma_{l-u}^{(\alpha)}$$
$$= \frac{\left(\beta_0^{(\alpha)}\right)^2}{\Gamma^2(\alpha) f_1(1)} \sum_{u=0}^{k-k_0} \left((k-u)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{k-u}{N}\right)^{\alpha} (l-u))^{\alpha-1} \left(1 - \frac{l-u}{N}\right)^{\alpha} \right.$$
$$\left. + o(N^{2\alpha-2}) \right)$$

Enfin puisque le réel $2\alpha - 1$ est strictement positif la formule d'Euler et Mac-Laurin et l'uniformité des approximations nous donnent

$$\sum_{u=0}^{k-k_0} \overline{\gamma_{k-u}^{(\alpha)}} \gamma_{l-u}^{(\alpha)}$$
$$= N^{2\alpha-1} \frac{|\beta_0^{(\alpha)}|^2}{\Gamma^2(\alpha) f_1(1)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}(1-x+t)^\alpha (y-t)^{\alpha-1}(1-y+t)^\alpha dt$$
$$+ o(N^{2\alpha-1}).$$

Si $J_1 = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}(1-x+t)^\alpha (y-t)^{\alpha-1}(1-y+t)^\alpha dt$, nous pouvons écrire, en posant $v = x - t$,

$$J_1 = \int_0^x v^{\alpha-1}(1-v)^\alpha (y-x+v)^{\alpha-1}(1-y+x-v)^\alpha dv.$$

Le même genre de raisonnement permet d'écrire

$$\sum_{v=N-l}^{N+k-l} \gamma_v^{(\alpha)} \overline{\gamma_{v+l-k}^{(\alpha)}}$$
$$= N^{2\alpha-1} \frac{(\beta_0^{(\alpha)})^2}{\Gamma^2(\alpha) f_1(1)} \int_0^x (1+t-x)^{\alpha-1}(x-t)^\alpha (1+t-y)^{\alpha-1}(y-t)^\alpha dt$$
$$+ o(N^{2\alpha-1})$$

Si l'on pose

$$J' = \int_0^x (1+t-x)^{\alpha-1}(x-t)^\alpha (1+t-y)^{\alpha-1}(y-t)^\alpha dt$$

le changement de variables $v = x - t$ donne

$$J' = \int_0^x (1-v)^{\alpha-1} v^\alpha (1-y+x-v)^{\alpha-1}(y-x+v)^\alpha dv.$$

Nous devons maintenant évaluer $J - J'$. Nous obtenons tous calculs faits

$$\begin{aligned} J_1 - J' &= \int_0^x v^{\alpha-1}(1-v)^{\alpha-1}(y-x+v)^{\alpha-1}(1-y+x-v)^{\alpha-1} \\ &\quad (1-y+x-2v)dv \\ &= \int_0^x (v-vy+vx-v^2)^{\alpha-1}(y-x+v-vy+vx-v^2)^{\alpha-1} \\ &\quad (1-y+x-2v)dv \end{aligned}$$

Effectuons maintenant le changement de variables $v_1 = v - vy + vx - v^2$. L'intégrale $J - J'$ devient

$$J_1 - J' = \int_0^{x-xy} v_1^{\alpha-1}(y - x + v_1)^{\alpha-1} dv_1.$$

Ce qui devient, en posant $v_2 = x - v_1$

$$J_1 - J' = \int_{xy}^{x} (x - v_2)^{\alpha-1}(y - v_2)^{\alpha-1} dv_2$$

ou encore avec $v_3 = \frac{v_2}{xy}$

$$J_1 - J' = x^\alpha y^\alpha \int_1^{1/y} (1 - xv_3)^{\alpha-1}(1 - yv_3)^{\alpha-1} dv_3;$$

En posant pour finir $z = \frac{1}{v_3}$ on obtient le résultat attendu, c'est-à-dire

$$J - J' = x^\alpha y^\alpha \int_{1/y}^{1} \frac{(z - x)^{\alpha-1}(z - y)^{\alpha-1}}{z^{2\alpha}} dz.$$

6. Démonstration du théorème 3.2

Le réel α étant fixé nous rappelons la notation $\varphi_\alpha = |1 - \chi|^{2\alpha} f_1$. Démontrons d'abord le lemme

Lemme 6.1. — *Posons $\varphi_\alpha = |1 - \chi|^{2\alpha} f_1$ avec $\alpha > \frac{1}{2}$. Alors si $\frac{k}{N}$ tend vers 0, et $0 \leqslant l \leqslant N$ on a*

$$(T_N(\varphi_\alpha))^{-1}_{k+1,l+1} = o(N^{2\alpha-1})$$

$$(T_N(\varphi_\alpha))^{-1}_{N-k+1,l+1} = o(N^{2\alpha-1}).$$

De même si $\frac{l}{N}$ tend vers 0, et $0 \leqslant k \leqslant N$ on a

$$(T_N(\varphi_\alpha))^{-1}_{k+1,l+1} = o(N^{2\alpha-1})$$

$$(T_N(\varphi_\alpha))^{-1}_{k+1,N-l+1} = o(N^{2\alpha-1}),$$

les quatre formules ci-dessus étant uniformes sur $[0, [N\epsilon]] \times [0, N]$ ou sur $[0, N] \times [0, [N\epsilon]]$ pour ϵ assez petit.

Preuve. — Avec les mêmes notations que précédemment nous avons toujours

$$(T_N(\varphi_\alpha))^{-1}_{k+1,l+1} = \sum_{u=0}^{\min(k,l)} \overline{\gamma^{(\alpha)}_{k-u}\gamma^{(\alpha)}_{l-u}} - \sum_{u=N-\max(k,l)}^{N-\max(k,l)+\min(k,l)} \gamma^{(\alpha)}_u \bar{\gamma}^{(\alpha)}_{u+\max(k,l)-\min(k,l)}.$$

La démonstration se compose de deux parties.

i) Supposons d'abord $\frac{\min(k,l)}{N} \to 0$.
En utilisant les propriétés $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$, obtenues lors de la démonstration du théorème 2.2 on obtient facilement que si k ou l appartiennent à $[0, N\epsilon]$ avec $\epsilon \to 0$ les deux sommes intervenant dans l'égalité ci-dessus sont d'ordre $o(N^{2\alpha-1})$. Nous avons déjà traité une somme du type $\sum_{u=0}^{[N\epsilon]} \overline{\gamma^{(\alpha)}_{k-u}\gamma^{(\alpha)}_{l-u}}$ au début de la démonstration du théorème 2.4. Considérons maintenant la somme $\Sigma = \sum_{u=N-\max(k,l)}^{N-\max(k,l)+\min(k,l)} \gamma^{(\alpha)}_u \bar{\gamma}^{(\alpha)}_{u+\max(k,l)-\min(k,l)}$ où nous supposons que $\frac{\max(k,l)}{N} \to z$ avec $0 < z < 1$. En utilisant la propriété (H_2) il vient

$$\Sigma = O\left(N^{2\alpha-2} z^{2\alpha-2}(1-z)^{2\alpha} N\epsilon\right) = o\left(N^{2\alpha-1}\right).$$

Si l'on suppose $\frac{\max(k,l)}{N} \to 1$ la propriété (H_2) nous donne $\Sigma = O(N^{\alpha-1}N\epsilon) = o(N^{2\alpha-1})$ avec un bon choix de ϵ. Par contre si $\frac{\max(k,l)}{N} \to 0$ nous avons, avec (H_3)

$$\Sigma = O\left(N^{2\alpha-2}N\epsilon\right) = o\left(N^{2\alpha-1}\right).$$

ii) Considérons maintenant $\frac{\max(k,l)}{N} \to 1$.
Supposons dans un premier temps que $\frac{\min(k,l)}{N} \to z$ avec $0 < z < 1$.
On a, en réutilisant les calculs de la démonstration du théorème 2.4 :

$$\sum_{u=0}^{\min(k,l)} \bar{\gamma}^{(\alpha)}_{\min(k,l)-u} \gamma^{(\alpha)}_{\max(k,l)-u}$$
$$= \frac{N^{2\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha) f_1(1)} \int_0^z (z-t)^{\alpha-1}(1-z+t)^{\alpha}(1-t)^{\alpha-1} t^{\alpha} dt + o(N^{2\alpha-1})$$

et

$$\sum_{u=N-\max(k,l)}^{N-\max(k,l)+\min(k,l)} \gamma_u^{(\alpha)} \bar{\gamma}_{u-\max(k,l)+\min(k,l)}^{(\alpha)}$$
$$= \frac{N^{2\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha) f_1(1)} \int_0^x (1+t-z)^{\alpha-1}(z-t)^{\alpha} t^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha} dt + o(N^{2\alpha-1}).$$

Les mêmes changements de variables que ceux effectués dans la démonstration du théorème 2.4 donnent alors

$$(T_N(\varphi_\alpha))_{k+1,l+1}^{-1} = o(N^{2\alpha-1}).$$

Si maintenant on suppose $\frac{\min(k,l)}{N} \to 0$ on est ramené à un problème déjà traité dans la première partie de cette démonstation.

Reste à considérer le cas $\frac{\min(k,l)}{N} \to 1$. Grâce à la propriété (H_2) nous avons, si u assez grand, $\overline{\gamma_u^{(\alpha)}} \gamma_{u+l-k}^{(\alpha)} - \gamma_u^{(\alpha)} \overline{\gamma_{u+l-k}^{(\alpha)}} = o(N^{2\alpha-1})$ uniformément pour u assez grand. Nous pouvons alors écrire, en supposant $l \geqslant k$,

$$\left(T_N^{-1}(\varphi_\alpha)\right)_{k+1,l+1} = \sum_{u=0}^{N-l} \overline{\gamma_u^{(\alpha)}} \gamma_{u+l-k}^{(\alpha)} - \sum_{u=k}^{N+k-l} \overline{\gamma_u^{(\alpha)}} \gamma_{u+l-k}^{(\alpha)} + o(N^{2\alpha-1}).$$

La propriété H_1 permet d'écrire

$$\sum_{u=0}^{N-l} \overline{\gamma_u^{(\alpha)}} \gamma_{u+l-k}^{(\alpha)} = O\left(\sum_{u=0}^{N-l} \overline{\beta_u^{(\alpha)}} \beta_{u+l-k}^{(\alpha)}\right) = o(N^{2\alpha-1})$$

cependant que la propriété H_3 donne

$$\sum_{u=k}^{N+k-l} \overline{\gamma_u^{(\alpha)}} \gamma_{u+l-k}^{(\alpha)} = o(N^{2\alpha-2}).$$

Enfin l'uniformité des approximations est assurée par l'uniformité des différentes expressions asymptotiques utilisées pour les coefficients $\gamma_u^{(\alpha)}$, $0 \leqslant u \leqslant N$. □

Démontrons maintenant le théorème proprement dit dans le cas α supérieur à $\frac{1}{2}$. Nous avons bien évidemment, pour tout entier naturel

s et pour tout entier $k, 0 \leqslant k \leqslant N$

$$\left((T_N(\varphi_\alpha))^{-1}\right)^s_{k+1,k+1} = \sum_{h_{s-1}=0}^{N} (T_N(\varphi_\alpha))^{-1}_{k+1,h_{s-1}+1} \left(\sum_{h_{s-2}=0}^{N} (T_N(\varphi_\alpha))^{-1}_{h_{s-1}+1,h_{s-2}+1} \cdots \sum_{h_1=0}^{N} (T_N(\varphi_\alpha))^{-1}_{h_2+1,h_1+1} (T_N(\varphi_\alpha))^{-1}_{h_1+1,k+1}\right)$$

Grâce au théorème 2.4 et au lemme (6.1) nous pouvons écrire, si N suffisamment grand

$$\left((T_N(\varphi_\alpha))^{-1}\right)^s_{k+1,k+1} = \frac{N^{2s\alpha-s}}{\Gamma(\alpha)^{2s} f_1(1)^s} \sum_{h_{s-1}=0}^{N} G_\alpha(k/N, h_{s-1}/N) \times\left(\sum_{h_{s-2}=0}^{N} G_\alpha(h_{s-1}/N, h_{s-2}/N) \cdots \sum_{h_1=0}^{N} G_\alpha(h_2/N, h_1/N) G_\alpha(h_1/N, k/N)\right) (1+o(1))\,.$$

En appliquant s fois la formule d'Euler Mac-Laurin il vient

$$\left((T_N(\varphi_\alpha))^{-1}\right)^s_{k+1,k+1} = \frac{N^{2s\alpha}}{\Gamma(\alpha)^{2s} f_1(1)^s} \times \int_0^1 \cdots \int_0^1 G_\alpha(k/N, t_{s-1}) G_\alpha(t_{s-1}, t_{s-2}) \cdots G_\alpha(t_1, k/N) dt_{n-1} dt_{n-2} \cdots dt_1 + o(N^{2s\alpha}).$$

C'est-à-dire que, en utilisant les notations de l'introduction nous pouvons écrire que

$$\left((T_N(\varphi_\alpha))^{-1}\right)^s_{k+1,k+1} = \frac{N^{2s\alpha}}{\Gamma(\alpha)^{2s} f_1(1)^s} *^s G_\alpha(k/N, k/N) + o(N^{2s\alpha})$$

ou encore

$$\mathrm{Tr}\left(\left((T_N(\varphi_\alpha))^{-1}\right)\right)^s = \int_0^1 \frac{N^{2s\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)^{2s} f_1(1)^s} *^s G_\alpha(t,t) dt + o(N^{2s\alpha})$$

La fonction G_α étant continue sur $[0,1]\times[0,1]$ on peut passer à la limite sur s et écrire

$$\lim_{s\to+\infty}\left(\operatorname{Tr}\left(\left(T_N(\varphi_\alpha)\right)^{-1}\right)^s\right)^{1/s}$$
$$=\frac{N^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha)f_1(1)}\lim_{s\to+\infty}\left(\int_0^1 *^s G_\alpha(t,t)dt\right)^{1/s}+o(N^{2\alpha}).$$

7. Démonstration du corollaire 3.3

7.1. Cas où l'exposant α est dans $]\frac{1}{2},1[$

Nous allons chercher à encadrer $\Lambda_{\alpha,N}=\max\lambda_{\alpha,j}^N$, $1\leqslant j\leqslant N$, les $\lambda_{\alpha,j}^N$ étant les valeurs propres de $T_N\left(|1-\chi|^{2\alpha}f_1\right)$.

Majoration de $\Lambda_{\alpha,N}$ avec $\alpha\in]\frac{1}{2},1[$.

En utilisant la formule de trace obtenue plus haut nous obtenons facilement

$$\Lambda_{\alpha,N}\leqslant N^{2\alpha}\frac{B(2\alpha,2\alpha)}{\Gamma^2(\alpha)(2\alpha-1)}+o(N^{2\alpha}).$$

Minoration de $\Lambda_{\alpha,N}$ avec $\alpha\in]\frac{1}{2},1[$.

Pour simplifier les notations nous supposerons dans ce paragraphe que $0<x\leqslant y<1$. Remarquons que nous avons

$$\begin{aligned}G_\alpha(x,y) &= x^\alpha y^\alpha\int_y^1\frac{(t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}}{t^{2\alpha}}dt\\ &\geqslant x^\alpha y^\alpha\int_y^1(t-x)^{\alpha-1}dt\\ &\geqslant x^\alpha y^\alpha\left(\frac{(1-x)^\alpha-(y-x)^\alpha}{\alpha}\right).\end{aligned}$$

D'autre part d'après le théorème des accroissements finis il existe un réel c, $y<c<1$ tel que $(1-x)^\alpha-(y-x)^\alpha=\alpha(1-y)(c-x)^{\alpha-1}$. Puisque $(c-x)^{\alpha-1}>(1-x)^{\alpha-1}>(1-x)$ $(\alpha<1)$ nous pouvons écrire les inégalités

$$\begin{aligned}G_\alpha(x,y) &\geqslant x^\alpha y^\alpha(1-y)(c-x)^{\alpha-1}\\ &\geqslant x^\alpha y^\alpha(1-y)(1-x)^{\alpha-1}\\ &\geqslant x^\alpha y^\alpha(1-y)(1-x)\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 g(x_1)f(x_2)g(x_2)f(x_3)\cdots g(x_n)f(x_1)dx_n dx_{n-1}\cdots dx_{n-1}$$
$$= \left(\int_0^1 g(x)f(x)dx\right)^s \tag{7.9}$$

nous pouvons conclure que

$$\operatorname{Tr}\left(\left((T_N(\varphi_\alpha))^{-1}\right)^s\right) \geqslant \frac{N^{2s\alpha}}{(\Gamma^2(\alpha)f_1(1))^s}\left(\int_0^1 x^{2\alpha}(1-x)^2dx\right)^s.$$

Soit

$$\Lambda_{\alpha,N} \geqslant N^{2\alpha}\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)f_1(1)}\int_0^1 x^{2\alpha}(1-x)^2dx.$$

Ce qui donne, tous calculs faits

$$\Lambda_{\alpha,N} \geqslant N^{2\alpha}\frac{2}{(2\alpha+1)(2\alpha+2)(2\alpha+3)}\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)f_1(1)}.$$

7.2. Cas où l'exposant α est dans $]1,+\infty[$

Majoration de $\Lambda_{\alpha,N}$ avec $\alpha \in]1,+\infty[$.

Notre calcul s'inspire de celui effectué dans le cas d'un exposant entier par Böttcher et Widom dans [5]. Dans l'écriture

$$\operatorname{Tr}\left((T_N(\varphi_\alpha))^{-1}\right)^s \sim \frac{N^{2\alpha s}}{\left(\Gamma^2(\alpha)f_1(1)\right)^s} \tag{7.10}$$
$$\times \int_0^1\int_0^1 G_\alpha(t_1,t_2)\int_0^1 G_\alpha(t_2,t_3)\cdots$$
$$\int_0^1 G_\alpha(t_{s-1},t_s)\int_0^1 G_\alpha(t_s,t_1)dt_1\cdots dt_s$$

nous posons le changement de variable

$$t_1 = \frac{1+x_1}{2}\, t_1 = \frac{1+x_2}{2}\cdots t_s = \frac{1+x_s}{2}.$$

Nous obtenons alors

$$\operatorname{Tr}\left(\left(T_N(\varphi_\alpha)\right)^{-1}\right)^s \sim \frac{N^{2\alpha s}}{\left(\Gamma^2(\alpha) f_1(1)\right)^s} \frac{1}{2^s} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} G_\alpha\left(\frac{1+x_1}{2}, \frac{1+x_2}{2}\right)$$
$$\times \int_{-1}^{1} G_\alpha\left(\frac{1+x_2}{2}, \frac{1+x_3}{2}\right)\cdots \int_{-1}^{1} G_\alpha\left(\frac{1+x_{s-1}}{2}, \frac{1+x_s}{2}\right) \tag{7.11}$$
$$\times \int_{-1}^{1} G_\alpha\left(\frac{1+x_s}{2}, \frac{1+x_1}{2}\right) dx_1\cdots dx_s$$

Nous pouvons alors remarquer que

$$G_\alpha\left(\frac{1+x_1}{2}, \frac{1+x_2}{2}\right) = \left(\frac{1+x_1}{2}\right)^\alpha \left(\frac{1+x_2}{2}\right)^\alpha$$
$$\int_{\max((1+x_1)/2,(1+x_2)/2)}^{1} \frac{\left(t-\frac{1+x_1}{2}\right)^{\alpha-1}\left(t-\frac{1+x_2}{2}\right)^{\alpha-1}}{t^{2\alpha}} dt$$
$$= \frac{(1+x_1)^\alpha (1+x_2)^\alpha}{4^\alpha} \int_{\max(x_1,x_2)}^{1} \frac{\left(\frac{t'-x_1}{2}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{t'-x_2}{2}\right)^{\alpha-1}}{\left(\frac{1+t'}{2}\right)^{2\alpha}} \frac{dt'}{2}$$
$$= \frac{2}{4^{2\alpha}}(1+x_1)^\alpha(1+x_2)^\alpha \int_{\max(x_1,x_2)}^{1} \frac{(t'-x_1)^{\alpha-1}(t'-x_2)^{\alpha-1}}{\left(\frac{1+t'}{2}\right)^{2\alpha}} dt'.$$

D'autre part la dérivée logarithmique de la fonction $t \to \frac{(t-x_1)(t-x_2)}{\left(\frac{1+t}{2}\right)^2}$ est $\frac{(2+x_1+x_2)t-x_1-x_2-2x_1x_2}{(1+t)(t-x_1)(t-x_2)}$ qui est positive sur $[\max(x_1,x_2),1]$. Nous pouvons donc écrire

$$G_\alpha\left(\frac{1+x_1}{2}, \frac{1+x_2}{2}\right)$$
$$\leqslant \frac{2}{4^{2\alpha}}(1+x_1)^\alpha(1+x_2)^\alpha \int_{\max(x_1,x_2)}^{1} \frac{(1-x_1)^{\alpha-1}(1-x_2)^{\alpha-1}}{\left(\frac{1+t}{2}\right)^2} dt$$
$$\leqslant \frac{4}{4^{2\alpha}}(1+x_1)(1+x_2)(1-x_1^2)^{\alpha-1}(1-x_2^2)^{\alpha-1}$$

L'égalité (7.10) fournit alors

$$\lim_{s\to+\infty}\left(\operatorname{Tr}\left(\left(\left(T_N(\varphi_\alpha)\right)^{-1}\right)\right)^s\right)^{1/s} = \Lambda_{\alpha,N}$$

et la majoration

$$\Lambda_{\alpha,N} \leqslant \int_{-1}^{1}(1+x)^2(1-x^2)^{2\alpha-2}dx \frac{1}{\Gamma^2(\alpha) f_1(1)} \frac{2}{4^{2\alpha}}.$$

Soit
$$\Lambda_{\alpha,N} \leqslant \frac{1}{f_1(1)} \frac{\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma(4\alpha)\Gamma^2(\alpha)}.$$
Ce qui donne une minoration de c_α équivalente à celle donnée dans l'article [5] pour le cas entier.

Minoration de $\Lambda_{\alpha,N}$ avec $\alpha \in]1,+\infty[$.

Cette fois-ci encore nous supposerons $0 < x \leqslant y < 1$. Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} G_\alpha(x,y) &\geqslant x^\alpha y^\alpha \int_y^1 \frac{(t-y)^{2\alpha-2}}{t^{2\alpha}} dt \\ &\geqslant x^\alpha y^\alpha \int_1^{\frac{1}{y}} (1-uy)^{2\alpha-2} du \\ &\geqslant x^\alpha y^\alpha \frac{(1-y)^{2\alpha-1}}{y(2\alpha-1)} \geqslant x^{2\alpha-1} \frac{(1-y)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire que nous avons dans ce cas
$$G_\alpha(x,y) \geqslant \frac{(\min(x,y))^{2\alpha-1} (1-\max(x,y))^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}.$$

En utilisant la remarque $t \leqslant 1-t$ si et seulement si $t \leqslant \frac{1}{2}$ nous pouvons écrire,

- si $0 < \max(x,y) \leqslant \frac{1}{2}$ alors $G_\alpha(x,y) \geqslant \frac{x^{2\alpha-1}y^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}$.
- si $1 > \min(x,y) \geqslant \frac{1}{2}$ alors $G_\alpha(x,y) \geqslant \frac{(1-x)^{2\alpha-1}(1-y)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}$

La démonstration du théorème 3.2 nous dit d'autre part que

$$\begin{aligned} &\left(\mathrm{Tr}\,(T_N(\varphi_\alpha))^{-1}\right)^s \sim \\ &\qquad \frac{N^{2\alpha s-1}}{(\Gamma^2(\alpha)f_1(1))^s} \int_0^1 \int_0^1 G_\alpha(t_1,t_2) \int_0^1 G_\alpha(t_2,t_3) \cdots \\ &\qquad\qquad \int_0^1 G_\alpha(t_{s-1},t_s) G_\alpha(t_s,t_1) dt_s \cdots dt_1. \end{aligned}$$

Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications de $\{1,2,3,\cdots,\}$ dans $\Big\{\{0,\frac{1}{2}\},\{\frac{1}{2},1\}\Big\}$. En remarquant que

$$[0,1]^s = \bigcup_{\varphi\in\mathcal{A}} \Big(\prod_{i, 1\leqslant i \leqslant s} [\min(\varphi(i)), \max(\varphi(i))] \Big)$$

nous obtenons

$$\left(\mathrm{Tr}\left((T_N(\varphi_\alpha))^{-1}\right)\right)^s \geqslant \frac{2^{s+1}}{(2\alpha-1)^s}\frac{1}{(\Gamma^2(\alpha)f_1(1))^s}\frac{1}{(2^{4\alpha-1}(4\alpha-1))^s}N^{2\alpha s},$$

ce qui nous donne la minoration

$$\Lambda_{\alpha,N} \geqslant \frac{2}{2\alpha-1}\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)f_1(1)}\frac{1}{2^{4\alpha-1}(4\alpha-1)}N^{2\alpha}.$$

8. Démonstration de la propriété 3.4 et du théorème 3.5

8.1. Cas où l'exposant α vaut $\frac{1}{2}$.

La minoration proposée est une conséquence directe du corollaire 3 de [22] que nous rappelons ici

Théorème 8.1. — *Si f_1 est une fonction régulière dans $\mathbb{A}(\mathbb{T}, \frac{3}{2})$ on a*

$$f_1(1)\mathrm{Tr}\left(T_N\left(|1-\chi|f_1\right)\right)^{-1}\Big) = \frac{1}{\pi}N\ln N + o(N\ln N).$$

8.2. Démonstration du théorème 3.5

Le théorème 3.5 a été démontré pour les $\alpha \in \mathbb{N}$ tendant vers l'infini par Widom et Böttcher dans l'article [5]. Lorsque cet article a été écrit le noyau G_α n'était établi que pour $\alpha \in \mathbb{N}$. Néanmoins nous allons pouvoir réutiliser ici certains des arguments de cette preuve qui sont toujours valables si on suppose que α est un réel qui tend vers l'infini et non plus un entier.
Nous avons déjà vu que

$$\tilde{G}_\alpha(x,y) = \frac{1}{2}G_\alpha\left(\frac{1+x}{2},\frac{1+y}{2}\right) = \frac{1}{4^{2\alpha}}\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}T_\alpha(x,y). \tag{8.12}$$

avec

$$T_\alpha(x,y) = (1+x)^\alpha(1+y)^\alpha\int_{\max(x,y)}^1 \frac{(t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}}{(\frac{1+t}{2})^{2\alpha}}dt. \tag{8.13}$$

En calculant la dérivée logarithmique de la fonction $t \to \frac{(t-x)(t-y)}{((1+t)/2)^2}$ on montre que la fonction

$$(x,y,t) \to \frac{(t-x)(t-y)}{((1+t)/2)^2}$$

atteint son maximum au seul point $t = 1$, $x = 0$, $y = 0$. C'est-à-dire que si δ est un réel fixé entre 0 et 1 on sait qu'en dehors d'un ensemble $|t-1| \leqslant \epsilon$, $|x| \leqslant \epsilon$, $|y| \leqslant \epsilon$, où $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ un réel bien choisi on a

$$\frac{(t-x)(t-y)}{((1+t)/2)^2} < 1 - \delta.$$

Puisque α tend vers plus l'infini on peut supposer $\alpha > 1$ et donc écrire

$$\left(\frac{(t-x)(t-y)}{((1+t)/2)^2}\right)^{\alpha-1} < (1-\delta)^{\alpha-1}$$

ce qui donne

$$T_\alpha(x,y) = (1+x)^\alpha(1+y)^\alpha 1_\epsilon(x)1_\epsilon(y)\int_{1-\epsilon}^{1}\frac{(t-x)^{\alpha-1}(t-y)^{\alpha-1}}{((1+t)/2)^{2\alpha}}dt + O\left((1-\delta)^\alpha\right),$$

où 1_ϵ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[-\epsilon, \epsilon]$. Avec le changement de variable $t = 1 - \tau$ on obtient

$$\begin{aligned} T_\alpha(x,y) &= (1-x^2)^\alpha(1-y^2)^\alpha 1_\epsilon(x)1_\epsilon(y) \\ &\quad\times \int_0^\epsilon \left(\left(1-\frac{\tau}{1-x}\right)\left(1-\frac{\tau}{1-y}\right)/\left(1-\frac{\tau}{2}\right)^2\right)^\alpha \frac{d\tau}{\left(1-\frac{\tau}{1-x}\right)\left(1-\frac{\tau}{1-y}\right)} \\ &\quad + O\left((1-\delta)^\alpha\right). \end{aligned} \tag{8.14}$$

L'objectif est alors de mettre la partie principale de T_α sous la forme fg et d'utiliser une propriété identique à la formule (7.9). En reprenant les calculs de [5] on obtient

$$T_\alpha(x,y) = \frac{1}{\alpha}(1-x^2)^\alpha(1-y^2)^\alpha\left(1 + O(x) + O(y)\right) + O(\frac{1}{\alpha^2}) \tag{8.15}$$

toujours uniformément en x et y pour $(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]$.

Si M_2 et M_3, désignent les opérateurs intégraux de noyaux respectifs

$$O(x)(1-x^2)^\alpha(1-y^2)^\alpha, \quad O(y)(1-x^2)^\alpha(1-y^2)^\alpha.$$

On a

$$\|M_2\|^2 = \int_{-1}^{1} O(x^2)(1-x^2)^{2\alpha}dx \int_{-1}^{1}(1-y^2)^{2\alpha}dy = O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

On obtient de même $\|M_3\|^2 = O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$. Nous pouvons alors écrire, comme dans la démonstration du corollaire 3.3

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\left((T_N(\varphi_\alpha))^{-1}\right)^s &= \frac{N^{2\alpha s}}{(\Gamma^2(\alpha)f_1(1))^s}(\frac{1}{4^{2\alpha}})^s \int_{-1}^1\int_{-1}^1 T_\alpha(\frac{1+x_1}{2},\frac{1+x_2}{2})\\ &\times \int_{-1}^1 T_\alpha(\frac{1+x_2}{2},\frac{1+x_3}{2})\cdots\int_{-1}^1 T_\alpha(\frac{1+x_{s-1}}{2},\frac{1+x_s}{2}) \qquad (8.16)\\ &\times \int_{-1}^1 T_\alpha(\frac{1+x_{s-1}}{2},\frac{1+x_s}{2})T_\alpha(\frac{1+x_s}{2},\frac{1+x_1}{2})dx_1\cdots dx_s.\end{aligned}$$

En utilisant (8.15) et les résultats

$$\|M_2\|^2 = \|M_3\|^2 = O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

On peut écrire, à partir de (8.16)

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\left((T_N(\varphi_\alpha))^{-1}\right)^s &= \frac{N^{2\alpha s}}{(\Gamma^2(\alpha)f_1(1))^s}(\frac{1}{4^{2\alpha}})^s\frac{1}{\alpha^s}\left(\int_{-1}^1\int_{-1}^1(1-x_1^2)^\alpha\,(1-x_2^2)^\alpha\right.\\ &\times\int_{-1}^1(1-x_2^2)^\alpha(1-x_3^2)^\alpha\cdots\int_{-1}^1(1-x_{s-1}^2)^\alpha(1-x_s^2)^\alpha \qquad (8.17)\\ &\left.\times\int_{-1}^1(1-x_s^2)^\alpha(1-x_1^2)^\alpha dx_1\cdots dx_s.\right)\\ &\times(1+o(1))\end{aligned}$$

Nous avons d'autre part, quand α tend vers plus l'infini

$$\int_{-1}^1(1-x^2)^{2\alpha}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}\left(1+O(\frac{1}{\alpha})\right).$$

L'égalité (8.17) permet donc d'écrire, avec toujours la même notation pour la plus grande valeur propre

$$\Lambda_{\alpha,N} = \frac{N^{2\alpha}}{f_1(1)}\frac{1}{\alpha\Gamma^2(\alpha)4^{2\alpha}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}+O\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right),$$

ou encore

$$\Lambda_{\alpha,N} = \frac{N^{2\alpha}}{f_1(1)}\left(\frac{e}{4\alpha}\right)^{2\alpha}\frac{1}{\sqrt{8\pi\alpha}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right).$$

9. Appendice

9.1. Calcul de l'asymptotique de $\widehat{g^{-1}}(k)$

Lemme 9.1. — *Soit α un réel non entier strictement supérieur à $-\frac{1}{2}$. Avec les hypothèses du théorème 2.2 et les notations définies dans l'introduction on peut alors écrire*

$$\beta_u^{(\alpha)} = g_1^{-1}(1)\frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + o(u^{\alpha-1}).$$

Dans la suite de la démonstration on note $\tilde{\beta}_u^{(\alpha)}$ le coefficient de Fourier d'ordre u de la fonction $(1-\chi)^{-\alpha}$.
Si m est un entier sufffisamment grand et ν un réel compris entre 0 et 1 nous pouvons écrire

$$\beta_m^{(\alpha)} = \sum_{s=0}^{m} \tilde{\beta}_s^{(\alpha)} \widehat{g_1^{-1}}(m-s) = \sum_{s=0}^{m-[m^\nu]} \tilde{\beta}_s^{(\alpha)} \widehat{g_1^{-1}}(m-s) + \sum_{s=m-[m^\nu]+1}^{m} \tilde{\beta}_s^{(\alpha)} \widehat{g_1^{-1}}(m-s).$$

En utilisant le fait que $f_1 \in \mathcal{A}(\mathbb{T}, \frac{3}{2})$ implique que $g_1^{-1} \in \mathcal{A}(\mathbb{T}, \frac{3}{2})$ (voir [3], ou [20]) nous avons

$$\sum_{s=m-[m^\nu]+1}^{m} \widehat{g_1^{-1}}(m-s) = g_1^{-1}(1) - \sum_{s=[m^\nu]}^{\infty} \widehat{g_1^{-1}}(s) = g_1^{-1}(1) + O(m^{-3\nu/2}).$$

Nous pouvons donc conclure

$$\begin{aligned}\sum_{s=m-[m^\nu]+1}^{m} \tilde{\beta}_s^{(\alpha)} \widehat{g_1^{-1}}(m-s) &= \left(\frac{m^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + o(m^{\alpha-1})\right) \sum_{s=m-[m^\nu]+1}^{m} \widehat{g_1^{-1}}(m-s) \\ &= g_1^{-1}(1)\frac{m^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + o(m^{\alpha-1}).\end{aligned}$$

On obtient de la même manière

$$\left|\sum_{s=0}^{m-[m^\nu]} \tilde{\beta}_s^{(\alpha)} \widehat{g_1^{-1}}(m-s)\right| \leqslant \sup_{u\in\mathbb{N}} \left(|\tilde{\beta}_u^{(\alpha)}|\right) \sum_{s'=[m^\nu]}^{m} \left|\widehat{g_1^{-1}}(s')\right| = O(m^{-3\nu/2})$$

en choisissant convenablement le réel ν. Ceci achève de prouver le résultat.

9.2. Démonstration du point 1 du théorème 4.5

La preuve est basée sur une formule explicite de l'inverse que nous avons obtenue dans un précédent travail (voir [22], lemme 3). Nous avons obtenu pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant N\delta$, $0 < \delta < 1$ l'expression

$$\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}_{k+1,1} = \beta_0^{(\alpha)} \left(\beta_k^{(\alpha)} - \frac{1}{N} \left(\sum_{u=0}^{k} \beta_{k-u}^{(\alpha)} F_\alpha(\frac{u}{N}) \right) (1+o(1)) \right) \tag{9.18}$$

où la fonction $z \to F_\alpha(z)$ est une fonction qui est continue et dérivable sur tout compact de $[0,1[$, indépendante de la fonction régulière f_1. Cette formule prise en $k=0$ et $f_1 = 1$ donne alors

$$\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha})\right)^{-1}_{1,1} = 1 - \frac{1}{N} F_\alpha(0)\,(1+o(1))\,.$$

Si $D_{N,\alpha}$ désigne alors le déterminant de $T_N(|1-\chi|^{2\alpha})$ l'égalité ci-dessus permet d'affirmer que $D_{N,\alpha}^{-1}$ admet pour partie principale $\prod_{h=1}^{N}\left(1 - \frac{F_\alpha(0)}{h}\right)$. C'est-à-dire que quand N tend vers l'infini, $\ln D_{N,\alpha} = (\ln N) F_\alpha(0)\,(1+o(1))$. C'est d'autre part une conséquence immédiate du théorème d'Hartwig et Fisher (voir, par exemple [9], [8]) que $\ln D_{N,\alpha} = \alpha^2 \ln N\,(1+o(1))$, soit $F_\alpha(0) = \alpha^2$. La continuité de la fonction F_α en 0 permet alors d'écrire, pour $\frac{k}{N}$ suffisamment petit :

$$\left(T_N(|1-\chi|^{2\alpha} f_1)\right)^{-1}_{k+1,1} = \beta_0^{(\alpha)} \left(\beta_k^{(\alpha)} - \frac{\alpha^2}{N} \left(\sum_{u=0}^{k} \beta_u^{(\alpha)} \right) (1+o(1)) \right) \tag{9.19}$$

ce qui, avec l'égalité (4.7) donne le point 1 du théorème.

Bibliographie

[1] Böttcher (A.). — The constants in the asymptotic formulas by Rambour and Seghier for the inverse of Toeplitz matrices. Integr. equ. oper. theory, 99, p. 43-45 (2004).

[2] Böttcher (A.), Unterberger (J.), Grudsky (S.), Maksimenko (E. A.). — The first order asymptotics of the extreme eigenvectors of certain hermitian Toeplitz matrices. Integr. equ. oper. theory, 63, p. 165-180 (2009).

[3] Böttcher (A.), Silbermann (B.). — Analysis of Toeplitz operators. Springer Verlag (1990).

[4] Böttcher (A.), Silbermann (B.). — Introduction to large Toepltitz truncated matrices. Springer Verlag (1999).

[5] Böttcher (A.), Widom (H.). — From Toeplitz eigenvalues through Green's kernels to higher-order Wirtinger-Sobolev inequalities. Oper. Th. Adv. Appl., 171, p. 73-87 (2006).

[6] Böttcher (A.), Widom (H.). — On the eigenvalues of certain canonical higher-order ordinary differential operators. J. Math. Anal. Appl., 322, p. 990-1000 (2006).

[7] Courant (R.), Friedrichs (K.), Lewy (H.). — Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. Math. Ann., 100, p. 32-74 (1928).

[8] Ehrhardt (T.) and Silbermann (B.). — Toeplitz determinants with one Fisher-Hartwig singularity. Journal of Functional Analysis, 148, p. 229-256 (1997).

[9] Fisher (M. E.), Hartwig (R. E.). — Determinants ; some applications, theorems, and conjectures. Adv. Chem. Phys., 15, p. 333-353 (1968).

[10] Gohberg (I.), Semencul (A. A.). — The inversion of finite Toeplitz matrices and their continual analogues. Matem. Issled., 7, p. 201-233 (1972).

[11] Grenander (U.), Szegö (G.). — Toeplitz forms and their applications. Chelsea, New York, 2nd ed. edition (1984).

[12] Kac (M.), Murdoch (W. L.), Szegö (G.). — On the eigenvalues of certain hermitian forms. J. rat. Mech. Analysis, 2, p. 767-800 (1953).

[13] Kateb (D.), Rambour (P.), Seghier (A.). — Asymptotic behavior of the predictor polynomial associated to regular symbols. Prépublications de l'Université Paris-Sud (2003).

[14] Landau (H.J.). — Maximum entropy and the moment problem. Bulletin (New Series) of the american mathematical society, 16(1), p. 47-77 (1987).

[15] Martinez-Finkelshtein (A.), McLaughlin (K.T.R), Saff (E.B.). — Asymptotics of orthogonal polynomials with respect to an analytic weight with algebraic singularities on the circle. Internat. Math. Research Notices (2006).

[16] Martinez-Finkelshtein (A.), McLaughlin (K. T. R), Saff (E. B.). — Szegö orthogonal polynomal with respect to an analytic weight : canonical representation and strong asymptotic. Constr. Approx., 24 (2006).

[17] Parter (S.). — Extreme eigenvalues of Toeplitz forms and applications to elliptic difference equations. Trans. Amer. Math. Soc., 99, p. 153-192 (1961).

[18] Parter (S.). — On the extreme eigenvalues of Toeplitz matrices. Trans. Amer. Math. Soc., 100, p. 263-270 (1961).

[19] Parter (S.). — On the extreme eigenvalues of truncated Toeplitz matrices. Bull. Amer. Math. Soc., 67, p. 191-196 (1961).

[20] Rambour (P.), Seghier (A.). — Formulas for the inverses of Toeplitz matrices with polynomially singular symbols. Integr. equ. oper. theory, 50, p. 83-114 (2004).

[21] Rambour (P.), Seghier (A.). — Théorèmes de trace de type Szegö dans le cas singulier. Bull. des Sci. Math., 129, p. 149-174 (2005).

[22] Rambour (P.), Seghier (A.). — Inverse asymptotique des matrices de Toeplitz de symbole $(1 - \cos\theta)^\alpha f_1$, $\frac{-1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$, et noyaux intégraux. Bull. des Sci. Math., 134, p. 155-188 (2008).

[23] Rambour (P.), Seghier (A.). — Asymptotic inversion of toeplitz matrices with one singularity in the symbol. C. R. Acad. Sci. Paris, 347, ser. I, p. 489-494 (2009).

[24] Spitzer (F. L.), Stone (C. J.). — A class of Toeplitz forms and their applications to probability theory. Illinois J. Math., 4, p. 253-277 (1960).

[25] Szegö (G.). — A Toeplitz féle formákról. Mathematikai és természettudományi ertesitö, 35, p. 185-222 (1917).

[26] Widom (H.). — On the eigenvalues of certain hermitian operators. Trans. Amer. Math. Soc., 88, p. 491-522 (1958).

[27] Widom (H.). — Extreme eigenvalues of translation kernels. Trans. amer. Math. Soc., 100, p. 252-262 (1961).

[28] Widom (H.). — Extreme eigenvalues of N-dimensional convolution operators. Trans. Amer. Math. Soc., 106, p. 391-414 (1963).

[29] Zygmund (A.). — Trigonometric series, volume 1. Cambridge University Press (1968).