ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

G. LELOUP

Autour des groupes cycliquement ordonnés

Tome XXI, nº 2 (2012), p. 235-257.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2012_6_21_2_235_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XXI, n° 2, 2012
pp. 235–257

Autour des groupes cycliquement ordonnés

G. Leloup[(1)]

Résumé. — Ce travail commence par rappeler les définitions et les résultats de base concernant les groupes cycliquement ordonnés, et mentionner différents domaines où ils apparaissent. Ensuite sont exposés quelques développements, notamment sur la théorie du premier ordre, les séries formelles à exposants dans un groupe cycliquement ordonné, les groupes valués dont la valuation est à valeurs dans un ensemble cycliquement ordonné, et un analogue pour les espaces ultramétriques.

Abstract. — Cyclically ordered groups were introduced by Rieger, but the usual reference is the book of Fuchs, which is redacted in english. Other authors worked on cyclically ordered groups, one can note that they appear in MV-algebras and in some groups of permutations of chains. The first part of this expository paper is dedicated to definitions and well known properties. The second part deals with the first order theory of cyclically ordered groups, which was studied by M. Giraudet and F. Lucas. The third section studies rings of formal power series with exponents in a cyclically ordered group, and in the last one we define cyclically valued groups and cyclically ultrametric spaces and we focus on their first order theory.

Introduction

Les groupes cycliquement ordonnés ont été introduits par Rieger dans des articles rédigés en tchèque ([19], [20] et [21]), c'est le livre de Fuchs ([2, ch. 4]), rédigé en anglais, que l'on cite comme référence pour les définitions et

(*) Reçu le 08/10/2010, accepté le 19/01/2012

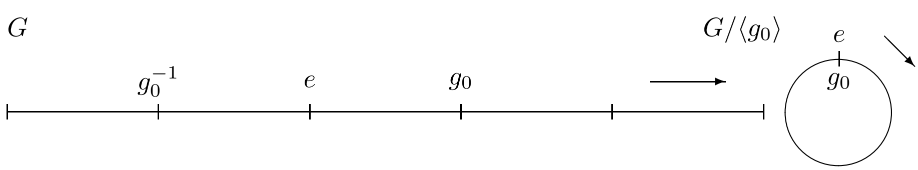
(1) Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans Cedex, France
gerard.leloup@univ-lemans.fr

les premières propriétés. D'autres auteurs s'y sont intéressés par la suite, on trouvera une liste non exhaustive dans la bibliographie. On peut noter le lien avec les MV-algèbres ([7]) ainsi qu'avec certains groupes de permutations sur des ensembles linéairement ordonnés ([1, §IV]). Cet exposé commence par un rappel des propriétés bien connues des groupes cycliquement ordonnés. La deuxième partie est consacrée à la théorie du premier ordre des groupes cycliquement ordonnés, étudiée par Michèle Giraudet et François Lucas. Nous passerons ensuite aux anneaux de séries formelles à exposants dans un groupe cycliquement ordonné, et nous finirons par les groupes cycliquement valués et les espaces cycliquement ultramétriques, qui sont un premier pas vers l'étude de la théorie du premier ordre des anneaux de séries formelles à exposants dans un groupe cycliquement ordonné. Ce travail est rédigé de manière à être accessible à un public non initié aux groupes cycliquement ordonnés et ne connaissant que des rudiments de logique.

1. Groupes cycliquement ordonnés

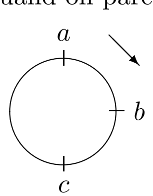
Considérons un groupe G linéairement ordonné, d'élément neutre e, et un élément g_0, dans le centre de G, $g_0 > e$, cofinal dans G (i.e. $\forall g \in G$ $(g > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ g_0^n \leqslant g < g_0^{n+1})$, ou encore, le plus petit sous-groupe convexe contenant g_0 est G). On notera $\langle g_0 \rangle$ le sous-groupe de G engendré par g_0.

Le groupe quotient $G/\langle g_0 \rangle$ peut être vu comme un « enroulé » de G :



Par exemple, si G est égal au groupe additif $\mathbb{R}$ des réels et $g_0 = 2\pi$, on a concrètement une application $x \mapsto \exp(ix)$ dont le noyau est $\langle 2\pi \rangle$. On sait que $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{R}$ est isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{K}$ des complexes de module 1.

On va dire que $R(a, b, c)$ est vérifiée, si l'on rencontre ces éléments dans cet ordre quand on parcourt le cercle :



Plus exactement, la relation R est définie par :
pour tous a, b, c dans G, on a $R(a\langle g_0\rangle, b\langle g_0\rangle, c\langle g_0\rangle)$ si et seulement s'il existe $a' \in a\langle g_0\rangle$, $b' \in b\langle g_0\rangle$, $c' \in c\langle g_0\rangle$ tels que l'une des relations $e \leqslant a' < b' < c' < g_0$ ou $e \leqslant b' < c' < a' < g_0$ ou $e \leqslant c' < a' < b' < g_0$ soit vérifiée.

La relation R est cyclique, i.e. $R(a, b, c) \Rightarrow R(b, c, a)$, R est compatible avec la loi de groupe, et la relation définie par : $b <_a c \Leftrightarrow R(a, b, c)$, est une relation d'ordre linéaire sur l'ensemble $C\backslash\{a\}$.

Formellement, ceci s'exprime :

Définition 1.1. — *Soit C un groupe muni d'une relation ternaire R. On dit que (C, R) est un groupe cycliquement ordonné s'il vérifie les propriétés suivantes.*
(1) $\forall (a, b, c) \in C^3 \ R(a, b, c) \Rightarrow a \neq b \neq c \neq a$,
(2) $\forall (a, b, c) \in C^3 \ R(a, b, c) \Rightarrow R(b, c, a)$,
(3) Pour tout $c \in C$ $R(c, \cdot, \cdot)$ définit une relation d'ordre linéaire sur $C\backslash\{c\}$,
(4) $R(\cdot, \cdot, \cdot)$ est compatible, i.e.

$$\forall (a, b, c, u, v) \in C^5 \ R(a, b, c) \Rightarrow R(uav, ubv, ucv).$$

Pour tout $c \in C$, on notera $\leqslant_c$ l'ordre défini par :

$$\forall (a, b) \in (C\backslash\{c\})^2 \ (a <_c b \Leftrightarrow R(c, a, b)) \wedge c <_c a$$

(où $a <_c b$ signifie $a \leqslant_c b$ et $a \neq b$). Pour $\emptyset \neq X \subset C$, $\min_c X$ désignera le minimum de l'ensemble $(X, \leqslant_c)$, s'il existe.

Par exemple, sur tout groupe linéairement ordonné il existe une structure de groupe cycliquement ordonné. On pose : $R(a, b, c)$ si, et seulement si, $a < b < c$ ou $b < c < a$ ou $c < a < b$. Dans ce cas, on dit que C est un groupe *linéairement cycliquement ordonné.*

En introduction, on a construit un groupe cycliquement ordonné en « enroulant » un groupe linéairement ordonné. En fait tout groupe cycliquement ordonné peut être considéré comme un enroulé. Ceci vient du théorème suivant.

Théorème 1.2. — *(Rieger, [2, IV, 6, th. 21]). Si C est un groupe cycliquement ordonné, alors il existe sur $G = \mathbb{Z} \times C$ une structure de groupe linéairement ordonné, où $g_0 = (1, e)$ est positif, central, cofinal, et tel que $C \simeq G/\langle g_0\rangle$.*

L'ordre sur G est donné par : $(n,c) < (n',c')$ si, et seulement si, $n < n'$, ou $n = n'$ et $R(e,c,c')$, ou $n = n'$ et $c = e$. La loi du groupe G est obtenue par :

$$(m,a)\cdot(n,b) = \begin{cases} (m+n,b) & si \quad a = e \\ (m+n,a) & si \quad b = e \\ (m+n,ab) & si \quad R(e,a,ab) \\ (m+n+1,ab) & si \quad R(e,ab,a) \\ (m+n+1,e) & si \quad ab = e \neq a \end{cases}$$

Le groupe G ainsi obtenu est appelé le *déroulé* de C, et on le notera $\mathrm{uw}(C)$, (car déroulé se dit unwound en anglais). On notera également e son élément neutre si le contexte n'apporte pas de confusion.

Dans le cas où C est le groupe $\mathbb{K}$ des complexes de module 1, le déroulé est le corps $\mathbb{R}$ des réels, la bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z} \times \mathbb{K}$ est obtenue de la manière suivante. Soit $x \in \mathbb{R}$, n la partie entière de $x/(2\pi)$ et $\theta = x - 2n\pi$, alors l'image de x est $(n, \exp(i\theta))$. L'ordre et la multiplication sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{K}$ sont construits de manière à ce que cette bijection soit un isomorphisme de groupes ordonnés. Il suffit d'avoir cet isomorphisme en tête pour retrouver l'ordre et l'addition sur le déroulé.

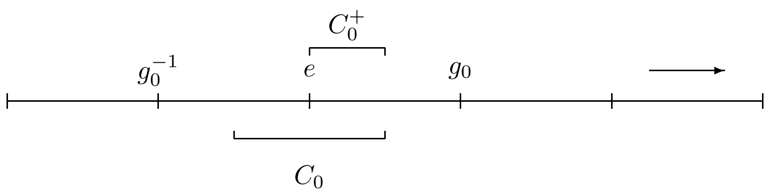
Le passage au déroulé permet de démontrer plus rapidement certaines propriétés des groupes cycliquement ordonnés, ou de les visualiser de manière à les comprendre sans avoir besoin d'en examiner la preuve.

On peut généraliser la construction de l'enroulé en considérant un groupe G linéairement ordonné et un sous-groupe M central et discret, de premier élément strictement positif g_0. Alors G/M est cycliquement ordonné, et $G/M \simeq \mathrm{cvx}(\langle g_0\rangle)/\langle g_0\rangle$, où $\mathrm{cvx}(\langle g_0\rangle)$ désigne le sous-groupe convexe engendré par g_0 ([5, Lemma 1.16]).

L'ensemble $C_0 = \{g \in \mathrm{uw}(C) \mid g_0^{-1} \leqslant g^2 < g_0\}$ est un ensemble de représentants de C dans $\mathrm{uw}(C)$. C est isomorphe à C_0 par la projection canonique. C_0 est un sous-ensemble convexe de $\mathrm{uw}(C)$, et C_0 est symétrique dans le sens où si $a \in C_0$, $a^2 \neq g_0^{-1}$, alors $a^{-1} \in C_0$.

On notera P l'image de C_0^+ $(= \{g \in C_0 \mid g \geqslant e\})$, on l'appelle le cône positif de C. On voit facilement que P est caractérisé par la relation $a \in P \Leftrightarrow R(a^{-1},e,a)$ ou $a = e$. Noter qu'en général, P n'est pas stable par l'opération du groupe : prenons par exemple $C = \mathbb{K}$, alors $P = \{\exp(i\theta) \mid 0 \leqslant \theta < \pi\}$, et pour $\theta = 2\pi/3$, $\exp(i\theta) \in P$ mais $(\exp(i\theta))^2 = \exp(i4\pi/3) \notin P$. Par contre, si C_0 est un sous-groupe convexe de $\mathrm{uw}(C)$, alors P est stable par $\cdot$.

L'image $l(C)$ du plus grand sous-groupe convexe de $\mathrm{uw}(C)$ contenu dans C_0 est appelée le *partie linéaire* de C. $P \cap l(C)$ est le cône positif d'une relation d'ordre que l'on notera $\leqslant_{\varpi}$, et alors $(l(C), \leqslant_{\varpi})$ est un groupe linéairement ordonné. Le groupe C est linéairement cycliquement ordonné si, et seulement si, $l(C) = C$. Dans ce cas, C_0 est un sous-groupe convexe de $\mathrm{uw}(C)$, et g_0 n'a pas de racine carrée.



Jakubík et Pringerová ont montré qu'un groupe cycliquement ordonné C est linéairement cycliquement ordonné si et seulement s'il n'a pas de sous-groupe fini non trivial, et pour tout $c \in C$ et tout entier naturel $n > 1$, $R(e, c, c^2) \Rightarrow R(e, c, c^n)$ ([8, Lemma 3.3]). En fait la première de ces deux conditions peut être remplacée par : C n'a pas délément d'ordre 2 ([5, Examples 1.10]). La deuxième caractérise la partie linéaire de C, dans le sens où, si $c \in P$, alors : $c \in l(C) \Leftrightarrow \forall n > 1,\ R(e, c, c^n)$.

Pour obtenir une description des groupes cycliquement ordonnés on définit les produits lexicographiques.

Définition 1.3. — *Soit (C, R) un groupe cycliquement ordonné et $(L, \leqslant)$ un groupe linéairement ordonné. Le produit lexicographique de (C, R) et $(L, \leqslant)$, noté $C \overrightarrow{\times} L$, est le groupe produit $C \times L$ muni de la relation R' définie comme suit. Pour tous a, b, c dans C et l, m, n dans L, on pose $R'((a, l), (b, m), (c, n))$ si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est vérifiée :*
$R(a, b, c)$
$a = b \neq c$ *et* $l < m$
$a \neq b = c$ *et* $m < n$
$a = c \neq b$ *et* $n < l$
$a = b = c$ *et* $l < m < n$
$a = b = c$ *et* $m < n < l$
$a = b = c$ *et* $n < l < m$.

On remarque que le sous-groupe $\{e\} \overrightarrow{\times} L$ muni de la restriction de R est linéairement cycliquement ordonné, et il est contenu dans la partie linéaire du produit lexicographique.

Par exemple, prenons $C = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ où R est définie par $R(\bar{0},\bar{1},\bar{2})$, $R(\bar{1},\bar{2},\bar{0})$ et $R(\bar{2},\bar{0},\bar{1})$, et prenons $L = \mathbb{Z}$ (groupes additifs). Dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\overrightarrow{\times}\mathbb{Z}$, on a pour tous entiers l, m, n :
$R'((\bar{0},l),(\bar{1},m),(\bar{2},n))$,
$R'((\bar{0},l),(\bar{0},m),(\bar{0},n)) \Leftrightarrow l < m < n$ ou $m < n < l$ ou $n < l < m$,
$R'((\bar{0},l),(\bar{0},m),(\bar{1},n)) \Leftrightarrow l < m$,
et d'autres relations ou équivalences similaires, dont certaines se déduisent de la compatibilité ou de la cyclicité.

Pour énoncer les théorèmes de représentation, il reste à définir les c-morphismes.

Définition 1.4. — *Soit C et C' deux groupes cycliquement ordonnés. Une application φ de C dans C' est un c-morphisme s'il existe un morphisme de groupes ordonnés ψ de $uw(C)$ dans $uw(C')$ tel que $\psi(g_0) = g'_0$, et φ se déduit canoniquement de ψ. On dit que φ est un c-morphisme propre si φ est un c-morphisme et son image n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Dans [6, Lemma 3.2] il est établi que si un c-morphisme propre est non trivial, alors son noyau n'a pas d'élément d'ordre 2.

Théorème 1.5. — *(Świerczkowski [25]). Soit C un groupe cycliquement ordonné. Il existe un groupe linéairement ordonné L tel que C s'injecte, comme groupe cycliquement ordonné, dans $\mathbb{K}\overrightarrow{\times}L$ (où $\mathbb{K}$ est le groupe cycliquement ordonné des complexes de module 1).*

Dans [26] Zabarina et Pestov ont montré que $l(C)$ est un sous-groupe normal de C (Theorem 2.7), que $C/l(C)$ est un sous-groupe cycliquement ordonné qui s'injecte dans $\mathbb{K}$ (Proposition 2.5), et que C s'injecte dans $(C/l(C))\overrightarrow{\times}L$, où L est un groupe linéairement ordonné (Theorem 2.12). Un c-morphisme injectif φ de C dans $(C/l(C))\overrightarrow{\times}L$ sera appelé une *représentation* si les restrictions à $\varphi(C)$ des projections canoniques de $(C/l(C))\overrightarrow{\times}L$ sur $C/l(C)$ et L respectivement sont surjectives. Jakubík et Pringerová ont montré que pour un même groupe, il peut y avoir plusieurs représentations non isomorphes ([8, §6]); le choix du groupe L n'est pas unique en général.

Comme conséquence de ces représentations, on peut montrer que tout groupe cycliquement ordonné fini s'injecte dans le groupe $\mathbb{U}$ des racines de l'unité dans le corps des complexes, et est donc cyclique.

Passons maintenant aux critères pour vérifier si un groupe peut être muni d'un ordre cyclique.

Théorème 1.6 *([27, Proposition 3]). — Il existe un ordre cyclique sur un groupe G donné si, et seulement si, le groupe $T(G)$ de ses éléments de torsion s'injecte dans $\mathbb{U}$, et $G/T(G)$ est linéairement ordonnable.*

On remarque en particulier qu'un groupe cycliquement ordonné contient au plus un élément d'ordre 2, qui est l'image de l'unique racine carrée de g_0 par la projection canonique, si cette racine carrée existe.

Dans les remarques qui suivent Theorem 4.2 de [5], les auteurs font le lien, dans le cas abélien, entre ce théorème et un résultat de Sabbagh ([22]) caractérisant les groupes qui peuvent être injectés dans le groupe multiplicatif d'un corps.

Théorème 1.7 *([4, Theorem 3.1], [5, Theorem 4.10]). — Un groupe G est cycliquement ordonnable si, et seulement si, $Z(G)$ est cycliquement ordonnable, et $G/Z(G)$ est linéairement ordonnable.*

Cette propriété transpose dans le cas cycliquement ordonné un théorème de Kokorin et Kopytov : un groupe G est ordonnable si, et seulement si, son centre $Z(G)$ et le groupe quotient $G/Z(G)$ sont ordonnables ([11]).

On définit sur les groupes cycliquement ordonnés des notions analogues à certaines notions définies sur les groupes linéairement ordonnés, elles seront utilisées dans la deuxième partie de l'exposé. Rappelons d'abord qu'un groupe linéairement ordonné G est dit *régulier* si pour tout entier $n \geqslant 2$ et tous x, y dans G, s'il existe $z_1, \ldots, z_{n-1}$ dans G tels que $x < z_1 < \ldots < z_{n-1} < y$, alors il existe $w \in G$ tel que $x \leqslant nw \leqslant y$. Ceci est équivalent à dire que le quotient par tout sous-groupe convexe propre est divisible. Clairement, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$ sont réguliers.

Définition 1.8. — *Soit (C, R) un groupe cyliquement ordonné. On dit que que (C, R) est discret si $uw(C)$ est un groupe linéairement ordonné discret. On dit que (C, R) est dense s'il n'est pas discret. On dit que (C, R) est c-régulier si $uw(C)$ est régulier (dans [14] et [15] on utilise la terminologie uw-régulier).*

Par exemple, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est discret, $\mathbb{K}$ est dense et c-régulier. Si α est un rationnel strictement positif, et G est égal au produit lexicographique de groupes totalement ordonnés $\mathbb{Q}\overrightarrow{\times}\mathbb{Z}$, alors le groupe $C = G/\langle(\alpha, 1)\rangle$ est divisible et discret. Le groupe $G = \mathbb{Q} + \mathbb{Z}\pi$ n'est pas divisible ni régulier, mais $C = G/\langle\pi\rangle$ est divisible (voir les remarques après la définition 1.9 dans [14]).

Définition 1.9. — *Soit C un groupe cyclique. Un c-sous-groupe convexe de C est l'image par la projection canonique d'un sous-groupe convexe inclus dans C_0.*

Proposition 1.10 *([6, Theorem 3.4]). — Soit C et C' deux groupes cycliquement ordonnés et φ un c-morphisme propre de C dans C'. Alors* $\ker(\varphi)$ *est un c-sous-groupe convexe de C.*

Proposition 1.11 *([5, Theorem 2.6]). — Soit C un groupe cycliquement ordonné et H un sous-groupe normal de C. Alors R définit un ordre cyclique $\overline{R}$ sur le groupe quotient C/H si, et seulement si, le morphisme canonique de (G, R) dans $(G/H, \overline{R})$ est un c-morphisme. Dans ce cas, $\overline{R}$ est défini par :*

$\overline{R}(xH, yH, zH) \Leftrightarrow xH \neq yH \neq zH \neq xH \wedge \exists (x', y', z') \in (xH \times yH \times zH)\ R(x', y', z')$.

Si H est un c-sous-groupe convexe de C, alors la condition ci-dessus est vérifiée.

Définition 1.12. — *Soit C un groupe cyclique, on dit que C est c-archimédien si $l(C) = \{e\}$.*

On peut montrer que cette définition est équivalente à celle de Świerczkowski ([25]) : C est c-archimédien si pour tous a et b dans C il existe un entier $n > 0$ tel que la relation $R(e, a^n, b)$ n'est pas vérifiée.

F. Lucas et M. Giraudet ([6, 7) de Examples and Remarks 2.11]) ont donné un exemple de groupe cycliquement ordonné isomorphe à $\mathbb{Z}$ (comme groupe) mais qui n'est pas c-archimédien. On part du groupe $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \overrightarrow{\times} \mathbb{Z}$ introduit plus haut, on note C_1 le sous-groupe engendré par $(\bar{1}, 1)$, et C_2 le sous-groupe de C_1 engendré par $(\bar{0}, 3)$. C_1 est isomorphe à $\mathbb{Z}$, C_2 est un sous-groupe c-convexe de C_1, donc C_1 n'est pas c-archimédien. On remarque qu'ici C_2 n'est pas un sous-groupe pur de C_1.

Dans [14, §4], F. Lucas montre que sur le groupe $\mathbb{Q}$ des rationnels il existe $2^{\aleph_0}$ ordres cycliques non isomorphes, certains sont c-archimédiens, certains sont discrets.

Pour finir ce paragraphe, nous allons préciser les liens, mentionnés dans l'introduction, entre les ordres cycliques et les MV algèbres d'une part et les groupes de permutations d'ensembles linéairement ordonnés d'autre part. La définition des groupes cycliquement ordonnés se généralise en groupes *partiellement cycliquement ordonnés*, où la propriété (3) de la définition 1.1 est remplacée par : pour tout c dans C, $R(c, \cdot, \cdot)$ définit une relation d'ordre partiel sur $C\backslash\{e\}$, que l'on étend à C en prenant c comme plus petit élément. Par exemple, un produit cartésien de groupes cycliquement ordonnés est un groupe partiellement cycliquement ordonné. Dans ce cas particulier, l'ordre $\leqslant_e$ définit un treillis (toute paire d'éléments a une borne supérieure et une borne inférieure) dont e est le plus petit élément, et il existe une unité faible u pour $\leqslant_e$ (i.e. pour tout c, si la borne inférieure de c et u est e, alors $c = e$). Notons LC la catégorie des groupes partiellement cycliquement ordonnés qui sont isomorphes à un produit booléen de groupes cycliquement ordonnés. Dans [7, Theorem 4.1] il est établi que LC est équivalente à la catégorie des MV algèbres projetables.

Comme on va le voir dans le paragraphe 4, on peut également définir les *ensembles cycliquement ordonnés*, c'est-à-dire les ensembles munis d'une relation ternaire vérifiant les propriétés (1), (2) et (3) de la définition 1.1. Dans [1] sont considérés les ensembles cycliquement ordonnés *colorés*, i.e. munis d'une famille de prédicats unaires. Soit T une chaîne colorée, i.e. un ensemble linéairement ordonné muni d'une famille de prédicats unaires, et soit φ un automorphisme de T tel que, pour tout $x \in T$, $x < \varphi(x)$ et l'ensemble $\{\varphi^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ n'est pas borné inférieurement ni supérieurement. Notons $\sim$ la relation d'équivalence définie par : $x \sim y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}\; y = \varphi^n(x)$. Comme φ est un morphisme de chaîne colorée, chaque prédicat de couleur sur T permet de définir un prédicat de couleur sur $T/\sim$. Par ailleurs, $T/\sim$ peut être muni d'un ordre cyclique par : $R(a, b, c) \Leftrightarrow \exists(x, y, z) \in (a \times b \times c)\; x < y < z < \varphi(x)$. Si H est un sous-groupe du groupe des automorphismes de T tel que φ est dans le centre de H, alors $H/\langle\varphi\rangle$ est canoniquement isomorphe, comme groupe, à un sous-groupe du groupe des automorphismes de l'ensemble cycliquement ordonné coloré $T/\sim$ (Proposition 4.1). Réciproquement, si M est un ensemble cycliquement ordonné coloré et G sous-groupe du groupe des automorphismes de M, alors il existe H, φ et T comme ci-dessus tels que G est isomorphe comme groupe à $H/\langle\varphi\rangle$ et M est isomorphe comme ensemble cycliquement ordonné à $T/\sim$ (Theorem 4.2). Ceci peut être considéré comme une généralisation du théorème de Rieger.

2. Propriétés du premier ordre

Les propriétés du premier ordre des groupes cycliquement ordonnés ont été étudiées par M. Giraudet et F. Lucas ([4], [5], [14] et [15]). La plupart des propositions énoncées ici ne demandent que des connaissances rudimentaires de logique, que nous allons rappeler de manière informelle.

Une formule du premier ordre est une formule où les seules variables qui apparaissent désignent des éléments d'un ensemble, mais pas, par exemple, des parties ou des fonctions. La notation $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, ou plus brièvement $\varphi(\bar{x})$, signifie que toutes les variables libres de la formule φ sont parmi $x_1, \ldots, x_n$ (c'est-à-dire les variables qui n'apparaissent pas d'abord à la droite d'un quantificateur). Si φ est une formule sans variable libre, on dit que φ est un *énoncé*. La théorie des groupes cycliquement ordonnés est l'ensemble des énoncés du premier ordre vérifiés par tous les groupes cycliquement ordonnés. Une formule universelle est constituée de quantificateurs universels (appliqués à des variables) suivis d'une formule sans quantificateurs; on définit de manière analogue les formules existentielles. Deux structures d'un même langage sont élémentairement équivalentes si elles vérifient les mêmes énoncés du premier ordre, le symbole utilisé pour l'équivalence élémentaire est $\equiv$. Quand A et B vérifient les mêmes énoncés existentiels, on note $A \equiv_\exists B$. Si $A \subset B$, on dit que A est une sous-structure élémentaire de B lorsque pour toute formule de la forme $\exists x\ \varphi(x, \bar{a})$, où φ est une formule sans quantificateurs et $\bar{a}$ un uplet de A, si B contient un élément b vérifiant $\varphi(b, \bar{a})$, alors A contient un élément a vérifiant $\varphi(a, \bar{a})$; on note $A \prec B$. Cette propriété généralise la suivante : tout polynôme à coefficients dans A qui a une racine dans B a une racine dans A. Une théorie admet *l'élimination des quantificateurs* si toute formule est équivalente à une formule sans quantificateurs. Une théorie est *décidable* s'il existe une procédure qui permet de déterminer si une formule donnée est dans cette théorie.

Le langage des groupes cycliquement ordonnés est $(\cdot, R, ^{-1})$, où $\cdot$ désigne la loi du groupe, R la relation d'ordre cyclique et $^{-1}$ le passage à l'inverse.

Un premier résultat permet de ramener l'étude de la théorie des groupes cycliquement ordonnés à celle de leurs déroulés. On rappelle que si (C, R) est un groupe cycliquement ordonné, $\mathrm{uw}(C)$ désigne son déroulé, et g_0 l'élément positif cofinal dans $\mathrm{uw}(C)$ tel que $C \simeq \mathrm{uw}(C)/\langle g_0\rangle$.

Théorème 2.1 *([5, Theorem 3.1]). — Soit (C, R) et (C', R') deux groupes cycliquement ordonnés. On a :*
$(C, R) \equiv (C'R') \Leftrightarrow (uw(C), g_0, \leqslant) \equiv (uw(C'), g'_0, \leqslant')$,
et si $(C, R) \subset (C'R')$, alors :

$$(C, R) \prec (C'R') \Leftrightarrow (uw(C), g_0, \leqslant) \prec (uw(C'), g'_0, \leqslant').$$

Citons trois autres propriétés.

Théorème 2.2 *([5, Theorem 5.2]). — Soit (C, R) un groupe cycliquement ordonné abélien, et H un c-sous-groupe convexe pur de C, alors (C, R) $\equiv (C/H)\overrightarrow{\times} H$.*

Théorème 2.3 *([5, Theorem 5.4]). — Tous les groupes cycliquement ordonnés abéliens contenant* $\mathbb{U}$ *vérifient les mêmes formules universelles.*

Théorème 2.4 *([14, Theorèmes 1.10 et 1.12]). — Soit* (C, R) *et* (C', R') *deux groupes cycliquement ordonnés abéliens, divisibles, denses et c-réguliers. Alors* (C, R) *et* (C', R') *sont élémentairement équivalents si et seulement s'ils ont des groupes de torsion isomorphes. Il y a* $2^{\aleph_0}$ *théories différentes de groupes cycliquement ordonnés abéliens, divisibles, discrets et c-réguliers.*

La classification des groupes cycliquement ordonnés abéliens demande d'introduire beaucoup de définitions, elle ne sera pas traitée ici. Il existe cependant une sous-classe de groupes cycliquement ordonnés pour laquelle on obtient d'intéressants résultats.

Définition 2.5. — *Soit* (C, R) *un groupe cycliquement ordonné, on dit que* (C, R) *est c-divisible si* (C, R) *n'est pas linéairement cycliquement ordonné et si* $uw(C)$ *est divisible (dans [14] et [15] on dit aussi super-divisible).*

Cette propriété dépend de la théorie du premier ordre de (C, R) car elle équivaut à : « C est divisible et contient un sous-groupe isomorphe au groupe $\mathbb{U}$ des racines de l'unité dans le corps des complexes ».

Théorème 2.6 *([14, §2]). — La théorie des groupes cycliquement ordonnés abéliens c-divisibles vérifie les propriétés suivantes.*

Elle est complète (i.e. tous ses modèles sont élémentairement équivalents).

Elle est modèle complète (i.e. toutes les inclusions sont élémentaires).

Elle a la propriété d'amalgamation (i.e. s'il existe des c-injections f_1 *de* C *dans* C_1 *et* f_2 *de* C *dans* C_2*, alors il existe* C' *et des c-morphismes* f_1' *de* C_1 *dans* C' *et* f_2' *de* C_2 *dans* C' *tels que* $f_1' \circ f_1 = f_2' \circ f_2$*).*

Elle admet l'élimination des quantificateurs (i.e. toute formule est équivalente à une formule sans quantificateurs).

Elle a un modèle premier $\mathbb{U}$ *(i.e.* $\mathbb{U}$ *est sous-structure élémentaire de tout groupe cycliquement ordonné abélien c-divisible).*

On montre aussi que tout groupe cycliquement ordonné abélien admet une clôture c-divisible, donc la théorie des groupes cycliquement ordonnés abéliens c-divisibles est la modèle complétion de la théorie des groupes cycliquement ordonnés abéliens.

Nous allons terminer cette section par des résultats concernant la minimalité.

Définition 2.7. — *Soit* (C, R) *un groupe cycliquement ordonné, et* I *un sous ensemble de* C.

I *est un intervalle ouvert s'il existe* c *et* c' *dans* C *tels que* $I := \{x \in C \mid R(c, x, c')\}$. *Ceci peut également se formuler :* I *est l'intervalle ouvert* $]c, c'[$ *de l'ensemble linéairement ordonné* $(C, <_c)$.

I *est convexe si* I *est un singleton ou si, pour tous* c, c' *dans* I, *l'un des intervalles ouverts* $\{x \in C \mid R(c, x, c')\}$ *ou* $\{x \in C \mid R(c', x, c)\}$ *est contenu dans* I.

Définition 2.8. — *Soit* (C, R) *un groupe cycliquement ordonné.*
(C, R) *est faiblement K-minimal s'il est infini et si tout sous ensemble définissable est une union finie de sous-ensembles convexes.*
(C, R) *est K-minimal s'il est infini et si tout sous ensemble définissable est une union finie de points et d'intervalles ouverts.*
(C, R) *est fortement K-minimal si tout groupe cycliquement ordonné élémentairement équivalent à* (C, R) *est K-minimal.*

Théorème 2.9 *([14, Théorème 3.13 1)]). — Soit* (C, R) *un groupe cycliquement ordonné, les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(C, R) *est K-minimal.*
(C, R) *est fortement K-minimal.*
(C, R) *est abélien et c-divisible.*

Théorème 2.10 *([14, Théorème 3.13 2)]). — Soit* (C, R) *un groupe cycliquement ordonné, alors*
(C, R) *est faiblement K-minimal si et seulement s'il vérifie l'une des propriétés suivantes.*
(C, R) *est abélien et c-divisible.*

Il existe un entier n *strictement positif et un groupe abélien linéairement ordonné* D *tels que* $C \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overrightarrow{\times} D$.

Théorème 2.11 *([14, Corollaire 3.14]). — Soit* (C, R) *et* (C', R') *deux groupes cycliquement ordonnés. Si* (C, R) *est faiblement K-minimal, et* (C, R) *et* (C', R') *sont élémentairement équivalents, alors* (C', R') *est faiblement K-minimal.*

3. Séries formelles

Les définitions et les résultats sur les anneaux de séries formelles à exposants dans un groupe cycliquement ordonné exposés ici viennent de [3]. Dans cette partie, C est un groupe cycliquement ordonné abélien, et k est un anneau commutatif unitaire. Comme C est abélien, on adoptera la notation additive pour C et pour $\mathrm{uw}(C)$; en particulier 0 sera l'élément neutre. Quand cela ne prêtera pas à confusion, 0 désignera également l'élément neutre de $(k,+)$.

Pour commencer, on remarque que si I est un sous-ensemble de C, alors les trois propositions suivantes sont équivalentes.
Il existe x dans C tel que $(I,<_x)$ est bien ordonné.
Pour tout x dans C, $(I,<_x)$ est bien ordonné.
I est l'image d'un sous-ensemble bien ordonné de C_0 par la projection canonique p.

On va naturellement dire que I est *bien ordonné* s'il vérifie l'une des trois conditions équivalentes ci-dessus. On peut montrer sans difficulté que tout sous-ensemble d'un ensemble bien ordonné est bien ordonné, et que l'union et la somme de deux sous-ensembles bien ordonnés quelconques sont également des sous-ensembles bien ordonnés. Si C est linéairement cycliquement ordonné, alors cette définition équivaut à la définition usuelle.

Pour toute application σ de C dans k, on appelle *support* de σ l'ensemble $\mathrm{Supp}(\sigma) := \{x \in C \mid \sigma(x) \neq 0\}$. On notera $k[[C]] := \{\sigma : k \to C \mid \mathrm{Supp}(\sigma)$ est bien ordonné$\}$. Les éléments de $k[[C]]$ seront notés, comme c'est l'usage, sous la forme $\sigma = \sum_{c\in S} \sigma_c X^c$, où S est un sous-ensemble bien ordonné de C contenant $\mathrm{Supp}(\sigma)$. Sur $k[[C]]$ on définit l'addition et la multiplication de la manière classique, $+$ est l'addition terme à terme et $\cdot$ est le produit de convolution. Si le support de σ est fini, on dira que σ est un *polynôme*, le sous-anneau des polynômes sera noté $k[C]$.

On notera $A_m := \{\sigma \in k[[\mathrm{uw}(C)]] \mid \mathrm{Supp}(\sigma)$ est borné$\}$. A_m est un sous-anneau de $k[[\mathrm{uw}(C)]]$. Cet anneau permet de ramener l'étude des séries formelles à exposants dans C à celle des séries formelles classiques par l'intermédiaire d'un isomorphisme canonique entre $k[[C]]$ et $A_m/(1-X^{g_0})A_m$.

Si C est un groupe linéairement ordonné, on sait que l'on a l'équivalence : $k[[C]]$ intègre $\Leftrightarrow$ k intègre ($\Rightarrow$ est trivial, pour $\Leftarrow$, on remarque que $k[[C]]$ s'injecte dans le corps $\mathrm{Frac}(k)[[C]]$, où $\mathrm{Frac}(k)$ est le corps des fractions de k). On peut se poser la même question si C est un groupe cycliquement ordonné quelconque. Clairement, si k n'est pas intègre alors $k[[C]]$ n'est pas intègre. Si C contient des éléments de torsion, par exemple c tel que $nc = 0$, alors $(1-X^c)(1+X^c+\cdots+X^{(n-1)c}) = 1-X^{nc} = 0$, donc $k[[C]]$ n'est pas intègre non plus. En conséquence :

$$k[[C]] \text{ intègre } \Rightarrow k \text{ intègre et } C \text{ sans torsion.}$$

On peut naturellement se demander si la réciproque de cette propriété est vérifiée, la question reste ouverte. On peut cependant prouver que si k est intègre et C est sans torsion, alors $k[C]$ est intègre ([3, Theorem 4]).

La recherche de conditions nécessaires et suffisantes pour que $k[[C]]$ soit un corps reste également ouverte, on a cependant les implications ([3, Theorem 3]) :

$$k[[C]] \text{ corps } \Rightarrow \begin{cases} k \text{ corps} \\ C \text{ sans torsion} \\ C/l(C) \text{ s'injecte dans } \mathbb{U} \end{cases}$$

et

$$\left.\begin{array}{l} k \text{ corps} \\ C \text{ sans torsion} \\ C/l(C) \text{ fini} \end{array}\right\} \Rightarrow k[[C]] \text{ corps}$$

La situation est donc un peu plus compliquée que dans le cas où C est un groupe abélien linéairement ordonné, car dans ce cas $k[[C]]$ est un corps si, et seulement si, k est un corps.

Sur un anneau de séries formelles à exposants dans un groupe abélien linéairement ordonné, il existe une valuation naturelle, et les valuations sur les corps de séries formelles sont des exemples importants de valuations d'égale caractéristique. Dans le cas des anneaux de séries formelles à exposants dans un groupe abélien cycliquement ordonné, on ne peut pas parler de valuation naturelle, dans la mesure où il n'y a pas d'ordre privilégié sur un groupe cycliquement ordonné. On commence par ajouter à C un élément ∞ avec les conventions : $\forall a \in C,\ \forall b \in C,\ b <_a \infty$, puis on considère une fonction de $C \times k[[C]]$ dans $C \cup \{\infty\}$ qui à tous $a \in C$ et $\sigma \in k[[C]]$ associe le plus petit élément du support de σ pour l'ordre $<_a$; avec les notations introduites plus haut, on pose $v(a,\sigma) = \min_a(\mathrm{Supp}(\sigma))$ (on prend par convention $\min(\emptyset) = \infty$). On a bien les relations : pour tous σ et τ dans $k[[C]]$ et a dans C, $v(a, \sigma-\tau) \geqslant_a \min_a(v(a,\sigma), v(a,\tau))$ et $v(a,\sigma) = \infty \Leftrightarrow \sigma = 0$, qui montrent que $(k[[C]], +, v(a,\cdot))$ est ce que l'on appelle un *groupe valué*. Malheureusement, pour la multiplication on n'a pas de propriété générale. Si C est un groupe linéairement cycliquement ordonné, on a vu au paragraphe 1 que $(C, \leqslant_\varpi)$ est un groupe ordonné; dans ce cas, $v(\varpi,\cdot)$ est la valuation sur $k[[C]]$ au sens habituel du terme.

La valuation permet de définir les monômes et les constantes :
σ est un monôme $\Leftrightarrow \forall \tau \in k[[C]],\ v(v(0,\sigma),\tau\sigma) = v(0,\sigma) + v(0,\tau)$.
$\sigma \neq 0$ est une constante si et seulement s'il vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes.
$\exists a \in C,\ \forall \tau \in k[[C]],\ v(a,\sigma\tau) = v(a,\tau)$
$\forall a \in C \cup \{\varpi\},\ \forall \tau \in k[[C]],\ v(a,\sigma\tau) = v(a,\tau)$.

Par contre, l'ensemble $\{X^c \mid c \in C\}$ n'est pas définissable. En formalisant ces propriétés, on obtient les définitions suivantes.

Définition 3.1. — *Soit R un anneau commutatif unitaire, et v une application de $C \times R$ dans $C \cup \{\infty\}$. Pour $\sigma \in R$, on pose Supp$(\sigma) := \{v(a,\sigma) \mid a \in C\}$.*
σ est un monôme si Supp(σ) est un singleton.
σ est une constante si $\sigma = 0$ ou Supp$(\sigma) = \{0\}$.

On dira que R est un anneau cycliquement valué si pour tous a dans C, σ, σ' dans R, (1), (2), (3), (4) et (5) ci-dessous sont vérifiés.

(1) $(R,+,v(a,\cdot))$ est un groupe valué.

(2) Si $v(a,\sigma) = a$, alors il existe un unique monôme $\mu_{a,\sigma}$ tel que $v(a,\sigma - \mu_{a,\sigma}) \neq a$.

(3) $\min_a(\mathit{Supp}(\sigma))$ existe et vaut $v(a,\sigma)$.

(4) Supp$(\sigma\sigma') \subset$ Supp(σ) + Supp(σ').

(5) Si Supp$(\sigma) \cap (a -$ Supp$(\sigma')) = \{a_1,\ldots,a_n\}$, alors $\mu_{a,\sigma\sigma'} = \mu_{a_1,\sigma}\mu_{a-a_1,\sigma'} + \cdots + \mu_{a_n,\sigma}\mu_{a-a_n,\sigma'}$.

Il découle de ces propriétés que l'ensemble des constantes est un sous-anneau unitaire de R.

Théorème 3.2. — *([3, Theorem 5.5]). Soit (R,v) un anneau cycliquement valué d'anneau des constantes k. On suppose que :*
pour tout $\sigma \in R$, Supp(σ) est bien ordonné,

il existe un morphisme injectif $\left\{ \begin{array}{ccc} (C,+) & \to & (R,\cdot) \\ c & \mapsto & m_c \end{array} \right.$ *où m_c est un monôme de degré c.*

Alors (R,v) s'injecte dans $k[[C]]$.

Si K est un corps valué d'égale caractéristique, on sait que sa clôture henselienne contient un sous-corps canoniquement isomorphe à son corps de restes ([10, Lemma 12]). Si de plus son groupe multiplicatif contient un sous-groupe canoniquement isomorphe au groupe de valuation, alors en prenant ce sous-groupe comme ensemble de facteurs, d'après la remarque à la fin du paragraphe 4 de [10], K peut être plongé dans un corps de séries formelles, dans lequel on peut définir les valuations $v(a,\cdot)$ comme ci-dessus. Les séries formelles considérées par Kaplanski sont construites à partir d'ensembles de facteurs, et ne contiennent pas nécessairement de sous-groupe isomorphe au groupe de valuation. Une étude semblable a été faite dans [12] pour les groupes cycliquement ordonnés, et le théorème ci-dessus a été généralisé en enlevant la condition : « il existe un morphisme injectif $\left\{\begin{array}{ccc} (C,+) & \to & (R,\cdot) \\ c & \mapsto & m_c \end{array}\right.$ où m_c est un monôme ».

4. Groupes cycliquement valués, espaces cycliquement ultramétriques

Après avoir défini les anneaux cycliquement valués, on peut s'intéresser à leurs propriétés du premier ordre, en particulier, à quelles conditions deux telles structures sont élémentairement équivalentes. Un premier pas a été fait dans [13], en se restreignant à un langage plus simple. En enlevant le symbole de multiplication aux anneaux cycliquement valués, il reste les groupes cycliquement valués. On peut également faire abstraction de l'addition, et ne regarder que les espaces cycliquement ultramétriques. Dans chacun des cas, le groupe cycliquement ordonné n'est plus considéré comme un groupe, mais seulement comme un ensemble cycliquement ordonné.

Un ensemble C est appelé un *ensemble cycliquement ordonné* s'il est muni d'une relation ternaire $R(\cdot,\cdot,\cdot)$ qui vérifie les trois propriétés suivantes.

(1) $\forall (a,b,c)\in C^3\ R(a,b,c)\Rightarrow a\neq b\neq c\neq a$

(2) $\forall (a,b,c)\in C^3\ R(a,b,c)\Rightarrow R(b,c,a)$

(3) Pour tout $a\in C$, $R(a,\cdot,\cdot)$ définit un ordre total sur $C\backslash\{a\}$
(cf. [2] et [16]).

Les notations $\leqslant_a$ et $\min_a$ gardent le même sens qu'auparavant.

De même que sur un groupe linéairement ordonné il existe une structure de groupe linéairement cycliquement ordonné, sur un ensemble linéairement ordonné $(T,<)$ il existe une structure d'ensemble cycliquement ordonné définie comme suit : $\forall a\ \forall b\ \forall c\ (R(a,b,c)\Leftrightarrow (a<b<c)\vee(b<c<a)\vee(c<a<b))$.

Comme dans le cas des groupes cycliquement ordonnés, la propriété d'être bien ordonné ne dépend pas de l'ordre $<_a$ choisi, ce qui permet de garder la notion de sous-ensemble bien ordonné déjà définie.

Dans la suite, C est un ensemble cycliquement ordonné auquel on ajoute un élément ∞ tel que : $\forall a \in C\ \forall b \in C\ b <_a \infty$.

DÉFINITION 4.1. — *Un groupe cycliquement valué est un groupe abélien $(G, +)$ muni d'une application v de $C \times G$ dans $C \cup \{\infty\}$ telle que, pour tout $a \in C$, $(G, v(a, \cdot))$ est un groupe valué, où l'ordre sur C est $\leqslant_a$, et $v(a, \cdot)$ est la restriction de v à $\{a\} \times G$.*

La définition des groupes valués a été rappelée dans la partie sur les séries formelles.

Le *support* d'un élément σ est défini par : $\mathrm{Supp}(\sigma) := \{v(a, \sigma) \mid a \in C\}$. On dira que v est *définissable par les supports*, si pour tous $a \in C$ et $\sigma \in G$, $\min_a(\mathrm{Supp}(\sigma))$ existe et est égal à $v(a, \sigma)$.

Par exemple, prenons pour chaque $a \in C$ un groupe abélien non trivial Γ_a, et notons $\sqcap_{a\in C}\Gamma_a$ l'ensemble des éléments du produit cartésien $\prod_{a\in C} \Gamma_a$ dont le support est bien ordonné. Pour $\sigma \in \sqcap_{a\in C}\Gamma_a$, posons $v(a, \sigma) := \min_a\{c \in C \mid \sigma_c \neq 0\}$. Alors $\sqcap_{a\in C}\Gamma_a$ est un groupe cycliquement valué, et v est définissable par les supports. Dans cet exemple, le support de σ est égal à son support au sens usuel du terme, c'est-à-dire $\mathrm{Supp}(\sigma) = \{c \in C \mid \sigma_c \neq 0\}$.

Si (G, v) est un groupe cycliquement valué tel que v est définissable par les supports, pour tout $a \in C$ on note $G_a := \{\sigma \in C \mid v(a, \sigma) \neq a\}$. Alors G_a est un sous-groupe de G, et on peut démontrer que G s'injecte dans $\sqcap_{a\in C} G/G_a$.

Plus généralement, tout groupe valué peut être considéré comme un groupe cycliquement valué où la valuation est définissable par les supports. En effet, soit (G, ν) un groupe valué, où l'on note $<$ l'ordre sur $\nu(G)$. On ajoute un élément ϖ à $\nu(G)$, et on note C l'ensemble $\nu(G)\cup\{\varpi\}$. Il existe sur C une relation d'ordre cyclique et une structure d'ensemble cycliquement valué (G, v) tels que v est définissable par les supports, le support de tout élément est bien ordonné, et l'ordre $<$ est la restriction à $\nu(G)$ de $<_\varpi$.

Ouvrons ici une parenthèse pour faire le lien avec la théorie du premier ordre des groupes valués. P.-H. Schmitt a étudié les groupes abéliens p-valués, où p est un nombre premier, c'est-à-dire les structures de la forme $(G, \alpha \cup \{c_0, c_1\}, v)$ où G est un groupe abélien, $\alpha \cup \{c_0, c_1\}$ est un ensemble linéairement ordonné tel que α est un bon ordre et $\forall \gamma \in \alpha$ ($\gamma < c_0 <$

c_1), v est une application de G dans $\alpha \cup \{c_0, c_1\}$ telle que pour tous g, h dans G on a : $v(g-h) \geqslant \min(v(g), v(h))$, $(v(g) = c_0 \Leftrightarrow g = 0)$ et $(v(g) < c_0 \Rightarrow v(pg) > v(g))$. Il note (T1) la propriété : G est sans torsion, (T2) : $\forall g\ (v(g) < c_0 \Rightarrow v(pg) = v(g) + 1)$ et (T3) : pour tous q premiers, $s \in \mathbb{N}^*$ et $g \in G$, il existe $h \in q^s G$ tel que, pour tout $h' \in q^s G$, $v(g + h) \geqslant v(g + h')$. On notera aussi (T2)' : $\forall g \in G \backslash \{0\}\ v(pg) = v(g) + 1$. Les théorèmes 2.1, 2.5 et 2.6 de [23] établissent que la théorie des groupes abéliens p-valués est héréditairement indécidable (i.e. toute sous-théorie du même langage est indécidable), il en est de même pour la théorie des groupes abéliens p-valués sans torsion et pour la théorie des groupes abéliens p-valués sans torsion vérifiant (T2)'. Dans [24], il définit ce que l'on appellera ici les groupes abéliens faiblement p-valués (tamely p-ramified en anglais) comme étant les groupes abéliens p-valués vérifiant de plus (T1), (T2) et (T3). Il ajoute au langage une constante c_2 telle que $c_1 < c_2$, et il montre que la théorie des groupes abélien faiblement p-valué est décidable, au moyen d'une élimination des quantificateurs relative (Theorem 5.3). Cependant, si p_1 et p_2 sont deux nombres premiers (distincts ou non), la classe des structures de la forme (G, v_1, v_2), où (G, v_1) (resp. (G, v_2)) est un groupe abélien faiblement p_1-valué (resp. p_2-valué), est héréditairement indécidable (Lemma 2.2). Comme le langage des groupes cycliquement valués amène l'apparition de plusieurs valuations, ce dernier résultat laisse penser que les travaux de P.-H. Schmitt ne pourront pas être appliqués aux groupes cycliquement valués.

Pour étudier les propriétés du premier ordre des groupes cycliquement valués, on va changer de langage, pour se placer dans un langage relationnel. Soit (G, v) un groupe cycliquement valué, pour $a \in C$ et $\sigma \in G$, on pose : $g(a, \sigma) \Leftrightarrow v(a, \sigma) \neq a$, on a donc : $G_a = \{\sigma \in G \mid g(a, \sigma)\}$. On a vu que G_a est un sous-groupe de G. Dans ce langage, le support de σ est égal à $\{a \in C \mid \sigma \notin G_a\}$. Les variables qui interviennent sont de deux sortes, les éléments du groupe G, et ceux de l'ensemble cycliquement ordonné C, on introduit un symbole de relation unaire C défini par : $C(a) \Leftrightarrow a \in C$ et $\neg C(\sigma) \Leftrightarrow \sigma \in G$. Ainsi le langage sera $(+, 0, C, R, g)$, où $+$ est défini de $G \times G$ dans G, R est une relation ternaire définie sur C qui correspond à l'ordre cyclique, et g est une relation définie sur $C \times G$.

On va s'intéresser maintenant à des groupes cycliquement valués qui vérifient une sorte de propriété d'approximation forte. Intuitivement, on va demander que pour certaines famille finies de classes d'équivalence modulo des sous-groupes G_a, il existe un σ qui est dans une partie de ces classes et pas dans l'autre. On se donne des éléments $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+p}$ deux à deux distincts dans C, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on fixe une unique classe modulo G_{a_i}, et pour $n+1 \leqslant j \leqslant n+p$, on fixe un nombre fini de classes modulo G_{a_j}. Alors G contient un élément σ qui appartient à chaque classe modulo G_{a_i}, mais qui n'est dans aucune des classes modulo G_{a_j} fixées. Si tous les groupes quotients G/G_a ($a \in C$) sont infinis, cette propriété se traduit par : pour tout sous-ensemble fini $\{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+p}\}$ de cardinal $n+p$ de C, pour tout p-uple $\{i_1, \dots, i_p\}$ d'entiers positifs, et tous $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau_{1,1}, \dots, \tau_{1,i_1}, \dots, \tau_{p,1}, \dots, \tau_{p,i_p}$ dans G, il existe σ dans G tel que

$$g(a_1, \sigma_1 - \sigma) \wedge \cdots \wedge g(a_n, \sigma_n - \sigma) \wedge \neg g(a_{n+1}, \sigma - \tau_{1,1}) \wedge \cdots \wedge$$

$$\neg g(a_{n+1}, \sigma - \tau_{1,i_1}) \wedge \cdots \wedge \neg g(a_{n+p}, \sigma - \tau_{p,1}) \wedge \cdots \wedge \neg g(a_{n+p}, \sigma - \tau_{p,i_p}).$$

Par contre, si G/G_a est fini, il n'existe pas d'élément qui ne soit dans aucune des classes d'équivalence modulo G_a, on ajoute donc la condition que l'on ne cherche pas à éviter toutes les classes modulo G_a. On obtient donc la formulation générale suivante.

Définition 4.2. — *Soit (G, v) un groupe cycliquement valué. (G, v) est riche si pour tout $\{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+p}\}$, sous-ensemble fini de C, de cardinal $n+p$, pour tout p-uple $\{i_1, \dots, i_p\}$ d'entiers positifs, et tous $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau_{1,1}, \dots, \tau_{1,i_1}, \dots, \tau_{p,1}, \dots, \tau_{p,i_p}$ dans G, la formule suivante est vérifiée.*

$$\exists \tau_1 \ \cdots \ \exists \tau_p \ \neg g(a_{n+1}, \tau_1 - \tau_{1,1}) \wedge \cdots \wedge \neg g(a_{n+1}, \tau_1 - \tau_{1,i_1}) \wedge \cdots \wedge$$

$$\neg g(a_{n+p}, \tau_p - \tau_{p,1}) \wedge \cdots \wedge \neg g(a_{n+p}, \tau_p - \tau_{p,i_p}) \Rightarrow$$

$$\exists \sigma \ g(a_1, \sigma_1 - \sigma) \wedge \cdots \wedge g(a_n, \sigma_n - \sigma) \wedge \neg g(a_{n+1}, \sigma - \tau_{1,1}) \wedge \cdots \wedge$$

$$\neg g(a_{n+1}, \sigma - \tau_{1,i_1}) \wedge \cdots \wedge \neg g(a_{n+p}, \sigma - \tau_{p,1}) \wedge \cdots \wedge \neg g(a_{n+p}, \sigma - \tau_{p,i_p}).$$

Par exemple le produit de Hahn $\sqcap_{a \in C} \Gamma_a$ est riche.

Tout groupe cycliquement valué se plonge dans un groupe cycliquement valué riche associé au même ensemble cycliquement ordonné.

Théorème 4.3 *([13, Theorem 3.23]). — Soit (G, v) et (G', v') deux groupes cycliquement valués où v et v' sont définissables par les supports, G, G' sont divisibles, sans torsion, $C \equiv C'$ et pour tous $a \in C$, $a' \in C'$, G_a et $G_{a'}$ sont divisibles, $G_a \neq G$, $G'_a \neq G'$.*

1) Soit $\varphi(a_1, \dots, a_n, \sigma_1, \dots, \sigma_p)$ une formule sans quantificateurs, on a :

$$(G, +, g) \models Q_1 a_1 \ \cdots \ Q_n a_n \ Q_{n+1} \sigma_1 \ \cdots \ Q_{n+p} \sigma_p \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} C(a_i)$$

$$\wedge \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant p} \neg C(\sigma_i) \ \wedge \ \varphi(a_1,\ldots,a_n,\sigma_1,\ldots,\sigma_p)$$

si, et seulement si,

$$(G',+,g') \models Q_1 a_1 \ \cdots \ Q_n a_n \ Q_{n+1}\sigma_1 \ \cdots \ Q_{n+p}\sigma_p \ \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant n} C(a_i)$$

$$\wedge \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant p} \neg C(\sigma_i) \ \wedge \ \varphi(a_1,\ldots,a_n,\sigma_1,\ldots,\sigma_p),$$

où pour, $1 \leqslant i \leqslant n+p$, Q_i *est le symbole* $\forall$ *ou le symbole* $\exists$.

2) En particulier, $(G,+,g,C) \equiv_\exists (G',+,g',C')$.

DÉFINITION 4.4. — *Un espace cycliquement ultramétrique est un ensemble non vide* E *muni d'une application* u *de* $C\times E\times E$ *dans* $C\cup\{\infty\}$*, telle que pour tout* $a\in C$, (E,u_a) *est un espace ultramétrique, où l'ordre sur* C *est* $\leqslant_a$*. Ici,* u_a *désigne la restriction de* u *à* $\{a\}\times E\times E$*, pour* $a\in C$ *(i.e.* $u_a = u(a,\cdot,\cdot)$*).*

On rappelle que (E,u_a) est un espace ultramétrique si :

$\forall\sigma\in E\ \forall\tau\in E\ u(a,\sigma,\tau)=u(a,\tau,\sigma)$,

$\forall\sigma\in E\ \forall\tau\in E\ (u(a,\sigma,\tau)=\infty \Leftrightarrow \sigma=\tau)$,

$\forall\sigma\in E\ \forall\tau\in E\ \forall\rho\in E\ u(a,\sigma,\tau)\geqslant_a \min_a(u(a,\sigma,\rho),u(a,\rho,\tau))$.

Le lien entre les espaces cycliquement ultramétriques et les groupes cycliquement valués vient du fait que si $(G,+,v)$ est un groupe cycliquement valué, alors en posant, pour tous σ et τ dans G et a dans C, $u^v(a,\sigma,\tau) := v(a,\sigma-\tau)$, alors (G,u^v) est un espace cycliquement ultramétrique (ceci se déduit des propriétés des groupes valués).

On généralise la définition du support au cas des espaces cycliquement ultramétriques comme suit. Pour σ, τ dans E, le *support* de σ, τ est l'ensemble $\mathrm{Supp}(\sigma,\tau) := \{u(a,\sigma,\tau)\mid a\in C\}\cap C$ ($\mathrm{Supp}(\sigma,\sigma)=\emptyset$). Dans le cas des groupes cycliquement valués, le support de σ dans (G,v) est égal au support de σ, 0 dans (G,u^v).

On dira que u est *définissable par les supports* si pour tout a dans C et σ, τ dans E, $\min_a \mathrm{Supp}(\sigma,\tau)$ existe et est égal à $u(a,\sigma,\tau)$. Dans le cas des groupes cycliquement valués, on remarque que v est définissable par les supports si u^v l'est.

Par exemple, prenons une famille $(\Gamma_a)_{a\in C}$ d'ensembles non vides dont on fixe un élément O_a. On note $\sqcap_{a\in C}\Gamma_a$ le sous-ensemble des éléments σ de $\prod_{a\in C}\Gamma_a$ tels que $\{a \in C \mid \sigma_a \neq O_a\}$ est bien ordonné, et on pose $u(a,\sigma,\tau) := \min_a\{b \in C \mid \sigma_b \neq \tau_b\}$. $\sqcap_{a\in C}\Gamma_a$ est un espace cycliquement ultramétrique, où u est définissable par les supports.

Tout ensemble muni d'une distance ultramétrique peut être considéré comme un espace cycliquement ultramétrique où la distance est définissable par les supports. En effet, soit (E,μ) un espace ultramétrique, on ajoute un élément ϖ à l'ensemble totalement ordonné $(\mu(E\times E),<)$, et on pose $C = \mu(E\times E)\cup\{\varpi\}$. Il existe un ordre cyclique sur C et une structure d'espace cycliquement ultramétrique (E,u) tels que u est définissable par les supports, le support de tout élément est bien ordonné et l'ordre $<$ est la restriction à $\mu(E\times E)$ de $<_\varpi$.

De même que pour les groupes cycliquement valués, on va étudier les propriétés du premier ordre des espaces cycliquement ultramétriques en se plaçant dans un langage relationnel. Si (E,u,C) est un espace cycliquement ultramétrique, on pose $r(a,\sigma,\tau) \Leftrightarrow u(a,\sigma,\tau) \neq a$. Alors $r(a,\cdot,\cdot)$ est une relation d'équivalence. Par exemple, dans le cas des groupes cycliquement valués, on a : $r(a,\sigma,\tau) \Leftrightarrow g(a,\sigma-\tau) \Leftrightarrow \sigma-\tau \in G_a$. Le symbole C servira à distinguer les variables de l'ensemble cycliquement ordonné C de celle de l'ensemble E; on a : $C(a) \Leftrightarrow a\in C$ et $\neg C(\sigma) \Leftrightarrow \sigma \in E$. $(\cdot,\cdot,\cdot)$ est relation ternaire définie sur C, qui correspond à l'ordre cyclique, $r(\cdot,\cdot,\cdot)$ est une relation ternaire définie sur $C\times E\times E$. On dit que (E,u,C) est *riche* si u est définissable par les supports et si une propriété d'approximation analogue au cas des groupes cycliquement valués est vérifiée, ce qui se traduit par les formules suivantes.

$$\forall a_1 \cdots \forall a_n \,\forall a_{n+1} \cdots \forall a_{n+p}\, \forall\sigma_1 \cdots \forall\sigma_n\, \forall\tau_{1,1} \cdots \forall\tau_{1,i_1} \cdots \forall\tau_{p,1} \cdots$$

$$\forall\tau_{p,i_p}\; C(a_1) \wedge \cdots \wedge C(a_n) \wedge C(a_{n+1}) \wedge \cdots \wedge C(a_{n+p}) \wedge \bigwedge_{i\neq j} a_i \neq a_j$$

$$\wedge \neg C(\sigma_1) \wedge \cdots \wedge \neg C(\sigma_n) \wedge \neg C(\tau_{1,1}) \wedge \cdots \wedge \neg C(\tau_{1,i_1}) \wedge \cdots \wedge \neg C(\tau_{p,1})$$

$$\wedge \cdots \wedge \neg C(\tau_{p,i_p}) \wedge \exists\tau_1 \cdots \exists\tau_p\, \neg C(\tau_1) \wedge \cdots \wedge \neg C(\tau_p) \wedge$$

$$\neg r(a_{n+1}\ \tau_1\ \tau_{1,1}) \ \ldots\ \neg r(a_{n+1}\ \tau_1\ \tau_{1,i_1}) \ \ldots\ \neg r(a_{n+p},\tau_p,\tau_{p,1}) \ \ldots$$

$$\neg r(a_{n+p},\tau_p,\tau_{p,i_p}) \Rightarrow \exists\sigma\; r(a_1,\sigma_1,\sigma)\wedge\cdots\wedge r(a_n,\sigma_n,\sigma)\wedge\neg r(a_{n+1},\sigma,\tau_{1,1})\wedge\cdots\wedge$$

$$\neg r(a_{n+1},\sigma,\tau_{1,i_1}) \wedge\cdots\wedge \neg r(a_{n+p},\sigma,\tau_{p,1}) \wedge\cdots\wedge \neg r(a_{n+p},\sigma,\tau_{p,i_p}),$$

où (n,p) parcourt $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, et $(i_1,\ldots,i_p)$ parcourt l'ensemble des p-uplets d'entiers strictement positifs.

Tout espace cycliquement ultramétrique où u est définissable par les supports peut se plonger dans une clôture riche.

Théorème 4.5. — *([13, Theorem 3.9]). Soit (E, u, C) et (E', u', C') deux espaces cycliquement ultramétriques riches tels que $C \equiv C'$. On suppose qu'il existe κ dans $\{1,\ 2,\ 3, \ldots\} \cup \{\infty\}$ tel que pour tout a dans C et tout a' dans C', card $E/r(a, \cdot, \cdot) =$ card $E'/r'(a, \cdot, \cdot) = \kappa$.*
1) Soit n, p dans $\mathbb{N}^*$, pour $1 \leqslant i \leqslant n+p$, soit $Q_i \in \{\forall,\ \exists\}$, et soit $\varphi(a_1, \ldots, a_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_p)$ une formule sans quantificateur. Alors

$$(E, r, C) \models Q_1 a_1\ \cdots\ Q_n a_n\ Q_{n+1}\sigma_1\ \cdots\ Q_{n+p}\sigma_p \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} C(a_i)$$

$$\wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant p} \neg C(\sigma_i)\ \wedge\ \varphi(a_1, \ldots, a_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_p)$$

si, et seulement si,

$$(E', r', C') \models Q_1 a_1\ \cdots\ Q_n a_n\ Q_{n+1}\sigma_1\ \cdots\ Q_{n+p}\sigma_p$$

$$\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} C(a_i)\ \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant p} \neg C(\sigma_i)\ \wedge\ \varphi(a_1, \ldots, a_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_p).$$

2) $(E, r, C) \equiv_\exists (E', r', C')$.

Bibliographie

[1] Droste (M.), Giraudet (M.) and Macpherson (D.). — Periodic ordered permutation groups and cyclic orderings, Journal of Combinatorial Theory, Series B 63, p. 310-321 (1995).

[2] Fuchs (L.). — Partially Ordered Algebraic Systems, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, vol 28, Pergamon Press (1963).

[3] Giraudet (M.), Kuhlmann (F.-V.) and Leloup (G.). — Formal power series with cyclically ordered exponents, Arch. Math. 84, p. 118-130 (2005).

[4] Giraudet (M.) and Lucas (F.). — Quelques résultats sur la théorie des modèles de groupes abéliens cycliquement ordonnés, Séminaire de Structures Algébriques ordonnées, prépublications de l'université Paris VII 49 (1994).

[5] Giraudet (M.) and Lucas (F.). — First order theory of cyclically ordered groups, dans : F. Lucas, Théorie des modèles de groupes abéliens ordonnés, habilitation à diriger des recherches, université Paris VII, (1996).

[6] Giraudet (M.) and Lucas (F.). — c-homomorphisms and c-convex subgroups of cyclically ordered groups, preprint.

[7] Glusschankov (D.). — Cyclic ordered groups and MV-algebras, Czechoslovak Mathematikal Journal 43 n°2, p. 249-263 (1983).

[8] Jakubík (J.) and Pringerová (G.). — Representations of cyclically ordered groups. Časop. Pěstov. Matem. 113, p. 184-196 (1988).

[9] Jakubík (J.) and Pringerová (G.). — Direct limits of cyclically ordered groups. Czechoslovak Mathematikal Journal 44 n°2, p. 231-250 (1994).

[10] Kaplansky (I.). — Maximal fields with valuations, Duke Math Journal 9, p. 303-321 (1942).

[11] Kokorin (A.I.) and Kopytov (V.M.). — Fully ordered groups, J. Wiley and sons, New-York (1974).

[12] Leloup (G.). — Cyclically valued rings and formal power series, Annales mathématiques Blaise Pascal 14, n° 1, p. 117-140 (2007).

[13] Leloup (G.). — Existentially equivalent cyclically ultrametric spaces and cyclically valued groups, Logic Journal of the IGPL, 2010; doi:10.1093/jigpal/jz024.

[14] Lucas (F.). — Théorie des modèles des groupes cycliquement ordonnés abéliens divisibles, dans : F. Lucas, Théorie des modèles de groupes abéliens ordonnés, habilitation à diriger des recherches, université Paris VII (1996).

[15] Lucas (F.). — Théorie des modèles des groupes cycliquement ordonnés abéliens divisibles, Séminaire de Structures Algébriques ordonnées, prépublications de l'université Paris VII 56 (1996).

[16] Novák (V.). — Cyclically ordered sets, Czech. Math. J. 32, p. 460-473 (1982).

[17] Novák (V.). — Cuts in cyclically ordered sets, Czech. Math. J. 34, p. 322-333 (1984).

[18] Novák (V.) and Novotný (M.). — On completions of cyclically ordered sets, Czech. Math. J. 37, p. 407-414 (1987).

[19] Rieger (L.). — On ordered and cyclically ordered groups I, Věstník král. česk spol. nauk, p. 1-31 (en tchèque) (1946).

[20] Rieger (L.). — On ordered and cyclically ordered groups II, Věstník král. česk spol. nauk, p. 1-33 (en tchèque) (1947).

[21] Rieger (L.). — On ordered and cyclically ordered groups III, Věstník král. česk spol. nauk, p. 1-26 (en tchèque) (1948).

[22] Sabbagh (G.). — Un théorème de plongement en algèbre, Bull. Soc. Math. 2, p. 49-52 (1968).

[23] Schmitt (P.-H.). — Undecidable theories of valuated Abelian groups, Mémoires de la S.M.F. 2$^{\text{ème}}$ série, tome 16, p. 67-76 (1984).

[24] Schmitt (P.-H.). — Decidable theories of valuated Abelian groups, Proceedings of the Logic Colloquium 1984, North Holland, p. 245-276 (1986).

[25] Świerczkowski (S.). — On cyclically ordered groups, Fund. Math. 47, p. 161-166 (1959).

[26] Zabrina (I.) and Pestov (G.). — Sverchkovskii's theorem, Sibirskii's Mathematischeskii Zurnal 25 n°4, p. 46-53 (1984).

[27] Zheleva (S. D.). — Cyclically ordred groups, Sibirskii Mathematiskii Zhurnal 17, 1046-1051 (1976).