ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

Françoise Delon

Corps C-minimaux, en l'honneur de François Lucas

Tome XXI, n° 2 (2012), p. 413-434.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2012_6_21_2_413_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XXI, n° 2, 2012
pp. 413–434

Corps C-minimaux, en l'honneur de François Lucas

Françoise Delon[(1)]

Résumé. — La classe des constructibles de la géométrie algébrique est close par projection. La théorie des modèles exprime ce fait en disant que les corps algébriquement clos éliminent les quantificateurs dans le langage des anneaux. De façon analogue, les corps algébriquement clos non trivialement valués éliminent les quantificateurs dans le langage des anneaux enrichi de la relation dite de divisibilité $v(x) \leqslant v(y)$. Cela implique en particulier la « C-minimalité » : une partie définissable d'un corps algébriquement clos valué est une combinaison booléenne finie de boules, ouvertes ou fermées. Cette propriété peut être considérée dans toute structure ultramétrique, et les structures qui en jouissent sont l'objet de ce texte. Nous étudions semblances et dissemblances entre structures C-minimales et o-minimales. Nous nous concentrons plus particulièrement sur le cas des corps et prouvons un résultat de dérivabilité presque partout des fonctions définissables dans un corps C-minimal.

Abstract. — In algebraic geometry the class of constructible sets is closed under projection. Model theory expresses this fact by saying that algebraically closed fields eliminate quantifiers in the language of rings. Analogously, non-trivially valued algebraically closed fields eliminate quantifiers in the language of rings with an additional binary relation for $v(x) \leqslant v(y)$. This implies that such a valued field K is "C-minimal": a definable subset of K is a finite Boolean combination of open and closed balls. This property can be considered in any ultrametric structure and the structures that enjoy it are the subject of this text. We study analogies and differences between C-minimal and o-minimal structures, with a particular emphasis on fields. We prove a result of almost everywhere differentiability.

(*) Reçu le 13/02/2012, accepté le 21/02/2012

(1) Équipe de Logique Mathématique, IMJ, CNRS-Université Paris 7-UPD, UFR de mathématiques, case 7012, site Chevaleret, 75205 Paris Cedex 13, France
delon@math.univ-paris-diderot.fr

Les corps $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ et le corps valué $\mathbb{C}_p$ voient beaucoup de leurs traits exprimés par des propriétés introduites en théorie des modèles, à savoir la *minimalité forte*, l'o-*minimalité* et la C-*minimalité*, respectivement. L'o-minimalité présuppose dans la structure la présence d'un ordre linéaire et la C-minimalité celle d'une C-*relation*, qui est la relation ternaire induite par une distance ultramétrique. La minimalité forte ne présuppose rien du tout. De ce fait $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}_p$ portent une topologie directement liée à leur structure algébrique. La situation est différente pour $\mathbb{C}$: la topologie généralement considérée est conditionnée par le choix d'un plongement de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et n'a donc rien de canonique. Aussi n'intervient-elle pas dans notre étude, où $\mathbb{C}$ est ce que nous appelons un «pur corps». Nous présentons ici ces trois notions de minimalité et nous attachons particulièrement à comparer les corps o-minimaux et les corps valués C-minimaux. Nous prouvons en particulier pour les corps C-minimaux un résultat de dérivabilité qui se trouve également dans l'important travail de Hrushovski et Kahzdan, où une théorie de la mesure est édifiée (sous des hypothèses très légèrement plus fortes que les nôtres). Notre exposé souhaite s'adresser à un public généraliste. À cet effet nous commençons par rappeler quelques traits importants des structures fortement minimales (section 1) et o-minimales (section 2), avant de présenter les structures C-minimales (section 3). Nous nous intéressons ensuite aux analogies et différences entre structures o-minimales denses et C-minimales denses, en particulier à la complétude définissable (section 4), et étudions plus précisément le cas des corps (section 5). L'essentiel du matériau présenté dans les deux dernières sections est nouveau.

1. Structures fortement minimales

Du corps $\mathbb{C}$, l'axiomatisation au premier ordre retient seulement que c'est un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Cela signifie que n'importe quel corps K algébriquement clos de caractéristique zéro satisfait exactement les mêmes *énoncés du langage des corps*, c'est-à-dire les mêmes formules finies, composables en utilisant les symboles $+, -, \times, ^{-1}, 0$ et 1, autant de variables qu'on veut, les symboles logiques $\wedge, \vee, \neg$, les quantifications, et enfin l'égalité ; de plus, ces formules sont sans variables libres pour que cela ait un sens de dire si elles sont vraies ou fausses dans le corps K considéré. On exprime cela en disant que $\mathbb{C}$ et K sont *élémentairement équivalents*, et on le note $\mathbb{C} \equiv K$, ou encore qu'ils ont la même *théorie* (la théorie élémentaire d'une structure d'un certain langage est l'ensemble des énoncés de ce langage vrais dans la structure).

Un corps algébriquement clos, disons K toujours, est un prototype des *structures fortement minimales* : une partie définissable de K est finie ou co-finie. Dit en langage géométrique : une partie constructible de K est finie ou cofinie. On sait que, par définition, la classe des constructibles de K est la plus petite classe de parties des puissances cartésiennes de K, qui contienne les fermés de Zariski et qui soit stable par unions et intersections finies et complémentation. D'après les théorèmes de Chevalley ou de Tarski, cette classe est stable par projection le long des axes de coordonnés. Les constructibles sont aussi les *définissables de la théorie des corps algébriquement clos.* Donnons un sens précis à ceci.

Dans un corps, un fermé de Zariski est l'ensemble des solutions d'un système d'équations polynomiales, c'est-à-dire de conditions qu'on peut écrire en utilisant la somme, la différence et le produit, également les constantes 0 et 1, et la seule égalité sans utiliser de quantificateurs ni de négation. Dans une structure M d'*un langage arbitraire* $\mathcal{L}$, *la classe des définissables* de M est la plus petite classe de parties des puissances cartésiennes de M,

1. contenant les ensembles des solutions de conditions, en nombre fini, qu'on peut écrire sans quantificateur ni négation, conjonction ou disjonction, en utilisant les symboles du langage $\mathcal{L}$, l'égalité, ainsi que des paramètres de M,

2. stable par union finie, intersection finie et complémentation, et

3. projection le long des axes de coordonnées.

Définition 1.1. — *Une structure M est* fortement minimale *si toute partie définissable de M est finie ou co-finie, et que cela reste vrai dans toute structure élémentairement équivalente à M.*
On dit alors que la théorie *de cette structure est* fortement minimale.

Autrement dit, quelle que soit la richesse du langage, il n'augmente pas la classe des ensembles unaires[1] définissables avec la seule égalité.

Exemple. — Les corps fortement minimaux sont exactement les corps algébriquement clos.

Continuons l'analogie avec les corps algébriquement clos.

Soit $A \subseteq M \ni x$ (M n'est ici pas supposée fortement minimale). Un élément x de M est *algébrique* sur A, « $x \in acl A$ », s'il n'a qu'un nombre fini de conjugués par A-automorphismes... à condition que M soit assez gros,

(1) « Unaires » signifie que l'on considère des ensembles définissables en une seule variable, c'est-à-dire des parties définissables de la structure elle-même et non pas de ses puissances cartésiennes.

qu'il soit $|A|^+$-saturé (: tout système consistant (de cardinalité arbitraire) de formules à au plus $|A|$ coefficients dans M admet une solution dans M).

Théorème 1.2. — *Dans une structure fortement minimale, la clôture algébrique a la propriété de l'échange :* $[x \in acl(A \cup \{y\})$ *et* $x \notin acl A] \Rightarrow y \in acl(A \cup \{x\})$.

En théorie des corps cette propriété permet de montrer que deux bases de transcendance d'un même corps ont la même cardinalité, de définir la notion de degré de transcendance, puis de montrer qu'il y a un seul corps algébriquement clos de caractéristique et de degré de transcendance fixés. Cela se généralise immédiatement aux structures fortement minimales : dans une telle structure M, une partie A est algébriquement indépendante maximale ssi elle est indépendante et génératrice (au sens où $M = acl\, A$) ssi génératrice minimale ; on continue d'appeller *base* une telle partie A, et, grâce à l'échange, deux bases quelconques de M ont la même cardinalité, qu'on appelle *dimension* de M. Une structure $M' \equiv M$ est alors caractérisée à isomorphisme près par sa dimension. Comme on travaille, sauf exception, avec des langages dénombrables, le passage à la clôture algébrique conserve la cardinalité dès que celle-ci est infinie. Cela montre en particulier que, si M est infini, il y a une seule structure $M' \equiv M$ en chaque cardinalité non dénombrable, et plus généralement :

Énoncé informel. — Si M est fortement minimale, on sait décrire toutes les structures qui lui sont élémentairement équivalentes.

Ces résultats sont élémentaires et accessibles par exemple dans [10].

2. Structures o-minimales

Un exemple non complètement trivial : l'ensemble ordonné ω, c'est-à-dire l'ordre des entiers naturels, qui élimine les quantificateurs dans le langage $\{\leqslant, 0, s\}$, où s est la fonction successeur, et dans lequel donc les parties définissables sont des unions finies d'intervalles. Un intervalle borné étant fini et un intervalle non borné cofini, toute partie définissable de ω est finie ou cofinie. Mais la définition de fortement minimal demande que la propriété soit vraie dans toute structure élémentairement équivalente. Or un ordre élémentairement équivalent à ω est par exemple $\omega + \mathbb{Z}$, dans lequel un intervalle $(0, a)$, pour $a \in \mathbb{Z} \setminus \omega$, n'est ni fini ni cofini.

Un ordre linéaire infini n'est ainsi jamais fortement minimal. Dans un ordre linéaire $\mathbb{M} = \langle M, <, \ldots \rangle$ les intervalles « rationnels » sont certainement définissables, où on appelle rationnels les intervalles avec bornes, éventuellement infinies, c'est-à-dire les singletons et les ensembles de la forme :

$(a, b)_M$ avec $a \in M \cup \{-\infty\}$, $b \in M \cup \{+\infty\}$, $a < b$ et $(,) \in \{[,]\}$ (intervalle nécessairement ouvert du côté d'une borne infinie).

DÉFINITION 2.1. — *Une* structure ordonnée $\mathbb{M}$ *est dite* o-minimale *si toute partie définissable de M est union finie d'intervalles rationnels. On dit alors que sa* théorie *est* o-minimale.

Remarque. — On n'exige pas la stabilité par équivalence élémentaire, elle découle de la définition! (C'est un résultat difficile.)

Exemple. — Les corps ordonnés o-minimaux sont exactement les corps réels clos.

THÉORÈME 2.2. — *Dans une structure o-minimale, la clôture algébrique a la propriété de l'échange.*

Énoncé informel. — Il est impossible de décrire tous les ordres élémentairement équivalents à un ordre infini donné.

Le résultat suivant exprime à l'inverse qu'un certain contrôle des modèles est possible :

DÉFINITION 2.3. — *Une* sous-structure $\mathbb{M}$ *d'une structure* $\mathbb{N}$ *du même langage est dite* élémentaire, *ce qui est noté* $\mathbb{M} \preceq \mathbb{N}$, *lorsque (non seulement* $\mathbb{M} \equiv \mathbb{N}$ *mais de plus) les formules portant sur des variables de M sont vraies dans* $\mathbb{N}$ *lorsqu'elles le sont dans* $\mathbb{M}$. *Une théorie T admet un* modèle premier $\mathbb{M}_0$ *lorsque, pour tout modèle* $\mathbb{M}$ *de T, il existe un plongement de* $\mathbb{M}_0$ *dans* $\mathbb{M}$ *qui en fait une sous-structure élémentaire.*

THÉORÈME 2.4. — *Une théorie o-minimale a des modèles premiers au-dessus de tout ensemble de paramètres.*

Exemples. — Si T est la théorie des corps réels clos, le modèle premier au-dessus d'un corps ordonné est sa clôture réelle, c'est-à-dire sa clôture algébrique au sens de la théorie des modèles. Pour la théorie des ordres linéaires denses sans extrémités, tout ensemble de paramètres est algébriquement clos ; le modèle premier au dessus d'un ensemble de paramètres est donc en général strictement plus gros que sa clôture algébrique.

Les structures o-minimales ont été et sont l'objet d'une abondante littérature. Les textes fondateurs sont [7], [12] et [13]. On trouvera une présentation générale plus récente dans [8]. Dans la ligne de Wilkie [14], les travaux se concentrent maintenant sur les enrichissements o-minimaux du corps des réels.

3. Structures C-minimales

Une C-relation est ce qui reste d'une structure ultramétrique lorsqu'on ne garde que l'information

$$C(x, y, z) : d(y, z) < d(y, x) = d(x, z).$$

On ne peut en général pas comparer $d(x, y)$ et $d(z, t)$ lorsque les 4 points x, y, z et t sont distincts.

Les *cônes* (respectivement les *cônes épais*) sont alors la généralisation des boules « ouvertes » (des boules « fermées »). Voici leur définition, où la notation $a \wedge b$ sera justifiée en sous-section 3.1 :

– le cône de a en $a \wedge b$ (où $a \neq b$) est l'ensemble $\{x; C(b, a, x)\}$ (cf. la boule « ouverte » de centre a et de rayon $d(a, b)$),

– le cône épais en $a \wedge b$ est l'ensemble $\{x; \neg C(x, a, b)\}$ (cf. la boule « fermée » de centre a et de rayon $d(a, b)$) ; on peut avoir $a = b$, le cône épais se réduit alors au singleton $\{a\}$.

Définition 3.1. — *Un C-*ensemble *est un ensemble muni d'une C-relation. Une C-*structure *est un C-ensemble équipé d'une structure additionnelle arbitraire. Une C-structure $\mathbb{M}$ est dite C-*minimale *lorsque tout sous-ensemble définissable de M est combinaison booléenne de cônes et de cônes épais, et que ceci reste vrai dans toute structure $\mathbb{M}' \equiv \mathbb{M}$.*

Nous allons voir que les structures C-minimales sont une intéressante combinaison des structures fortement minimales et des structures o-minimales, en même temps qu'une généralisation des deux. Elles n'ont en général pas l'échange.

Exemple. — Les corps C-minimaux sont exactement les corps valués algébriquement clos, avec : $C(x, y, z)$ ssi $v(y - z) > v(x - y)$.

Les corps valués algébriquement clos ont l'échange, en fait la clôture algébrique au sens du corps ou au sens du corps valué y est la même : la relation C ajoute de la structure sans changer la clôture algébrique. La dimension reste donc le degré de transcendance.

La C-minimalité a été introduite par Deirdre Haskell, Dugald Macpherson et Charlie Steinhorn, voir [4] et [9].

3.1. Plus sur les C-relations

L'exemple des branches d'un arbre : dans un arbre (: c'est-à-dire un ordre T dont, pour tout $x \in T$, la trace sur l'ensemble $\{y \in T; y < x\}$ est un ordre total), l'ensemble des branches (: chaînes maximales) équipé de la C-*relation canonique* : $C(\alpha,\beta,\gamma)$ iff $\alpha\cap\beta=\alpha\cap\gamma\subset\beta\cap\gamma$ ("$\subset$" désigne ici l'inclusion stricte).

Cet exemple est canonique au sens où tout C-ensemble est isomorphe à un ensemble de branches d'un arbre, équipé de la C-relation canonique. Plus précisément, d'après [1] et [2] :

Définition 3.2. — *Appelons* bon *un arbre ayant les propriétés suivantes :*

– c'est un semi-treillis inférieur : deux éléments arbitraires x et y ont une borne inférieure, $x\wedge y$, ce qui signifie : $x\wedge y\leqslant x,y$ et $(z\leqslant x,y)\to z\leqslant x\wedge y)$,

– il a des éléments maximaux, ou feuilles*, «partout», c'est-à-dire qu'il satisfait l'axiome : $\forall x\ \exists y\ (y\geqslant x\wedge\neg\exists z>y)$,*

– chaque élément est ou bien une feuille ou bien un nœud *(c'est-à-dire de la forme $x\wedge y$ pour des x et y distincts).*

Proposition 3.3. — *Etant donné un C-ensemble M, il existe un bon arbre T, interprétable*[2] *dans M, tel que M est isomorphe à l'ensemble des branches avec feuille de T, équipé de la C-relation canonique.*

On appelle T l'*arbre canonique* de M, on le note $T(M)$, ou simplement T lorsqu'il n'y a pas ambiguïté.

Exemples de C-ensembles et leurs arbres

– La C-relation triviale sur M : $C(x,y,z)\leftrightarrow y=z\neq x$. L'arbre comporte une racine r et les autres points sont en bijection avec M : l'ordre est donné par les relations $x\wedge y=r$ ssi $x\neq y$.

– La C-relation induite par un ordre linéaire sans élément maximal L, le «peigne» : $T=L\times\{0,1\}$ avec, sur $L\times\{0\}$ l'ordre de L, et pour $x<y$ dans L, $(x,1)\wedge(y,1)=(x,0)$.

Topologie

La topologie associée à une C-relation est celle pour laquelle les cônes sont une base de voisinage. Les cônes, et les cônes épais non réduits à un singleton, sont tous ouverts et fermés, d'où (nos guillemets sur le type «ouvert» ou «fermé» des boules, et) une topologie totalement discontinue. Un point est isolé lorsque, en tant que branche de l'arbre canonique, sa feuille a un

(2) Un objet «interprétable» est le quotient d'un objet définissable par une relation d'équivalence elle-même définissable.

prédécesseur. Donc, dans les deux exemples précédents, tous les points sont isolés. *La C-relation associée à un ordre linéaire induit toujours une topologie discrète*, quel que soit le type de l'ordre. Les topologies associées à l'ordre et à la C-relation diffèrent donc.

On appellera *effeuillée* une branche privée de sa feuille.

3.2. Liens entre minimalité forte, o-minimalité et C-minimalité

Proposition 3.4. — *Si C est triviale, C-minimalité et minimalité forte coïncident. Si C est induite par un ordre linéaire, C-minimalité et o-minimalité coïncident.*

Les liens entre C-minimalité, minimalité forte et o-minimalité sont plus profonds que la remarque précédente ne l'indique.

Si $N \subseteq M^n$ est définissable dans $\mathbb{M}$, la *structure induite par* $\mathbb{M}$ *sur* N est la structure naturelle du langage relationnel défini comme suit : pour chaque $D \subseteq (M^n)^r$, D définissable (avec paramètres!) dans $\mathbb{M}$, on se donne un prédicat (définissable sans paramètre[3] donc !) interprété comme $D \cap N^r$. Cette structure élimine les quantificateurs. Même chose pour D interprétable dans $\mathbb{M}$. On peut ainsi considérer la structure induite par $\mathbb{M}$ sur une branche avec feuille (définissable) de son arbre canonique, ou sur l'ensemble des cônes en un même nœud.

Théorème 3.5 ([4](2.7)). — *Soit $\mathbb{M}$ une structure C-minimale et T son arbre canonique. Alors :*

1. *tout élément, disons α, de M est o-minimal lorsqu'il est considéré en tant que branche de T, c'est-à-dire : toute partie $\mathbb{M}$-définissable de α est union finie d'intervalles rationnels ;*
2. *l'ensemble des cônes en chaque nœud, disons c, de T est fini ou fortement minimal : pour tout $\mathbb{N} \succeq \mathbb{M}$[4], tout ensemble $\mathbb{N}$-définissable de cônes en c est fini ou cofini (dans l'ensemble de tous les cônes en c, qui est un objet interprétable de $\mathbb{M}$).*

Dans l'exemple du corps valué algébriquement clos, l'ensemble des cônes en le nœud $0 \wedge 1$ (donc aussi en chaque nœud) s'identifie au corps résiduel, qui est exactement la structure induite en ce nœud par le corps valué ; ce corps résiduel est algébriquement clos donc fortement minimal ; la branche

(3) On dit aussi : $\emptyset$-définissable.
(4) Voir la définition 2.3.

effeuillée de 0, donc chaque branche effeuillée, est canoniquement isomorphe au groupe de valuation ; la structure induite sur chaque branche est celle du groupe ordonné de valuation, ce groupe est divisible, donc o-minimal. Réciproquement ces deux conditions sur le corps de restes et le groupe de valuation ne suffisent pas pour que le corps soit algébriquement clos, il ne faut donc pas espérer une réciproque au théorème précédent.

4. Analogies et différences entre structures o-minimales et C-minimales denses

« Dense » signifie ici « sans point isolé pour la topologie canonique ».

4.1. Une analogie

Les structures **o-minimales denses** jouissent d'excellentes propriétés :

– les fonctions définissables ont un bon comportement : soit $\mathbb{M}$ une structure o-minimale et $f : M \to M$ une fonction unaire partielle définissable. Alors il existe une partition du domaine de f en un nombre fini d'ensembles définissables telle que, sur chaque morceau, f est ou bien constante, ou bien continue et strictement monotone.

– Elles admettent une décomposition cellulaire, au sens où nous l'expliquons ci-dessous.

On définit par induction sur n les cellules de M^n : les cellules de M sont les singletons et les intervalles $]a, b[$, avec $a, b \in M \cup \{-\infty, \infty\}$, $a < b$; si G est une cellule de M^n et si $f, g : G \to M$ sont des fonctions continues définissables, avec $f < g$ sur G, alors le graphe de f et les ensembles $\{(x, y) \in G \times M; f(x) < y < g(x)\}$, $\{(x, y) \in G \times M; f(x) < y\}$ et $\{(x, y) \in G \times M; y < g(x)\}$, sont des cellules de M^{n+1}. Les résultats sont ensuite les suivants.

Étant donnés des sous-ensembles définissables $A_1, \ldots, A_k$ de M^n, il existe une partition finie de M^n en cellules, qui « partitionnent » chacun des A_i, au sens où, pour chaque i, chaque cellule est ou disjointe de A_i ou contenue dedans.

Étant donnée une fonction partielle définissable $f : M^n \to M$, il existe une partition finie de M^n en cellules qui partitionnent le domaine de f et sont telles que la restriction de f à chacune d'entre elles est continue.

– Conséquence : la dimension algébrique issue de la propriété de l'échange (cf. théorème 2.2) coïncide avec la *dimension topologique*, où cette dernière est définie comme suit, pour $X \subseteq M^n$:

$$\begin{gathered}\operatorname{topdim}(X) := \max\{d \in \mathbb{N};\ \text{il y a une projection}\\ \text{selon un espace de coordonnées}\ \ \pi : M^n \to M^d,\\ \text{telle que}\ \ \pi(X)\ \text{soit d'intérieur non vide dans}\ M^d\}.\end{gathered}$$

Dans les structures **C-minimales denses** :

– les fonctions définissables ont un bon comportement *local* : si $\mathbb{M}$ est une structure C-minimale et $f : M \to M$ une fonction unaire partielle définissable, alors il existe une partition du domaine de f en $D \cup E \cup F$ telle que f est localement constante sur D et un C-isomorphisme local continu sur E, et F est fini.

– Il y a également un résultat de décomposition cellulaire, difficile : les cellules sont compliquées à décrire, on ne peut pas se contenter de considérer les points de la structure, c'est-à-dire les (branches avec) feuilles de l'arbre canonique, on doit aussi considérer les nœuds et d'autres imaginaires encore. Il faut de plus considérer des fonctions à valeurs dans les ensembles finis de tels éléments[5].
Il en résulte que la *dimension topologique*, obtenue en copiant à l'identique la définition du cas o-minimal, vérifie :

Théorème 4.1 ([4], Theorem 4.4). — *Soit* $\mathbb{M}$ *une structure* C*-minimale et* $D_1, \ldots, X_r$ *des parties définissables de* M^n*. Alors* $\operatorname{topdim}(\bigcup_i D_i)$ *est le maximum des* $\operatorname{topdim} D_i$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant r$.

Si la structure a la propriété de l'échange, alors la dimension qui en résulte coïncide avec la dimension topologique.

4.2. Une grosse différence : la maximalité définissable

Dans une structure o-minimale dense M, si $f : M \to M$ est une fonction partielle définissable et si a est dans la frontière topologique de son domaine de définition $dom f$, alors $f(x)$ admet une limite ($\in M \cup \{-\infty, +\infty\}$) lorsque x tend vers a^+ ou vers a^-. Rien de semblable en général dans les structures C-minimales. Ce phénomène est très lié au suivant : si on ôte un point d'une structure o-minimale dense, la structure induite sur le reste n'est plus o-minimale. De nouveau, la situation est différente pour une structure C-minimale. Précisons.

Exemple. — Si M est un ordre linéaire dense, par exemple $\mathbb{Q}$, et $a \in M$, alors $N := M \setminus \{a\}$ est encore un ordre linéaire dense, isomorphe à $\mathbb{Q}$; si on

(5) Il apparaît également dans [4] une condition d'« irréductibilité » dont il n'est pas clair qu'elle soit nécessaire.

considère sur N la structure induite par M, alors le segment $\{x; x < a\}$ est définissable car trace d'un définissable de M ; or il n'est pas définissable avec le seul ordre et sans quantificateurs dans N : il n'y est sûrement pas ce qu'on a appelé un segment initial « rationnel », *id est* avec bornes (éventuellement infinies). Cette obstruction *a priori* n'existe pas en C-minimalité. En effet, si M est un C-ensemble, et de nouveau $a \in M$ et $N := M \setminus \{a\}$, la trace sur N d'un cône de M est un cône, et la trace d'un cône épais est vide ou un cône épais. De fait, la structure induite peut rester C-minimale.

Un deuxième exemple. — Considérons un corps valué algébriquement clos $\mathbb{M} = (M, +, \cdot, v)$ et $N := M \setminus \{0\}$. Considérons la classe

$$\{D \cap N^n; D \subseteq M^n, D\ \emptyset\text{-définissable dans } \mathbb{M}\}.$$

Du fait que 0 est définissable sans paramètre dans $\mathbb{M}$, cette classe est close par projection : la quantification $\exists x \in N, ...$ est équivalente à $\exists x \in M, x \neq 0 \wedge ....$ La classe est trivialement close par combinaison booléenne, c'est donc la classe des ensembles définissables d'une certaine structure du premier ordre $\mathbb{N}$ sur N. La C-minimalité de $\mathbb{M}$ et notre remarque à la fin de l'exemple précédent montrent que $\mathbb{N}$ est C-minimale. Le groupe multiplicatif valué du corps l'est aussi, puisque c'est un réduit de $\mathbb{N}$. Attention, il s'agit là d'un groupe muni d'une valuation, qui n'est pas un groupe valué ; par exemple $v(1)$ n'est pas (l'unique élément) de valuation maximale. Dans cette structure les boules $B_c := \{x; v(x) > v(c)\}$ restent des cônes emboîtés non vides (B_c est le cône de b en $c \wedge b$ pour tout b vérifiant $v(b) > v(c)$) et uniformément définissables ($v(x) > v(c)$ ssi $v(x) + v(x-c) > v(c) + v(x-c)$ ssi $v(x^2 - cx) > v(cx - c^2)$ ssi $C(c^2, x^2, cx)$). Or leur intersection est vide.

Formalisons tout ceci.

DÉFINITION 4.2. — *Appelons* maximale *(respectivement* définissablement maximale*) une C-structure dans laquelle l'intersection d'une famille de cônes emboîtés non vides (respectivement : et uniformément définissables) n'est jamais vide.*

On appellera également définissablement maximale *une structure linéairement ordonnée dans laquelle l'intersection d'une famille d'intervalles fermés, bornés, non vides, emboîtés et uniformément définissables, n'est pas vide.*

Nos exemples ont donc montré que :

C-minimal $\not\Rightarrow$ définissablement maximal.

Il est à l'inverse relativement facile de vérifier que : o-minimal dense $\Rightarrow$ définissablement maximal.

Remarque 4.3. — Définissablement maximal *est une propriété du premier ordre.*

Démonstration. — Pour des formules $\varphi(x, \bar{y})$ et $\psi(\bar{y}, \bar{z})$ sans paramètres, où x est une seule variable et $\bar{y}$ et $\bar{z}$ sont des multivariables, considérons la conjonction $\Delta_{\psi,\varphi}(\bar{z})$ des deux formules suivantes :

$$\forall \bar{y}\ [\ \psi(\bar{y}, \bar{z}) \ \longrightarrow\ (\ \{x; \varphi(x, \bar{y})\} \text{ est un cône non vide})\ ],$$

$$\forall \bar{y} \forall \bar{y}'\ [\ [\ \psi(\bar{y}, \bar{z}) \wedge \psi(\bar{y}', \bar{z})] \ \longrightarrow\ \forall x\ [(\varphi(x, \bar{y}) \to \varphi(x, \bar{y}')) \vee (\varphi(x, \bar{y}') \to \varphi(x, \bar{y}))]].$$

Alors, $\mathbb{M}$ est définissablement maximal ssi, pour toutes formules φ et ψ comme ci-dessus $\forall \bar{z}[\ldots]$, il satisfait la formule

$$\Delta_{\psi,\varphi}(\bar{z}) \ \longrightarrow\ \exists x \forall \bar{y}\ [\psi(\bar{y}, \bar{z}) \to \varphi(x, \bar{y})]. \qquad \square$$

Ajoutons l'hypothèse de définissabilité maximale... et une autre... :

Proposition 4.4. — *Soit une structure C-minimale M*

– dense et définissablement maximale, et

– sans bijection définissable d'un intervalle borné d'une branche effeuillée vers un intervalle non borné d'une branche effeuillée,

$f : M \to M$ une fonction partielle définissable, et a dans l'adhérence de $\mathrm{dom} f$. Alors $f(x)$ admet une limite dans $M \cup \{\infty\}$ lorsque x tend vers a.

Dans l'énoncé ci-dessus, « $f(x) \to \infty$ lorsque x tend vers a » signifie :
$\forall u, v\ \exists b \neq a, [C(b, x, a) \to C(f(x), u, v)]$,
c'est-à-dire : $f(x)$ sort de tout cône donné.

La démonstration de la proposition utilise le principe suivant.

Principe 1. — *Deux sous-ensembles définissables disjoints de M n'ont pas de point d'accumulation commun*[6].

Démonstration. — La C-minimalité implique qu'un sous-ensemble définissable de M est de la forme $D = (E \setminus F) \cup F'$, où E est ouvert-fermé, F et F' sont finis, $F \subseteq E$ et $F' \cap E = \emptyset$ (et E, F et F' sont définissables avec

(6) Ça n'est évidemment pas vrai dans un ordre dense muni de la topologie de l'ordre : considérer des intervalles ouverts $]a, b[$ et $]b, c[$.

les mêmes paramètres que D). La fermeture de D est alors $E \cup F'$ (et son intérieur $E \setminus F$, ainsi sa frontière est $F \cup F'$ et donc finie). Si D contient un élément a dans son adhérence sans le contenir, alors $a \in F$ et D contient un voisinage de a privé de a. $\square$

Démonstration de la proposition. — Pour un élément quelconque b de M, considérons la fonction partielle $\delta_b : T \to T$, définie au voisinage de a (*id est* de la feuille) dans la branche de a dans T, sauf peut-être en a, et à valeurs dans la branche de b, définie comme suit :

$$\nu \mapsto \sup\{(f(x) \wedge b); (a \wedge x) = \nu\}.$$

Par o-minimalité de la branche de b, δ_b est bien définie et admet une limite, ν_b, lorsque ν tend vers a. Cela signifie que, pour tous ν_1 et ν_2 sur la branche de b vérifiant $\nu_1 < \nu_b < \nu_2$, a est adhérent à l'ensemble des x vérifiant $\nu_1 < (f(x) \wedge b) < \nu_2$, donc, par le principe ci-dessus,

$$\nu_b = \lim_{x \to a} (f(x) \wedge b).$$

D'après l'hypothèse sur l'absence de bijection définissable entre etc, ou bien δ_b est asymptotiquement constant lorsque ν tend vers a, ou bien $\nu_b = b$, ce qui signifie $f(x) \to b$ quand $x \to a$, ou bien $\nu_b = -\infty$, ce qui signifie $f(x) \to \infty$. Il ne reste donc à traiter que le cas où, pour tout $b \in M$, $f(x) \wedge b$ devient constant, égal à $\nu_b \neq b$, lorsque x tend vers a. Les différents ν_b sont nécessairement comparables par l'ordre de T lorsque b varie. Par maximalité définissable, ils sont tous sur la branche d'un même élément b_0 de M, et nécessairement $\nu_{b_0} = \max\{\nu_b; b \in M\}$; posons $\nu := \nu_{b_0}$. Considérons alors la fonction définie dans M au voisinage de a sauf en a, et à valeurs dans l'ensemble M/ν des cônes en ν, fonction g qui à x associe le cône de $f(x)$ en ν. Cette fonction n'atteint aucun cône une infinité de fois au voisinage de a ; en effet, si $c \in M$ est tel que c/ν soit atteint « cofinalement », alors, cofinalement, $(f(x) \wedge c) > \nu$, contradiction. En conséquence la formule en $\alpha, \beta \in M/\nu$,

$$\min\{z \wedge a; f(z) \ni \nu \text{ et } g(z) = \alpha\} < \min\{z \wedge a; f(z) \ni \nu \text{ et } g(z) = \beta\},$$

ordonne nécessairement un sous-ensemble infini de M/ν. Cela contredit la finitude ou minimalité forte de la structure induite par M sur M/ν (ce que nous avons précédemment appelé « la minimalité forte du nœud ν »). Ce cas est donc éliminé et la preuve est achevée. $\square$

Dans le cas où la relation C dérive d'une ultramétrique, on peut comparer les rayons des boules et affaiblir la maximalité définissable en la *complétude définissable* : l'intersection de toute famille uniformément définissable de boules ouvertes emboîtées de rayon arbitrairement petit est non vide. Cette propriété est également exprimable au premier ordre.

Proposition 4.5. — *Soit M une structure ultramétrique C-minimale, I son espace de distance. Supposons M dense,*

– définissablement complète et

– sans bijection définissable (dans M) d'un intervalle borné de $I \setminus \{0\}$ vers un intervalle non borné de $I \setminus \{0\}$.

Alors, pour f et a comme dans la proposition précédente, $f(x)$ admet une limite $\in M \cup \{\infty\}$ lorsque x tend vers a.

Démonstration. — Grâce à la seconde condition sur M, si $(x_\alpha)_\alpha$ est une suite de Cauchy (tendant vers a) et si $(f(x_\alpha))_\alpha$ est pseudo-Cauchy, alors $(f(x_\alpha))_\alpha$ est nécessairement Cauchy (la définition des suites de Cauchy ou pseudo-Cauchy est rappelée en section 5.1). □

5. Corps C-minimaux

5.1. Maximalité définissable

Complétude et maximalité d'un corps valué sont des propriétés classiques, caractérisées au moyen des suites de Cauchy et pseudo-Cauchy (« pseudo-convergentes » chez Kaplansky [6]).

Définition 5.1. — *Dans un corps valué (K, v), on dit qu'une suite $(a_\alpha)_{\alpha<\alpha_0}$ indexée par des ordinaux est de* Cauchy *si α_0 est limite et si, pour tout $\xi \in vK$, il existe $\alpha_1 < \alpha_0$ tel que, pour tous α et β vérifiant $\alpha_1 < \alpha \leqslant \beta < \alpha_0$, on a $v(a_\alpha - a_\beta) > \xi$.*

Elle est pseudo-Cauchy *si α_0 est limite et si, pour tous α, β et γ assez grands vérifiant $\alpha < \beta < \gamma < \alpha_0$, on a $v(a_\alpha - a_\beta) < v(a_\beta - a_\gamma)$.*

Proposition 5.2. — *Un corps valué est* complet *lorsque toute suite de Cauchy y a une limite,* maximal *lorsque toute suite pseudo-Cauchy y a une limite.*

Les corps de séries formelles généralisées que nous introduisons maintenant sont des exemples de corps valués maximaux.

Définition 5.3. — *Soient donnés un corps k et un groupe abélien ordonné G. On appelle* corps de séries formelles *à coefficients dans k et* *exposants dans G, l'ensemble*

$$k((G)) := \{\Sigma_{i\in I} a_i X^i ; I \textit{ sous-ensemble bien ordonné}^7 \textit{ de } G, a_i \in k\},$$

équipé de la somme terme à terme et de la multiplication naturelle des séries. La valuation canonique d'un tel corps est donnée par $v(\Sigma_{i\in I} a_i X^i) = \min\{i \in I; a_i \neq 0\}$.

Ainsi $k((\mathbb{Z}))$ est le classique corps des séries de Laurent. Notons que la multplication est bien définie : si l'on souhaite multiplier $\Sigma_{i\in I} a_i X^i$ et $\Sigma_{i\in J} b_i X^i$, la condition que I et J soient bien ordonnés implique que $I + J$ est bien ordonné et que, à $l \in G$ fixé, il n'y a qu'un nombre fini de produits $a_i b_j$ non nuls avec $i + j = l$.

Un corps de séries formelles $k((G))$ où k est algébriquement clos et G divisible, est algébriquement clos. Réciproquement, tout corps algébriquement clos valué, maximal et ayant même caractéristique que son corps résiduel, est de ce type.

Il y a beaucoup de corps complets non maximaux : tout corps valué admet un complété construit selon le procédé classique à partir de ses suites de Cauchy ; si l'on part d'un sous-corps de $k((G))$ dont le groupe de valuation soit G tout entier, alors le passage au complété n'ajoutera que des séries dont le support est cofinal dans G. Ainsi, la classe des corps complets et celle des corps maximaux coïncident ssi le groupe de valuation est $\mathbb{Z}$.

Tout corps valué admet des extensions immédiates[8] maximales, qui sont algébriquement closes si le corps l'est. Par ailleurs, un pur corps algébriquement clos valué est caractérisé à équivalence élémentaire près par le fait que la valuation soit ou non triviale, plus le couple (caractéristique, caractéristique résiduelle). Autrement dit, tout *pur* corps valué algébriquement clos (K, v) a un modèle maximal, donc définissablement maximal. Il en découle que (K, v) lui-même est définissablement maximal puisque cette propriété est axiomatisable au premier ordre. Par contre une expansion de (K, v) peut rester C-minimale et n'être plus définissablement maximale. L'exemple suivant présente une telle expansion, dans laquelle de plus la définissabilité est parfaitement contrôlée.

---

(7) Cela signifie que toute partie de I a un premier élément, ou, de façon équivalente, que I ne contient pas de suite infinie strictement décroissante.

(8) Une extension $(K \subseteq L, v)$ de corps valués est dite immédiate lorsque les inclusions canoniques des corps résiduels $K/v \subseteq L/v$ et des groupes de valuation $vK \subseteq vL$ sont surjectives.

Exemple d'un corps valué (enrichi) C-minimal et non définissablement complet.

Soit (K, v) un corps algébriquement clos valué et non complet, K^c son complété, et $a \in K^c \setminus K$ (a consiste ici en un unique élément). Soit $|$ le prédicat binaire $x|y$ ssi $v(x) \leqslant v(y)$ et, pour tout i entier, $i > 1$, le prédicat d'arité $2i$

$$S_i(x_0, \ldots, x_{i-1}, y_0, \ldots, y_{i-1}) \ :\longleftrightarrow \ v(\sum_0^{i-1} x_j a^j) \geqslant v(\sum_0^{i-1} y_j a^j).$$

Soit $\mathbb{K}_S$ la structure donnée sur K par le langage $\{0, 1, +, -, \cdot, |, (S_i)_{i \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}}\}$.

Théorème 5.4. — *La C-structure $\mathbb{K}_S$ élimine les quantificateurs, est C-minimale et n'est pas définissablement complète.*

Le théorème précédent découlera d'un résultat d'élimination des quantificateurs pour les « paires denses de corps valués algébriquement clos ». Soit un corps algébriquement clos valué (L, v) et $K \subseteq L$ un sous-corps propre, algébriquement clos et dense dans L pour la topologie de la valuation (la valuation est donc non triviale sur K et L). Considérons sur L la structure $\mathbb{L}$ du langage $\{0, 1, +, -, \cdot, |, E\}$, où E est un prédicat unaire ayant l'interprétation $E(x)$ ssi $x \in K$. Alors $\mathbb{L}$ est complètement axiomatisé par la théorie du corps valué (L, v) plus les axiomes exprimant que $E(L)$ est un sous-corps algébriquement clos propre et dense dans L. Enrichissons le langage d'une famille de symboles de prédicats l_m, pour $m \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$, où chaque l_m est d'arité m, et d'une famille de symboles de fonction $f_{m,i}$, pour $m \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$ et $1 \leqslant i \leqslant m$, tous définissables dans le pur langage de la paire de corps valués $\{0, 1, +, -, \cdot, |, E\}$. Définissons d'abord les l_m :

$l_m(x_1, \cdots, x_m)$ ssi $x_1, \cdots, x_m$ sont linéairement indépendants au-dessus de E.

Ainsi « $l_m(x_1, \cdots, x_m) \wedge \neg l_{m+1}(x_1, \cdots, x_m, y)$ » exprime que y appartient au E-espace vectoriel librement engendré par les $x_1, \cdots, x_m$; y se décompose alors sur cette base, et les fonctions $(f_{m,i})_{1 \leqslant i \leqslant m}$ donnent les composantes :

$$z = f_{m,i}(y, x_1, \cdots, x_m) \quad \longleftrightarrow$$

$$\{\ l_m(x_1, \cdots, x_m) \wedge \exists (z_j)_{j=1}^m [z = z_i \wedge y = \sum_{j=1}^m z_j x_j \wedge \bigwedge_{j=1}^m E(z_j)\ ]\}.$$

Théorème 5.5 ([3]). — *Une paire propre et dense de corps valués algébriquement clos élimine les quantificateurs dans le langage*

$$\mathcal{L}^f_{div} := \{0, 1, +, -, \cdot, |, (l_m)_{m\in\mathbb{N}^{\geqslant 2}}, (f_{m,i})_{m\in\mathbb{N}^{\geqslant 2}, 1\leqslant i\leqslant m}\}.$$

Démonstration du théorème 5.4. — Soit $L := K(a)^a$ (la clôture algébrique du corps $K(a)$) et $\mathbb{L}_a := (L, K, v, a)$. Cela signifie qu'on ajoute une constante pour le paramètre a et qu'on considère L dans le langage $\{0, 1, +, -, \cdot, |, E, a\}$. Une partie de K^n définissable dans $\mathbb{K}_S$ l'est clairement dans $\mathbb{L}_a$. Montrons réciproquement que si $D \subseteq K^n$ est $\emptyset$-définissable dans $\mathbb{L}_a$, alors il l'est dans $\mathbb{K}_S$. Par élimination des quantificateurs il suffit de considérer D définissable par une formule atomique de $\mathcal{L}^f_{div}$. Un terme du langage des anneaux en $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et a est de la forme $P(x, a)$ pour un polynôme $P \in \mathbb{F}_p[X_1, \ldots, X_n, Y]$, où p est la caractéristique et par convention $\mathbb{F}_0 := \mathbb{Z}$. Soient de tels polynômes $P_i(X, Y) = \Sigma P_{ij}(X)Y^j$ où $P_{ij} \in \mathbb{F}_p[X]$. Si x est dans K, on a $\mathbb{L} \models l_m(P_1(x, a), \cdots, P_m(x, a))$ ssi le rang de la matrice $(P_{ij}(x))_{ij}$ est m, ce qui se dit sur x par une formule sans quantificateurs du pur langage des anneaux. Dans ce cas, si un autre polynôme $P_{m+1}(x, a)$ est K-linéairement dépendant des $P_1(x, a), \cdots, P_m(x, a)$, ses composantes sont dans le corps engendré par les $P_{ij}(x)$; donc les fonctions $f_{m,i}(P_{m+1}(x, a), P_1(x, a), \cdots, P_m(x, a))$ sont en fait des fonctions rationnelles en x à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. Un terme de $\mathcal{L}^f_{div}$ en $x \in K$ se réduit ainsi à un terme du langage $\{0, 1, +, -, \cdot, ^{-1}, |\}$. En conséquence, une partie de K^n $\emptyset$-définissable dans $\mathbb{L}_a$ est la trace sur K^n d'une partie de L^n définissable dans L par une formule sans quantificateur du langage $\{0, 1, +, -, \cdot, ^{-1}, |\}$, ou de façon équivalente dans le langage $\mathcal{L}_{div}$. Une formule atomique de $\{0, 1, +, -, \cdot, ^{-1}, |\}$ soit définit un fermé de Zariski de L, dont la trace sur K^n est un fermé de Zariski de K, soit est de la forme $v(P(x, a)) \geqslant v(Q(x, a))$ avec $P, Q \in \mathbb{F}_p[X, Y]$; formule qui, si $P(X, Y) = \Sigma P_i(X)Y^i$ et $Q(X, Y) = \Sigma Q_i(X)Y^i$ avec $P_i, Q_i \in \mathbb{F}_p[X]$, et si d est le plus grand des degrés de P et Q, est vraie dans $\mathbb{L}_a$ ssi

$$\mathbb{K}_S \models S_{d+1}((P_0(x), \ldots, P_d(x)), (Q_0(x), \ldots, Q_d(x))).$$

Montrons maintenant que ce raisonnement s'applique dans tout $\mathbb{K}' \equiv \mathbb{K}_S$. Dans $\mathbb{L}$, pour $x, y \in K$, la formule $S_2((x, -1), (y, 0))$ équivaut à $v(x - a) \geqslant v(y)$. Ainsi, la famille de formules $S_2((x, -1), (y, 0)) \wedge y \neq 0$, où y est considéré comme un paramètre variable, définit dans $\mathbb{K}_S$, et dans tout $\mathbb{K}' \equiv \mathbb{K}_S$, une famille de boules emboîtées, de rayon arbitrairement petit, et d'intersection vide. Cela montre que $\mathbb{K}'$ n'est pas définissablement complète ; son complété contient un unique élément, appelons-le encore a, dans l'intersection de toutes ces boules ; si on définit $L' = K'(a)^a$, la paire (L', K', v) est une paire dense propre de corps valués algébriquement clos, pour laquelle $\mathbb{K}' = \mathbb{K}_S$. L'élimination des quantificateurs annoncée est prouvée.

Venons-en à la C-minimalité. Seules sont à considérer les formules atomiques (de $\mathcal{L}^f_{div}$) en une variable et faisant intervenir un prédicat S_m. Dans $\mathbb{L}$, pour tout élément x de K, la formule $\varphi(x) := S_m(t_1(x,a), \dots, t_m(x,a), t'_1(x,a), \dots, t'_m(x,a))$, où les t_i et les t'_i sont des polynômes de $\mathbb{F}_p[X,Y]$, équivaut à une formule de la forme $v(P(x)) \geqslant v(Q(x))$ pour des polynômes P et Q à coefficients dans $K[a]$. Cette formule définit dans L une combinaison booléenne de format borné de boules, c'est-à-dire qu'il existe un entier N et des $\delta_i, \delta_{i,j} \in \{o, f\}$ pour lesquels

$$\mathbb{L} \models \exists_{i=1,j=1}^{i=N,j=N} c_{i,j}, c_i, \gamma_{i,j}, \gamma_i, \forall x,$$

$$[v(P(x) \geqslant v(Q(x) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{N} [x \in B_{\delta_i}(c_i, \gamma_i) \wedge \bigwedge_{j=1}^{N} x \notin B_{\delta_{i,j}}(c_{i,j}, \gamma_{i,j})]],$$

où $B_\delta(c,\gamma)$ désigne la boule, ouverte ou fermée selon que δ est o ou f, de centre c et de rayon valuatif γ.

Par densité la trace sur K d'une boule de L est une boule de même rayon et de même type si ce rayon est non nul, et un point ou vide si ce rayon est nul. On peut exprimer cela dans $\mathbb{K}_s$ en introduisant dans l'énoncé ci-dessus une disjonction $\bigvee\!\!\!\bigvee_k \exists \overline{c}, \overline{\gamma}\, \forall x\, F_k(x, \overline{c}, \overline{\gamma})$ où chaque terme $F_k(x, \overline{c}, \overline{\gamma})$ est la même formule sans quantificateurs qu'initialement mais où il est de plus précisé si chaque $\gamma_{i,j}$ ou γ_i est nul ou non. Par exemple, si F_k précise qu'aucun n'est nul, alors l'énoncé $\exists \overline{c}, \overline{\gamma}\, \forall x\, F_k(x, \overline{c}, \overline{\gamma})$ dans lequel on remplace la sous-formule $v(P(x)) \geqslant v(Q(x))$ par $\varphi(x)$, est satisfait dans $\mathbb{K}_S$, et dans tout $\mathbb{K}' \equiv \mathbb{K}_S$. $\square$

Remarques. — 1. Tout point de L est définissable dans (L, v) à paramètres a dans $K \cup \{a\}$. En effet L est algébrique (au sens de la théorie des corps) sur $K(a)$, et par densité deux points de L sont séparables par les points de K. En conséquence une partie de K^n est définissable dans $\mathbb{K}_S$ ssi elle l'est dans $\mathbb{L}$.

2. Dans [11] page 4 également, étant donnée une paire de corps valués algébriquement clos $(K \subseteq L, v)$ avec K dense dans L, des questions de définissabilité dans K à paramètres dans L sont considérées.

Réciproquement, un pur corps valué, à corps de restes algébriquement clos et groupe de valuation divisible, est C-minimal dès qu'il est maximal, ou même simplement définissablement maximal. De nouveau, cela ne reste pas vrai pour les expansions : un corps algébriquement clos, valué non trivialement et équipé d'une section, est définissablement maximal (car il a des modèles maximaux), il a des structures résiduelle fortement minimale et valuationnelle o-minimale, et il n'est pas C-minimal.

5.2. La question de la dérivabilité

Corollaire 5.6. — *Soit M un corps valué C-minimal,*

– définissablement complet

– sans bijection définissable d'un intervalle borné de vM vers un intervalle non borné de vM.

Alors une fonction définissable de M dans M admet en tout point une dérivée... appartenant à $M \cup \{\infty\}$...

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la proposition 4.5. □

Sans hypothèse supplémentaire on ne peut pas améliorer ce résultat en éliminant la valeur ∞. En effet, dans un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, l'application Frobenius $x \mapsto x^p$ est une bijection à dérivée identiquement nulle. Sa réciproque est donc une fonction définissable partout définie et nulle part dérivable. L'hypothèse d'une caractéristique nulle est donc nécessaire pour éviter ce phénomène. Nous obtenons le résultat de dérivabilité presque partout en ajoutant l'hypothèse d'une caractéristique résiduelle nulle et en renforçant comme suit la condition sur les fonctions définissables de vK dans vK.

Définition 5.7. — *Soit $\mathbb{K}$ un corps valué muni d'une structure additionnelle. Nous dirons que* $\mathbb{K}$ n'ajoute pas de fonction définissable de vK dans vK au voisinage de l'infini *lorsque, pour toute fonction $f : vK \to vK$, définissable dans $\mathbb{K}$, de domaine $]\gamma_0, +\infty[$, il existe $\gamma_1, \gamma_2 \in vK$, $\gamma_1 \geqslant \gamma_0$, et un rationnel r tels que*

$$\mathbb{K} \models \forall x > \gamma_1,\ f(x) = rx + \gamma_2.$$

Autrement dit f coïncide au voisinage de l'infini avec une fonction définissable dans le pur groupe ordonné vK.

Proposition 5.8. — *Soit $\mathbb{K}$ un corps valué algébriquement clos de caractéristique résiduelle nulle, muni d'une structure supplémentaire n'ajoutant* *pas de fonction définissable de vK dans vK au voisinage de l'infini. Supposons $\mathbb{K}$ C-minimal et définissablement complet. Alors toute fonction définissable de K dans K est dérivable presque partout (ce qui signifie « sauf en un nombre fini de points »).*

Démonstration. — D'après le corollaire 5.6 et parce qu'une fonction définissable f de K dans K est presque partout localement constante ou inversible, il suffit de montrer que si f est de dérivée partout nulle, alors elle est localement constante. Soit A le domaine de définition de f. Supposons pour une contradiction que f n'est nulle part localement constante, donc, par C-minimalité, presque partout un C-isomorphisme local. Quitte à réduire le domaine de définition, on peut supposer que f est un C-isomorphisme et A une boule fermée de rayon $\gamma_0 \in vK$. Puisque f est un C-isomorphisme, l'équivalence

$$v(x-y) = v(x-z) \text{ ssi } C(x,y,z) \vee (\neg C(x,y,z) \wedge \neg C(y,z,x) \wedge \neg C(z,x,y))$$

implique que, pour x fixé dans A, l'application $vK_{\geqslant \gamma_0} \to vK$,

$$\gamma \mapsto h(x,\gamma) := v(f(x)-f(y)) \text{ pour tout } y \in A, v(x-y) = \gamma,$$

est bien définie. Elle est définissable et donc, par l'hypothèse faite sur $\mathbb{K}$, affine en γ au voisinage de l'infini, à coefficient directeur rationnel. Par compacité il existe un nombre fini de rationnels $r_1, \ldots, r_n$ tels que

$$(K,v) \models \forall x \in A,\ \exists \alpha_x, \gamma_x \in vK, \forall \gamma \geqslant \gamma_x,\ \bigvee h(x,\gamma) = r_i\gamma + \alpha_x.$$

À x fixé, par o-minimalité r_i reste le même lorsque γ est assez grand, et par C-minimalité A contient une boule ouverte telle que ce r_i soit le même pour tous les points de cette boule. Remplaçons A par cette boule. La fonction $x \mapsto \alpha_x$ ne peut pas être fini-jective. Sinon, pour ν la base de A, on pourrait trouver une infinité d'éléments de A dont les branches contiennent ν, qui sont dans des cônes différents en ν, et dont les images par α sont toutes différentes ; cela ordonnerait de façon définissable un ensemble infini de cônes en ν, donc une partie infinie du corps résiduel, ce qui contredit sa minimalité forte. Il y a donc une infinité de x ayant le même α_x, donc un cône de tels x par C-minimalité. En réduisant de nouveau A, nous sommes ainsi ramenées à la situation où il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que

$$(K,v) \models \exists \alpha,\ \forall x \in A,\ \forall \gamma \geqslant \gamma_0,\ h(x,\gamma) = r\gamma + \alpha,$$

c'est-à-dire que $h(x,\gamma)$ ne dépend pas de x. Puisque f' est nulle sur A, $r > 1$. Si $r = pq^{-1}$ avec $p,q \in \mathbb{N}^{>0}$, $p > q$, et $\alpha = v(b)$ avec $b \in K$, considérons l'application $vK_{\geqslant \gamma_0} \to \mathcal{P}(K/v)$,

$$\gamma \mapsto A_\gamma := \{((f(x)-f(y))b^{-1})^q (x-y)^{-p}/v; x,y \in A, v(x-y) = \gamma\}.$$

Par o-minimalité, la fonction (partielle) $t : K/v \to vK \cup \{\infty\}$,

$$c \mapsto sup\{\gamma \in vK; c \in A_\gamma\}$$

est bien définie. De nouveau, aucune partie infinie de K/v ne peut être linéairement ordonnée par une relation définissable, donc l'image de t est finie. Puisque cette image doit être cofinale dans vK, la fonction t atteint la valeur ∞. Il existe donc $c \in K/v$ qui soit dans A_γ pour tout γ assez grand. Si $c = d/v$ et quitte à réduire encore A, on a pour tous $x, y \in A$, $(f(x) - f(y))^q \sim (x-y)^p b^q d$, où la relation $m \sim n$ signifie $v(m-n) > v(m) = v(n)$. En remplaçant f par la fonction $x \mapsto (f(ux + x_0) - f(x_0))w$, avec $x_0 \in A$, $v(u) > \gamma_0$ et $w^q = u^{-p} b^{-q} d^{-1}$, on se ramène à ce que $A_v \subseteq A$, $f(0) = 0$ et $(f(x) - f(y))^q \sim (x-y)^p$. En particulier $f(x)^q \sim x^p$ donc $f(M_v) \subseteq M_v$ et $f(A_v \setminus M_v) \subseteq A_v \setminus M_v$. Pour $x \in A_v$ on a $f(x + M_v) \subseteq f(x) + M_v$; f induit donc une application $\bar{f} : K/v \to K/v$, qui vérifie $(\bar{f}(x) - \bar{f}(y))^q = (x-y)^p$ et est donc injective. On a aussi $\bar{f}(x)^q = x^p$ donc, si ξ_p désigne l'ensemble des racines p-èmes de l'unité, on a $\bar{f}(x\xi_p) \subseteq f(x)\xi_q$. En présence d'une caractéristique résiduelle nulle, cela contredit $q < p$. $\square$

Rappel. — Dans un corps o-minimal K une fonction définissable $K \to K$ est presque partout dérivable.

Remarques. — 1. J'ignore s'il peut exister dans un corps C-minimal de caractéristique nulle des fonctions unaires définissables qui ne soient pas presque partout dérivables.

2. Dans la proposition précédente, nous n'utilisons que pour les fonctions $\gamma \mapsto h(x, \gamma)$ la propriété qu'elles coïncident au voisinage de l'infini avec une fonction définissable dans le pur groupe ordonné vK. L'hypothèse que $\mathbb{K}$ n'ajoute pas de nouvel ordre de grandeur de fonctions $K \to K$ tendant vers 0 au voisinage d'un point est donc suffisante.

Bibliographie

[1] Adeleke (S. A.) et Neumann (P. M.). — Relations Related to Betweenness: Their Structure and Automorphisms, Mem. AMS 623, Providence (1998).

[2] Delon (F.). — C-minimal structures without density assumption, in Motivic Integration and its Interactions with Model Theory and Non-Archimedean Geometry II, Éditeurs R. Cluckers, J. Nicaise et J. Sebag, LMS LNS 384, Cambridge University Press, Cambridge, p. 51-86 (2011).

[3] Delon (F.). — Élimination des quantificateurs dans les paires de corps algébriquement clos, soumis (2012).

[4] Haskell (D.) et Macpherson (D.). — Cell decompositions of C-minimal structures, APAL 66, p. 113-162 (1994).

[5] Hrushovski (E.) et Kazhdan (D.). — Integration in valued fields, in Algebraic Geometry and Number Theory, Progr. Math. 253, Birkhäuser Boston, Boston, p. 261-405 (2006).

[6] Kaplansky (I.). — Maximal fields with valuation, Duke Math. J. 9, p. 303-321 (1942).

[7] Knight (J.), Pillay (A.) et Steinhorn (C.). — Definable sets in ordered structures II, TAMS 295, p. 593-605 (1986).

[8] Macpherson (D.). — Notes on o-Minimality and Variations, in Model Theory, Algebra, and Geometry, Éditeurs D. Haskell, A. Pillay et C. Steinhorn MSRI Publications 39, Cambridge University Press, Cambridge, p. 97-130 (2000).

[9] Macpherson (D.) et Steinhorn (C.). — On variants of o-minimality, APAL 79, 165-209 (1996).

[10] Marker (D.). — Model Theory: An Introduction, Graduate Texts in Mathematics, Springer (2002).

[11] Pillay (A.). — Stable embeddedness and NIP, arXiv 1001.0515 (2010).

[12] Pillay (A.) et Steinhorn (C.). — Definable sets in ordered structures I, TAMS 295, p. 565-592 (1986).

[13] van den Dries (L.). — Tame Toplogy and O-minimal Structures, LMS LNS 248, Cambridge University Press, Cambridge (1998).

[14] Wilkie (A.). — Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function, JAMS 9, p. 1051-1094 (1996).