

# ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

MAXIME PERCIE DU SERT

*Une classe de systèmes dynamiques monotones génériquement Morse-Smale*

Tome XXII, n° 2 (2013), p. 377-419.

[http://afst.cedram.org/item?id=AFST\\_2013\\_6\\_22\\_2\\_377\\_0](http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2013_6_22_2_377_0)

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2013, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie de cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

## Une classe de systèmes dynamiques monotones génériquement Morse-Smale

MAXIME PERCIE DU SERT<sup>(1)</sup>

---

**ABSTRACT.** — In this paper, we extend the results of Fusco and Oliva [8], who have proved the transversality of the intersection of the stable and unstable manifolds of hyperbolic periodic orbits, for the dynamical system generated by the equation  $\dot{x} = f(x)$ , defined on an open set of  $\mathbb{R}^n$ , where  $f'(x)$  is a cyclic Jacobi matrix. This result is obtained by using the number of sign changes of  $\dot{x}(t)$ , which is a monotone functional along the trajectories. First we extend this automatic transversality result to the intersection of stable and unstable manifolds of two hyperbolic critical elements if there are not two equilibria with same even Morse index. Secondly, we prove that generically with respect to the non-linearity  $f$ , the intersection of stable and unstable manifolds of two equilibria with same even Morse index is empty. Then we show that these systems are generically Morse-Smale if in addition the non-linearity is dissipative.

**RÉSUMÉ.** — Dans cet article, nous généralisons les résultats de Fusco et Oliva [8], qui ont montré la transversalité de l'intersection des variétés stable et instable associées à des orbites périodiques hyperboliques, pour un système dynamique de la forme  $\dot{x} = f(x)$  (sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ) où  $f'(x)$  est une matrice de Jacobi cyclique. Dans [8], cette propriété est obtenue en utilisant le nombre de changements de signe de  $\dot{x}(t)$  qui est une fonctionnelle monotone le long des orbites. Tout d'abord, nous étendons ce résultat de transversalité automatique à l'intersection des variétés stable et instable de deux éléments critiques hyperboliques si ceux-ci ne sont pas deux équilibres de même indice de Morse pair. Ensuite, nous montrons que génériquement en la non-linéarité  $f$ , l'intersection des variétés stable et instable de deux équilibres de même indice de Morse pair est vide. Enfin nous montrons que ces systèmes sont génériquement de type Morse-Smale si, en outre, la non-linéarité est dissipative.

---

---

(\*) Reçu le 17/01/2012, accepté le 24/09/2012

(1) Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Orsay Cedex, F-91405, France  
maxime.perciedusert@math.u-psud.fr

Article proposé par Jean-Michel Coron.

## 1. Introduction

Considérons un système dynamique local défini sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  par l'équation

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.1}$$

où  $f$  est une application de classe  $C^1$ . Dans cet article, nous étudions l'hyperbolicité des éléments critiques, la propriétés de Kupka-Smale ainsi que celle de Morse-Smale. Ces propriétés sont importantes, car elles entraînent des propriétés de stabilité locale ou globale. En effet, si l'on veut montrer que pour un point d'équilibre, il existe un voisinage dans lequel, sous une petite perturbation de l'application  $f$ , il existe un unique point d'équilibre, et que la dimension des variétés locales stable et instable est inchangée, il suffit de montrer que ce point d'équilibre est hyperbolique. Pour garantir vis-à-vis d'une petite perturbation de  $f$ , la conservation de l'existence ou de la non existence d'une orbite reliant deux éléments critiques, il suffit de montrer la propriété de Kupka-Smale pour ce système, c'est-à-dire l'hyperbolicité de tous les éléments critiques et la transversalité de l'intersection des variétés stable et instable des éléments critiques. C'est une propriété de stabilité locale. Pour obtenir une propriété de stabilité globale, on peut demander que la propriété de Morse-Smale soit satisfaite, c'est-à-dire que la propriété de Kupka-Smale soit vérifié et que de plus l'ensemble des points non-errants soit égal à la réunion finie des éléments critiques. Malheureusement le système dynamique (1.1) n'a pas ces propriétés pour n'importe quelle application  $f$  de classe  $C^1$ . Mais on peut se demander si ces propriétés sont satisfaites sur un ensemble générique d'applications  $f$ , c'est-à-dire pour un ensemble contenant une intersection dénombrable d'ouverts denses, dans une certaine topologie. Avoir une propriété qui n'est vérifiée que génériquement est gênant lorsqu'on considère une équation donnée, mais on peut s'en servir lorsque l'on utilise des approximations comme en biologie, en physique expérimentale ou en calcul numérique. La généralité de la propriété de Kupka-Smale pour un système dynamique défini par l'équation (1.1) a été démontrée en 1963, indépendamment par Kupka et Smale (voir [15] et [21]). La propriété de Morse-Smale pour une classe d'applications dissipatives est générique dans  $\mathbb{R}^2$  ([17]). Mais en dimension plus élevée, cette propriété n'est pas dense. En dimension deux, le théorème de Poincaré-Bendixson ([3], [19]) permet de caractériser les points d'accumulation d'une orbite, mais en dimension supérieure, il peut exister des orbites homoclines à une orbite périodique entraînant l'apparition de chaos qui ne peut pas être supprimé par une perturbation (voir par exemple [22]). Une autre approche possible du problème est de considérer la généralité de ces propriétés dans des sous-classes de systèmes dynamiques. Par exemple la propriété de Morse-Smale est générique dans la classe des champs de vecteurs gradients sur une variété riemannienne de dimension finie. Cette propriété est

également générique dans l'ensemble des applications de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n$  dont la différentielle est une matrice de Jacobi positive en tout point [7]. Seulement ces deux cas présentent une dynamique relativement simple, car étant sans orbites périodiques.

Dans cet article on s'intéresse au sous-ensemble  $L^+$  des applications de classe  $C^1$  telles que la différentielle  $f'(x)$  soit une matrice de Jacobi cyclique positive en tout point  $x$ . Les systèmes dynamiques associés font partie des systèmes dynamiques coopératifs (voir [9], [10], [11], [23]), que l'on retrouve en biologie et en économie. De telles applications peuvent modéliser un cycle de systèmes à un paramètre ne dépendant que d'eux-même et des systèmes suivant et précédent. Le système dynamique obtenu où  $f \in L^+$  présente deux avantages. D'abord, il permet l'existence d'orbites périodiques et ainsi une dynamique plus complexe que pour des champs de vecteurs gradients ou dont la différentielle est une matrice de Jacobi positive. Le second avantage est l'existence d'une fonctionnelle discrète décroissante le long des trajectoires (voir [8]). Cette fonctionnelle nous permettra de démontrer que les trajectoires périodiques simples sont hyperboliques et que si les indices de Morse de deux points d'équilibre ne sont pas égaux et pairs alors leurs variétés stable et instable sont transverses. Ensuite nous montrerons que le système dynamique est génériquement Kupka-Smale par rapport à  $f$ . Pour démontrer la propriété de densité nous utiliserons un théorème de Sard-Smale. Ce théorème permet d'obtenir la densité sous une hypothèse de surjectivité, qui est délicate à démontrer lorsqu'on considère des sous-classes de non-linéarités telles que  $L^+$ .

On remarque que ce système présente une grande similitude avec l'équation de réaction-diffusion sur le cercle, qui elle aussi admet une fonctionnelle discrète décroissante aux propriétés semblables (voir [2]).

NOTATIONS ET DÉFINITIONS. — Nous commençons par rappeler la notion de matrice de Jacobi cyclique et par introduire la sous-classe  $\mathcal{L}^+$  des matrices de Jacobi cycliques positives. On note  $\mathcal{L}$  (resp.  $\mathcal{L}^+$ ) l'ensemble des endomorphismes de  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice  $A = (a_{ij})$ , dans une base  $\mathcal{B}$  fixée (pas forcément orthonormée), vérifie la condition (1.2) (resp. les trois conditions (1.2), (1.3) et (1.4)) suivante:

$$a_{ij} = 0, \quad 1 < |i - j| < n - 1, \quad (1.2)$$

$$a_{ij} \geq 0, \quad |i - j| = 1 \text{ ou } n - 1, \quad (1.3)$$

$$\prod_{i=1}^n a_{i,i-1} + \prod_{i=1}^n a_{i,i+1} > 0 \quad (a_{10} = a_{1n}, a_{n,n+1} = a_{n1}). \quad (1.4)$$

En d'autres termes, toute matrice  $A \in \mathcal{L}$  s'écrit sous la forme:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ c_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & 0 & \cdots & 0 & c_n & a_n \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

De même  $\mathcal{L}^+$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{L}$  des matrices  $A$  telles que les réels  $b_i$  et  $c_i$  vérifient,

$$b_i, c_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^n b_i + \prod_{i=1}^n c_i > 0. \quad (1.6)$$

On notera  $L^+$  le sous-ensemble de  $C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  constitué des fonctions  $f$  telles que pour tout  $x$  de  $\Omega$ ,  $f'(x)$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{L}^+$ . L'ensemble  $\mathcal{L}$  est un espace vectoriel de dimension  $3n$ ,  $\mathcal{L}^+$  et  $L^+$  sont des cônes positifs. (On rappelle que  $C$  est un cône positif si  $\forall(x, y) \in C^2, \forall(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \alpha x + \beta y \in C$ ). Si  $f \in L^+$ , pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , la  $j^{\text{ème}}$  application coordonnée  $f_j$  ne dépend que de  $x_{j-1}, x_j$  et  $x_{j+1}$  (dans tout l'article les indices sont pris modulo  $n$ ). De même pour  $j \in \{1, \dots, n\}$  les fonctions  $x \in \Omega \rightarrow a_j(x), x \in \Omega \rightarrow b_j(x)$  et  $x \in \Omega \rightarrow c_j(x)$  ne dépendent que de  $x_{j-1}, x_j$  et  $x_{j+1}$ .

Soit  $\Omega$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in L^+$ . Dans cet article nous considérons l'équation différentielle non linéaire autonome

$$\dot{y} = f(y), \quad y(0) \in \Omega \quad (1.7)$$

Dans la section deux, nous définirons une fonctionnelle discrète "nombre de changements de signe" des coordonnées d'un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . Les solutions de cette équation ont la particularité que cette fonctionnelle, appliquée au vecteur vitesse  $\dot{y}(t)$ , décroît au court du temps.

On étudie le système dynamique local, noté  $T_f$ , défini par  $T_f(t)x = y(t)$  où  $y$  est la solution de l'équation différentielle (1.7) de condition initiale  $y(0) = x$ . On définit l'ensemble

$$\Delta_f = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega \mid T_f(t)x \text{ est défini}\}.$$

Pour une application continue  $(\alpha, \beta) \rightarrow A(\tau) \in L(\mathbb{R}^n)$  on note  $S_A(t, s)$  la résolvante de l'équation

$$\dot{y}(\tau) = A(\tau)y(\tau), \tag{1.8}$$

c'est-à-dire,  $S_A(t, s)x = y(t)$  où  $y$  est la solution de l'équation précédente satisfaisant  $y(s) = x$ .

On appelle équilibre de (1.7) (ou de  $T_f(t)$ ) un élément  $e \in \Omega$  tel que  $f(e) = 0$ .

*DÉFINITION 1.1. — On rappelle qu'un équilibre  $e$  est hyperbolique si aucune valeur propre de  $f'(e)$  n'est de partie réelle nulle. Une solution périodique  $\gamma$  de période  $\omega$  est dite hyperbolique si 1 est valeur propre simple de  $S_{f'(\gamma)}(\omega, 0)$  et si  $S_{f'(\gamma)}(\omega, 0)$  n'a pas d'autre valeur propre de module 1.*

On remarque que 1 est toujours valeur propre de  $S_{f'(\gamma)}(\omega, 0)$ , de vecteur propre  $\dot{\gamma}(0)$ . De plus l'hyperbolicité d'une solution périodique ne dépend pas de la période choisie. Une orbite périodique de  $T_f$  est dite hyperbolique si l'une de ses paramétrisations est une solution périodique hyperbolique de (1.7). Les éléments critiques de  $T_f$  sont ses points d'équilibre et ses orbites périodiques.

Soient  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  deux éléments critiques hyperboliques de  $T_f$ , on rappelle que la variété instable de  $\Gamma^-$  et la variété stable de  $\Gamma^+$  sont les ensembles suivants,

$$\begin{aligned} W^u(\Gamma^-) &= \{x \in \Omega, \lim_{t \rightarrow -\infty} d(T_f(t)x, \Gamma^-) = 0\}, \\ W^s(\Gamma^+) &= \{x \in \Omega, \lim_{t \rightarrow \infty} d(T_f(t)x, \Gamma^+) = 0\}. \end{aligned}$$

Ces ensembles sont des variétés immergées dans  $\mathbb{R}^n$ . On dit que les deux variétés  $W^s(\Gamma^+)$  et  $W^u(\Gamma^-)$  sont transverses (et on le note  $W^s(\Gamma^+) \pitchfork W^u(\Gamma^-)$ ), si  $W^u(\Gamma^-) \cap W^s(\Gamma^+) = \emptyset$  ou si pour tout  $x \in W^u(\Gamma^-) \cap W^s(\Gamma^+)$ ,

$$T_x W^u(\Gamma^-) + T_x W^s(\Gamma^+) = \mathbb{R}^n.$$

On appelle indice de Morse  $i(\Gamma)$ , de l'élément critique  $\Gamma$ , le nombre de valeurs propres de module strictement supérieur à 1 de  $e^{f'(\Gamma)}$  si  $\Gamma$  est un point d'équilibre ou de  $S_{f'(\gamma)}(\omega, 0)$  si  $\Gamma$  est une orbite périodique de période  $\omega$ . Dans la suite nous utiliserons la notation  $e^-$  et  $e^+$  pour des points d'équilibre et  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$  pour des orbites périodiques.

Nous pouvons maintenant rappeler le théorème démontré par Fusco et Oliva (1988) en utilisant la fonctionnelle changement de signes [8].

THÉORÈME 1.2 (Fusco et Oliva, 1988). — *Soit  $f \in L^+$ , alors pour tout couple d'orbites périodiques hyperboliques  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$  de  $T_f$ ,*

$$W^u(\gamma^-) \pitchfork W^s(\gamma^+).$$

Le même résultat pour l'équation de réaction-diffusion, a été démontré par Czaja et Rocha dans [5].

À la fin de leur article [8], G. Fusco et W. Oliva affirment sans démonstration le théorème suivant ( dans la suite on pose  $\tilde{n} = n$  si  $n$  est impair et  $\tilde{n} = n + 1$  si  $n$  est pair).

THÉORÈME 1.3 (Transversalité automatique). — *Soient  $f \in L^+$ ,  $\Gamma^-$  et  $\Gamma^+$  deux éléments critiques hyperboliques de  $T_f$  alors,*

$$W^u(\Gamma^-) \pitchfork W^s(\Gamma^+),$$

si l'on est dans l'un des cas suivants :

- (a)  $\Gamma^-$  ou  $\Gamma^+$  est une orbite périodique.
- (b)  $\Gamma^-$  et  $\Gamma^+$  sont des points d'équilibre et il existe un entier  $h \in \{1, \dots, \frac{\tilde{n}+1}{2}\}$  tel que les indices de Morse  $i(\Gamma^-)$  et  $i(\Gamma^+)$  vérifient la propriété:

$$i(\Gamma^-) \geq 2h - 1 \geq i(\Gamma^+). \tag{1.9}$$

Nous démontrons ce théorème dans la section 3. Malheureusement, l'intersection des variétés stables et instables des éléments critiques n'est pas automatiquement transverse. Mais cependant on montrera ici que c'est une propriété générique. Nous allons donc munir  $L^+$  d'une topologie. On introduit les compacts  $K_\alpha$  pour  $\alpha > 0$  et les semi-normes  $p_m$  pour  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :

$$K_\alpha = \{x \in \Omega, \|x\| \leq \alpha\} \cap \{x \in \Omega, \inf_{y \in \Omega^c} \|x - y\| \geq 1/\alpha\}, \tag{1.10}$$

$$p_m(f) = \sup_{x \in K_m} \|f(x)\| + \|f'(x)\|. \tag{1.11}$$

On munit l'ensemble  $L^+$  des semi-normes  $(p_m)_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ . Sur l'espace  $L^+$ , les voisinages d'un élément  $f$  sont donnés par  $V_{m,\epsilon} = \{g \in L^+, p_m(f - g) < \epsilon\}$ . Cette topologie de  $L^+$  est équivalente à celle engendrée par la distance  $d$  où  $d(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(f-g)}{1+p_k(f-g)}$ . Puisque  $(C^1(\Omega, \mathbb{R}^n), d)$  est complet et donc un espace de Baire,  $L^+$  est aussi un espace de Baire. Ainsi tout ensemble générique de  $L^+$  est dense.

Pour montrer que le système dynamique  $T_f$  est génériquement Kupka-Smale par rapport à  $f \in L^+$ , on procède en deux étapes. On commence par prouver le théorème suivant.

THÉORÈME 1.4. — *Il existe un sous-ensemble générique  $\mathcal{O}$  de  $L^+$  tel pour tout  $f \in \mathcal{O}$ , tous les éléments critiques du système dynamique  $T_f$  sont hyperboliques.*

Puis on montrera que génériquement en  $f$  il n'existe pas d'orbite connectant  $e^-$  à  $e^+$ , quand  $e^-$  et  $e^+$  sont deux points d'équilibre hyperboliques qui ont même indice de Morse pair. Ainsi cette dernière propriété et les théorèmes 1.3 et 1.4, nous permettent de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 1.5. — *Il existe un sous-ensemble générique  $\mathcal{KS}$  de  $L^+$  tel que pour tout  $f \in \mathcal{KS}$ , le système dynamique  $T_f$  vérifie la propriété de Kupka-Smale, c'est à dire tous les éléments critiques de  $T_f$  sont hyperboliques et l'intersection entre les variétés stable et instable de deux éléments critiques quelconques est transverse.*

Rappelons maintenant qu'un point  $x$  est un point non-errant du système dynamique  $T_f$ , si pour tout voisinage  $V$  de  $x$ , il existe  $t$  aussi grand qu'on le souhaite tel que  $T_f(t)V \cap V \neq \emptyset$ . Dans la dernière partie de cet article, on montre que si le système dynamique est Kupka-Smale alors l'ensemble non-errant est réduit aux éléments critiques. Mais pour que les éléments critiques soient en nombre fini, il faut rajouter des conditions de dissipation sur la non-linéarité  $f$ . Par exemple, on peut considérer le sous ensemble

$$L_c^+ = \{f \in L^+, \exists M > 0, \forall x \in \Omega, \|x\| \geq M \Rightarrow \langle f(x), x \rangle < 0\}. \quad (1.12)$$

THÉORÈME 1.6. — *Il existe un sous-ensemble générique  $\mathcal{MS}$  de  $L_c^+$  tel que pour tout  $f \in \mathcal{MS}$ , le système dynamique  $T_f$  vérifie la propriété de Morse-Smale, c'est-à-dire:*

- *les éléments critiques sont hyperboliques et en nombre fini,*
- *les variétés stable et instable des éléments critiques sont transverses,*
- *l'ensemble des points non-errants est égal à l'ensemble des éléments critiques.*

Pour démontrer ce théorème nous adapterons à notre système la démonstration de la généricité de la propriété de Morse-Smale pour l'équation de réaction-diffusion sur le cercle faite par Joly et Raugel dans [12] et [13]. Comme dans [13], on utilisera le fait que (1.7) satisfait à la propriété de Poincaré-Bendixson. Cette propriété avait été démontrée par Fiedler et Mallet-Parret [6] pour l'équation de réaction-diffusion sur le cercle. On utilisera aussi la décroissance de l'indice de Morse le long d'une chaîne d'éléments critiques. Cela est possible car la fonctionnelle « nombre de changement de signe » entraîne une décroissance stricte de l'indice de Morse quand il existe une orbite hétérocline entre deux orbites périodiques hyperboliques.



Le plan de l'article est le suivant. Dans la section 2, nous définissons la fonctionnelle discrète « nombre de changements de signe » et décrivons ses propriétés. Puis dans la troisième partie, nous démontrerons les transversalités « automatiques », c'est-à-dire le théorème 1.3. L'objet de la section 4 est la généricité de l'hyperbolicité des éléments critiques (théorème 1.4). Dans la cinquième partie nous montrerons la généricité de la propriété de Kupka-Smale. Et pour finir, la dernière section sera consacrée à la démonstration de la propriété de Morse-Smale générique.

## 2. Fonctionnelle discrète, monotonie et propriétés spectrales

### 2.1. Définitions et rappels

Dans cette partie, nous rappelons les propriétés de monotonie décrites dans [8], qui sont nécessaires à la démonstration des résultats prouvés dans la suite de l'article.

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  les coordonnées de  $x \in \mathbb{R}^n$  dans la base  $\mathcal{B}$  fixée. Pour  $x \in \mathbb{R}^n$ , tel que pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x_j \neq 0$ , on définit la fonctionnelle discrète « nombre de changement de signe  $N$  » par,

$$N(x) = (\text{nombre de changement de signe dans la suite } x_1, x_2, \dots, x_n, x_1) + 1.$$

Elle ne prend que des valeurs impaires inférieures à  $n + 1$ . Pour  $x \in \mathbb{R}^n$  on définit

$$N_m(x) = \min_{u \in V_x, u_j \neq 0} N(u) \quad \text{et} \quad N_M(x) = \max_{u \in V_x, u_j \neq 0} N(u),$$

où  $V_x$  est un petit voisinage de  $x$ . On prolonge  $N$  par  $N = N_m = N_M$  sur l'ensemble  $\mathcal{N} = \{x | N_m(x) = N_M(x)\}$ , qui est un ouvert dense de  $\mathbb{R}^n$ . Le théorème suivant montre l'intérêt de la fonctionnelle  $N : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Il nous permettra d'étudier les propriétés de l'équation différentielle linéaire non autonome

$$\dot{z} = f'(y(t))z \quad z(0) \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

lorsque  $y$  est une solution de (1.7). On note  $L(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble des applications linéaires de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même.

**THÉORÈME 2.1.** — *Soit  $\tau \in (\alpha, \beta) \rightarrow A(\tau) \in L(\mathbb{R}^n)$  une application continue. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Pour tout  $\tau$  dans un ouvert dense  $(\alpha, \beta)$*

$$A(\tau) \in \mathcal{L}^+$$

(ii)  $N$  est monotone le long des trajectoires de  $\dot{z}(\tau) = A(\tau)z(\tau)$  dans le sens où

$$x \notin \mathcal{N} \cup \{0\} \Rightarrow S_A(s \pm \epsilon, s)x \in \mathcal{N} \quad (2.2)$$

et

$$N_M(x) = N(S_A(s - \epsilon, s)x) > N(S_A(s + \epsilon, s)x) = N_M(x) \quad (2.3)$$

pour tout  $\epsilon > 0$  suffisamment petit.

On appliquera ce théorème de nombreuse fois à l'équation (2.1). Mais il sert également à prouver une autre propriété de monotonie exposée dans le lemme suivant.

LEMME 2.2. — Soient  $f \in L^+$ ,  $y^1$  et  $y^2$  deux trajectoires de  $T_f$ , et  $z(t) = y^2(t) - y^1(t)$ . Alors si  $z(s) \notin \mathcal{N} \cup \{0\}$ , pour tout  $\epsilon > 0$  suffisamment petit,

$$y(s \pm \epsilon) \in \mathcal{N} \quad \text{et} \quad N(z(s - \epsilon)) = N_M(y(s)) > N_m(y(s)) = N(y(s + \epsilon)).$$

Pour  $h \in \{1, \dots, \frac{\tilde{n}+1}{2}\}$  on introduit les cônes

- $\mathcal{K}_h = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid N_M(x) \leq 2h - 1\}$ ,
- $\mathcal{K}^h = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid N_m(x) > 2h - 1\}$ .

Ces ensembles ont des propriétés de stabilité dans le temps. En effet soit  $z$  une solution de  $\dot{z} = A(t)z$  telle que les assertions du théorème 2.1 soient vérifiées, alors  $z(s) \in \mathcal{K}_h \Rightarrow \forall t \geq s, z(t) \in \mathcal{K}_h$   
et  $z(s) \in \mathcal{K}^h \Rightarrow \forall t \leq s, z(t) \in \mathcal{K}^h$ .

## 2.2. Propriétés spectrales

L'invariance des cônes (2.1) est utilisée pour montrer le théorème spectral suivant. Le théorème suivant joue un rôle essentiel dans la démonstration du théorème 1.3.

THÉORÈME 2.3. — Soit  $\tau \in (\alpha, \beta) \rightarrow A(\tau) \in \mathcal{L}^+$  une application continue, pour tout  $s, t \in (\alpha, \beta)$  fixés avec  $s < t$ , il existe des sous-espaces  $W_j$ ,  $j \in \{1, \dots, \frac{\tilde{n}+1}{2}\}$ , invariants par  $S_A(t, s)$  tels que :

(i)

$$\dim W_1 = 1 \quad (2.4)$$

$$\dim W_j = 2, \quad j \in \{2, \dots, \frac{\tilde{n}-1}{2}\} \quad (2.5)$$

$$\dim W_{\frac{\tilde{n}+1}{2}} = \begin{cases} 2 & \text{si } n = \tilde{n} \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } n = \tilde{n} - 1 \text{ est pair} \end{cases} \quad (2.6)$$

(ii)

$$E = W_1 \oplus \cdots \oplus W_{\frac{\bar{n}+1}{2}} \quad (2.7)$$

(iii)  $\forall (h, k) \in \{1, \dots, \frac{\bar{n}+1}{2}\}^2, h \leq k,$

$$\begin{aligned} \{x \neq 0 \text{ et } x \in W_h \oplus W_{h+1} \oplus \cdots \oplus W_k\} \\ \Rightarrow \{N_m(x) \geq 2h - 1 \text{ et } N_M(x) \leq 2k - 1\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

(iv) Soient  $\nu_j$  et  $\mu_j$  les modules des valeurs propres de  $S(t, s)|_{W_j}$ , et  $r$  le rayon spectral de  $S(t, s)$ , alors

$$r = \mu_1 > \mu_2 \geq \nu_2 > \cdots > \mu_j \geq \nu_j > \cdots > \mu_{\frac{\bar{n}+1}{2}} \geq \nu_{\frac{\bar{n}+1}{2}}. \quad (2.9)$$

L'assertion (2.4) est une conséquence du théorème de Perron-Frobenius. Ce théorème est démontré dans [8]. En particuliers nous utilisons ce théorème pour démontrer les trois propriétés spectrales suivantes.

LEMME 2.4. — Soient  $f \in L^+$  et  $e$  un point d'équilibre hyperbolique de  $T_f$ , alors  $e^{f'(e)}$  satisfait à la décomposition du Théorème 2.3.

Ce lemme est une conséquence du théorème 2.3 (il suffit de remarquer que  $e^{f'(e)} = S_{f'(e)}(1, 0)$  et que  $f'(e) \in \mathcal{L}^+$ ). Puis nous montrons une propriété de signe sur les valeurs propres réelles de  $S_A(t, s)$ .

LEMME 2.5. — Soient  $\tau \in (\alpha, \beta) \rightarrow A(\tau) \in \mathcal{L}^+$  une application continue et

$(\lambda_j)_{1 \leq j \leq n}$  les valeurs propres de  $S_A(t, s)$ , pour  $s, t \in (\alpha, \beta)$  fixés avec  $s < t$ . Si  $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq n}$  est ordonné par module décroissant, alors

$$\lambda_{2h} \lambda_{2h+1} > 0, \quad (2.10)$$

pour tout  $h \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$  si  $n$  est pair et pour tout  $h \in \{1, \dots, \frac{n-1}{2}\}$  si  $n$  est impair.

*Démonstration.* — Ce lemme se démontre par connexité. Définissons l'application  $\Psi : [0, 1] \times [s, t] \rightarrow \mathcal{L}^+$  qui a  $(\epsilon, \tau)$  associe l'endomorphisme dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  s'écrit comme suit,

$$\begin{bmatrix} \epsilon a_1(\tau) & (1 - \epsilon) + \epsilon b_1(\tau) & 0 & \cdots & 0 & (1 - \epsilon) + \epsilon c_1(\tau) \\ (1 - \epsilon) + \epsilon c_2(\tau) & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & (1 - \epsilon) + \epsilon b_{n-1}(\tau) \\ (1 - \epsilon) + \epsilon b_n(\tau) & 0 & \cdots & 0 & (1 - \epsilon) + \epsilon c_n(\tau) & \epsilon a_n(\tau) \end{bmatrix}$$

où pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_j$  est une fonction continue de  $[s, t]$  dans  $\mathbb{R}$  et,  $b_j$  et  $c_j$  sont des fonctions continues de  $[s, t]$  dans  $\mathbb{R}^+$ , de telle sorte que  $\Psi(1, \tau) = A(\tau)$  sur  $[s, t]$ . Soit  $J$  l'endomorphisme  $\Psi(0, \tau)$  constant sur  $[s, t]$ . Comme  $J$  est associé à une matrice symétrique,  $J$  est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont réelles. On en déduit que  $e^{\omega J}$  est également diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Soit  $S_\epsilon(t, s)$  l'opérateur solution associé à l'équation  $\dot{y} = \Psi(\epsilon, \tau)y$  entre  $s$  et  $t$ . Or l'application  $\Psi$  est continue et  $[s, t]$  est compact, donc l'application  $\epsilon \rightarrow S_\epsilon(t, s)$  est continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathcal{L}^+$ . De plus pour tout  $\epsilon \in [0, 1]$ , le théorème 2.3 implique que  $S_\epsilon(t, s)$  admet des valeurs propres  $(\lambda_h(\epsilon))_{h \in \{1, \dots, n\}}$  telles que

$$\lambda_1(\epsilon) > |\lambda_2(\epsilon)| \geq |\lambda_3(\epsilon)| > \dots > |\lambda_{2h}(\epsilon)| \geq |\lambda_{2h+1}(\epsilon)| > \dots |\lambda_n(\epsilon)| > 0 \tag{2.11}$$

(d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz  $S_\epsilon(t, s)$  est injectif). Les fonctions  $\epsilon \rightarrow \lambda_h(\epsilon)$ , pour  $h \in \{1, \dots, n\}$ , sont continues sur  $[0, 1]$ , car ce sont les racines du polynôme caractéristique de  $S_\epsilon(t, s)$ . Soit  $\tilde{n}' = (n - 1)/2$  si  $n$  est impair et  $\tilde{n}' = n/2 - 1$  si  $n$  est pair. Pour  $h \in \{1, \dots, \tilde{n}'\}$  on introduit les fonctions continues,

$$\pi_h : \epsilon \in [0, 1] \rightarrow \lambda_{2h}(\epsilon)\lambda_{2h+1}(\epsilon).$$

Remarquons que grâce aux inégalités (2.11), si pour  $h \in \{1, \dots, \tilde{n}'\}$ ,  $\lambda_{2h}(\epsilon)$  est réel alors  $\lambda_{2h+1}(\epsilon)$  l'est aussi. En effet  $S_\epsilon(t, s)$  est un opérateur réel, si  $\lambda_{2h+1}(\epsilon) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  alors  $\bar{\lambda}_{2h+1}(\epsilon)$  est aussi dans le spectre de  $S_\epsilon(t, s)$ , ce qui est en contradiction avec les inégalités (2.11). De même pour  $h \in \{1, \dots, \tilde{n}'\}$  si  $\lambda_{2h}(\epsilon) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  alors  $\lambda_{2h+1}(\epsilon) = \bar{\lambda}_{2h}(\epsilon)$ . Donc les fonctions  $(\pi_h)_{h \in \{1, \dots, \tilde{n}'\}}$  sont continues à valeurs dans  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Par connexité pour  $h \in \{1, \dots, \tilde{n}'\}$ ,  $\pi_h(1)$  est du même signe que  $\pi_h(0)$ , c'est-à-dire qu'il est positif. D'où  $\lambda_{2h}\lambda_{2h+1} > 0$ , pour tout  $h \in \{1, \dots, \tilde{n}'\}$ .

Ce lemme a une conséquence directe sur le spectre de  $S_{f'(\gamma)}(\omega, 0)$ .

LEMME 2.6. — *Soit  $\gamma$  une solution périodique non constante de (1.7), de période  $\omega$  avec  $f \in L^+$ , alors 1 est la seule valeur propre de module 1 de  $S_{f'(\gamma)}(\omega, 0)$ .*

*Démonstration.* — Le spectre de  $S_{f'(\gamma)}(\omega, 0)$  contient toujours 1 car  $S_{f'(\gamma)}(\omega, 0)\dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(0)$ . On commence par appliquer le théorème 2.3 à  $S_{f'(\gamma)}(\omega, 0)$ , puisque  $f'(\gamma(t)) \in \mathcal{L}^+$  quelque soit  $t \in \mathbb{R}$ , et comme dans la démonstration précédente, le spectre de  $S_{f'(\gamma)}(\omega, 0)$  ne peut contenir plus de deux valeur propre de module 1. Donc 1 et  $-1$  sont les seules valeurs propres de  $S_{f'(\gamma)}(\omega, 0)$  de module 1 possible. Mais le lemme 2.5 interdit  $-1$  comme valeur propre de  $S_{f'(\gamma)}(\omega, 0)$ .

*Remarque.* — Une application directe de ce lemme montre que si  $\gamma$  est une solution périodique simple de  $T_f$ , c'est une solution périodique hyperbolique (pour la signification d'une solution périodique simple, voir la définition 4.5).

### 3. Transversalité automatique

Dans toute cette partie  $f \in L^+$  est fixée. Soient  $e$  un point d'équilibre de  $T_f$  et  $U$  un voisinage de  $e$ , on définit les variétés stable et instable locales,

$$W_{loc}^s(f, e, U) = \{x \in U, \forall t \in [0, \infty[, T_f(t)x \in U\}, \quad (3.1)$$

$$W_{loc}^u(f, e, U) = \{x \in U, \forall t \in ]\infty, 0], T_f(t)x \in U\}. \quad (3.2)$$

Pour  $U$  suffisamment petit, ces deux ensembles sont le graphe d'une application, donc des sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ . Lorsque  $f$  est fixée, nous fixons également  $U$  pour que  $W_{loc}^s(f, e, U)$  et  $W_{loc}^u(f, e, U)$  soient des sous-variétés, et nous les notons respectivement  $W_{loc}^s(e)$  et  $W_{loc}^u(e)$ . Les ensembles stable et instable globaux s'écrivent comme réunion des images par  $T_f$  des variétés locales comme suit,

$$W^s(e) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_f(-n)W_{loc}^s(e) \quad \text{et} \quad W^u(e) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_f(n)W_{loc}^u(e).$$

Nous rappelons un lemme classique de géométrie différentielle que nous appliquerons plus tard à ces sous-variétés.

LEMME 3.1. — *Soient  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ ,  $a$  un point de  $M$ , et  $\Sigma$  un sous-espace de  $T_a M$  de dimension  $m$ . Soit  $\mathcal{K}$  un cône ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\Sigma \subset \mathcal{K}$ , alors il existe un voisinage  $V$  de  $a$  dans  $M$  tel que pour tout point  $b \in V$ ,  $T_b M$  contienne un sous-espace  $\tilde{\Sigma}$  de dimension  $m$  inclus dans  $\mathcal{K}$ .*

Pour tout  $u \in \Omega$  tel que respectivement  $\mathbb{R}^+ \times \{u\}$  et  $\mathbb{R}^- \times \{u\}$  soient inclus dans  $\Delta_f$ , on définit les ensembles  $\omega$  - limite et  $\alpha$  - limite:

$$\omega(u) = \{v \in \Omega, \text{ il existe une suite } (t_n) \text{ de } \mathbb{R}_+ \text{ tendant vers } \infty \text{ tel que } v = \lim_{n \rightarrow \infty} T_f(t_n)u\},$$

$$\alpha(u) = \{v \in \Omega, \text{ il existe une suite } (t_n) \text{ de } \mathbb{R}_+ \text{ tendant vers } \infty \text{ tel que } v = \lim_{n \rightarrow \infty} T_f(-t_n)u\}.$$

Soient  $\Gamma^-$  et  $\Gamma^+$  deux éléments critiques de  $T_f$ . Soient  $\bar{q} \in W^u(\Gamma^-) \cap W^s(\Gamma^+)$  et  $q : (-\infty, \infty) \rightarrow \Omega$  la solution de (1.7) vérifiant la condition initiale  $q(0) = \bar{q}$ . Donc les ensembles  $\alpha$  - limite et  $\omega$  - limite de  $\bar{q}$  coïncident avec

$\Gamma^-$  et  $\Gamma^+$ , et l'orbite  $\mathcal{Q} = \{x \in \Omega \mid x = q(t), t \in (-\infty, \infty)\}$  est appelée une orbite connectant  $\Gamma^-$  à  $\Gamma^+$ . L'équation  $\dot{z} = f'(q(t))z$  est vérifiée par  $\dot{q}$ , donc compte-tenu du fait que  $N$  est bornée, le théorème 2.1 implique l'existence d'entiers  $h^-, h^+ \in \{1, \dots, \frac{\bar{n}+1}{2}\}$  et d'un nombre  $\bar{t} > 0$  tels que

$$\forall t < -\bar{t}, \quad N(\dot{q}(t)) = 2h^- - 1 \quad \text{et} \quad \forall t > \bar{t}, \quad N(\dot{q}(t)) = 2h^+ - 1, \quad (3.3)$$

$$\text{avec} \quad h^- \geq h^+ \quad (3.4)$$

Dans une première sous-section sont rassemblées les propositions nécessaires à la démonstration du théorème 1.3. Démonstration qui suit dans une deuxième sous-section.

### 3.1. Propriétés des variétés instable et stable

Les deux premières assertions de la première proposition ont été démontrées dans [8]. Cette proposition joue un rôle primordial dans la preuve du théorème 1.3 de transversalité automatique.

**PROPOSITION 3.2** *Soient  $f \in L^+$ ,  $\Gamma^-$  et  $\Gamma^+$  deux éléments critiques hyperboliques de  $T_f$ ,  $\bar{q}$  un point de  $W^u(\gamma^-) \cap W^s(\Gamma^+)$  et  $q$  la trajectoire complète de  $\bar{q}$  telle que  $q(0) = \bar{q}$ . Soient  $h^-$  et  $h^+$  deux entiers tels que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} N(\dot{q}(t)) = 2h^- - 1$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(\dot{q}(t)) = 2h^+ - 1$ .*

1) *Si  $\Gamma^-$  est une orbite périodique alors*

$$N(\dot{\Gamma}^-(0)) = 2h^- - 1 \quad \text{et de plus,} \quad (3.5)$$

- *si  $h^- > h^+$ ,  $T_{\bar{q}}W^u(\Gamma^-)$  contient un sous-espace  $\tilde{\Sigma}_0^-$  tel que*

$$\dim \tilde{\Sigma}_0^- = 2h^- - 3 \quad \text{et} \quad \tilde{\Sigma}_0^- \subset \mathcal{K}_{h^- - 1}, \quad (3.6)$$

- *si  $h^- = h^+ = h < \frac{\bar{n}+1}{2}$ ,*

$$\dim T_{\bar{q}}W^u(\Gamma^-) = 2h - 1 \quad \text{et} \quad T_{\bar{q}}W^u(\Gamma^-) \subset \mathcal{K}_h, \quad (3.7)$$

- *si  $h^+ = h^- = \frac{\bar{n}+1}{2}$ ,*

$$T_{\bar{q}}W^u(\Gamma^-) = \mathbb{R}^n. \quad (3.8)$$

2) *Si  $\Gamma^+$  est une orbite périodique alors*

$$N(\dot{\Gamma}^+(0)) = 2h^+ - 1 \quad \text{et de plus,} \quad (3.9)$$

- si  $h^- > h^+$ ,  $T_{\bar{q}}W^s(\Gamma^+)$  contient un sous-espace  $\tilde{\Sigma}_0^+$  tel que

$$\dim \tilde{\Sigma}_0^+ = n - 2h^- + 3 \quad \text{et} \quad \tilde{\Sigma}_0^+ \subset \mathcal{K}^{h^- - 1}, \quad (3.10)$$

- si  $h^- = h^+ = h > 1$

$$\dim T_{\bar{q}}W^s(\Gamma^+) = n - 2h + 3 \quad \text{et} \quad T_{\bar{q}}W^s(\Gamma^+) \subset \mathcal{K}^{h-1}, \quad (3.11)$$

- ou si  $h^- = h^+ = 1$ ,

$$T_{\bar{q}}W^s(\Gamma^+) = \mathbb{R}^n. \quad (3.12)$$

- 3) Si  $\Gamma^-$  est un point d'équilibre alors l'indice de Morse  $i(\Gamma^-)$  satisfait à l'inégalité

$$i(\Gamma^-) \geq \sup(2h^- - 2, 1). \quad (3.13)$$

- 4) Si  $\Gamma^+$  est un point d'équilibre alors l'indice de Morse  $i(\Gamma^+)$  satisfait à l'inégalité

$$i(\Gamma^+) \leq 2h^+ - 2. \quad (3.14)$$

*Démonstration.* — Nous ne montrons que la troisième assertion, la preuve de la quatrième étant similaire. On suppose que  $\Gamma^-$  est un point d'équilibre que l'on note  $e$ . Par le lemme 2.4,  $e^{f'(e)}$  satisfait à la décomposition du théorème 2.3. Soient  $W_1, \dots, W_{\frac{\hat{n}+1}{2}}$  les espaces invariants de cette décomposition et  $\mu_1 > \mu_2 \geq \nu_2 > \dots > \mu_j \geq \nu_j > \dots > \mu_{\frac{\hat{n}+1}{2}} \geq \nu_{\frac{\hat{n}+1}{2}}$  les valeurs propre de  $e^{f'(e)}$ .

Soit  $k = \max\{i | \mu_i > 1\}$ ,  $k \geq 1$  car  $\mu_1 > 1$  ( $\dim W_1 = 1$  d'après (2.4) et  $T_e W^u(e) \neq \emptyset$ ) alors

$$T_e W^u(e) \subset W_1 \oplus \dots \oplus W_k \subset \mathcal{K}_k.$$

On applique le lemme 3.1 à la sous-variété  $W_{loc}^u(e)$  avec le cône  $\mathcal{K}_k$ . On en déduit qu'il existe  $t^-$  suffisamment grand tel que  $T_{q(-t^-)} W^u(e) \subset \mathcal{K}_k$  car,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} q(t) = e$ . Or

$$\dot{q}(-t^-) \in T_{q(-t^-)} W^u(e) \subset \mathcal{K}_k \quad \text{et} \quad N(\dot{q}(-t^-)) = 2h^- - 1$$

donc  $h^- \leq k$  et  $\mu_{h^-} > 1$ . D'où  $i(e) \geq \sup(2h^- - 2, 1)$ .

Dans la démonstration du théorème 1.3, nous utiliserons aussi des sous-espaces particuliers de  $T_{\bar{q}}W^u(e)$  et  $T_{\bar{q}}W^s(e)$ , où  $e$  est un équilibre hyperbolique.

PROPOSITION 3.3. — Soient  $f \in L^+$ ,  $e$  un point d'équilibre hyperbolique de  $T_f$ ,  $\bar{q}$  un point de  $\Omega$  et  $h$  un entier.

- (1) Si  $\bar{q} \in W^u(e)$  et  $i(e) \geq 2h - 1$ , alors il existe un sous-espace  $\tilde{\Sigma}_0^- \subset T_{\bar{q}}W^u(e)$  tel que  $\dim \tilde{\Sigma}_0^- = 2h - 1$  et  $\tilde{\Sigma}_0^- \subset \mathcal{K}_h$ .
- (2) Si  $\bar{q} \in W^s(e)$  et  $i(e) \leq 2h - 1$ , alors il existe un sous-espace  $\tilde{\Sigma}_0^+ \subset T_{\bar{q}}W^s(e)$  tel que  $\dim \tilde{\Sigma}_0^+ = n - 2h + 1$  et  $\tilde{\Sigma}_0^+ \subset \mathcal{K}^h$ .

*Démonstration.* — Nous montrons le premier point, le deuxième se montre de la même manière. Nous gardons les mêmes notations que dans la preuve précédente. Soit  $\Sigma^- = W_1 \oplus \cdots \oplus W_h$ . Les propriétés (2.4) et (2.5) du théorème 2.3 impliquent  $\dim \Sigma^- = 2h - 1$  et donc avec l'inégalité  $i(e) \geq 2h - 1$  entraînent que  $\Sigma^- \subset T_e W^u(e)$ . En outre les inégalités (2.8) donnent  $\Sigma^- \subset \mathcal{K}_h$ . Soit  $q$  la trajectoire de  $T_f$  vérifiant  $q(0) = \bar{q}$ . De même que dans la démonstration précédente, le lemme 3.1 entraîne l'existence d'un temps  $t^- > 0$  suffisamment grand tel que  $T_{q(-t^-)}W^u(e)$  contienne un sous-espace  $\tilde{\Sigma}^-$  tel que,  $\dim \tilde{\Sigma}^- = \dim \Sigma^-$  et  $\tilde{\Sigma}^- \subset \mathcal{K}_h$ .

De par le théorème de Cauchy Lipschitz  $S_{f'(q)}(0, -t^-)$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\tilde{\Sigma}_0^-$  l'image de  $\tilde{\Sigma}^-$  par  $S_{f'(q)}(0, -t^-)$ , alors  $\tilde{\Sigma}_0^- \subset T_{\bar{q}}W^u(e)$  et  $\dim \tilde{\Sigma}_0^- = \dim \tilde{\Sigma}^- = 2h - 1$ . De plus par (2.1),  $\tilde{\Sigma}_0^- \subset \mathcal{K}_h$ .

Le lemme suivant montre qu'il n'y a pas d'orbite homocline pour une orbite périodique de  $T_f$ .

LEMME 3.4 Soient  $f \in L^+$ ,  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$  deux orbites périodiques hyperboliques de  $T_f$ . S'il existe une trajectoire  $q$  reliant  $\gamma^-$  à  $\gamma^+$  alors

$$i(\gamma^-) > i(\gamma^+). \quad (3.15)$$

*Démonstration.* — Si  $\gamma^-$  ou  $\gamma^+$  est respectivement instable ou stable, l'assertion (3.15) est évidente. Supposons que l'on ne soit pas dans ce cas. Soient deux entiers  $h^-$  et  $h^+$  tels que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} N(\dot{q}(t)) = 2h^- - 1$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(\dot{q}(t)) = 2h^+ - 1$ . Deux cas se présentent, soit  $h^- = h^+ = h \in \{2, \dots, \frac{n-1}{2}\}$ , soit  $h^- > h^+$ . Dans le premier cas, on se sert des égalités (3.7) et (3.11) pour obtenir,  $i(\gamma^-) = \dim T_{q(0)}W^u(\gamma^-) - 1 = 2h - 2 > 2h - 3 = n - T_{q(0)}W^s(\gamma) = i(\gamma^+)$ . Soit respectivement  $\omega^-$  et  $\omega^+$  une période de  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$ . Dans le deuxième cas, on applique la décompositions du théorème 2.3 à  $S_{f'(\gamma^-)}(\omega^-, 0)$  et  $S_{f'(\gamma^+)}(\omega^+, 0)$ , puis les égalités (3.5) et (3.9) permettent obtenir les inégalités suivantes:

$$i(\gamma^-) = \dim T_{\gamma^-(0)}W^u(\gamma^-) - 1 \geq 2h^- - 3, \quad (3.16)$$

$$i(\gamma^+) = n - \dim T_{\gamma^+(0)}W^s(\gamma^+) \leq 2h^+ - 2 \leq 2h^- - 4. \quad (3.17)$$



### 3.2. Démonstration du théorème 1.3

Soient  $\Gamma^-$  et  $\Gamma^+$  deux éléments critiques hyperboliques. Si  $W^u(\Gamma^-) \cap W^s(\Gamma^+) = \emptyset$ , il n'y a rien à démontrer. Supposons donc qu'il existe  $q$  une trajectoire connectant  $\Gamma^-$  à  $\Gamma^+$ . Voici les différents cas à traiter pour prouver le théorème 1.3.

- (i)  $\Gamma^-$  et  $\Gamma^+$  sont deux orbites périodiques. Ce cas fait l'objet du théorème 1.2 démontré dans [8].
- (ii)  $\Gamma^-$  est un point d'équilibre et  $\Gamma^+$  une orbite périodique.
- (iii)  $\Gamma^-$  est une orbite périodique et  $\Gamma^+$  un point d'équilibre.
- (iv)  $\Gamma^-$  et  $\Gamma^+$  sont deux points d'équilibres tels que leur indices de Morse vérifient  $i(\Gamma^-) \geq 2h - 1 \geq i(\Gamma^+)$ , avec  $h \in \mathbb{N}$ .

Soient  $h^-$  et  $h^+$  deux entiers tels que  $\lim_{t \rightarrow -\infty} N(\dot{q}(t)) = 2h^- - 1$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(\dot{q}(t)) = 2h^+ - 1$ . Les cas (ii) avec  $h^- = 1$  puis (iii) avec  $h^+ = \frac{n+1}{2}$  sont une conséquence immédiate de la proposition 3.2. Nous donnons la démonstration dans le cas (iii) avec  $h^+ < h^-$ . Nous omettons la preuve dans les cas (ii) avec  $h^- > 1$  et (iii) avec  $h^- = h^+$  qui se prouvent de manière similaire. Nous terminerons avec la démonstration dans le cas (iv).

*Démonstration dans le (iii) avec  $h^+ < h^-$ .* — On note respectivement  $\gamma^-$  et  $e^+$ ,  $\Gamma^-$  et  $\Gamma^+$ . La proposition 3.2 dit que  $T_{\bar{q}}W^u(\gamma^-)$  contient un sous-espace  $\tilde{\Sigma}_0^-$  de dimension  $2h^- - 3$  inclus dans  $\mathcal{K}_{h^- - 1}$ . Cette proposition entraîne aussi que  $i(e^+) \leq 2h^+ - 2$  et comme  $h^+ \leq h^- + 1$ , on obtient  $i(e^+) \leq 2h^- + 1$ . On déduit alors de la proposition 3.3, l'existence d'un sous-espace  $\tilde{\Sigma}_0^+$  de  $T_{\bar{q}}W^s(e^+)$  de dimension  $n - 2h^- + 3$  inclus dans  $\mathcal{K}^{h^- - 1}$ . Or,

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_0^- \cap \tilde{\Sigma}_0^+ &\subset \mathcal{K}_{h^- - 1} \cap \mathcal{K}^{h^- - 1} = \{0\} \quad \text{et} \quad \dim \tilde{\Sigma}_0^- + \dim \tilde{\Sigma}_0^+ = n, \quad (3.18) \\ \text{et donc} \quad T_{\bar{q}}W^u(\gamma^-) + T_{\bar{q}}W^s(e^+) &\supset \tilde{\Sigma}_0^- \oplus \tilde{\Sigma}_0^+ = \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

d'où  $W^u(\gamma^-) \pitchfork W^s(e^+)$  dans ce cas aussi.

*Démonstration dans le cas (iv).* — On note respectivement  $e^-$  et  $e^+$ ,  $\Gamma^-$  et  $\Gamma^+$ . L'inégalité  $i(e^-) \geq 2h - 1$  et la proposition 3.3 donnent l'existence d'un sous-espace  $\tilde{\Sigma}_0^-$  de  $T_{\bar{q}}W^u(e^-)$  inclus dans  $\mathcal{K}_h$ , de dimension  $2h - 1$ . De même  $i(e^+) \leq 2h - 1$  donnent l'existence d'un sous-espace  $\tilde{\Sigma}_0^+$  de  $T_{\bar{q}}W^s(e^+)$  inclus dans  $\mathcal{K}^h$ , de dimension  $n - 2h + 1$ . Alors

$$\begin{aligned} T_{\bar{q}}W^u(e^-) + T_{\bar{q}}W^s(e^+) &\supset \tilde{\Sigma}_0^- \oplus \tilde{\Sigma}_0^+ = \mathbb{R}^n \quad (3.19) \\ \text{puisque} \quad \tilde{\Sigma}_0^- \cap \tilde{\Sigma}_0^+ &\subset \mathcal{K}_h \cap \mathcal{K}^h = \{0\} \quad \text{et} \quad \dim \tilde{\Sigma}_0^- + \dim \tilde{\Sigma}_0^+ = n. \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure que  $W^u(e^-) \pitchfork W^s(e^+)$ , et ainsi de terminer la démonstration du théorème 1.3.

*Remarque.* — Signalons que si  $h^- > h^+$  la propositions 3.2 implique  $i(e^-) \geq 2h^- - 3$  et  $2h^+ - 1 \geq i(e^+)$ , et donc  $i(e^-) \geq 2h^+ - 1 \geq i(e^+)$ , donc l'hypothèse (b) du théorème 1.3 est automatiquement vérifiée dans ce cas là.

#### 4. Généricité de l'hyperbolicité des éléments critiques

Dans cette partie on montre le théorème 1.4. Pour cela on montre d'abord que les points d'équilibre sont génériquement simples et ensuite qu'il sont génériquement hyperboliques. Dans un deuxième temps on démontre que les solutions périodiques sont génériquement simples. Ce qui par le lemme 2.6 entraîne que les orbites périodiques sont génériquement hyperboliques.

Certaines démonstrations de densité utilisent le théorème de Sard-Smale. Soient  $M$  et  $M'$  deux variétés de Banach différentiables et soit  $f : M \rightarrow M'$  une application différentiable. Un point  $y \in M'$  est une valeur régulière de  $f$ , si pour tout  $x \in f^{-1}(\{y\})$ , la différentielle  $f'(x) : T_x M \rightarrow T_x M'$  est surjective.

**THÉORÈME 4.1** (Sard-Smale). — *Soient  $r \geq 1$ ,  $X, Z$  deux variétés  $C^r$  de dimension finie et  $Y$  une variété de Banach de classe  $C^r$ . Soient  $U \subset X$  et  $V \subset Y$  deux ouverts,  $\Phi : U \times V \rightarrow Z$  une application de classe  $C^r$  et  $z$  un point de  $Z$ . Supposons que:*

- (i)  $r > \dim(X) - \dim(Z)$ ,
- (ii)  $\forall (x, y) \in \Phi^{-1}(\{z\})$ ,  $D\Phi(x, y)$  est surjective,
- (iii)  $Y$  est séparable.

Alors  $\Theta = \{y \in V \mid z \text{ est une valeur régulière de } \Phi(., y)\}$  est un sous-ensemble générique de  $V$ .

Dans ce théorème l'espace  $Y$  joue le rôle d'un espace de paramètre. Dans la suite pour un système dynamique indexé par  $y$ , nous traduirons les propriétés de simplicité d'un élément critique ou de transversalité, par la régularité de 0 pour une application  $\Phi(., y)$ . Nous appliquerons ce théorème en prenant  $V$  un voisinage de zéro dans  $Y$ , dans le but obtenir une suite de paramètre  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  convergeant vers zéro tels que 0 soit une valeur régulière de  $\Phi(., y_k)$ . Cela nous permettra ensuite de construire une perturbations aussi petite que voulu d'un système dynamique pour qu'il présente les propriétés souhaités.

#### 4.1. Points d'équilibre génériquement hyperboliques

DÉFINITION 4.2. — *On dit qu'un point d'équilibre  $e$  est simple si zéro n'est pas valeur propre de  $f'(e)$ .*

Nous définissons les ensembles suivants pour  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,

$$O_m^{simple} = \{f \in L^+ \mid \text{tout point d'équilibre } e \in K_m \text{ de } T_f \text{ est simple}\}. \quad (4.1)$$

PROPOSITION 4.3. — *Pour tout  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $O_m^{simple}$  est un ouvert dense de  $L^+$ . Donc  $O^{simple} = \bigcap_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} O_m^{simple}$  est un ensemble générique de  $L^+$ .*

*Démonstration.* — L'ensemble des applications  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  telles que tous les points d'équilibre de (1.1) dans le compact  $K_m$  soient simples, est ouvert (voir [16] et [18]). Donc pour la topologie induite sur  $L^+$ ,  $O_m^{simple}$  est ouvert. Dans les deux références précédemment citées, le resultat est obtenu grâce à un théorème de transversalité de Thom. Une autre méthode bien adaptée ici est d'utiliser des suites comme dans la preuve de la proposition 5.3 (ou dans le cas de l'équation de réaction-diffusion dans [4] et [12]).

Nous montrons directement la densité de  $O^{simple}$ . Soit  $f \in L^+$  et  $\Phi : \Omega \times ]-1, 1[^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par  $\Phi(x, \lambda) = f(x) + \lambda$ . On applique le théorème de Sard-Smale (théorème 4.1) à  $\Phi$  avec  $z = 0$ . Les hypothèses (i) et (iii) sont vérifiées. Montrons que l'hypothèse (ii) est satisfaite. Puisque

$$\forall (x, \lambda) \in \Omega \times ]-1, 1[^n, \quad \forall (u, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad D\Phi(x, \lambda)(u, \mu) = f'(x)u + \mu,$$

la surjectivité de  $D\Phi(x, \lambda)$  sur  $\Omega \times ]-1, 1[^n$  est évidente. Alors l'ensemble,

$$\begin{aligned} \Theta &= \{\lambda \in ]-1, 1[^n \mid 0 \text{ est une valeur régulière de } \Phi(\cdot, \lambda)\} \\ &= \{\lambda \in ]-1, 1[^n \mid \text{tous les points d'équilibre de } T_{\Phi(\cdot, \lambda)} \text{ sont simples}\}, \end{aligned}$$

est dense. Il existe alors une suite  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\Theta$  tendant vers zéro. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $D_x \Phi(\cdot, \lambda_k) \in \mathcal{L}^+$  sur  $\Omega$ , donc  $\Phi(\cdot, \lambda_k) \in O^{simple}$ . La suite  $(\Phi(\cdot, \lambda_k))_{k \in \mathbb{N}}$  tend vers  $f$ , car pour tout  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $p_m(\Phi(\cdot, \lambda_k) - f) = \|\lambda_k\|$ . D'où le résultat.

De même qu'un peu plus haut, pour  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , on définit les ensembles,

$$O_m^h = \{f \in L^+ \mid \text{tout point d'équilibre } e \in K_m \text{ de } T_f \text{ est hyperbolique}\}. \quad (4.2)$$

PROPOSITION 4.4. — *Pour tout  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $O_m^h$  est un ouvert dense de  $L^+$ . Donc  $O^h = \bigcap_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} O_m^h$  est un ensemble générique de  $L^+$ .*

*Démonstration.* — Comme dans la précédente preuve, l'ensemble des applications  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  telles que, tous les points d'équilibre de (1.1) dans le compact  $K_m$  soient hyperboliques, est ouvert (voir [16] et [18]). Donc pour la topologie induite sur  $L^+$ ,  $O_m^h$  est ouvert.

Soient  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $f \in O_{m+1}^{simple}$  et  $e_1, \dots, e_k$  les points d'équilibre de  $T_f$  dans  $K_m$ . Ils sont en nombre fini car des points d'équilibre simples sont isolés. Il existe  $\epsilon \in ]0, 1[$  tel que  $T_f$  n'ait pas de point d'équilibre dans  $K_{\epsilon+m} \setminus K_m$ . Supposons que  $e_1$  ne soit pas hyperbolique. On introduit l'application

$$\Phi(\alpha, x) = f(x) + \alpha(x - e_1)$$

définie sur  $\mathbb{R} \times \Omega$ . Pour tout  $\alpha$ ,  $\Phi(\alpha, e_1) = 0$  et  $D_x \Phi(\alpha, x) = f'(x) + \alpha Id$ . Donc  $\Phi(\alpha, \cdot) \in L^+$ , et pour  $\alpha$  petit,  $e_1$  est un point d'équilibre hyperbolique de  $T_{\Phi(\alpha, \cdot)}$ . De plus pour tout  $l \in \{2, \dots, k\}$ ,  $e_l$  est un point d'équilibre simple de  $T_f$ , donc  $D_x \Phi(0, e_l)$  est inversible. Grâce au théorème des fonctions implicites, il suffit que  $\alpha$  soit suffisamment petit pour que pour tout  $l \in \{2, \dots, k\}$ ,  $T_{\Phi(\alpha, \cdot)}$  ait un unique point d'équilibre dans un voisinage de  $e_l$ , qui est simple si  $e_l$  est simple et hyperbolique si  $e_l$  est hyperbolique, et aucun autre point d'équilibre dans  $K_{\epsilon/2+m}$ . On perturbe ainsi  $f$  successivement pour transformer les points d'équilibre simples en points d'équilibre proche hyperboliques tout en restant dans  $L^+$ . En effet nous ne perturbons que la diagonale dans différentielle.

## 4.2. Orbites périodiques génériquement simples

DÉFINITION 4.5. — Une solution périodique  $\gamma$  de  $T_f$  de période  $\omega$  est dite simple si 1 est valeur propre simple de  $S_{f(\gamma)}(\omega, 0)$ .

Montrons maintenant que les solutions périodiques sont génériquement simples, et donc, par le lemme 2.6 qu'elles sont génériquement hyperboliques. Pour  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , définissons les ensembles,

$$O_m = \{f \in O_m^h, \text{ toutes les solutions périodiques } \gamma \text{ de } T_f \text{ dans } K_m, \text{ de période } \omega \in (0, m] \text{ sont simples}\}. \quad (4.3)$$

PROPOSITION 4.6. — Pour tout  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $O_m$  est un ouvert dense de  $L^+$ . Et donc  $O = \bigcap_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} O_m$  est un ensemble générique de  $L^+$ .

Cette proposition termine la démonstration du théorème 1.4. L'ensemble  $O_m$  est ouvert puisque, l'ensemble des applications  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  telles que toutes les solutions périodiques de (1.1) dans le compact  $K_m$  de période inférieure à  $m$  soient simples, est ouvert (voir [16] et [18] ainsi que [12] pour une preuve utilisant des suites d'applications pour l'équation de réaction-diffusion). La démonstration de la densité de  $O_m$  consiste à appliquer le

théorème de Sard-Smale (théorème 4.1) à une fonctionnelle de la forme:

$$\begin{aligned} \Phi : U \times V &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ ((t, x), g) &\mapsto T_{f+g}(t)x - x, \end{aligned} \quad (4.4)$$

où  $f \in O_{m+2}^h$ ,  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R} \times \Omega$  et  $V$  un voisinage ouvert de 0 dans un espace de Banach  $Y$  qu'il reste à déterminer. En effet si 0 est une valeur régulière de  $\Phi(\cdot, g)$  et  $\gamma$  une orbite périodique de  $T_{f+g}$  de période  $\omega$  telles que  $(\omega, \gamma(0)) \in U$ , alors

$$\begin{aligned} D_{(t,x)}\Phi(\omega, \gamma(0)) : \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\tau, u) &\mapsto \tau \partial_t \gamma(0) + (S_{(f+g)'(\gamma)}(\omega, 0) - Id)u \end{aligned} \quad (4.5)$$

est surjective. Donc le rang de  $S_{(f+g)'(\gamma)}(\omega, 0) - Id$  est au moins  $n - 1$ , et on en déduit que  $\dim(\text{Ker}(S_{(f+g)'(\gamma)}(\omega, 0) - Id)) = 1$ , c'est-à-dire que  $\gamma$  est simple. Pour vérifier l'hypothèse (i) du théorème de Sard, il suffit de choisir  $f + g$  de classe  $C^2$ .

On voudrait trouver un ensemble  $Y$  tel que

- (a)  $Y$  soit un espace de Banach,
- (b) il existe  $V$  un voisinage de 0 dans  $Y$  tel que pour tout  $g \in V$ ,  $f + g \in L^+$ ,
- (c)  $D_g\Phi((t, x), g) : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  soit surjective si  $((t, x), g) \in \Phi^{-1}(\{0\})$ .

Dans la preuve du lemme 4.3, on a choisi pour  $Y$  l'ensemble des constantes, mais ici cet espace n'est pas assez grand pour vérifier (c). C'est pourquoi nous allons prendre pour  $Y$  un espace de fonctions. On remarque qu'une application  $f \in L^+$  appartient à  $O_m$  seulement en fonction de ses valeurs sur  $K_m$ . C'est pourquoi nous allons prendre pour  $Y$  un sous-espace fermé de  $C^2(K_{m+3})$  (ainsi (a) sera vérifiée) et nous restreindrons le système dynamique à  $K_{m+2}$ . On ne peut satisfaire (b) en l'état, mais on va expliciter des conditions telles pour que tout  $g \in V$ ,  $D_x(f + g)$  vérifie (1.2), (1.3) et (1.4) sur  $K_{m+3}$ , puis étendre  $g$  à  $\Omega$  de telle sorte que  $f + g \in L^+$ . Ces conditions portent sur les zéros de la différentielle de  $g$ . En effet si, pour  $i \neq j$ ,  $\partial_i f_j(x) = 0$ , il est nécessaire que  $\partial_i(f + \lambda g)_j(x) \geq 0$  pour tout  $\lambda$  dans un voisinage de 0 et donc que  $\partial_i g_j(x) = 0$ .

Dans le paragraphe suivant pour une fonction  $f \in L^+$  et un compact  $K \subset \Omega$  fixés, on commence par définir les sous-ensembles de  $\Omega$  où les dérivés partielles des perturbations de  $f$  devront s'annuler. Puis nous introduisons le sous-espace de Banach  $Y_C(K)$  de  $C^2(K, \mathbb{R}^n)$  regroupant l'ensemble des perturbations de  $f$  sur  $K$ . Pour finir, nous énonçons un premier lemme,

qui montre que  $Y_C(K)$  vérifie la condition (c) et un second lemme pour prolonger les perturbations définies sur  $K$  à  $\Omega$ . Puisque ces deux lemmes sont relativement techniques, nous donnerons leur démonstrations en annexe. Le dernier paragraphe de cette section détaille la preuve de la proposition 4.6.

### 4.3. Espaces de fonctions admissibles

On rappelle que  $\mathcal{B} = (\xi_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$  est une base fixée de  $\mathbb{R}^n$  et que pour  $l$  vecteurs  $a_1, \dots, a_l$ ,  $\text{span}\{a_1, \dots, a_l\}$  désigne l'ensemble des combinaisons linéaires  $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_l a_l$ .

**DÉFINITION 4.7.** — *On dit qu'une collection de fermés  $\mathcal{C} = (F_j, G_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$  est admissible si elle est formée de  $2n$  fermés de  $\Omega$ , tels que, pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,*

- (i)  $F_j \cap G_j = \emptyset$ ,
- (ii)  $F_j$  et  $G_j$  sont l'adhérence de leurs intérieurs,
- (iii)  $\forall x \in \Omega, \forall y \in \text{span}\{\xi_i, i \notin \{j-1, j, j+1\}\}$ , si  $x + y \in \Omega$ , alors

$$\begin{cases} x \in F_j \Rightarrow x + y \in F_j \\ x \in G_j \Rightarrow x + y \in G_j \end{cases}$$

Soit  $f \in L^+$ , une collection admissible de fermés  $\mathcal{C} = (F_j, G_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$  est dite compatible avec  $f$ , si de plus, pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\{x \in \Omega \mid \partial_{x_{j-1}} f_j(x) = 0\} \subset F_j \quad \text{et} \quad \{x \in \Omega \mid \partial_{x_{j+1}} f_j(x) = 0\} \subset G_j$$

Soit  $\mathcal{C}$  une collection admissible de fermés. Pour  $j \in \{1, \dots, n\}$  on note  $H_j$  les ensembles extrémaux de  $K$ :

$$H_j = \{x \in \partial K \mid \forall y \in K, x_j \leq y_j \quad \text{ou} \quad \forall y \in K, x_j \geq y_j\}.$$

**DÉFINITION 4.8.** — *Soit  $K$  un compact convexe non vide de  $\Omega$  et  $\mathcal{C}$  une collection admissible de fermés. On dit que  $g = (g_1, \dots, g_n) \in C^2(K, \mathbb{R}^n)$  est une application admissible pour  $\mathcal{C}$ , si pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,*

- (1)  $g_j$  ne dépend que de  $x_{j-1}$ ,  $x_j$  et  $x_{j+1}$ ,
- (2)  $\partial_{x_{j-1}} g_j = 0$  sur  $F_j$  et  $\partial_{x_{j+1}} g_j = 0$  sur  $G_j$ ,
- (3)  $\partial_{x_{j-1}x_{j-1}}^2 g_j = \partial_{x_{j-1}x_j}^2 g_j = \partial_{x_{j-1}x_{j+1}}^2 g_j = 0$  sur  $F_j$ ,
- (4)  $\partial_{x_{j+1}x_{j-1}}^2 g_j = \partial_{x_{j+1}x_j}^2 g_j = \partial_{x_{j+1}x_{j+1}}^2 g_j = 0$  sur  $G_j$ ,

(5) pour  $k = 0, 1, 2, g^{(k)} = 0$  sur  $H_j$ .

On note  $Y_{\mathcal{C}}(K)$  le sous-ensemble de  $C^2(K, \mathbb{R}^n)$  des applications admissibles pour  $\mathcal{C}$ .

L'ensemble  $Y_{\mathcal{C}}(K)$  est non vide, il contient les applications constantes et les applications  $g = (g_1, \dots, g_n) \in C^2(K, \mathbb{R}^n)$  telles que, pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $g_j$  soit une fonction plateau valant 0 sur  $F_j$  et 1 sur  $G_j$ . Muni de la norme  $\|g\|_K = \sum_{k=0}^2 \sup_{x \in K} \|g^{(k)}(x)\|$ ,  $Y_{\mathcal{C}}(K)$  est un espace de Banach. Si  $\mathcal{C}$  est compatible avec  $f \in L^+$ , et

$$\|g\|_K < \inf_{j \in \{1, \dots, n\}} \left\{ \inf_{K \setminus F_j} \partial_{x_{j-1}} f_j, \inf_{K \setminus G_j} \partial_{x_{j+1}} f_j \right\}$$

alors les conditions (1) et (2) de la définition 4.8 suffisent pour que  $D_x(f+g)$  vérifie (1.2), (1.3) et (1.4) sur  $K$ . Les conditions (3) à (5) sont utilisées pour prolonger les applications admissibles. Nous allons appliquer le lemme suivant pour démontrer l'hypothèse de surjectivité dans le théorème de Sard-Smale.

LEMME 4.9. — Soient  $\mathcal{C}$  une collection admissible de fermés et  $K$  un compact convexe non vide de  $\Omega$ . Soient  $f \in C^1(K, \mathbb{R}^n)$ ,  $\gamma$  une solution de (1.7) et  $\omega$  un réel positif tels que,

- (i)  $\gamma(]0, \omega[) \subset K$ ,
- (ii) il existe  $t_0 \in ]0, \omega[$  tel que  $\dot{\gamma}(t_0) \in \mathcal{N}$  et pour tout  $t \in [0, \omega] \setminus \{t_0\}$ ,  $\gamma(t) - \gamma(t_0)$  n'a pas deux coordonnées consécutives (modulo  $n$ ) nulles.

Pour tout  $\rho > 0$  suffisamment petit il existe  $n$  applications  $(\psi^j)_{1 \leq j \leq n} \in Y_{\mathcal{C}}(K)$  à support dans  $\bigcup_{1 \leq j \leq n} \{x \in K \mid \max\{|x_j - \gamma(t_0)_j|, |x_{j+1} - \gamma(t_0)_{j+1}|\} \leq \rho\}$ , telles que

$$\int_0^\omega S_{f'(\gamma)}(\omega, s) \psi^j(\gamma(s)) ds, \quad j = 1, \dots, n$$

engendrent  $\mathbb{R}^n$ .

Le lemme suivant nous permettra de prolonger des applications adéquates à  $\Omega$  en des applications de  $L^+$ .

LEMME 4.10. — Soient  $f \in L^+$ ,  $\mathcal{C} = (F_j, G_j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$  une collection de fermés compatible avec  $f$  et  $K$  un compact convexe d'intérieur non vide de  $\Omega$ . Alors il existe des constantes  $\alpha > 0$  et  $C > 0$  telles que, pour tout  $g \in Y_{\mathcal{C}}(K)$  vérifiant  $\|g\|_K < \alpha$ , il existe  $h \in C^1(\Omega, E)$  ayant les propriétés suivantes:

- $h|_K = g$ ,
- $f + h \in L^+$ ,
- $\sup_{x \in \Omega} \sum_{k=0}^1 \|h^{(k)}(x)\| \leq C \|g\|_K$ .

#### 4.4. Démonstration de la proposition 4.6.

Soient  $W$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  inclus dans  $\Omega$  et  $f \in C^1(W, \mathbb{R}^n)$ . On introduit  $T_f^W$  le système dynamique local défini par  $T_f^W(t)x = y(t)$  où  $y$  est la solution de l'équation différentielle  $\dot{y} = f(y)$  sur  $W$ , avec la condition initiale  $y(0) = x$ . On notera  $\Delta_f^W$  l'ensemble

$$\{(t, x) \in \mathbb{R} \times W \mid y(t) \text{ est défini et } y([0, t]) \subset W \text{ si } t \geq 0 \text{ ou } y([t, 0]) \subset W \text{ si } t \leq 0\}.$$

Soit  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  fixé. L'ensemble  $O_{m+2}^h \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$  est dense dans  $L^+$ . Donc pour montrer que  $O_m$  est dense, il suffit de montrer que pour  $f \in O_{m+2}^h \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$  il existe une suite d'éléments de  $O_m$  tendant vers  $f$ . Soient  $f \in O_{m+2}^h \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ,  $U$  l'ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  défini comme suit,

$$U = \{(t, x) \in ]0, m+1[ \times K_{m+1} \mid T_f(t)x \in K_{m+1}\}.$$

Soit  $\mathcal{C}$  une collection de fermés compatible avec  $f$ . On applique le lemme 4.10 à  $f$ ,  $\mathcal{C}$  et  $K_{m+2}$ , ce qui nous définit une constante  $\alpha > 0$ . De même il existe  $\alpha' \in ]0, \alpha[$  tel que si  $\|g\|_{K_{m+2}} < \alpha'$  alors tous les points d'équilibre de  $T_{f+g}^{K_{m+2}}$  sur  $K_{m+1}$  sont hyperboliques. Soit  $V$  un voisinage ouvert de 0 de  $Y_{\mathcal{C}}(K_{m+2})$ , tel que pour  $g \in V$ ,  $\|g\|_{K_{m+2}} < \alpha'$  et  $T_{f+g}^{K_{m+2}}(\bar{U}) \subset K_{m+2}$ . Et enfin soit l'application de classe  $C^2$

$$\begin{aligned} \Phi : U \times V &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ ((t, x), g) &\mapsto T_{f+g}^{K_{m+2}}(t)x - x \end{aligned}$$

à laquelle on souhaite appliquer le théorème de Sard-Smale avec  $z = 0$ .

Les hypothèses (i) et (iii) du théorème de Sard-Smale sont vérifiées. Montrons que l'hypothèse (ii) est aussi satisfaite. Soit  $((\omega, x_0), g) \in \Phi^{-1}(\{0\})$ , démontrons que  $D\Phi((\omega, x_0), g)$  est surjective. Deux cas se présentent, ou bien  $x_0$  est un point d'équilibre de  $T_{f+g}^{K_{m+2}}$ , ou bien la trajectoire non constante  $\gamma$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\gamma(t) = T_{f+g}^{K_{m+2}}(t)x_0$ , est une solution périodique de  $T_{f+g}^{K_{m+2}}$  de période  $\omega$ .

Supposons que  $x_0$  soit un point d'équilibre de  $T_{f+g}^{K_{m+2}}$ , alors

$$D\Phi((\omega, x_0), g)((\tau, u), \psi) = (e^{\omega(f+g)'(x_0)} - Id)u + D_g\Phi((\omega, x_0), g)\psi.$$



Or  $x_0 \in K_{m+1}$  est un point d'équilibre hyperbolique, d'où  $e^{\omega(f+g)'(x_0)} - Id$  est surjective et  $D\Phi((\omega, x_0), g)$  aussi.

Supposons maintenant que  $x_0$  ne soit pas un point d'équilibre de  $T_{f+g}^{K_{m+2}}$ . Il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\omega_0 = \omega/n_0$  soit la plus petite période de  $\gamma$ . Alors,

$$D\Phi((\omega, x_0), g)((\tau, u), \psi) = \tau \partial_t \gamma(0) + (P_{f+g, \gamma}(\omega, 0) - Id)u + \Sigma_{f+g, \gamma}(\omega)\psi,$$

où  $\Sigma_{f+g, \gamma}(t) = w(t)$  est la solution sur  $[0, T]$  de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= (f+g)'(\gamma(t))w(t) + \psi(\gamma(t)), \\ w(0) &= 0. \end{aligned}$$

On remarque que

$$w(t) = \int_0^t S_{(f+g)'(\gamma)}(t, s)\psi(\gamma(s))ds$$

pour  $t \in [0, \omega]$ . Donc

$$\begin{aligned} \Sigma_{f+g, \gamma}(\omega)\psi &= \int_0^\omega S_{(f+g)'(\gamma)}(\omega, s)\psi(\gamma(s))ds \\ &= \sum_{k=1}^{n_0} \int_{(k-1)\omega_0}^{k\omega_0} S_{(f+g)'(\gamma)}(\omega, s)\psi(\gamma(s))ds \\ &= \sum_{k=1}^{n_0} S_{(f+g)'(\gamma)}(\omega, k\omega_0) \int_{(k-1)\omega_0}^{k\omega_0} S(k\omega_0, s)\psi(\gamma(s))ds \\ &= \sum_{k=1}^{n_0} (S_{(f+g)'(\gamma)}(\omega_0, 0))^{n_0-k} \int_{(k-1)\omega_0}^{k\omega_0} S(k\omega_0, s)\psi(\gamma(s))ds \\ &= \left( \sum_{k=0}^{n_0-1} (S_{(f+g)'(\gamma)}(\omega_0, 0))^k \right) \int_0^{\omega_0} S(\omega_0, s)\psi(\gamma(s))ds. \end{aligned}$$

Soient  $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq n}$  les valeurs propres de  $S_{(f+g)'(\gamma)}(\omega_0, 0)$ , alors les valeurs propres de  $P = \sum_{k=0}^{n_0-1} (S_{(f+g)'(\gamma)}(\omega_0, 0))^k$  sont  $(\sum_{k=0}^{n_0-1} \lambda_j^k)_{1 \leq j \leq n}$ . Ainsi  $P$  est inversible car d'après le lemme 2.6,  $S_{(f+g)'(\gamma)}(\omega_0, 0)$  ne peut pas avoir de racine  $n_0$ ième de l'unité différente de 1 dans son spectre. Donc  $D\Phi((\omega, x_0), g)$  est surjective, si l'application

$$\Pi : \psi \in Y_{\mathcal{C}}(K_{m+2}) \rightarrow \int_0^{\omega_0} S_{(f+g)'(\gamma)}(\omega_0, s)\psi(\gamma(s))ds \in \mathbb{R}^n$$

est surjective.

Pour tout  $\tau \in ]0, \omega_0[$ ,  $\gamma$  et  $\gamma(\cdot + \tau)$  sont deux orbites de  $T_{f+g}^{K_{m+2}}$ . En utilisant le lemme 2.2 ( $K_{m+2}$  est un ouvert convexe de  $E$ ), on voit que  $\gamma - \gamma(\cdot + \tau)$  ne peut jamais avoir deux coordonnées consécutives nulles. En effet si c'était le cas pour  $s \in [0, \omega_0]$ , on aurait  $\gamma(s) - \gamma(s + \tau) \notin \mathcal{N}$  et  $\gamma(s) - \gamma(s + \tau) \neq 0$  (sinon  $\omega_0$  ne serait pas la plus petite période). Et donc  $N(\gamma - \gamma(\cdot + \tau))$  ne serait pas périodique ce qui est absurde. En appliquant le théorème 2.1, pour les mêmes raisons que ci-dessus,  $\dot{\gamma}(s) \in \mathcal{N}$  pour  $s \in [0, \omega_0]$ . On peut donc appliquer le lemme 4.9 pour obtenir la surjectivité de  $\Pi$ . L'hypothèse (ii) du théorème de Sard-Smale est ainsi vérifié.

Le théorème de Sard-Smale implique donc que l'ensemble suivant est dense dans  $V$ .

$$\begin{aligned} \Theta &= \{g \in V, 0 \text{ est une valeur régulière de } \Phi(\cdot, g)\} \\ &\subset \{g \in V, \text{ toute orbite périodique de } T_{f+g}^{K_{m+2}} \\ &\quad \text{dans } K_m \text{ de période } T \leq m \text{ est simple}\} \end{aligned}$$

Il existe donc une suite  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\Theta$  tel que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\|_{K_{m+2}} = 0$ . D'après le lemme 4.10, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  il existe  $h_k \in C^1(\Omega, E)$  tel que  $h_k|_{K_{m+2}} = g_k$ ,  $f + h_k \in L^+$  et  $\sup_{x \in \Omega} \sum_{k=0}^1 \|h_k^{(k)}\| \leq C \|g_k\|_{K_{m+2}}$ . D'où la suite  $(f + h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $O_m$  converge vers  $f$  dans  $L^+$ .

## 5. Généricité de la propriétés de Kupka-Smale

Dans la partie précédente on a démontré le théorème 1.4 qui donne la généricité des éléments critiques hyperboliques. On a vu dans le théorème 1.3 que la transversalité est automatique, si l'une des variétés stable ou instable est associée à une orbite périodique hyperbolique. Il reste donc à étudier le cas d'orbites  $q$  joignant deux points d'équilibre hyperboliques  $e^-$  et  $e^+$ , qui ne sont pas forcément distincts. S'il existe  $t$  et  $t'$  tels que  $N(\dot{q}(t)) > N(\dot{q}(t'))$ , la remarque à la fin de la démonstration du théorème 1.3 implique que  $W^u(e^-) \pitchfork W^s(e^+)$ . On suppose maintenant que  $N(\dot{q})$  est constant égal à  $h$ . Si  $h = 1$ , la proposition 3.2 implique que l'indice de Morse  $i(e^+)$  est nul, donc  $W^u(e^-) \pitchfork W^s(e^+)$ . Si  $h > 1$  cette proposition implique  $i(e^-) \geq 2h - 2$  et  $i(e^+) \leq 2h - 2$ . Si l'une de ces inégalités est stricte alors l'hypothèse (b) du théorème 1.3 est vérifié et donc  $W^u(e^-) \pitchfork W^s(e^+)$ . Il reste donc à étudier le cas de deux points d'équilibre hyperboliques tels que leur indices de Morse soient égaux et pairs. Dans ce cas, les variétés stable et instable sont transverses si et seulement si elles ne s'intersectent pas. En effet si elles se coupaient transversalement en  $x$ , la dimension de  $T_x W^u(e^-) \cap T_x W^s(e^+)$  serait nulle, ce qui est absurde car cet espace contient la dérivée au point  $x$  (non nulle) de la trajectoire passant par  $x$  et reliant  $e^-$  à  $e^+$ .

Nous allons montrer que les variétés stables et instables de deux points d'équilibres hyperboliques d'indices égaux et pairs sont génériquement transverses. Dans ce but, nous allons montrer deux lemmes qui permettent de prouver la proposition 5.3 d'où découlera le théorème 1.5.

LEMME 5.1. — Soient  $f \in L^+$  et  $q$  une orbite de  $T_f$  reliant deux points d'équilibre hyperboliques  $e^-$  et  $e^+$  d'indice de Morse égal à  $2h > 0$ , alors pour tous points distincts  $x$  et  $y$  appartenant à l'orbite  $\{q(t) \mid -\infty \leq t \leq \infty\}$ ,

$$x - y \in \mathcal{N} \quad \text{et} \quad N(x - y) = 2h + 1.$$

En outre pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\dot{q}(t) \in \mathcal{N}$  et  $N(\dot{q}(t)) = 2h + 1$ .

*Démonstration.* — Soit  $x$  et  $y$  deux points différents de l'orbite  $q$ , il existe  $(s, \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$  tel que  $x = q(s + \tau)$  et  $y = q(s)$  (quitte à intervertir  $x$  et  $y$ ). Soit l'application

$$z : t \in \mathbb{R} \rightarrow q(s + t + \tau) - q(s + t).$$

D'après le lemme 2.2,  $N(z)$  est décroissante. Donc il existe  $(h^-, h^+) \in \{1, \dots, \frac{\bar{n}+1}{2}\}^2$  et  $T > 0$  tel que pour tout  $t > T$ ,  $N(z(t)) = 2h^+ + 1$  et  $N(z(-t)) = 2h^- + 1$ . Soit la suite  $u_n = \frac{z(n\tau)}{\|z(n\tau)\|}$ , on peut en extraire une sous suite convergente vers un vecteur  $u$ . Or  $u \in T_{e^+}W^s(e^+)$  donc  $N(u) \geq 2h + 1$  et par continuité de  $N$ ,  $h^+ \geq h$ . On fait de même avec la suite  $v_n = \frac{z(-n\tau)}{\|z(-n\tau)\|}$  pour obtenir  $h^- \leq h$ , d'où  $2h + 1 \geq 2h^- + 1 \geq N(z(t)) \geq 2h^+ + 1 \geq 2h + 1$ . Donc  $N(x - y) = 2h + 1$  et de plus  $x - y \in \mathcal{N}$  car sinon  $N(z)$  serait strictement décroissante en 0.

Si  $e^- \neq e^+$  supposons maintenant  $x = e^+$  et  $y = e^-$ . Par le lemme 2.2, on sait déjà que  $e^+ - e^- \in \mathcal{N}$ . De plus par continuité de  $N$ , comme  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(q(t) - q(-t)) = 2h + 1$ ,  $N(e^+ - e^-) = 2h + 1$ .

Les autres cas sont semblables au cas suivant,  $x = e^+$  et  $y = q(s)$  pour  $s \in \mathbb{R}$ , prenons cette fois l'application  $z : t \in \mathbb{R} \rightarrow q(t) - e^+$ , les implication du lemme 2.2 sont les même. On peut supposer que la suite  $(\frac{z(n)}{\|z(n)\|})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $u \in T_{e^+}W^s(e^+)$ , donc  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(z(t)) \geq 2h + 1$ . De plus si  $e^- \neq e^+$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} N(z(t)) = N(e^- - e^+) = 2h + 1$ . Sinon dans le cas  $e^- = e^+$ , de la suite  $(\frac{z(-n)}{\|z(-n)\|})_{n \in \mathbb{N}}$  on peut extraire une sous suite convergente vers  $v \in T_{e^+}W^u(e^+)$ , donc  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(z(t)) \leq 2h + 1$ . D'où pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $N(q(t) - e^+) = 2h + 1$  et  $q(t) - e^+ \in \mathcal{N}$ .

Pour la dernière assertion, le théorème 2.1 implique une stricte décroissance de la fonction  $t \in \mathbb{R} \rightarrow N(\dot{q}(t))$  s'il existe un temps  $t$  tel que  $\dot{q}(t) \notin \mathcal{N}$ . On peut supposer que les suites  $u_n = \frac{\dot{q}(n)}{\|\dot{q}(n)\|}$  et  $v_n = \frac{\dot{q}(-n)}{\|\dot{q}(-n)\|}$ , convergent respectivement vers  $u \in T_{e^+}W^s(e^+)$  et  $v \in T_{e^-}W^u(e^-)$ . Et donc

$\lim_{t \rightarrow \infty} N(\dot{q}(t)) \geq 2h + 1$  et  $\lim_{t \rightarrow -\infty} N(\dot{q}(t)) \leq 2h + 1$ . D'où pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $N(\dot{q}(t)) = 2h + 1$  et  $\dot{q}(t) \in \mathcal{N}$ .

LEMME 5.2. — Soit  $f \in O_{m+1}^h$ ,

- (1) le système dynamique  $T_f$  admet un nombre fini  $e_1, \dots, e_p$  de points d'équilibre sur  $K_m$ . Et il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $T_f$  n'en ait pas d'autre sur  $K_{m+\epsilon}$ .
- (2) Il existe  $W_f$  un voisinage ouvert de  $f|_{K_{m+3}}$  dans  $C^1(K_{m+3}, \mathbb{R}^n)$  tel que pour tout  $k \in \{1, \dots, p\}$ ,
  - (a) il existe une application  $C^1$ ,  $e_k : W_f \rightarrow K_{m+\epsilon/2}$ , tel que pour  $g \in W_f$ ,  $e_1(g), \dots, e_p(g)$  soient les seuls points d'équilibre de  $T_g^{K_{m+3}}$  sur  $K_{m+\epsilon/2}$  et que de plus ils soient hyperboliques.
  - (b) il existe un voisinage ouvert de  $e_k$ ,  $W_k \subset K_{m+1}$ , deux ouverts  $V_k$  et  $U_k$  respectivement de  $\mathbb{R}^{n-i(e_k)}$  et  $\mathbb{R}^{i(e_k)}$  et deux applications,

$$\pi_k^s : V_k \times W_f \rightarrow \Omega \quad \text{et} \quad (5.1)$$

$$\pi_k^u : U_k \times W_f \rightarrow \Omega \quad (5.2)$$

tels que pour tout  $g \in W_f$ ,

$$\pi_k^s(V_k, g) = W_{loc}^s(g, e_k(g), W_k) \quad (5.3)$$

$$\pi_k^u(U_k, g) = W_{loc}^u(g, e_k(g), W_k). \quad (5.4)$$

Et les applications,

$$\begin{aligned} g \in W_f &\mapsto \pi_k^s(\cdot, g) \in C^1(V_k, \Omega), \\ g \in W_f &\mapsto \pi_k^u(\cdot, g) \in C^1(U_k, \Omega) \end{aligned} \quad (5.5)$$

sont continues.

De plus si  $g \in W_f \cap C^2(K_{m+3}, \mathbb{R}^n)$ , il existe  $\beta_g > 0$  tel que,

$$\begin{aligned} (x^s, h) \in V_k \times \{h \in C^2(K_{m+3}, \mathbb{R}^n) \mid \|h - g\|_{K_{m+3}} < \beta_g\} &\mapsto \pi_k^s(x^s, h), \\ (x^u, h) \in U_k \times \{h \in C^2(K_{m+3}, \mathbb{R}^n) \mid \|h - g\|_{K_{m+3}} < \beta_g\} &\mapsto \pi_k^u(x^u, h) \end{aligned} \quad (5.6)$$

soient des applications de classe  $C^1$ .

Dans (5.5) la continuité doit être comprise avec la norme  $p_{m+3}$  associé à  $W_f$  et la topologie usuel sur  $C^1(V_k, \Omega)$  et  $C^1(U_k, \Omega)$ . De plus les application  $\pi_k^s(\cdot, g)$  et  $\pi_k^u(\cdot, g)$  ne dépendent que de  $g|_{W_k}$ . Nous rappelons que la norme associé à  $h$  dans (5.6),  $\|h\|_{K_{m+3}}$ , est la norme  $C^2$  sur  $K_{m+3}$ . La démonstration des propriétés 1 et 2a est une simple application du théorème

des fonctions implicites. Puis la propriété 2b, découle de [1] et des théorèmes 4.1 et 6.3 dans [20]. On précise également que si  $g \in W_f \cap C^2(K_{m+3}, \mathbb{R}^n)$ , alors  $\pi_k^s(\cdot, g)$  et  $\pi_k^u(\cdot, g)$  sont des applications de classe  $C^2$ .

Nous poursuivons la démonstration du théorème 1.5 en prouvant une dernière proposition. Soit  $(m, h) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$  et  $f \in O_{m+1}$ . On commence par montrer que pour,  $e_k$  et  $e_{k'}$  deux points d'équilibre hyperboliques de  $T_f$  d'indice de Morse égal et pair, et  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,

$$T_g(n)(W_{loc}^u(g, e_k(g), W_k)) \pitchfork W_{loc}^s(g, e_{k'}(g), W_k),$$

génériquement pour  $g$  dans un voisinage de  $f$ . Le paragraphe suivant donne les notations permettant d'énoncer la prochaine proposition. Ensuite cette proposition sera utilisée dans une preuve par l'absurde pour montrer que généralement par rapport à  $f$ ,  $W^u(e_k) \cap W^s(e_{k'}) = \emptyset$ .

Nous appliquons le lemme 5.2 à  $f$  en utilisant les mêmes notations. Soit le compact

$$Q_m^h = \{x \in K_{m+1} | (h, x) \in \Delta_f \text{ et } T_f([0, h] \times \{x\}) \subset K_{m+1}\}.$$

Pour tout  $k \in \{1, \dots, p\}$ ,  $Q_m^h$  est un voisinage de  $e_k$ . Pour  $k \in \{1, \dots, p\}$  on introduit les ouverts

$$D_{m,k}^h = \pi_k^u(\cdot, f)^{-1}(\{x \in K_{m+2} | (h, x) \in \Delta_f^{K_{m+2}}\}).$$

Pour chaque  $k \in \{1, \dots, p\}$ , on choisit deux voisinage compacts  $\Lambda_k^s \subset V_k$  et  $\Lambda_k^u \subset U_k$  respectivement de  $\pi_k^s(\cdot, f)^{-1}(\{e_k\})$  et  $\pi_k^u(\cdot, f)^{-1}(\{e_k\})$ . On suppose, quitte à réduire  $W_f$ , que pour tout  $g \in W_f$ ,  $e_k(g) \in \pi_k^s(\Lambda_k^s, g) \cap \pi_k^u(\Lambda_k^u, g)$ . On note

$$\Lambda_{m,k,h}^u = \Lambda_k^u \cap \pi_k^u(\cdot, f)^{-1}(Q_m^h),$$

et on remarque que  $\Lambda_{m,k,h}^u \subset D_{m,k}^h$ . Il existe  $\epsilon_m^{f,h} > 0$  tel que si  $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  et  $p_{m+3}(g - f) < \epsilon_m^{f,h}$  alors :

- (1) la restriction de  $g$  à  $K_{m+3}$  appartient à  $W_f$ ,
- (2)  $[0, h] \times Q_m^h \subset \Delta_g^{K_{m+3}}$ ,
- (3) pour tout  $k \in \{1, \dots, p\}$ ,  $[0, h] \times \pi_k^u(\bar{D}_{m,k}^h, g) \subset \Delta_g^{K_{m+3}}$ ,
- (4) pour tout  $k \in \{1, \dots, p\}$  et  $x_0^u \in \Lambda_k^u$  tel que  $T_f(\mathbb{R}_+) \pi_k^u(x_0^u, f) \not\subset K_{m+1}$  alors  $T_g(\mathbb{R}_+) \pi_k^u(x_0^u, g) \not\subset K_m$ .

Soient l'ensemble  $I_m^f$  des couples  $(k, k') \in \{1, \dots, p\}^2$  tels que  $i(e_k) = i(e_{k'})$  soit pair, et soit

$$\mathcal{H}_{m,h}^f = \{g \in O_{m+1} | p_{m+3}(g - f) < \epsilon_m^{f,h}\}$$

un voisinage de  $f$ . On définit les applications suivantes pour  $(k, k') \in I_m^f$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_h^{(k,k')} : (D_{m,k}^h \times V_{k'}) \times \mathcal{O}_{m,h}^f &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ ((x^u, x^s), g) &\mapsto T_g(h)[\pi_k^u(x^u, g)] - \pi_{k'}^s(x^s, g). \end{aligned}$$

PROPOSITION 5.3. — Soient  $(m, h) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $f \in O_{m+1}$  et  $(k, k') \in I_m^f$ . L'ensemble

$$\begin{aligned} H_h^{(k,k')} = \{g \in \mathcal{H}_{m,h}^f \mid D_{(x^u, x^s)} \Phi_h^{(k,k')}(\cdot, g) \text{ est surjective sur} \\ (\Phi_h^{(k,k')})^{-1}(\cdot, g)(\{0\}) \cap [\Lambda_{m,k,h}^u \times \Lambda_{k'}^s]\}, \end{aligned}$$

est un ouvert dense de  $\mathcal{H}_{m,h}^f$ .

Remarquons que la surjectivité de  $D_{(x^u, x^s)} \Phi_h^{(k,k')}$  est équivalente à son inversibilité pour  $(k, k') \in I_m^f$ , car dans ce cas  $\dim U_k + \dim V_{k'} = n$ .

*Démonstration.* — On se fixe  $(m, h) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$ ,  $f \in O_{m+1}$  et  $(k, k') \in I_m^f$ . Montrons que  $H_h^{(k,k')}$  est un ouvert de  $\mathcal{H}_{m,h}^f$ . Soit  $(g_l)_{l \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathcal{H}_{m,h}^f \setminus H_h^{(k,k')}$  convergeant vers  $g \in \mathcal{H}_{m,h}^f$ . Pour tout  $l \in \mathbb{N}$ , il existe  $(x_l^u, x_l^s) \in \Lambda_{m,k,h}^u \times \Lambda_{k'}^s$  et  $u_l \in \mathbb{S}^{n-1}$  tels que  $\Phi_h^{(k,k')}((x_l^u, x_l^s), g_l) = 0$  et  $D_{(x^u, x^s)} \Phi_h^{(k,k')}((x_l^u, x_l^s), g_l)u_l = 0$ . Par la compacité de  $\Lambda_{m,k,h}^u \times \Lambda_{k'}^s \times \mathbb{S}^{n-1}$  on peut supposer que les suites  $(x_l^u)_{l \in \mathbb{N}}$ ,  $(x_l^s)_{l \in \mathbb{N}}$  et  $(u_l)_{l \in \mathbb{N}}$  convergent respectivement vers  $x^u \in \Lambda_{m,k,h}^u$ ,  $x^s \in \Lambda_{k'}^s$  et  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Or l'application  $g \mapsto \Phi_h^{(k,k')}(\cdot, g) \in C^1(D_{m,k}^h \times V_{k'}, \mathbb{R}^n)$  est continue donc  $\Phi_h^{(k,k')}((x^u, x^s), g) = 0$  et  $D_{(x^u, x^s)} \Phi_h^{(k,k')}((x^u, x^s), g)u = 0$ , d'où  $g \notin H_h^{(k,k')}$ .

Nous allons montrer que  $H_h^{(k,k')}$  est dense dans  $\mathcal{H}_{m,h}^f$ . Soient  $f_0 \in \mathcal{H}_{m,h}^f \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ,  $\mathcal{C}$  une collection de fermés compatible avec  $f_0$ ,  $\alpha > 0$  la constante donné par le lemme 4.10 appliqué à  $f_0$ ,  $\mathcal{C}$  et  $K_{m+3}$ , et  $\beta_{f_0} > 0$  la constante obtenu dans le lemme 5.2. Nous rappelons que  $Y_{\mathcal{C}}(K_{m+3})$  est un sous espace de  $C^2(K_{m+3}, \mathbb{R}^n)$ . Soit  $\mathcal{V}$  un voisinage ouvert de zéro dans  $Y_{\mathcal{C}}(K_{m+3})$  tel que pour  $g \in \mathcal{V}$ ,  $\|g\|_{K_{m+3}} < \min\{\alpha, \beta_{f_0}\}$  et  $p_{m+3}(f_0 + g - f) < \epsilon_m^{f,h}$ . On introduit l'application,

$$\begin{aligned} \Psi : (D_{m,k}^h \times V_{k'}) \times \mathcal{V} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ ((x^u, x^s), g) &\mapsto T_{f_0+g}^{K_{m+3}}(h)[\pi_k^u(x^u, f_0 + g)] - \pi_{k'}^s(x^s, f_0 + g). \end{aligned}$$

On y applique le théorème de Sard-Smale avec  $z = 0$ . L'hypothèse (i) est vérifiée, car  $(i(e_k) + (n - i(e_{k'}))) - n = 0$  et l'hypothèse (iii) aussi. Il ne reste plus qu'à prouver (ii).

Soit  $((x_0^u, x_0^s), g_0) \in \Psi^{-1}(\{0\})$ . On prend  $x_0 = \pi_k^u(x_0^u, f_0 + g_0)$  et  $x_1 = \pi_{k'}^s(x_0^s, f_0 + g_0)$ . La trajectoire  $\gamma(t) = T_{f_0+g_0}^{K_{m+3}}(t)x_0$  est globale et joint  $e_k$  à  $e_{k'}$ . Notons  $t_0 = h/2$  et introduisons pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ , les fonctions continues  $\tau_j : \mathbb{R} \rightarrow \max\{|\gamma_j(t) - \gamma_j(t_0)|, |\gamma_{j+1}(t) - \gamma_{j+1}(t_0)|\}$ . Le lemme 5.1 et un raisonnement par l'absurde semblable à celui effectué à la fin de la preuve de la proposition 4.6, nous permettent d'affirmer que, pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\tau_j$  ne s'annule qu'en  $t_0$  et que ses limites en  $\pm\infty$  sont strictement positives. Il existe donc  $\epsilon > 0$  tel que

$$\gamma^{-1}(B) \subset ]0, h[ \tag{5.7}$$

où  $B = \bigcup_{1 \leq j \leq n} \{x \in K_{m+3} \mid \max\{|x_j - \gamma(t_0)_j|, |x_{j+1} - \gamma(t_0)_{j+1}|\} \leq \epsilon\}$ .

Par le lemme 4.9, il existe  $n$  applications  $(\psi^j)_{j \in \{1, \dots, n\}} \in Y_{\mathcal{C}}(K_{m+3})$ , à support dans  $B$  tel que  $\left(\int_0^h S_{(f_0+g)'(\gamma)}(h, s)\psi^j(\gamma(s))ds\right)_{1 \leq j \leq n}$  engendre  $\mathbb{R}^n$ .

Pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ , on considère  $D_g\Psi((x_0^u, x_0^s), g_0)\psi^j$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  suffisamment petit pour que  $\lambda\psi^j \in \mathcal{V}$ . Les deux applications  $f_0 + g_0$  et  $f_0 + g_0 + \lambda\psi^j$  concident sur  $K_{m+3} \setminus B$ , donc, sur cet ensemble, les trajectoires de  $T_{f_0+g_0}^{K_{m+3}}$  et  $T_{f_0+g_0+\lambda\psi^j}^{K_{m+3}}$  sont les mêmes. Ainsi

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} T_{f_0+g_0+\lambda\psi^j}^{K_{m+3}}(t)x_0 = e_k \text{ et donc } \pi_k^u(x_0^u, f_0 + g_0 + \lambda\psi^j) = x_0.$$

De même

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T_{f_0+g_0+\lambda\psi^j}^{K_{m+3}}(t)x_1 = e_{k'} \text{ entraine } \pi_{k'}^s(x_0^s, f_0 + g_0 + \lambda\psi^j) = x_1.$$

D'où les dérivé suivante,  $D_g\pi_k^u(x_0^u, f_0 + g_0)\psi^j$  et  $D_g\pi_{k'}^s(x_0^s, f_0 + g_0)\psi^j$  sont nulles. On obtient alors

$$D_g\Psi((x_0^u, x_0^s), g_0)\psi^j = D_g \left[ T_{f_0+g}^{K_{m+3}}(h)(x_0) \right] (g_0)\psi^j = \int_0^h S(h, s)\psi^j(\gamma(s))ds.$$

La surjectivité de  $D_g\Psi((x_0^u, x_0^s), g_0)$  est satisfaite puisque  $(D_g\Psi((x_0^u, x_0^s), g_0)\psi^j)_{j \in \{1, \dots, n\}}$  engendre  $\mathbb{R}^n$ . Donc d'après le théorème de Sard-Smale l'ensemble  $\Theta = \{g \in \mathcal{V}, 0 \text{ est une valeur régulière de } \Psi(\cdot, g)\}$  est dense dans  $\mathcal{V}$ . Ainsi il existe une suite  $(g_l)_{l \in \mathbb{N}}$  de  $\Theta$  tel que  $\lim_{l \rightarrow \infty} \|g_l\|_{K_{m+3}} = 0$ . En appliquant le lemme 4.10, on obtient une suite  $(h_l)_{l \in \mathbb{N}}$  tendant vers zéro dans  $C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  tel que  $h_l|_{K_{m+3}} = g_l, f_0 + h_l \in L^+$ . Donc  $(f_0 + h_l)_{l \in \mathbb{N}} \in H_h^{(k, k')}$  car 0 est une valeur régulière de  $\Phi_h^{(k, k')}(\cdot, f_0 + h_l)$  pour tout  $l \in \mathbb{N}$ . D'où  $H_h^{(k, k')}$  est un ouvert dense de  $\mathcal{H}_{m, h}^f$ .

*Démonstration du théorème 1.5.* — Pour  $(m, h) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$  et  $f \in O_{m+1}$  l'ensemble

$$H_{m,h}^f = \bigcap_{(k,k') \in I_m^f} H_h^{(k,k')}.$$

est un ouvert dense de  $\mathcal{H}_{m,h}^f$ . Soient  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $f_0 \in O_{m+1}$ ,  $f|_{K_{m+3}}$  détermine si  $f$  appartient à  $O_{m+1}$  et à  $H_{m,h}^{f_0}$ . Or l'espace  $C^1(K_{m+3}, \mathbb{R}^n)$  est séparable, il existe donc une suite  $(f_l^m)_{l \in \mathbb{N}^*}$  de  $O_{m+1}$  tel que  $\bigcup_{l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \mathcal{H}_{m,h}^{f_l^m} = O_{m+1}$ . Pour  $(m, l, h) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^3$  on introduit l'ensemble

$$W_{m,l,h} = H_{m,h}^{f_l^m} \cup \left( O_{m+1} \setminus \bar{\mathcal{H}}_{m,h}^{f_l^m} \right)$$

qui est un ouvert dense de  $L^+$ . Donc l'ensemble

$$KS = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{f \in O_{m+1}} \bigcap_{h \in \mathbb{N}^*} H_{m,h}^f \supset \bigcap_{(m,l,h) \in (\mathbb{N}^*)^3} W_{m,l,h}$$

est générique. On remarque que  $KS \subset O$ . Soient  $g \in KS$ ,  $e^-$  et  $e^+$  deux points d'équilibre de  $T_g$  tels que  $i(e^-) = i(e^+)$  soit pair. Supposons  $x_0 \in W^u(e^-) \cap W^s(e^+)$ , l'orbite  $q(t) = T_g(t)x_0$  relie  $e^-$  à  $e^+$ . Soit  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tel que  $q \subset K_m$  et  $f \in O_{m+1}$  tel que pour tout  $h \in \mathbb{N}$ ,  $g \in H_{m,h}^f$ . On choisit ce  $f$  avec  $e_k = e^+$  et  $e_{k'} = e^-$  pour définir  $\pi_k^u$  et  $\pi_{k'}^s$ . Il existe alors  $t_0 \in \mathbb{R}$  suffisamment grand tel que  $q(t_0) = \pi_{k'}^s(x_0^s, g)$  avec  $x_0^s \in \Lambda_{k'}^s$ . De même il existe  $h \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tel que  $q(t_0 - h) = \pi_k^u(x_0^u, g)$  avec  $x_0^u \in \Lambda_{m,k,h}^u$ . Or  $g \in H_m^{(k,k')}$ , donc

$$T_{q(t_0)}W^u(e_k) + T_{q(t_0)}W^s(e_{k'}) = D_{x^u} [T_g(h)(\pi_k^u)](x_0^u, g)G_k + D_{x^s} \pi_{k'}^s(x_0^s, g)F_{k'} = \mathbb{R}^n.$$

Ce qui est absurde puisque

$$\begin{aligned} \dim T_{q(t_0)}W^u(e_k) + \dim T_{q(t_0)}W^s(e_{k'}) &\leq \dim U_k + \dim V_{k'} = n \\ \text{et } T_{q(t_0)}W^u(e_k) \cap T_{q(t_0)}W^s(e_{k'}) &\ni \dot{q}(t_0) \neq 0. \end{aligned}$$

D'où pour tout  $g \in KS$ , si  $e^-$  et  $e^+$  sont deux points d'équilibre de  $T_g$  de même indices de Morse pair, alors  $W^u(e^-) \cap W^s(e^+) = \emptyset$ . Et on conclut la démonstration en utilisant le théorème 1.3.

## 6. Généricité de la propriété de Morse-Smale

Dans cette partie nous allons démontrer le théorème 1.6, à savoir la généricité de la propriété de Morse-Smale. Nous utilisons les mêmes arguments que dans [13]. En particulier, le théorème 1.6 est une conséquence directe de la proposition suivante.



PROPOSITION 6.1. — Soit  $f \in \mathcal{KS}$  telle que le système dynamique  $T_f$  admette un attracteur global compact ; alors l'ensemble non-errant de  $T_f$  est égale à la réunion finie des éléments critiques.

De même que dans [13], la proposition 6.1 découle de la propriété de Poincaré-Bendixson et du lemme 6.3.

PROPOSITION 6.2 (Propriété de Poincaré-Bendixson). — Soient  $f \in L^+$  et  $u \in \Omega$  tel que  $\mathbb{R}_+ \times \{u\} \subset \Delta$  et que  $T_f(\mathbb{R}_+)u$  soit borné. Alors :

- ou bien  $\omega(u)$  est exactement une orbite périodique,
- ou bien pour tout  $v \in \omega(u)$ ,  $\alpha(v) \subset \mathcal{E}_f$  et  $\omega(v) \subset \mathcal{E}_f$ .

Dans [6], B. Fiedler et J. Mallet-Paret ont montré la propriété de Poincaré-Bendixson pour une équation scalaire de réaction diffusion et plus généralement pour des systèmes dynamiques admettant une fonctionnelle décroissante du type “nombre de changements de signe”. Plus précisément, soit  $S$  un système dynamique défini sur un espace de Banach  $X$ . Soient deux applications

$$z : X \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, \infty\}, \quad (6.1)$$

$$\text{et } \pi : X \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ linéaire,} \quad (6.2)$$

vérifiant les axiomes (A0 – A3) suivants, partout où  $u^1$ ,  $u^2$  et  $\dot{u}$  sont bien définies, où  $u^1$  et  $u^2$  sont deux trajectoires de  $S$  et  $\dot{u}$  la vitesse d’une trajectoire :

- (A0) Pour tout couple de solutions  $u^1$ ,  $u^2$  et pour tout  $t$  positif,  $z(u^1(t) - u^2(t))$  est fini.
- (A1) Soit  $t_0 > 0$ , si  $\pi(u^1(t_0) - u^2(t_0)) = 0$ , alors ou bien  $t \mapsto z(u^1(t) - u^2(t))$  décroît strictement en  $t = t_0$ , ou bien  $u^1(t_0) - u^2(t_0) = 0$ .
- (A2) Si  $t \mapsto z(u^1(t) - u^2(t))$  ne décroît pas strictement en  $t = t_0$  et si  $u^1(t_0) - u^2(t_0) \neq 0$ , alors  $z$  est localement constant, c’est-à-dire il existe un voisinage  $U$  de  $u^1(t_0) - u^2(t_0) \in X$  tel que pour  $\phi \in U$ ,  $z(\phi) = z(u^1(t_0) - u^2(t_0))$ .
- (A3) Les axiomes (A0 – A2) restent vérifiés si  $u^1 - u^2$  est remplacé par  $\dot{u}$ .

Pour démontrer la proposition 6.2, nous appliquons le résultat de [6] en choisissant  $z = N_M$  et  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$  la projection définie par  $\pi(x) = (x_1, x_2)$ . En effet  $N_M$  est bien définie sur  $\mathbb{R}^n$  et est fini, donc (A0) est vraie. L’axiome (A1) est l’objet du lemme 2.2, car si  $\pi(x) = 0$  alors  $x \notin \mathcal{N}$ . Pour monter

l'axiome (A2), il suffit de remarquer que pour  $h \in \{1, \dots, \frac{\bar{n}-1}{2}\}$ ,  $N_M$  est constant sur l'ouvert  $\mathcal{CK}_h \cap \mathcal{K}_{h+1}$  et décroît strictement sur la frontière de cet ouvert privé de 0. L'axiome (A3) est démonté de la même manière mais en utilisant le théorème 2.1.

Soit  $p \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$ , on dit qu'une suite d'éléments critiques  $(\Gamma_k)_{k \in \{1, \dots, p+1\}}$  est une suite connexe si pour chaque  $k \in \{1, \dots, p\}$ , il existe une orbite hétérocline  $q_k$  connectant  $\Gamma_k$  à  $\Gamma_{k+1}$ . Une chaîne d'éléments critiques est une suite connexe d'éléments critiques telle que  $\Gamma_{p+1} = \Gamma_1$ .

LEMME 6.3. — *Soit  $f \in \mathcal{KS}$  tel que  $T_f$  admette un attracteur global compact. Le système dynamique  $T_f$  n'a pas de suite d'éléments critiques connexe de longueur infinie. Ainsi  $T_f$  n'a pas de chaîne d'éléments critiques.*

*Démonstration.* — Soient  $p \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$  et  $(\Gamma_k)_{k \in \{1, \dots, p+1\}}$  une suite d'éléments critiques connexes. Soit  $k \in \{1, \dots, p\}$ :

- si  $\Gamma_k$  et  $\Gamma_{k+1}$  sont deux orbites périodique  $i(\Gamma_k) > i(\Gamma_{k+1})$ , par le lemme 3.4.
- Si  $\Gamma_k$  est un point d'équilibre,  $i(\Gamma_k) > i(\Gamma_{k+1})$ . Car  $W^u(\Gamma_k) \pitchfork W^s(\Gamma_{k+1})$ , donc

$$\begin{aligned} & \dim (T_{q_k(0)} W^u(\Gamma_k) + T_{q_k(0)} W^s(\Gamma_{k+1})) \\ & = i(\Gamma_k) + (n - i(\Gamma_{k+1})) - \dim (W^u(\Gamma_k) \cap W^s(\Gamma_{k+1})) = n, \end{aligned}$$

avec l'intersection non réduite à zéro.

- Si  $\Gamma_k$  est une orbite périodique et  $\Gamma_{k+1}$  un point d'équilibre, alors  $i(\Gamma_k) \geq i(\Gamma_{k+1})$ . Le raisonnement est le même que dans le cas précédent mais avec  $\dim(W^u(\Gamma_k)) = i(\Gamma_k) + 1$ .

D'où l'indice de Morse de  $\Gamma_k$  est décroissant et  $i(\Gamma_k) > i(\Gamma_{k+2})$ , ce qui limite la longueur d'une suite d'élément critique connectés à  $2n$ , et interdit de fait toute chaîne d'éléments critiques.

## Bibliographie

- [1] ABRAHAM (R.), ROBBIN (J.). — Transversal mappings and flows, W. A. Benjamin, Inc (1967).
- [2] ANGEMENT (S. B.). — The zero set of a solution of a parabolic equation, J. reine angew. Math. 390, p. 79-96 (1988).
- [3] BENDIXSON (I.). — Sur les courbes définies par des équations différentielles, Acta Mathematica No. 24, p. 1-88 (1901).

- [4] BRUNOVSKÝ (B.), POLÁČIK (P.). — The Morse-Smale structure of a generic reaction-diffusion equation in higher space dimension, *J. differential equations* 135, p. 129-181 (1997).
- [5] CZAJA (R.), ROCHA (C.). — Transversality in scalar reaction-diffusion equations on a circle, *J. Differential Equations* 245, p. 692-721 (2008).
- [6] FIEDLER (B.), MALLET-PARET (J.). — A Poincaré-Bendixson theorem for scalar reaction-diffusion equations, *Arch. Rational Mech. Analysis* 107, p. 325-345 (1989).
- [7] FUSCO (G.), OLIVA (W. M.). — Jacobi matrices and transversality, *Proc. R. Soc. Ed. 109A*, p. 231-243 (1988).
- [8] FUSCO (G.), OLIVA (W. M.). — Transversality between invariant manifolds of periodic orbits for a class of monotone dynamical systems, *Journal of Dynamics and Differential Equations* 2, p. 1-17 (1988).
- [9] HIRSH (M.). — Systems of differential equations which are competitive or cooperative I: Limit sets. *SIAM J. Math. Anal.* 13(2), p. 167-179 (1982).
- [10] HIRSH (M.). — Systems of differential equations which are competitive or cooperative II: Convergence almost everywhere. *SIAM J. Math. Anal.* 16(3), p. 423-439 (1985).
- [11] HIRSH (M.). — Systems of differential equations which are competitive or cooperative III: Competing Species, *Nonlinearity* 1, p. 51-71 (1988a).
- [12] JOLY (R.), RAUGEL (G.). — Generic hyperbolicity of equilibria and periodic orbits of the parabolic equation on the circle, *Trans. Amer. Math. Soc.* 362, p. 5189-5211 (2010).
- [13] JOLY (R.), RAUGEL (G.). — Generic Morse-Smale property for the parabolic equation on the circle, *Ann. I. H. Poincaré* – 27, p. 1397-1440 (2010).
- [14] JOLY (R.), RAUGEL (G.). — A striking correspondence between the dynamics generated by the vector fields and by the scalar parabolic equations, *Confluentes Mathematici*, Vol 3, No. 3, p. 471-493 (2011).
- [15] KUPKA (I.). — Contribution à la théorie des champs génériques, *Contributions to Differential Equations* no2 (1963), p. 457-484. Addendum and corrections, *ibid.* No. 3, p. 411-420 (1964).
- [16] PALIS (J.), DE MELLO (W.). — Geometric theory of dynamical systems – An introduction, Springer-Verlag, Berlin (1982).
- [17] PEIXOTO (M. M.). — Structural stability on two-dimensional manifolds, *Topology* No. 1, p. 101-120 (1962).
- [18] PEIXOTO (M. M.). — On an approximation theorem of Kupka and Smale, *J. differential equations* 3, p. 214-227 (1967).
- [19] POINCARÉ (H.). — Sur les courbes définies par une équation différentielle, *Oeuvres*, 1, Paris.
- [20] ROBBIN (J. W.). — Stable manifolds of semi-hyperbolic fixed points, *Illinois J. Math.* 15, p. 595-609 (1971).
- [21] SMALE (S.). — Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* No. 17, p. 97-116 (1963).
- [22] SMALE (S.). — Diffeomorphisms with many periodic points, *Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Morston Morse)*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, p. 63-80 (1965).
- [23] SMITH (H.). — Monotone dynamical systems: An introduction to the theory of competitive and cooperative systems *Mathematical Surveys and Monographs*, Vol. 41 (1995).

## Annexes

### A. Démonstration du lemme 4.9

Soit  $y^0 = \gamma(t_0)$ . Pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ , les fonctions  $\tau_j : [0, \omega] \rightarrow \max\{|\gamma_j(t) - y_j^0|, |\gamma_{j+1}(t) - y_{j+1}^0|\}$ , sont continues et ne s'annulent qu'en  $t_0$ . Il existe donc  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $\epsilon' \in ]0, 2\epsilon[$  et  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\tau_j^{-1}([0, \epsilon'])$  soit un segment. Nous allons construire  $\psi_\rho^j \in Y_C(K)$  pour  $j \in \{1, \dots, n\}$  et  $\rho > 0$  proche de zéro, de telle sorte que  $\psi_\rho^j$  soit nulle en dehors de  $\{x \in K \mid \max\{|x_j - y_j^0|, |x_{j+1} - y_{j+1}^0|\} \leq \rho\}$ .

Fixons  $j \in \{1, \dots, n\}$ . On suppose que  $y^0 \notin G_j$ . Il existe  $\epsilon_j \in ]0, \epsilon[$  tel que  $\{x \in \Omega \mid \max_{h \in \{1, \dots, n\}} |x_h - y_h^0| \leq \epsilon_j\} \subset \mathcal{C}G_j \cap K$ . On introduit l'ensemble

$$B_j = \{x \in K \mid \max\{|x_j - y_j^0|, |x_{j+1} - y_{j+1}^0|\} \leq \epsilon_j\}.$$

Nous allons construire une application  $\phi_j : B_j \rightarrow [0, 1]$  de classe  $C^2$  ne dépendant que de  $x_{j-1}$ ,  $x_j$  et  $x_{j+1}$ , telle que :

- ( $\alpha$ )  $\phi_j = 1$  sur  $\{x \in B_j, |x_{j-1} - y_{j-1}^0| \leq \frac{\epsilon_j}{2}\}$ ,
- ( $\beta$ )  $\phi_j$  soit nulle sur un voisinage de  $G_j \cap B_j$ ,
- ( $\gamma$ )  $\partial_{x_{j-1}} \phi_j = 0$  sur  $F_j \cap B_j$ .

Pour cela on construit par récurrence des applications  $\phi_j^0, \dots, \phi_j^{k_0}$  appartenant à  $C^2(B_j, [0, 1])$ . On commence par prendre  $\phi_j^0 = 1$  et  $B_j^0 = B_j^+ = B_j \cap \{x \in \Omega, x_{j-1} - y_{j-1}^0 \geq 0\}$ . On construit le couple  $(\phi_j^{k+1}, B_j^{k+1})$  à partir du couple  $(\phi_j^k, B_j^k)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$  supposons que  $\phi_j^k$  vérifie les conditions ( $\gamma$ ) et

$$(\alpha') \quad \phi_j^k = 1 \quad \text{sur} \quad \{x \in B_j, x_{j-1} - y_{j-1}^0 \leq \frac{\epsilon_j}{2}\}.$$

Supposons également que  $\phi_j^k$  satisfait ( $\beta$ ) sur le complémentaire de  $B_j^k$  dans  $B_j^+$ . Soit  $x^k \in B_j^k \cap G_j$  (que l'on suppose non vide) tel que  $G_j \cap \{x \in B_j^k \mid |x_{j-1} - x_{j-1}^k| < 0\}$  soit vide. Ainsi il existe  $0 < \beta_k < \frac{\epsilon_j}{2}$  tel que l'ensemble  $D_{x^k, \beta_k}$ , défini par

$$\{x \in B_j \mid -\beta_k < x_{j-1} - x_{j-1}^k < -\frac{\beta_k}{2} \text{ et } \max\{|x_j - x_j^k|, |x_{j+1} - x_{j+1}^k|\} < \beta_k\},$$

soit inclus dans  $\mathcal{C}F_j \cap \mathcal{C}G_j$ . Soit  $\chi : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$  une fonction  $C^2$  valant 0 sur  $[0, 1/2]$  et 1 sur  $[1, \infty[$ , prenons

$$\phi_j^{k+1}(x) = \phi_j^k(x) \left( 1 - \chi\left(\frac{(x_{j-1}^k - x_{j-1})_+}{\beta_k}\right) \chi\left(\frac{|x_j - x_j^k|}{\beta_k}\right) \chi\left(\frac{|x_{j+1} - x_{j+1}^k|}{\beta_k}\right) \right).$$

$$\text{et } B_j^{k+1} = B_j^k \setminus \{x \in B_j, \max\{|x_j - x_j^k|, |x_{j+1} - x_{j+1}^k|\} < \frac{\beta_k}{2}\}$$

L'application  $\phi_j^{k+1}$  satisfait la condition  $(\alpha')$  puisque  $\phi_j^{k+1} = \phi_j^k$  sur  $\{x \in B_j, x_{j-1} - y_{j-1}^0 \leq \frac{\epsilon_j}{2}\}$ . Pour tout  $y \in G_j \cap B_j^+ \cap \mathbb{C}B_j^{k+1}$ , il existe  $i \in \{0, \dots, k\}$  tel que  $y$  appartienne à

$$\{x \in B_j | x_{j-1} - x_{j-1}^i > -\frac{\beta_i}{2} \text{ et } \max\{|x_j - x_j^i|, |x_{j+1} - x_{j+1}^i|\} < \frac{\beta_i}{2}\},$$

un ouvert sur lequel  $\phi_j^{k+1}$  est nulle. Donc  $\phi_j^{k+1}$  vérifie  $(\beta)$  sur le complémentaire de  $B_j^{k+1}$  dans  $B_j^+$ . De plus  $(\gamma)$  est aussi vérifiée car  $\partial_{x_{j-1}} \phi_j^{k+1}$  est nul en dehors de  $\bigcup_{i=0}^k D_{x^i, \beta_i} \subset \mathbb{C}F_j$ . Remarquons que  $B_j^{k+1} \subset B_j^k$ . Si  $B_j^{k+1} \cap G_j$  est vide on s'arrête, sinon on recommence. Le processus s'interrompt forcément pour un entier  $k_0$  fini car le disque  $\{(x_j, x_{j+1}) \in \mathbb{R}^2 | \max\{|x_j - y_j^0|, |x_{j+1} - y_{j+1}^0|\} \leq \epsilon_j\}$  est compact. On prend donc  $\phi_j^+ = \phi_j^{k_0+1}$ , et l'on effectue un processus similaire sur  $B_j^- = \{x \in B_j, x_{i-1} - y_{i-1}^0 \leq 0\}$  pour obtenir  $\phi_j^-$ . On pose  $\phi_j = \phi_j^+ \phi_j^-$ . Soit  $\rho \in ]0, \epsilon_j[$ , on définit

$$\psi_\rho^j(x) = \begin{cases} \frac{1}{\rho} \phi_j(x) \left(1 - \chi\left(\frac{|x_j - y_j^0|}{\rho}\right)\right) \left(1 - \chi\left(\frac{|x_{j+1} - y_{j+1}^0|}{\rho}\right)\right) \xi_j & \text{si } x \in B_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si  $y_0 \in G_j$ , alors  $y_0 \notin F_j$ , on fait donc la construction mais en inversant les directions  $x_{j-1}$  et  $x_{j+1}$ , ainsi que les ensemble  $F_j$  et  $G_j$ .

Comme  $\dot{\gamma}(t_0) \in \mathcal{N}$ ,  $\dot{\gamma}(t_0)$  n'a pas deux coordonnées consécutives nulles. Donc pour chaque  $j \in \{1, \dots, n\}$  il existe  $\rho_j \in ]0, \epsilon_j[$  tel que

$$s \in [t_0 - \delta_j^-, t_0 + \delta_j^+] = \tau_j^{-1}([0, \rho_j]) \implies |\gamma_{j-1}(s) - y_{j-1}^0| < \epsilon_j/2.$$

D'où pour  $\rho \in ]0, \rho_j[$ ,  $\psi_\rho^j(\gamma(t))$  est nulle si  $t \in [0, T_0] \setminus [t_0 - \delta_j^-, t_0 + \delta_j^+]$  et  $\phi_j(\gamma(t)) = 1$  si  $t \in [t_0 - \delta_j^-, t_0 + \delta_j^+]$ . Donc,

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^\omega S_{f'(\gamma)}(\omega, s) \psi_\rho^j(\gamma(s)) ds \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{t_0 - \delta_j^-}^{t_0 + \delta_j^+} S_{f'(\gamma)}(\omega, s) \psi_\rho^j(\gamma(s)) ds \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \int_{t_0 - \delta_j^-}^{t_0 + \delta_j^+} S_{f'(\gamma)}(\omega, s) \phi_j(\gamma(s)) \left(1 - \chi\left(\frac{|(s-t_0)(\gamma'_j(t_0) + \epsilon(s-t_0))|}{\rho}\right)\right) \\ & \quad \left(1 - \chi\left(\frac{|(s-t_0)(\gamma'_{j+1}(t_0) + \epsilon'(s-t_0))|}{\rho}\right)\right) ds \xi_j, \end{aligned}$$

où les fonctions  $\epsilon$  et  $\epsilon'$  tendent vers 0 en 0. Puis on effectue un changement de variable,

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^\omega S_{f'(\gamma)}(\omega, s) \psi_\rho^j(\gamma(s)) ds \\
 &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{-\delta_j^-/\rho}^{\delta_j^+/\rho} S_{f'(\gamma)}(\omega, t_0 + \rho\mu) (1 - \chi(|\mu\dot{\gamma}_j(t_0) + \mu\epsilon(\rho\mu)|)) \\
 & \quad (1 - \chi(|\mu\dot{\gamma}_{j+1}(t_0) + \mu\epsilon'(\rho\mu)|)) d\mu \xi_j.
 \end{aligned}$$

Et grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue on obtient,

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^\omega S_{f'(\gamma)}(\omega, s) \psi_\rho^j(\gamma(s)) ds \\
 &= \left( \int_{-\infty}^\infty (1 - \chi(|\mu\dot{\gamma}_j(t_0)|)) (1 - \chi(|\mu\dot{\gamma}_{j+1}(t_0)|)) d\mu \right) S_{f'(\gamma)}(\omega, t_0) \xi_j.
 \end{aligned}$$

L'application linéaire  $S_{f'(\gamma)}(\omega, t_0)$  est inversible donc pour tout  $\rho > 0$  suffisamment petit  $(\int_0^\omega S_{f'(\gamma)}(\omega, s) \psi_\rho^j(\gamma(s)) ds)_{1 \leq j \leq n}$  engendre  $\mathbb{R}^n$ .

## B. Démonstration du lemme 4.10

Dans ce lemme de prolongement la condition contraignante est  $f + h \in L^+$ , or cette condition porte sur les coordonnées de  $f$  et  $g$ , indépendamment les unes des autres. C'est pourquoi il suffit de montrer qu'on peut prolonger une des coordonnées de  $g$ . De plus, pour  $j$  donné, les applications  $g_j$  et  $f_j$  d'une part et l'appartenance à  $F_j$  ou  $G_j$  pour  $x \in \Omega$  d'autre part ne dépendent que de  $x_{j-1}$ ,  $x_j$  et  $x_{j+1}$ . On peut donc se ramener au problème suivant.

Soient  $(e_1, e_2, e_3)$  une base de  $\mathbb{R}^3$  et  $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  telle que  $\partial_{x_1} f \geq 0$ ,  $\partial_{x_3} f \geq 0$  et  $\partial_{x_1} f + \partial_{x_3} f > 0$ . Soient  $F$  et  $G$  deux fermés de  $\mathbb{R}^3$  tels que,

- $F \cap G = \emptyset$ ,  $\overline{F} = F$  et  $\overline{G} = G$ ,
- $\{x \in \mathbb{R}^3, \partial_{x_1} f(x) = 0\} \subset F$  et  $\{x \in \mathbb{R}^3, \partial_{x_3} f(x) = 0\} \subset G$ .

Soit  $K$  un compact convexe d'intérieur non vide de  $\mathbb{R}^3$ , on introduit l'ensemble

$$H = \{x \in \partial K \mid \forall y \in K, x_2 \leq y_2 \quad \text{ou} \quad \forall y \in K, x_2 \geq y_2\}$$

et  $Y$  l'ensemble des fonctions  $g \in C^2(K, \mathbb{R})$  telles que,

- $\partial_{x_1} g = \partial_{x_1 x_1}^2 g = \partial_{x_1 x_2}^2 g = \partial_{x_1 x_3}^2 g = 0$  sur  $F$ ,

- $\partial_{x_3}g = \partial_{x_3x_1}^2g = \partial_{x_3x_2}^2g = \partial_{x_3x_3}^2g = 0$  sur  $G$ ,
- et pour  $k = 0, 1, 2, g^{(k)} = 0$  sur  $H$ .

Montrons qu'il existe des constantes  $\alpha > 0$  et  $C > 0$  telles que, pour tout  $g \in Y$  vérifiant  $\sup_{x \in K} \sum_{k=0}^2 \|g^{(k)}(x)\| < \alpha$ , il existe  $h \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  ayant les propriétés suivantes :

- $h|_K = g$ ,
- $\partial_1(f+h) \geq 0$ ,  $\partial_3(f+h) \geq 0$  et  $\partial_1(f+h) + \partial_3(f+h) > 0$ ,
- $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \sum_{k=0}^1 \|h^{(k)}(x)\| \leq C \sup_{x \in K} \sum_{k=0}^2 \|g^{(k)}(x)\|$ .

La démonstration comporte trois étapes.

**Etape 1 :** La première étape consiste à se ramener au cas où l'intersection de  $K$  avec un plan  $\{x_2 = cte\}$  est soit vide, soit réduite à un point, soit un rectangle dont les cotés ont pour direction  $e_1$  ou  $e_3$ . Soit  $J$  la projection de  $K$  sur  $e_2$  parallèlement à  $(e_1, e_3)$ . On introduit les fonctions convexes  $v_1^+$ ,  $v_1^-$ ,  $v_3^+$  et  $v_3^-$  de  $C^0(J, \mathbb{R})$  et le compact  $K'$  définis par :

$$\begin{aligned} v_1^+(s) &= \max_{x \in K, x_2=s} x_1, & v_1^-(s) &= \min_{x \in K, x_2=s} x_1, \\ v_3^+(s) &= \max_{x \in K, x_2=s} x_3, & v_3^-(s) &= \min_{x \in K, x_2=s} x_3, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$K' = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_2 \in J, x_1 \in [v_1^-(x_2), v_1^+(x_2)] \text{ et } x_3 \in [v_3^-(x_2), v_3^+(x_2)]\}. \quad (\text{B.2})$$

Si  $K \neq K'$  on prolonge  $g \in Y$  en  $h_0 \in C^2(K', \mathbb{R})$  de la manière suivante. Pour  $x \in F \cap (K' \setminus K)$ , il existe un unique  $y \in K$  tel que  $x_2 = y_2$ ,  $x_3 = y_3$  et  $[x, y] \subset K' \setminus K$ , on prend

$$\begin{aligned} h_0(x) &= g(y), & h_0^{(1)}(x) &= [0, \partial_{x_2}g(y), \partial_{x_3}g(y)], \\ h_0^{(2)}(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{x_2x_2}g(y) & \partial_{x_2x_3}g(y) \\ 0 & \partial_{x_3x_2}g(y) & \partial_{x_3x_3}g(y) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Pour  $x \in G \cap (K' \setminus K)$ , soit  $y \in K$  tel que  $x_1 = y_1$ ,  $x_2 = y_2$  et  $[x, y] \subset K' \setminus K$ , on prend

$$\begin{aligned} h_0(x) &= g(y), & h_0^{(1)}(x) &= [\partial_{x_1}g(y), \partial_{x_2}g(y), 0], \\ h_0^{(2)}(x) &= \begin{bmatrix} \partial_{x_1x_1}g(y) & \partial_{x_1x_2}g(y) & 0 \\ \partial_{x_2x_2}g(y) & 0 & \partial_{x_2x_1}g(y) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Puis grâce au théorème d'extension de Whitney (voir par exemple [1]) l'application restriction  $R_1 : C^2(K', \mathbb{R}) \rightarrow C^2(K' \cap (K \cup F \cup G), \mathbb{R})$  est surjective. Les hypothèses de ce théorème sont satisfaites car  $F$  et  $G$  sont l'adhérence de leurs intérieurs. Les espaces  $C^2(K', \mathbb{R})$  et  $C^2(K' \cap (K \cup F \cup G), \mathbb{R})$  munies de la norme  $C^2$  sont des espaces de Banach, donc l'application  $R_1$  admet un inverse à droite continu. Il existe donc une constante  $C_1 > 0$  ne dépendant que de  $K, K', F$  et  $G$ , et une fonction  $h_1 \in C^2(K', \mathbb{R})$  tel que  $h_1|_{K' \cap (K \cup F \cup G)} = h_0$  et

$$\sup_{x \in K'} \sum_{k=0}^2 \left\| h_1^{(k)}(x) \right\| \leq C_1 \sup_{x \in K} \sum_{k=0}^2 \left\| g^{(k)}(x) \right\|. \quad (\text{B.5})$$

**Etape 2 :** Maintenant que nous avons fini la première étape, définissons quatre projections sur  $\{x \in \mathbb{R}^3, x_2 \in J\}$ ,

$$\begin{aligned} P_1^+ \text{ la projection sur } S_1^+ &= \{x \in \mathbb{R}^3 | x_2 \in J, x_1 = v_1^+(x_2)\} \text{ parallèlement à } e_1, \\ P_1^- \text{ la projection sur } S_1^- &= \{x \in \mathbb{R}^3 | x_2 \in J, x_1 = v_1^-(x_2)\} \text{ parallèlement à } e_1, \\ P_3^+ \text{ la projection sur } S_3^+ &= \{x \in \mathbb{R}^3 | x_2 \in J, x_3 = v_3^+(x_2)\} \text{ parallèlement à } e_3, \\ P_3^- \text{ la projection sur } S_3^- &= \{x \in \mathbb{R}^3 | x_2 \in J, x_3 = v_3^-(x_2)\} \text{ parallèlement à } e_3. \end{aligned}$$

Soient  $\epsilon > 0$  et

$$\begin{aligned} K_\epsilon &= \{x \in \mathbb{R}^3, x_2 \in J, x_1 \in [v_1^-(x_2) - \epsilon, v_1^+(x_2) + \epsilon], x_3 \in [v_3^-(x_2) - \epsilon, v_3^+(x_2) + \epsilon]\} \\ &\quad \setminus \{x \in \mathbb{R}^3, x_2 \in J, x_1 \in ]v_1^-(x_2), v_1^+(x_2)[, x_3 \in ]v_3^-(x_2), v_3^+(x_2)[\}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Il existe  $\epsilon > 0$ , deux fermés  $F'$  et  $G'$  inclus dans  $K_\epsilon$  que nous nous fixons tels que pour  $x \in K_\epsilon$

- si  $x_1 \geq v_1^+(x_2)$ ,  $x \in F' \Rightarrow P_1^+(x) + [0, \epsilon]e_1 \subset F'$  et  $x \in G' \Rightarrow P_1^+(x) + [0, \epsilon]e_1 \subset G'$ ,
- si  $x_1 \leq v_1^-(x_2)$ ,  $x \in F' \Rightarrow P_1^-(x) + [-\epsilon, 0]e_1 \subset F'$  et  $x \in G' \Rightarrow P_1^-(x) + [-\epsilon, 0]e_1 \subset G'$ ,
- si  $x_3 \geq v_3^+(x_2)$ ,  $x \in F' \Rightarrow P_3^+(x) + [0, \epsilon]e_3 \subset F'$  et  $x \in G' \Rightarrow P_3^+(x) + [0, \epsilon]e_3 \subset G'$ ,
- si  $x_3 \leq v_3^-(x_2)$ ,  $x \in F' \Rightarrow P_3^-(x) + [-\epsilon, 0]e_3 \subset F'$  et  $x \in G' \Rightarrow P_3^-(x) + [-\epsilon, 0]e_3 \subset G'$ ,

et tel qu'il existe  $\epsilon' > 0$  tel que:

- $[\{x \in K_\epsilon, \partial_1 f(x) = 0\} + B(0, \epsilon')] \cap K_\epsilon \subset F' \subset F$ ,
- et  $[\{x \in K_\epsilon, \partial_3 f(x) = 0\} + B(0, \epsilon')] \cap K_\epsilon \subset G' \subset G$ .



Nous allons découper  $K_\epsilon$  en plusieurs parties, comme sur la figure suivante et prolonger notre application sur chacune d'elles.

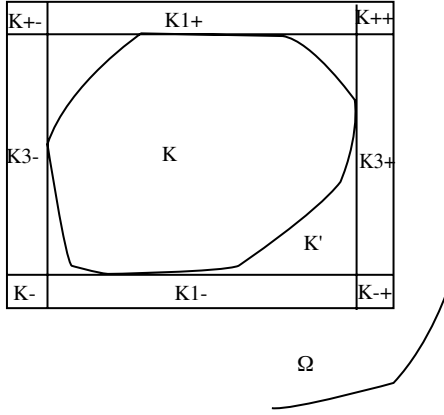


Figure 1. — Découpage de  $K_\epsilon$ .

Nous allons étendre  $h_1$  sur  $K_1^+ = P_1^+(K') + [0, \epsilon]e_1$  en  $h_2 \in C^1(K' \cup (K_1^+ \cap (F' \cup G')))$ . Soit  $R_2$  un inverse à droite de l'application restriction  $C^1([0, \epsilon], \mathbb{R}) \rightarrow C^1(\{0\} \cup [\frac{3\epsilon}{4}, \epsilon], \mathbb{R})$ , notons  $C_2$  sa norme. Prenons une fonction  $M \in C^1(J, \mathbb{R})$  telle que,

$$\forall s \in J, C_2 \sup_{x \in K', x_2=s} \sum_{k=0}^1 |h_1^{(k)}(x)| \leq M(s) \leq (C_2 + 1) \sup_{x \in K', x_2=s} \sum_{k=0}^1 |h_1^{(k)}(x)|$$

$$\text{et } \sup_{x \in J} \sum_{k=0}^1 |M^{(k)}(x)| \leq C_2' \sup_{x \in K} \sum_{k=0}^2 \|g^{(k)}(x)\|. \quad (\text{B.7})$$

Sur  $P_1^+(K') + \epsilon e_1$  on définit  $h_2$  comme suit,

$$h_2(x) = M(x_2), \quad h_2'(x) = [0, M'(x_2), 0]. \quad (\text{B.8})$$

Soit  $\chi \in C^1([0, \epsilon], \mathbb{R})$  une fonction croissante valant 0 sur  $[0, \frac{\epsilon}{4}]$  et 1 sur  $[\frac{3\epsilon}{4}, \epsilon]$ . On prend

$$h_2(x) = h_1(P_1^+(x)) + (M(x_2) - h_1(P_1^+(x)))\chi(x_1 - v_1^+(x_2)) \quad \text{sur } F' \cap K_1^+,$$

ainsi  $\partial_{x_1} h_2$  est positive sur  $F' \cap K_1^+$ . On prend

$$h_2(x) = [R_2(\tilde{h}_1(P_1^+(x))) + (1 - \frac{1}{C_2 + 1})\chi](x_1 - v_1^+(x_2)) \quad \text{sur } G' \cap K_1^+,$$

où  $\tilde{h}_1$  est l'application qui à  $y \in P_1^+(K')$  associe l'éléments  $u \in C^1(\{0\} \cup [\frac{3\epsilon}{4}, \epsilon], \mathbb{R})$  défini par  $u(0) = h_1(y)$ ,  $u'(0) = \partial_1 h_1(y)$  et  $u$  égale à  $\frac{M(y_2)}{C_2+1}$  sur  $[\frac{3\epsilon}{4}, \epsilon]$ . Comme  $\partial_{x_1 x_3}^2 h_1 = 0$  sur  $G' \cap P_1^+(K')$  alors  $\partial_{x_3} h_2 = 0$  sur  $G' \cap K_1^+$ . On impose également  $\partial_{x_3} h_2 = 0$  sur  $G' \cap (P_3^+(K_1^+) \cup P_3^-(K_1^+))$ , puis on étend  $h_2$  en  $h_3 \in C^1(K' \cup K_1^+, \mathbb{R})$  par un inverse à droite de l'application restriction de  $C^1(K' \cup K_1^+, \mathbb{R})$  dans  $C^1(K' \cup (K_1^+ \cap (F' \cup G')), \mathbb{R})$ . Il existe ainsi une constante  $C_3 > 0$  tel que

$$\sup_{x \in K' \cup K_1^+} \sum_{k=0}^1 \left\| h_3^{(k)}(x) \right\| \leq C_3 \sup_{x \in K} \sum_{k=0}^2 \left\| g^{(k)}(x) \right\|. \quad (\text{B.9})$$

On étends  $h_3$  à  $K_1^- = P_1^-(K') + [-\epsilon, 0]e_1$  de façon symétrique en remplaçant  $M$  par  $-M$ , puis sur  $K_3^+ = P_3^+(K') + [0, \epsilon]e_3$  et  $K_3^- = P_3^-(K') + [-\epsilon, 0]e_3$  en interchangeant dans la méthode les directions  $e_1$  et  $e_3$ , et les ensembles  $F'$  et  $G'$ . On obtient donc une constante  $C_4 > 0$  et une application  $h_4$  de classe  $C^1$  sur  $K'' = K' \cup K_1^+ \cup K_1^- \cup K_3^+ \cup K_3^-$  prolongeant  $g$  tel que  $\partial_{x_1} h_4 \geq 0$  sur  $(F \cap K') \cup (F' \cap K'')$ ,  $\partial_{x_3} h_4 \geq 0$  sur  $(G \cap K') \cup (G' \cap K'')$  et

$$\sup_{x \in K''} \sum_{k=0}^1 \left\| h_4^{(k)}(x) \right\| \leq C_4 \sup_{x \in K} \sum_{k=0}^2 \left\| g^{(k)}(x) \right\|. \quad (\text{B.10})$$

**Etape 3 :** On étend maintenant  $h_4$  dans les coins de  $K_\epsilon$ . Soit

$$K^{++} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \in J, x_1 \in [v_1^+(x_2), v_1^+(x_2) + \epsilon], x_3 \in [v_3^+(x_2), v_3^+(x_2) + \epsilon]\},$$

prolongeons  $h_4$  en  $h_5 \in C^1(K'' \cup (K^{++} \cap (F' \cup G')) \cup \partial K^{++}, \mathbb{R})$ . On remarque que si  $x \in F' \cap K^{++}$ , alors  $\{y \in K^{++}, y_2 = x_2\} \subset F'$  et de même avec  $G'$ . Prenons

$$h_5(x) = h_4(P_1^+(x)) + (M(x_2) - h_4(P_1^+(x)))\chi(x_1 - v_1^+(x_2)) \text{ si } x \in F' \cap K^{++},$$

$$\text{et } h_5(x) = h_4(P_3^+(x)) + (M(x_2) - h_4(P_3^+(x)))\chi(x_3 - v_3^+(x_2)) \text{ si } x \in G' \cap K^{++}.$$

Et enfin sur  $\partial K^{++} \setminus K''$ ,  $h_5(x) = M(x_2)$  et  $h_5^{(1)}(x) = [0, M'(x_2), 0]$ . Ainsi  $\partial_{x_1} h_5 \geq 0$  sur  $x \in F' \cap K^{++}$  et  $\partial_{x_3} h_5 \geq 0$  sur  $x \in G' \cap K^{++}$  car

$$h_5(x) \leq C_2 \sup_{x' \in K', x'_2 = x_2} \sum_{k=0}^1 |h_1^{(k)}(x')| \leq M(x_2)$$

sur  $(F' \cap P_1^+(K^{++})) \cup (G' \cap P_3^+(K^{++}))$ . Puis on étend  $h_5$  en  $h_6$ , en utilisant un inverse à droite de l'application restriction de  $C^1(K'' \cup K^{++}, \mathbb{R})$  dans  $C^1(K'' \cup (K^{++} \cap (F' \cup G')) \cup \partial K^{++}, \mathbb{R})$ . De manière symétrique, en remplaçant  $M$  par  $-M$ , on prolonge  $h_5$  en  $h_6$  sur

$$K^{--} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \in J, x_1 \in [v_1^-(x_2) - \epsilon, v_1^-(x_2)], x_3 \in [v_3^-(x_2) - \epsilon, v_3^-(x_2)]\}.$$

Puis on introduit  $K^{-+}$  et on étend  $h_6$  sur  $(K^{-+} \cap (F' \cup G')) \cup \partial K^{-+}$  comme précédemment,

$$K^{-+} = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_2 \in J, x_1 \in [v_1^-(x_2) - \epsilon, v_1^-(x_2)], x_3 \in [v_3^+(x_2), v_3^+(x_2) + \epsilon]\},$$

$$h_6(x) = h_4(P_1^-(x)) + (-M(x_2) - h_4(P_1^-(x)))\chi(v_1^-(x_2) - x_1) \text{ si } x \in F' \cap K^{-+},$$

$$\text{et } h_6(x) = h_4(P_3^+(x)) + (M(x_2) - h_4(P_3^+(x)))\chi(x_3 - v_3^+(x_2)) \text{ si } x \in G' \cap K^{-+}.$$

Soit  $\phi \in C^1(J, [0, 1])$  valant 0 en  $t$  si  $(v_1^-(t), t, v_3^+(t)) \in F'$  et 1 si  $(v_1^-(t), t, v_3^+(t)) \in G'$ . On prolonge  $h_6$  sur les bords extérieurs de  $K^{-+}$  en prenant

$$h_6(x) = M(x_2)(2\phi(x_2)\chi(x_3 - v_3^+) - 1) \quad \text{et} \quad \partial_{x_1} h_6 = 0$$

$$\text{sur } \{x \in \mathbb{R}^3, x_2 \in J, x_1 = v_1^-(x_2) - \epsilon, x_3 \in [v_3^+(x_2), v_3^+(x_2) + \epsilon]\},$$

$$h_6(x) = M(x_2)(1 - 2(1 - \phi(x_2))\chi(v_1^- - x_1)) \quad \text{et} \quad \partial_{x_3} h_6 = 0$$

$$\text{sur } \{x \in \mathbb{R}^3, x_2 \in J, x_1 \in [v_1^-(x_2) - \epsilon, v_1^-(x_2)], x_3 = v_3^+(x_2) + \epsilon\}.$$

Puis on étends  $h_6$  et  $h_7$  par un inverse à droite de l'application restriction

$$C^1(K'' \cup K^{++} \cup K^{--} \cup K^{-+}, \mathbb{R})$$

$$\longrightarrow C^1(K'' \cup K^{++} \cup K^{--} \cup (K^{-+} \cap (F' \cup G')) \cup \partial K^{-+}, \mathbb{R}).$$

La méthode est la même pour étendre  $h_7$  en  $h_8 \in C^1(K_\epsilon, \mathbb{R})$ , il suffit d'inverser les directions  $e_1$  et  $e_3$ , et les ensembles  $F'$  et  $G'$ .

**Etape 4 :** Soit  $P_{K_\epsilon}$  l'application définie sur  $\{x \in \mathbb{R}^3, x_2 \in J\}$  qui à  $x$  associe  $y \in K_\epsilon$  tel que  $y_2 = x_2$  et  $\|y - x\| = \inf_{z \in K_\epsilon, z_2 = x_2} \|z - x\|$ . On définit  $h$  de la manière suivante,

$$h(x) = \begin{cases} h_8(P_{K_\epsilon}(x)) & \text{si } x_2 \in J \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le fait que  $g^{(k)}$  soit nulle sur  $H$  pour  $k \in \{0, 1, 2\}$  implique que  $M$  et  $M'$  sont nulles aux extrémités de  $J$ , et donc  $h$  est de classe  $C^1$ . On a ainsi construit une application  $h$  sur  $\mathbb{R}^3$  prolongeant  $g$  telle que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \sum_{k=0}^1 \left\| h^{(k)}(x) \right\| \leq C \sup_{x \in K} \sum_{k=0}^2 \left\| g^{(k)}(x) \right\| \quad (\text{B.11})$$

avec  $C > 0$  indépendante de  $g$  et telle que  $\partial_{x_1} h \geq 0$  sur  $F'' = \mathcal{C}K_\epsilon \cup F' \cup (F \cap K')$  et  $\partial_{x_3} h \geq 0$  sur  $G'' = \mathcal{C}K_\epsilon \cup G' \cup (G \cap K')$ . De plus  $\partial_{x_1} f > 0$  sur  $\mathcal{C}F''$  et  $\partial_{x_3} f > 0$  sur  $\mathcal{C}G''$ , donc il existe  $\beta > 0$  tel que  $\partial_{x_1} f \geq \beta$  sur  $\mathcal{C}F''$  et  $\partial_{x_3} f \geq \beta$  sur  $\mathcal{C}G''$ . D'où si  $\sup_{x \in K} \sum_{k=0}^2 \left\| g^{(k)}(x) \right\| < \frac{\beta}{C}$  alors  $\partial_{x_1}(f+h) \geq 0$ ,  $\partial_{x_3}(f+h) \geq 0$  et  $\partial_{x_1}(f+h) + \partial_{x_3}(f+h) > 0$ .

Si  $f$  est défini sur un ouvert  $\Omega \neq \mathbb{R}^3$ , cela ne change rien à la méthode. En effet dans la construction seuls les ensembles où  $\partial_{x_1} f$  et  $\partial_{x_3} f$  s'annulent nous ont servi. Il suffit juste de prendre  $\epsilon$  suffisamment petit pour que  $K_\epsilon \subset \Omega$ , ce qui permet ainsi de définir  $\beta$ . Puis on restreint l'application  $h$  à  $\Omega$ .