ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

Mohamed Belhaj Mohamed

Groupes de renormalisation pour deux algèbres de Hopf en produit semi-direct

Tome XXII, n° 2 (2013), p. 421-444.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2013_6_22_2_421_0>

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Vol. XXII, n° 2, 2013
pp. 421–444

Groupes de renormalisation pour deux algèbres de Hopf en produit semi-direct

Mohamed Belhaj Mohamed[1]

Abstract. — We consider two interacting connected graded Hopf algebras, the former being a comodule-coalgebra on the latter. We show how to define analogues of Connes-Kreimer's renormalization group and Beta function, when the graduation operator is replaced by any biderivation coming from an infinitesimal character of the second Hopf algebra.

Résumé. — Nous considérons deux algèbres de Hopf graduées connexes en interaction, l'une étant un comodule-cogèbre sur l'autre. Nous montrons comment définir l'analogue du groupe de renormalisation et de la fonction Bêta de Connes-Kreimer lorsque la bidérivation de graduation est remplacée par une bidérivation provenant d'un caractère infinitésimal de la deuxième algèbre de Hopf.

Sommaire

(*) Reçu le 05/07/2012, accepté le 23/10/2012

(1) Université Blaise Pascal, laboratoire de mathématiques UMR 6620, 63177 Aubière, France laboratoire de mathématiques physique fonctions spéciales et applications, université de sousse, rue Lamine Abassi 4011 H. Sousse, Tunisie
Mohamed.Belhaj@math.univ-bpclermont.fr

Article proposé par Vladimir Rubtsov.

---

1. Introduction

D. Kreimer a montré à la fin des années 90 ([8]) que les graphes de Feynman en théorie quantique des champs s'organisent en une algèbre de Hopf graduée connexe. Sur toute algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ de ce type il est possible de décrire un procédé de renormalisation directement apparenté à l'algorithme de Bogoliubov, Parasiuk, Hepp et Zimmermann (BPHZ) ([1], [12]). Le cadre est le suivant : pour toute algèbre commutative unitaire $\mathcal{A}$ munie d'un *schéma de renormalisation*, c'est-à-dire d'une décomposition $\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_+$ où $\mathcal{A}_-$ et $\mathcal{A}_+$ sont deux sous-algèbres, avec l'unité dans $\mathcal{A}_+$, tout caractère $\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{A}$ admet une unique *décomposition de Birkhoff* en deux caractères φ_- et φ_+ :

$$\varphi = \varphi_-^{*-1} * \varphi_+$$

où $\varphi_-(\operatorname{Ker}\varepsilon) \subset \mathcal{A}_-$ et $\varphi_+(\mathcal{H}) \subset \mathcal{A}_+$ (on désigne par ε la counité). L'étoile $*$ désigne le produit de convolution. Un exemple de schéma de renormalisation est donné par les series de Laurent en une variable complexe z, $\mathcal{A}_+$ désigne alors $\mathbb{C}[[z]]$ et $\mathcal{A}_-$ désigne l'espace $z^{-1}\mathbb{C}[z^{-1}]$ des polynomes en z^{-1}sans terme constant (*schéma minimal*). La valeur renormalisée du caractère φ est définie par $\varphi_+(0)$, qui par définition existe. L'operateur de graduation $Y : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, donné par $Y(x) = nx$ pour x homogène de degré n, est une bidérivation de $\mathcal{H}$. On en déduit une action de $\mathbb{C}$ sur le groupe $G_\mathcal{A}$ des caractères de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{A} = \mathbb{C}[z^{-1}, z]]$, donnée par :

$$\varphi_t(x)(z) = e^{tz|x|}\varphi(x)(z).$$

L'ensemble des caractères locaux est défini par :

$$G_\mathcal{A}^{loc} = \{\varphi \in G_\mathcal{A} \text{ tel que : } \frac{d}{dt}(\varphi_t) = 0\}.$$

Le groupe de renormalisation d'un caractère local φ [5] est défini par :

$$F_t(\varphi)(x) = \lim_{z \longrightarrow 0}(\varphi^{*-1} * \varphi_t)(x)(z).$$

La fonction Bêta est le générateur de ce groupe à un paramètre :

$$\beta(\varphi)(x) := \frac{d}{dt}_{|t=0} F_t(\varphi)(x).$$

L'objectif de ce travail est de définir des objets analogues pour d'autres bidérivations que la graduation Y. Une famille de bidérivations apparaît dans la situation suivante : On suppose qu'il existe une deuxième algèbre de Hopf graduée connexe $\mathcal{K}$ interagissant avec $\mathcal{H}$. Plus précisément on suppose qu'il existe une coaction $\Phi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{H}$ qui est en même temps un morphisme d'algèbres graduées, et telle que :

$$(\mathrm{Id}_{\mathcal{K}} \otimes \Delta_{\mathcal{H}}) \circ \Phi = m^{1,3} \circ (\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_{\mathcal{H}}, \tag{1.1}$$

où $m^{1,3} : \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ est défini par :

$$m^{1,3}(a \otimes b \otimes c \otimes d) = ac \otimes b \otimes d,$$

et Φ s'exprime en notation de Sweedler pour tout $x \in \mathcal{H}$ par :

$$\Phi(x) = \sum_{(x)} x_0 \otimes x_1 = \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes x + \sum_{(x)} x^{(')} \otimes x^{('')}. \tag{1.2}$$

Cette situation se rencontre naturellement dans le cas de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{CK}$ des arbres enracinés [2], et dans le cas plus général de l'algèbre de Hopf des graphes de Feynman orientés sans cycles [10]. Le groupe $G_{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}}$ des caractères de $\mathcal{K}$ (à valeurs dans $\mathcal{A}$) agit alors par automorphismes sur le groupe $G_{\mathcal{A}}$ des caractères de $\mathcal{H}$. Tout caractère infinitésimal $\alpha : \mathcal{K} \to \mathcal{A}$ définit alors une bidérivation B_α de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$, qui peut jouer le rôle de la graduation Y.

Nous montrons que les caractères locaux, le groupe de renormalisation et le fonction Bêta peuvent être définis de la même manière que pour la bidérivation Y. Soit S l'antipode de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$. L'analogue $\varphi \longmapsto \varphi \circ E_\alpha$ de la composition à droite par l'operateur de Dynkin $S * Y$ n'est toutefois pas une bijection des caractères de $\mathcal{H}$ vers les caractères infinitisémaux. Cela vient du fait que $\operatorname{Ker} B_\alpha$ est non trivial (il contient tous les éléments primitifs), contrairement à $\operatorname{Ker} Y$ qui se réduit à l'unité de $\mathcal{H}$.

Remerciements. — Je remercie vivement mes directeurs de thèse Mrs Dominique Manchon et Mohamed Selmi. Le présent travail bénéficie du soutien du projet CMCU Utique Numéro 12G1502.

2. Rappels sur les algèbres de Hopf et la renormalisation

2.1. Algèbres, cogèbres et bigèbres

Dans toute la suite, on désigne par k un corps.

DÉFINITION 2.1. — *Une k-algèbre unitaire est un triplet $(\mathcal{A}; m; u)$ où $\mathcal{A}$ est un k-espace vectoriel et*

$$m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}, \qquad u : k \longrightarrow \mathcal{A},$$

sont deux applications linéaires satisfaisant les deux axiomes suivants :

(1) Associativité :
$$m \circ (m \otimes Id) = m \circ (Id \otimes m).$$

(2) Unité :
$$m \circ (u \otimes Id) = Id = m \circ (Id \otimes u).$$

DÉFINITION 2.2. — *Une cogèbre co-unitaire est un triplet $(\mathcal{C}; \Delta; \varepsilon)$ où $\mathcal{C}$ est un k-espace vectoriel et $\Delta : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ (coproduit), $\varepsilon : \mathcal{C} \longrightarrow k$ (counité) sont deux applications linéaires satisfaisant les deux axiomes suivants :*

(1) Coassociativité :

$$(\Delta \otimes Id) \circ \Delta = (Id \otimes \Delta) \circ \Delta.$$

(2) Counité :
$$(\varepsilon \otimes Id) \circ \Delta = Id_{\mathcal{C}} = (Id \otimes \varepsilon) \circ \Delta.$$

Notation de Sweedler. — Le coproduit d'un élément est donc une somme finie d'éléments indécomposables. Pour décrire le coproduit, on utilise la notation suivante :
$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x_1 \otimes x_2. \tag{2.1}$$

DÉFINITION 2.3. — *Une bigèbre est une famille $(\mathcal{H}, m, u, \Delta, \varepsilon)$ telle que :*

(1) $(\mathcal{H}, m, u)$ est une algèbre unitaire.

(2) $(\mathcal{H}, \Delta, \varepsilon)$ est une cogèbre co-unitaire.

(3) Δ et ε sont des morphismes d'algèbres unitaires ou, de manière équivalente m et u sont des morphismes de cogèbres co-unitaires.

2.2. Dual gradué

Soit $V = \bigoplus_{n \geqslant 0} V_n$ un espace gradué. Soit $n \geqslant 0$. Alors V_n^* s'identifie au sous espace suivant de V^* :

$$V_n^* \approx \{f \in V^*/f(V_k)(0)sik \neq n\}.$$

Par la suite, on identifiera les deux et on pourra écrire $V_n^* \subseteq V^*$.

Définition 2.4. — *Soit V un espace gradué. Le dual gradué de V est le sous-espace suivant de V^* :*

$$V^\circ := \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n^*.$$

Remarque 2.5. — Lorsque chaque V_n est de dimension finie, $V^{\circ\circ}$ est isomorphe à V comme espace gradué.

2.3. Convolution et algèbres de Hopf

Proposition 2.6. — *Soit $\mathcal{C} = (\mathcal{C}; \Delta; \varepsilon)$ une cogèbre co-unitaire et $\mathcal{A} = (\mathcal{A}; m; u)$ une algèbre unitaire. L'espace vectoriel $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ est munie d'une structure d'algèbre de la manière suivante : si $f, g \in \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$,*

$$f * g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta.$$

Autrement dit, pour tout $x \in \mathcal{C}$:

$$f * g(x) = \sum_{(x)} f(x_1)g(x_2).$$

Ce produit est appelé produit de convolution. L'unité est l'application $i : x \longrightarrow \varepsilon(x)\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$.

Définition 2.7. — *Soit $\mathcal{H}$ une bigèbre. On dira que $\mathcal{H}$ est une algèbre de Hopf si $Id_{\mathcal{H}}$ possède un inverse dans l'algèbre de convolution $\mathrm{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. L'unique inverse de $Id_{\mathcal{H}}$ est appelé antipode de $\mathcal{H}$ et il est noté en général S. Autrement dit, $\mathcal{H}$ est une algèbre de Hopf s'il existe une application linéaire $S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \arrow[rr, "S\otimes Id_{\mathcal{H}}"] & & \mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \arrow[dr, "m"] & \\
\mathcal{H} \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & k \arrow[rr, "u"] & & \mathcal{H} \\
 & \mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \arrow[rr, "Id_{\mathcal{H}}\otimes S"] & & \mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

Autrement dit, pour tout $x \in \mathcal{H}$:

$$\sum_{(x)} S(x_1)x_2 = \varepsilon(x)\mathbf{1} = \sum_{(x)} x_1 S(x_2).$$

Proposition 2.8 *([11]). — Soit $(\mathcal{H}, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ une algèbre de Hopf, alors on a :*

(1) $S \circ u = u$ et $\varepsilon \circ S = \varepsilon$.

(2) S est un antimorphisme d'algèbres et un antimorphisme de cogèbres, i.e. si τ est la volte on a :

$$m \circ (S \otimes S) \circ \tau = S \circ m, \tau \circ (S \otimes S) \circ \Delta = \Delta \circ S.$$

(3) Si $\mathcal{H}$ est commutative ou cocommutative, alors $S^2 = Id_{\mathcal{H}}$.

Définition 2.9. *— Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf et $\mathcal{A}$ une algèbre commutative. On dit que $\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{A}$ est un caractère si $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ et pour tout x, $y \in \mathcal{H}$ on a : $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, et on dit que $\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{A}$ est un caractère infinitésimal si $\varphi(\mathbf{1}) = 0$ et pour tout x, $y \in \mathcal{H}$ on a :*

$$\varphi(xy) = \varphi(x)e(y) + e(x)\varphi(y),$$

où $e = u \circ \varepsilon$.

2.4. Algèbres de Hopf graduées connexes

On suppose pour toute la suite que le corps k est de caractéristique zéro. Une algèbre de Hopf graduée sur k est un k-espace vectoriel gradué :

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathcal{H}_n$$

muni d'un produit $m : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, un coproduit $\Delta : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$, le tout verifiant les axiomes d'une algèbre de Hopf [11], et tel que :

$$m(\mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_q) \subset \mathcal{H}_{p+q},$$

$$\Delta(\mathcal{H}_n) \subset \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{H}_p \otimes \mathcal{H}_q,$$

$$S(\mathcal{H}_n) \subset \mathcal{H}_n.$$

Une algèbre de Hopf graduée $\mathcal{H}$ sur k est dite connexe si sa partie homogène de degré zéro est de dimension un, c'est-à-dire réduite à $k.\mathbf{1}$, où $\mathbf{1} = u(1)$

désigne l'unité. La donnée d'une telle algèbre de Hopf $\mathcal{H}$, lorsqu'elle est de plus commutative, équivaut à la donnée du schéma en groupes pro-nilpotents qui à toute algèbre commutative unitaire $\mathcal{A}$ associe le groupe $G_{\mathcal{A}}$ des caractères de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$. Le théorème de Cartier-Milnor-Moore permet de récupérer l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ comme le dual gradué de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}_k)$ où $\mathfrak{g}_k$ est l'algèbre de Lie du groupe G_k, qui peut se voir comme l'ensemble des caractères infinitésimaux de $\mathcal{H}$ à valeurs dans k. Les algèbres de Hopf graduées connexes (commutatives ou non) sont particulièrement bien adaptées aux raisonnements par récurrence sur le degré. Cela vient du fait que pour tout élément x homogène de degré n dans $\mathcal{H}$ on peut écrire en utilisant la notation de Sweedler :

$$\Delta x = x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x + \sum_{(x)} x' \otimes x''$$

où les x' et x'' sont homogènes de degré compris entre 1 et $n-1$. En particulier l'antipode est donné gratuitement par l'une des deux formules de récurrence ci-dessous :

$$S(x) = -x - \sum_{(x)} S(x')x'' \tag{2.2}$$

$$S(x) = -x - \sum_{(x)} x'S(x''). \tag{2.3}$$

D. Kreimer a le premier observé que les graphes de Feynman d'une théorie quantique des champs donnée s'organisent en une algèbre de Hopf commutative graduée connexe [8]. Les règles de Feynman régularisées fournissent un caractère de cette algèbre de Hopf à valeurs dans une algèbre de fonctions, par exemple l'algèbre des fonctions méromorphes d'une variable complexe dans le cas de la régularisation dimensionnelle.

Nous pouvons maintenant expliquer comment renormaliser un caractère φ d'une algèbre de Hopf graduée connexe. Il faut pour cela que φ soit à valeurs dans une algèbre commutative unitaire $\mathcal{A}$ munie d'un schéma de renormalisation, c'est-à-dire d'une décomposition :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_+, \tag{2.4}$$

où $\mathcal{A}_-$ et $\mathcal{A}_+$ sont deux sous-algèbres de $\mathcal{A}$, avec $\mathbf{1}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}_+$. Le schéma minimal évoqué plus haut correspond au cas où $\mathcal{A}$ est l'algèbre (sur $k = \mathbb{C}$) des fonctions méromorphes d'une variable, $\mathcal{A}_+$ est la sous-algèbre des fonctions qui sont holomorphes en un z_0 fixé, et $\mathcal{A}_-$ est la sous-algèbre des polynômes en $(z - z_0)^{-1}$ sans terme constant. L'espace des applications linéaires de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{A}$ est muni du produit de convolution, donné par :

$$\varphi * \psi = m_{\mathcal{A}} \circ (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta. \tag{2.5}$$

Il est facile de vérifier que l'espace des caractères de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ est un groupe pour le produit de convolution. L'élément neutre e est donné par $e(\mathbf{1}) = \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ et $e(x) = 0$ si x est homogène de degré $\geqslant 1$. L'inverse est donné par la composition à droite avec l'antipode :

$$\varphi^{*-1} = \varphi \circ S. \tag{2.6}$$

Chaque caractère φ admet une unique décomposition de Birkhoff :

$$\varphi = \varphi_-^{*-1} * \varphi_+ \tag{2.7}$$

compatible avec le schéma de renormalisation choisi, c'est-à-dire telle que φ_+ prenne ses valeurs dans $\mathcal{A}_+$ et telle que $\varphi_-(x) \in \mathcal{A}_-$ pour tout x homogène de degré $\geqslant 1$. Les composantes φ_+ et φ_- sont données par des formules récursives assez simples: si on note π la projection sur $\mathcal{A}_-$ parallèlement à $\mathcal{A}_+$, et si on suppose que $\varphi_-(x)$ et $\varphi_+(x)$ sont connus pour x de degré $k \leqslant n-1$, on a alors pour tout $x \in \mathcal{H}_n$:

$$\varphi_-(x) = -\pi\left(\varphi(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'')\right), \tag{2.8}$$

$$\varphi_+(x) = (I - \pi)\left(\varphi(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x'')\right). \tag{2.9}$$

On appelle $\varphi_+(x)$ le caractère renormalisé et $\varphi_-(x)$ le caractère des contretermes. Le fait remarquable que les deux composantes φ_+ et φ_- soient encore des caractères de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ provient de la propriété de Rota-Baxter [6] vérifiée par la projection π :

$$\pi(a)\pi(b) = \pi(\pi(a)b + a\pi(b) - ab) \tag{2.10}$$

Définition 2.10. — *Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf graduée connexe sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes, et soit φ un caractère de $\mathcal{H}$ à valeurs dans l'algèbre $\mathcal{A}$ des fonctions méromorphes, munie du schéma de renormalisation minimal en z_0. Alors le caractère à valeurs scalaires donné par $x \longmapsto \varphi_+(x)(z_0)$ définit la valeur renormalisée du caractère φ en z_0.*

L'application linéaire $b(\varphi) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{A}$ donnée par $b(\varphi)(\mathbf{1}) = 0$ et pour tout $x \in \mathcal{H}$ par :

$$b(\varphi)(x) = \varphi(x) + \sum_{(x)} \varphi_-(x')\varphi(x''),$$

est nommée préparation de Bogoliubov et s'écrit $b(\varphi) = \varphi_- * (\varphi - e)$. Les formules de récurrence (2.8) et (2.9) s'écrivent de manière plus compacte :

$$\begin{aligned} \varphi_- &= e + P(\varphi_- * \lambda) \\ &= e + P(\lambda) + P(P(\lambda) * \lambda) + ... + \underbrace{P(P(...P(}_{nfois}\lambda) * \lambda).... * \lambda) + ... \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= e + \widetilde{P}(\varphi_+ * \xi) \\ &= e + \widetilde{P}(\xi) + \widetilde{P}(\widetilde{P}(\xi) * \xi) + ... + \underbrace{\widetilde{P}(\widetilde{P}(...\widetilde{P}(}_{nfois}\xi) * \xi).... * \xi) + ... \end{aligned}$$

avec $\lambda := e - \varphi$, $\xi := e - \varphi^{-1}$, et où P et $\widetilde{P}$ sont les projections sur $L(\mathcal{H}, \mathcal{A})$ définies par $P(\lambda) = \pi \circ \lambda$ et $\widetilde{P}(\xi) = (I - \pi) \circ \xi$, respectivement. A. Connes et D. Kreimer ont montré dans [4] que lorsque $\mathcal{H}$ est l'algèbre de Hopf des graphes de Feynman associés à une théorie des champs renormalisable, cette définition de la renormalisation compatible avec l'algorithme BPHZ des physiciens (tel qu'il est exposé par exemple dans [3]).

3. Deux algèbres de Hopf graduées connexes en interaction

On se placera dans le cadre suivant : $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont deux algèbres de Hopf graduées connexes commutatives et $\Phi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{H}$ une coaction à gauche qui est en même temps un morphisme d'algèbres graduées, et telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[d, "\Delta"'] & & \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \arrow[dd, "I \otimes \Delta"] \\ \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \arrow[d, "\Phi \otimes \Phi"'] & & \\ \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \arrow[rr, "m^{13}"] & & \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \end{tikzcd}$$

i.e :

$$(\mathrm{Id}_{\mathcal{K}} \otimes \Delta_{\mathcal{H}}) \circ \Phi = m^{1,3} \circ (\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_{\mathcal{H}}, \tag{3.1}$$

où $m^{1,3} : \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ est défini par :

$$m^{1,3}(a \otimes b \otimes c \otimes d) = ac \otimes b \otimes d,$$

et Φ s'exprime en notation de Sweedler pour tout $x \in \mathcal{H}$ par :

$$\Phi(x) = \sum_{(x)} x_0 \otimes x_1 = \mathbf{1}_{\mathcal{K}} \otimes x + \sum_{(x)} x^{(')} \otimes x^{('')}, \tag{3.2}$$

avec : $1 \leqslant \left| x^{('')} \right| \leqslant |x| - 1$ et $\left| x^{('')} \right| + deg x^{(')} = |x|$ où $|...|$ désigne le degré dans $\mathcal{H}$ et deg désigne le degré dans $\mathcal{K}$. Le cadre ci-dessus est inspiré par les deux exemples suivants :

3.1. Les arbres enracinés

D. Calaque, K. Ebrahimi-Fard et D. Manchon ont étudié l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ de Connes-Kreimer graduée suivant le nombre de sommets, dans [2], comme comodule sur une algèbre de Hopf $\mathcal{K}$ d'arbres enracinés graduée suivant le nombre d'arêtes. Cette structure est définie de la façon suivante : Pour tout arbre non vide t on a :

$$\Phi(t) = \Delta_{\mathcal{K}}(t) = \sum_{s \subseteq t} s \otimes t/s,$$

où la notation $s \subseteq t$ exprime le fait que s est une sous forêt de l'arbre t, c-à-d s est soit la forêt triviale $\bullet$, ou une collection $(t_1, \cdots, t_n)$ de sous-arbres disjoints de t, chacun d'eux contenant au moins une arête. En particulier, deux sous-arbres d'une sous forêt ne peuvent avoir aucun sommet en commun, et t/s est l'arbre obtenu par contraction des composantes connexes de s en un sommet, et pour $\mathbf{1}$ on a : $\Phi(\mathbf{1}) = \bullet \otimes \mathbf{1}$. On peut écrire $\Phi(t)$ encore de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= \Delta_{\mathcal{K}}(t) = \sum_{s \subseteq t} s \otimes t/s \\
&= \bullet \otimes t + \left(t \otimes \bullet + \sum_{s \text{ sous-forêt propre de } t} s \otimes t/s \right),
\end{aligned}$$

ce qui montre que la formule (3.2) est vérifiée.

Le théorème suivant donne la relation entre cette structure de comodule et le coproduit de Connes-Kreimer $\Delta_{\mathcal{H}}$ défini par :

$$\Delta_{\mathcal{H}}(t) = t \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes t + \sum_{c \in \mathrm{Adm}(t)} P^c(t) \otimes R^c(t), \tag{3.3}$$

où $\mathrm{Adm}(t)$ designe l'ensemble des coupes admissibles d'une forêt t (rappelons qu'une coupe admissible de t est une coupe non vide tel que tout trajet d'un sommet de t vers un autre ne rencontre au plus qu'une seule coupe élémentaire). Une coupe admissible envoie t vers un couple $(P^c(t), R^c(t))$ telle que $R^c(t)$ est la composante connexe de la racine de t après la coupe, et $P^c(t)$ est la forêt formée par les autres composantes connexes. (Voir [2] et [7]).

THÉORÈME 3.1 *[2]. — L'identité suivante est vérifiée :*

$$(\mathrm{Id}_{\mathcal{K}} \otimes \Delta_{\mathcal{H}}) \circ \Phi = m^{1,3} \circ (\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_{\mathcal{H}}, \tag{3.4}$$

où $m^{1,3} : \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ *est définie par :*

$$m^{1,3}(a \otimes b \otimes c \otimes d) = ac \otimes b \otimes d. \tag{3.5}$$

3.2. Les graphes de Feynman orientés sans cycle

Un graphe de Feynman orienté est un graphe orienté (non plan) avec un nombre fini de sommets et d'arêtes, qui peuvent être internes ou externes. Une arête interne est une arête connectée aux deux extrémités à un sommet, une arête externe est une arête avec une extrémité ouverte, l'autre extrémité étant reliée à un sommet.

Un cycle dans un graphe de Feynman orienté est une collection finie d'arêtes orientées internes $(e_1, ..., e_n)$ tels que le but de e_k coincide avec la source de e_{k+1} pour tout $k = 1, ..., n$ modulo n.

Pour toute partie non vide P de l'ensemble $\mathcal{V}(\Gamma)$ des sommets de Γ, le sous graphe $\Gamma(P)$ est défini comme suit : les arêtes internes de $\Gamma(P)$ sont les arêtes internes de Γ avec source et but dans P, et les arêtes externes sont les arêtes externes de Γ avec la source ou le but dans P, ainsi que les arêtes internes de Γ avec une extrémité dans P et l'autre extrémité hors de P.

Un sous-graphe couvrant de Γ est un graphe de Feynman orienté γ (pas forcement connexe), donné par une collection $\Gamma(P_1), ..., \Gamma(P_n)$ de sous-graphes connexes telle que $P_j \cap P_k = \emptyset$ pour $j \neq k$, et telle que tout sommet de Γ appartient à un certain P_j pour $j \in \{1, ..., n\}$.

Pour tout sous-graphe couvrant γ, le graphe contracté Γ/γ est défini par contraction de toutes les composantes connexes de γ sur un point. On dira qu'un sous-graphe couvrant γ de Γ est compatible avec l'ordre partiel si le graphe contracté Γ/γ est sans cycle.

Les graphes de Feynman orientés sans cycles engendrent à la fois une algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ (graduée suivant le nombre des sommets) et une bigèbre $\widetilde{\mathcal{K}}$ (graduée suivant le nombre des arêtes internes) [10]. La coaction à gauche de $\widetilde{\mathcal{K}}$ sur $\mathcal{H}$ est définie par :

$$\widetilde{\Phi}(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}) = \mathbf{1}_{\widetilde{\mathcal{K}}} \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}},$$

et pour tout graphe non vide Γ par :

$$\widetilde{\Phi}(\Gamma) = \Delta_{\widetilde{\mathcal{K}}}(\Gamma) = \sum_{\substack{\gamma \text{ sous graphe couvrant de } \Gamma \\ \text{compatible avec l'ordre partiel}}} \gamma \otimes \Gamma/\gamma.$$

Le coproduit sur $\mathcal{H}$ est défini pour tout graphe orienté sans cycle Γ par :

$$\Delta_{\mathcal{H}}(\Gamma) = \sum_{V_1 \cup V_2 = \mathcal{V}(\Gamma), V_1 \prec V_2} \Gamma(V_1) \otimes \Gamma(V_2), \tag{3.6}$$

où l'inégalité $V_1 \prec V_2$ signifie que pour tout $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$ avec v_1 et v_2 comparable, on a $v_1 \prec v_2$ dans l'ensemble partiellement ordonné des sommets de Γ noté $\mathcal{V}(\Gamma)$.
D'après [10, Theorem 2] le coproduit $\Delta_{\mathcal{H}}$ et la coaction $\widetilde{\Phi}$ vérifient bien :

$$(\mathrm{Id}_{\widetilde{\mathcal{K}}} \otimes \Delta_{\mathcal{H}}) \circ \widetilde{\Phi} = m^{1,3} \circ (\widetilde{\Phi} \otimes \widetilde{\Phi}) \circ \Delta_{\mathcal{H}}. \tag{3.7}$$

En quotientant par l'idéal engendré par les éléments $\Gamma - \mathbf{1}_{\widetilde{\mathcal{K}}}$ où Γ est un graphe sans arêtes internes, la bigèbre $\widetilde{\mathcal{K}}$ donne naissance à une algèbre de Hopf graduée connexe $\mathcal{K}$, et la coaction Φ déduite de $\widetilde{\Phi}$ par passage au quotient vérifie la formule (3.1). La coaction Φ s'écrit alors :

$$\Phi(\Gamma) = \mathbf{1}_{\widetilde{\mathcal{K}}} \otimes \Gamma + \left(\Gamma \otimes \bullet + \sum_{\substack{\gamma \text{ sous graphe couvrant propre de } \Gamma \\ \text{compatible avec l'ordre partiel}}} \gamma \otimes \Gamma/\gamma \right),$$

et verifie bien la formule (3.2).

3.3. Groupes de caractères

On rappelle ici que $\mathcal{A}$ est l'algèbre (sur $k = \mathbb{C}$) des fonctions méromorphes d'une variable, $\mathcal{A}_+$ est la sous-algèbre des fonctions qui sont holomorphes en un z_0 fixé, et $\mathcal{A}_-$ est la sous-algèbre des polynômes en $(z - z_0)^{-1}$ sans terme constant. On désigne par $G_{\mathcal{A}}$ (resp. $G_{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}}$) le groupe des caractères de $\mathcal{H}$ (resp. de $\mathcal{K}$) à valeurs dans $\mathcal{A}, G_{\mathcal{A}_+}$ (resp. $G_{\mathcal{A}_+}^{\mathcal{K}}$) le groupe des caractères de $\mathcal{H}$ (resp. de $\mathcal{K}$) à valeurs dans $\mathcal{A}_+$ et G_c (resp. $G_c^{\mathcal{K}}$) le groupe des caractères de $\mathcal{H}$ (resp. de $\mathcal{K}$) à valeurs constants.

Remarque 3.2. — Dans toute la suite on utilise des notations similaires ($\mathfrak{g}_{\mathcal{A}}$, $\mathfrak{g}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}}$, $\mathfrak{g}_{\mathcal{A}_+}$, $\mathfrak{g}_{\mathcal{A}_+}^{\mathcal{K}}$, $\mathfrak{g}_c$, $\mathfrak{g}_c^{\mathcal{K}}$) pour les algèbres de Lie des caractères infinitésimaux associées aux groupes des caractères.

Tout $\alpha \in G_{\mathcal{A}_+}^{\mathcal{K}}$ s'écrit sous la forme $\exp^{\star} X$ où $X \in \mathfrak{g}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}}$. On définit la bijection Z par :

$$\begin{array}{rcl} Z : G_{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}} & \longrightarrow & G_{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}} \\ \exp^{\star} X & \longmapsto & \exp^{\star} zX \end{array}$$

où $\exp^{\star} zX$ est défini par :

$$\exp^{\star} zX(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!} X^{\star n}(x),$$

pour tout $x \in \mathcal{K}$. L'inverse de Z est donné par la formule suivante :

$$Z^{-1}(\exp^{\star} X)(x) = \exp^{\star} z^{-1} X(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^{-n}}{n!} X^{\star n}.$$

Remarque 3.3. — La somme précédente est finie car elle s'arrête à $n = |x|$ où $|x|$ désigne le degré de x.

Pour tout $g, g' \in G_{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}}$ on pose :

$$g \star_z g' := Z^{-1}(Z(g) \star Z(g')).$$

Définition 3.4. — *L'action de $G_{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}}$ sur $G_{\mathcal{A}}$ est définie pour tout $g \in G_{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}}, \varphi \in G_{\mathcal{A}}, x \in \mathcal{H}$ et $z \in \mathbb{C}$ par :*

$$(g \star_z \varphi)(x)(z) := (Z(g) \star \varphi)(x)(z).$$

Cette formule définit bien une action. En effet pour tout $g, g' \in G_{\mathcal{A}}^{\mathcal{K}}, \varphi \in G_{\mathcal{A}}$ on a :

$$\begin{array}{rcl} g \star_z (g' \star_z \varphi) & = & Z(g) \star (g' \star_z \varphi) \\ & = & Z(g) \star (Z(g') \star \varphi) \\ & = & (Z(g) \star Z(g')) \star \varphi \\ & = & Z(g \star_z g') \star \varphi \\ & = & (g \star_z g') \star_z \varphi. \end{array}$$

Proposition 3.5. — *Soit $\alpha : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}_+$ une transformation linéaire. L'application $B_\alpha : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ définie par :*

$$B_\alpha = (\alpha \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}) \circ \Phi$$

i.e :

$$B_\alpha(x) = \sum_{(x)} < \alpha,\, x_1 > x_0 \tag{3.8}$$

satisfait l'identité :

$$\Delta_{\mathcal{H}} \circ B_\alpha = B_{{}^t m\alpha} \circ \Delta_{\mathcal{H}}, \tag{3.9}$$

où ${}^t m : \mathcal{K}^* \to (\mathcal{K} \otimes \mathcal{K})^*$ *est défini par :* ${}^t m(\alpha)(x \otimes y) := \alpha(xy)$ *et* $B_{{}^t m\alpha} := ({}^t m\alpha \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}) \circ \tau_{2,3} \circ (\Phi \otimes \Phi)$*. En particulier si* $\alpha \in \mathcal{K}^\circ$ *alors* ${}^t m\alpha = \sum_{(\alpha)} \alpha_1 \otimes \alpha_2 \in \mathcal{K}^\circ \otimes \mathcal{K}^\circ$ *et :*

$$\Delta_{\mathcal{H}} \circ B_\alpha = \sum_{(\alpha)} (B_{\alpha_1} \otimes B_{\alpha_2}) \circ \Delta_{\mathcal{H}}. \tag{3.10}$$

Preuve. — L'opérateur B_α est la transposée de l'opérateur de multiplication à gauche

$$L_\alpha : \mathcal{H}^\circ \to \mathcal{H}^\circ$$

donnée par la structure de $\mathcal{H}^\circ$-module à gauche (i.e. $L_\alpha(b) = \alpha \star b$). De même, si $\alpha \in \mathcal{K}^\circ$ alors ${}^t m\alpha \in \mathcal{K}^\circ \otimes \mathcal{K}^\circ$, et $B_{{}^t m\alpha}$ est la transposée de l'opérateur de multiplication à gauche

$$L_{{}^t m\alpha} : \mathcal{H}^\circ \otimes \mathcal{H}^\circ \to \mathcal{H}^\circ \otimes \mathcal{H}^\circ.$$

La structure de $\mathcal{H}^\circ \otimes \mathcal{H}^\circ$-module à gauche donnée par la transposée de $\widetilde{\Phi} = \tau_{2,3} \circ (\Phi \otimes \Phi)$, où la notation $\tau_{2,3}$ désigne la permutation des deux termes intermédiaires, i.e :

$$\tau_{2,3}(a \otimes b \otimes c \otimes d) = a \otimes c \otimes b \otimes d.$$

La preuve de la proposition est un calcul direct basé sur la définition de la coaction Φ :

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathcal{H}} \circ B_\alpha &= \Delta_{\mathcal{H}} \circ (\alpha \otimes \mathrm{Id}) \circ \Phi \\
&= (\alpha \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id}) \circ (\mathrm{Id} \otimes \Delta_{\mathcal{H}}) \circ \Phi \\
&= (\alpha \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id}) \circ m^{1,3} \circ (\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_{\mathcal{H}} \\
&= ({}^t m\alpha \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id}) \circ \tau_{2,3} \circ (\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_{\mathcal{H}} \\
&= B_{{}^t m\alpha} \circ \Delta_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

□

PROPOSITION 3.6. — *Si* $\alpha : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$ *est un caractère infinitésimal de* $\mathcal{K}$ *alors l'opérateur* B_α *est une bidérivation de l'algèbre de Hopf* $\mathcal{H}$.

Preuve. — Le fait que B_α est une codérivation découle immédiatement de la proposition 3.5 et du fait que α est infinitésimal. Montrons maintenant que B_α est une dérivation. Soient $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
B_\alpha(xy) &= \sum_{(xy)} < \alpha, (xy)_1 > (xy)_0 \\
&= \sum_{(x)} \sum_{(y)} < \alpha, x_1 y_1 > x_0 y_0 \\
&= \sum_{(x)} \sum_{(y)} (< \alpha, x_1 > e(y_1) + < \alpha, y_1 > e(x_1)) x_0 y_0 \\
&= \sum_{(x)} < \alpha, x_1 > x_0 y_0 + \sum_{(y)} < \alpha, y_1 > x_0 y_0 \\
&= B_\alpha(x) y + x B_\alpha(y).
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que B_α est une dérivation. $\square$

Corollaire 3.7. — *Si $\alpha : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{A}$ est un caractère infinitésimal de $\mathcal{K}$, alors $\varphi \longmapsto \varphi \circ B_\alpha = \alpha \star \varphi$ est une dérivation de l'algèbre de Hopf $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A})$ pour le produit de convolution.*

Preuve. — Soient $\varphi, \psi \in G_{\mathcal{A}}$.

$$\alpha \star (\varphi * \psi) = \sum_{(\alpha)} (\alpha_1 \star \varphi) * (\alpha_2 \star \psi).$$

Comme α est un caractère infinitésimal, alors il est primitif pour ${}^t m$. On a donc :

$${}^t m(\alpha) = \alpha \otimes 1_{\mathcal{K}^\circ} + 1_{\mathcal{K}^\circ} \otimes \alpha.$$

D'où : $\alpha \star (\varphi * \psi) = (\alpha \star \varphi) * \psi + \varphi * (\alpha \star \psi)$. $\square$

4. Groupe de renormalisation

Pour tout $\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{A}_+}$, on obtient un groupe à un paramètre $\theta_{t,\alpha}$ d'automorphismes de $G_{\mathcal{A}}$ défini pour tout $\varphi \in G_{\mathcal{A}}$ par :

$$\theta_{t,\alpha}(\varphi)(x)(z) = (exp^\star tz\alpha \star \varphi)(x)(z). \tag{4.1}$$

La formule (4.1) définit également un sous-groupe à un paramètre d'automorphismes de l'algèbre $(\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A}), *)$. On note :

$$\varphi_{t,\alpha} := \theta_{t,\alpha}(\varphi). \tag{4.2}$$

En termes de décomposition de Birkhoff $\varphi_{t,\alpha}$ s'écrit :

$$\varphi_{t,\alpha} = (\varphi_{t,\alpha})_-^{*-1} * (\varphi_{t,\alpha})_+.$$

On note $G_{\mathcal{A}}^{\alpha}$ l'ensemble des caractères φ de $\mathcal{H}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ qui vérifient :

$$\frac{d}{dt}(\varphi_{t,\alpha})_- = 0.$$

Proposition 4.1 *Pour tout $\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{A}_+}$, l'équation :*

$$\alpha \star \varphi = \varphi * \gamma \tag{4.3}$$

définit une application :

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha : G_{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \mathfrak{g}_{\mathcal{A}} \\ \varphi & \longmapsto & \gamma \end{array}$$

Preuve. — Pour $x = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$: $\gamma(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}) = 0$ et pour $|x| = 1$ l'équation (4.3) s'écrit en utilisant la notation de Sweedler :

$$\alpha(\mathbf{1}_{\mathcal{K}})\varphi(x) = \varphi(x)\gamma(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}) + \varphi(\mathbf{1}_{\mathcal{H}})\gamma(x).$$

Le fait que $\alpha(\mathbf{1}_{\mathcal{K}}) = \gamma(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}) = 0$ implique que $\gamma(x) = 0$ et pour $x \in \operatorname{Ker} \varepsilon$, l'équation (4.3) s'écrit en utilisant la notation de Sweedler :

$$\alpha(\mathbf{1}_{\mathcal{K}})\varphi(x) + \sum_{x} \alpha(x^{(')})\varphi(x^{('')}) = \gamma(x) + \sum_{(x)} \varphi(x')\gamma(x'').$$

$$\text{Donc : } \gamma(x) = \sum_{x} \alpha(x^{(')})\varphi(x^{('')}) - \sum_{(x)} \varphi(x')\gamma(x'').$$

Ce qui nous permet de définir $\gamma(x)$ par récurrence sur le dégré de x''. Soient $\varphi \in G_{\mathcal{A}}$ et $x, y \in \mathcal{H}$.

$$\begin{array}{rcl} \gamma(xy) & = & \varphi^{*-1} * (\alpha \star \varphi)(xy) \\ & = & \varphi^{*-1} * (\varphi \circ B_\alpha)(xy) \\ & = & \displaystyle\sum_{(xy)} \varphi^{*-1}((xy)_1)\varphi \circ B_\alpha((xy)_2) \\ & = & \displaystyle\sum_{(x)(y)} \varphi^{*-1}(x_1 y_1)\varphi \circ B_\alpha(x_2 y_2) \\ & = & \displaystyle\sum_{(x)(y)} \varphi^{*-1}(x_1)\varphi^{*-1}(y_1)\varphi(B_\alpha)(x_2)y_2 + x_2 B_\alpha(y_2)) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{(x)(y)} \varphi^{*-1}(x_1)\varphi^{*-1}(y_1)(\varphi\circ B_\alpha(x_2)\varphi(y_2)+\varphi(x_2)\varphi\circ B_\alpha(y_2))\\
&= \varphi^{*-1}*(\varphi\circ B_\alpha)(x)e(y)+e(x)\varphi^{*-1}*(\varphi\circ B_\alpha)(y)\\
&= \gamma(x)e(y)+e(x)\gamma(y).
\end{aligned}$$

D'où γ est un caractère infinitésimal. □

Proposition 4.2. — *Soit :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_\alpha : \mathfrak{g}_{\mathcal{A}} &\longrightarrow \mathfrak{g}_{\mathcal{A}}\\
a &\longmapsto \gamma
\end{aligned}$$

Alors on a : $\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi)=\varphi^{*-1}*(\alpha\star\varphi)$ *et* $\mathcal{R}_\alpha(a)=e^{*-a}*(\alpha\star e^{*a})$.

Preuve. — $\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi)=\gamma$ alors en utilisant l'équation (4.3) on obtient : $\alpha\star\varphi=\varphi*\gamma$, d'où :

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi)=\varphi^{*-1}*(\alpha\star\varphi)$$

Comme : $\mathcal{R}_\alpha=\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha\circ exp$ on obtient immédiatement d'après le résultat ci dessus :

$$\mathcal{R}_\alpha(a)=e^{*-a}*(\alpha\star e^{*a}).$$

□

Remarque 4.3. — Si $\alpha=0$ alors on a : $\theta_{t,\alpha}(\varphi)=\varphi$ et $\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha\equiv 0$.

4.1. L'opérateur E_α

Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf graduée connexe, pour tout $\alpha\in\mathfrak{g}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{A}_+}$ on définit l'opérateur E_α par :

$$E_\alpha := S*B_\alpha,$$

où S est l'antipode de $\mathcal{H}$.

Proposition 4.4. — *Si $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf graduée connexe commutative la correspondance $\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha$ se réduit à la composition à droite avec E_α, i.e : $\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi)=\varphi\circ E_\alpha$.*

Preuve. —

$$\begin{aligned}
\varphi\circ E_\alpha &= \varphi\circ(S*B_\alpha)\\
&= (\varphi\circ S)*(\varphi\circ B_\alpha)\\
&= \varphi^{*-1}*(\alpha\star\varphi)\\
&= \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi).
\end{aligned}$$

□

Proposition 4.5. —

$$\mathcal{R}_\alpha(a) = \int_0^1 e^{*-sa} * (a \circ B_\alpha) * e^{*sa} ds = \frac{1 - e^{-ada}}{ada}.(a \circ B_\alpha).$$

Preuve. — Pour tout $u \in \mathbb{C}$ nous avons :

$$e^{*ua} \circ B_\alpha = e^{*ua} * \mathcal{R}_\alpha(ua).$$

On pose $u = t + s$ et on utilise la propriété de groupe $e^{*(t+s)a} = e^{*ta} * e^{*sa}$. En utilisant la propriété de dérivation :

$$(e^{*ta} * e^{*sa}) \circ B_\alpha = (e^{*ta} \circ B_\alpha) * e^{*sa} + e^{*ta} * (e^{*sa} \circ B_\alpha).$$

On trouve :

$$e^{*(t+s)a} \circ B_\alpha = e^{*(t+s)a} * (\mathcal{R}_\alpha(sa) + e^{*-sa} * \mathcal{R}_\alpha(ta) * e^{*sa}).$$

En posant $\gamma(t) = \mathcal{R}_\alpha(ta)$: L'équation précédente devient :

$$\gamma(t + s) = \gamma(s) + e^{*-sa} * \gamma(t) * e^{*sa}.$$

Nous avons $\gamma(0) = 0$. En dérivant l'équation précédente par rapport à s et prenant $s = 0$, on obtient :

$$\dot\gamma(t) = \dot\gamma(0) + [\gamma(t), a].$$

On dérive l'équation précédente par rapport à t on a :

$$\ddot\gamma(t) = [\dot\gamma(t), a].$$

La solution de cette équation différentielle du premier ordre est donnée par :

$$\dot\gamma(t) = e^{*-ta} * \dot\gamma(0) * e^{*ta}.$$

En dérivant l'egalité $e^{*ta} \circ B_\alpha = e^{*ta} * \gamma(t)$ à $t = 0$ on obtient immédiatement :

$$\dot\gamma(0) = a \circ B_\alpha.$$

On intègre puis on prend $t = 1$, ce qui prouve la proposition. □

4.2. Fonction β_α

On désigne par $G^\alpha_{\mathcal{A}_-}$ l'ensemble des éléments $\varphi \in G^\alpha_{\mathcal{A}}$ tels que $\varphi = \varphi_-^{*-1}$. Comme la composition à droite avec B_α est une dérivation pour le produit de convolution, l'application $\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha$ vérifie la propriété de cocycle :

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi * \psi) = \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\psi) + \psi^{*-1} * \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi) * \psi. \tag{4.4}$$

Définition 4.6. — *Pour toute $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A})$, nous associons une forme linéaire* $\operatorname{Res}\varphi$ *sur $\mathcal{H}$ par extraction du coefficient de z^{-1}: plus précisément, si nous avons pour tout $x \in \mathcal{H}$ et pour tout z dans un voisinage de* 0 *:*

$$\varphi(x)(z) = \sum_{n=-N}^{+\infty} \varphi_n(x) z^n,$$

avec $\varphi_n(x) \in \mathbb{C}$, alors :

$$\operatorname{Res}\varphi(x) := \varphi_{-1}(x).$$

Théorème 4.7. —

(1) Pour tout $\varphi \in G_{\mathcal{A}}$ il y a une famille à un paramètre $h_{t,\alpha}$ dans $G_{\mathcal{A}}$ telle que : $\varphi_{t,\alpha} = \varphi * h_{t,\alpha}$ et on a :

$$\dot{h}_{t,\alpha} = \frac{d}{dt} h_{t,\alpha} = h_{t,\alpha} * z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(h_{t,\alpha}) + z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi) * h_{t,\alpha}. \tag{4.5}$$

(2) $z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha$ se restreint en une application de $G^\alpha_{\mathcal{A}}$ dans $\mathfrak{g}^{\mathcal{A}} \cap \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A}_+)$. Par ailleurs $z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha$ envoie $G^\alpha_{\mathcal{A}_-}$ sur l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}^{\mathcal{A}}$ à valeurs constantes.

(3) Pour tout $\varphi \in G^\alpha_{\mathcal{A}}$, le terme constant de $h_{t,\alpha}$ defini par :

$$F_{t,\alpha}(\varphi)(x) = \lim_{z \longrightarrow 0} h_{t,\alpha}(x)(z)$$

est un sous-groupe à un paramètre de $G_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$.

Preuve. —

(1) Pour tout $\varphi \in G_{\mathcal{A}}$ on écrit : $\varphi_{t,\alpha} = \varphi * h_{t,\alpha}$ pour tout $h_{t,\alpha}$ dans $G_{\mathcal{A}}$. D'une part en dérivant l'expression ci-dessus par rapport à t on a : $\dot{\varphi}_{t,\alpha} = \varphi * \dot{h}_{t,\alpha}$
D'autre part en dérivant la formule (4.1) par rapport à t on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{t,\alpha} &= z\alpha \star \varphi_{t,\alpha} \\ &= \varphi_{t,\alpha} * z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi), \end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned} \varphi * \dot{h}_{t,\alpha} &= \varphi_{t,\alpha} * z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi_{t,\alpha}) \\ &= \varphi * h_{t,\alpha} * z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi * h_{t,\alpha}). \end{aligned}$$

$\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha$ verifie la propriété de cocycle (4.4), donc on a :

$$\begin{aligned}\varphi * \dot{h}_{t,\alpha} &= \varphi * h_{t,\alpha} * z\left(\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(h_{t,\alpha}) + h_{t,\alpha}^{*-1} * \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi) * h_{t,\alpha}\right)\\ &= \varphi * h_{t,\alpha} * z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(h_{t,\alpha}) + \varphi * z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi) * h_{t,\alpha}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\dot{h}_{t,\alpha} = h_{t,\alpha} * z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(h_{t,\alpha}) + z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi) * h_{t,\alpha}.$$

(2) Soit $\varphi \in G^\alpha_{\mathcal{A}}$. La décomposition de Birkhoff de $\varphi_{t,\alpha}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\varphi_{t,\alpha} &= (\varphi_{t,\alpha})_-^{*-1} * (\varphi_{t,\alpha})_+\\ &= (\varphi_-)^{*-1} * (\varphi_{t,\alpha})_+\\ &= (\varphi * \varphi_+^{*-1}) * (\varphi_{t,\alpha})_+\\ &= \varphi * h_{t,\alpha}.\end{aligned}$$

Donc $h_{t,\alpha} \in G_{\mathcal{A}_+}$. Alors en écrivant la formule (4.5) à $t = 0$, on montre que $z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi)$ appartient à $\mathfrak{g}^{\mathcal{A}} \cap \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{A}_+)$, ce qui prouve la première partie.
En écrivant l'équation (4.5) à $t = 0$ on obtient :

$$z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi) = \dot{h}_\alpha(0) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(\varphi_{t,\alpha})_+. \tag{4.6}$$

Pour $\varphi \in G^\alpha_{\mathcal{A}_-} = \{\varphi \in G^\alpha_{\mathcal{A}} \text{tel que} \varphi = \varphi_-^{*-1}\}$ on a, puisque $\varphi(\operatorname{Ker}\varepsilon) \subset \mathcal{A}_-$:

$$\begin{aligned}h_{t,\alpha}(x) &= (\varphi_{t,\alpha})_+(x)\\ &= (I-\pi)\left(\varphi_{t,\alpha}(x) + \sum_x \varphi^{*-1}(x')\varphi_{t,\alpha}(x'')\right)\\ &= t(I-\pi)\left(z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi)(x) + z\sum_x \varphi^{*-1}(x')\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi)(x'')\right) + O(t^2)\\ &= t\operatorname{Res}(\alpha \star \varphi) + O(t^2).\end{aligned}$$

Donc :

$$\dot{h}_\alpha(0) = \operatorname{Res}(\alpha \star \varphi). \tag{4.7}$$

Alors d'après la formule (4.6) pour tout $\varphi \in G^\alpha_{\mathcal{A}_-}$ on a :

$$z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi) = \operatorname{Res}(\alpha \star \varphi). \tag{4.8}$$

Inversement, soit $\chi \in \mathfrak{g}^c$, on considère $\psi = \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha^{-1}(z^{-1}\chi)$. Cet élément de $G_{\mathcal{A}}$ vérifie par définition, d'après l'équation (4.3) :

$$z\psi \circ B_\alpha = \psi * \chi.$$

Donc pour tout $x \in \operatorname{Ker} \varepsilon$ on a :

$$\begin{aligned} \alpha \star \psi(x) &= \frac{1}{z}\left(\chi(x)\psi(1_{\mathcal{H}}) + \psi(x)\chi(1_{\mathcal{H}}) + \sum_x \psi(x')\chi(x'')\right) \\ &= \frac{1}{z}\left(\chi(x) + \sum_x \psi(x')\chi(x'')\right). \end{aligned}$$

On suppose que $\alpha \in \mathfrak{g}^c_{\mathcal{K}}$ alors $\alpha \star \psi(x) \in \mathcal{A}_-$. En utilisant la notation de Sweedler on écrit :

$$\begin{aligned} \alpha \star \psi(x) &= \sum_x \alpha(x_0)\psi(x_1) \\ &= \alpha(1_{\mathcal{K}})\psi(x) + \sum_x \alpha(x')\psi(x'') \\ &= \psi(x) + \sum_x \alpha(x')\psi(x''). \end{aligned}$$

Donc :

$$\psi(x) = \alpha \star \psi(x) - \sum_x \alpha(x')\psi(x'').$$

Par récurrence sur le degré de x, la formule ci dessus nous permet de montrer que :

$$\psi(x) \in \mathcal{A}_-$$

par suite :

$$\psi = \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha^{-1}(z^{-1}\chi) \in G^\alpha_{\mathcal{A}_-}.$$

(3) Le deux équations $\varphi_{t,\alpha} = \varphi * h_{t,\alpha}$ et $(\varphi_{t,\alpha})_{s,\alpha} = \varphi_{t+s,\alpha}$ nous permettent d'écrire :

$$h_{s+t,\alpha} = h_{s,\alpha} * (h_{t,\alpha})_{s,\alpha}. \tag{4.9}$$

En effet :

$$\begin{aligned} h_{s+t,\alpha} &= \varphi^{*-1} * (\varphi_{t+s,\alpha}) \\ &= \varphi^{*-1} * (\varphi_{t,\alpha})_{s,\alpha} \\ &= \varphi^{*-1} * \varphi * (h_{t,\alpha})_{s,\alpha} \\ &= \varphi^{*-1} * \varphi_{s,\alpha} * (h_{t,\alpha})_{s,\alpha} \\ &= h_{s,\alpha} * (h_{t,\alpha})_{s,\alpha}. \end{aligned}$$

En prenant $z = 0$ on obtient immédiatement la propriété de groupe à un paramètre :

$$F_{s+t,\alpha} = F_{s,\alpha} * F_{t,\alpha}. \tag{4.10}$$

□

Nous pouvons maintenant définir la foncton β_α.

Définition 4.8. — *Pour tout $\varphi \in G^\alpha_{\mathcal{A}}$ sa fonction β_α est le générateur de groupe à un paramètre $F_{t,\alpha}$, c'est-à-dire l'élement de $\mathcal{H}^*$ défini par :*

$$\beta_\alpha(\varphi) := \frac{d}{dt}_{|t=0} F_{t,\alpha}(\varphi).$$

Proposition 4.9. — *Pour tout $\varphi \in G^\alpha_{\mathcal{A}}$ sa fonction β_α coincide avec celle de la partie négative φ_-^{*-1} dans la décomposition de Birkhoff. Elle est donnée par les expressions :*

$$\begin{aligned} \beta_\alpha(\varphi) &= \operatorname{Res}(\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi)) \\ &= \operatorname{Res}(\varphi_-^{*-1} \circ B_\alpha) \\ &= -\operatorname{Res}(\varphi_- \circ B_\alpha). \end{aligned}$$

Preuve. — On suppose que $\varphi \in G^\alpha_{\mathcal{A}_-}$, alors $\varphi_-^{*-1} = \varphi$. D'où d'après la proposition 3.5, $z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi)$ est constant. La proposition résulte alors des équations :

$$\dot{h}(0) = \operatorname{Res}(\varphi \circ B_\alpha) \text{ et } z\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi) = \operatorname{Res}(\varphi \circ B_\alpha).$$

On suppose que $\varphi \in G^\alpha_{\mathcal{A}}$ et considerons la décomposition de Birkhoff. Comme φ^{*-1} et $\varphi_+ \in G^\alpha_{\mathcal{A}}$, en appliquant la proposition 3.5 nous obtenons :

$$\varphi_{t,\alpha} = \varphi * h_{t,\alpha}$$

$$(\varphi_-^{*-1})_{t,\alpha} = \varphi_-^{*-1} * v_{t,\alpha}$$

$$(\varphi_+)_{t,\alpha} = \varphi_+ * w_{t,\alpha},$$

et l'egalité :

$$\varphi_{t,\alpha} = (\varphi_-^{*-1})_{t,\alpha} * (\varphi_+)_{t,\alpha}$$

donne :

$$\begin{aligned} h_{t,X} &= \varphi^{*-1} * \varphi_{t,\alpha} \\ &= \varphi^{*-1} * (\varphi_-^{*-1})_{t,\alpha} * (\varphi_+)_{t,\alpha} \\ &= \varphi^{*-1} * (\varphi_-^{*-1}) * v_{t,\alpha} * \varphi_+ * w_{t,\alpha}. \end{aligned}$$

Donc :

$$h_{t,\alpha} = (\varphi_+)^{*-1} * v_{t,\alpha} * \varphi_+ * w_{t,\alpha}. \tag{4.11}$$

On désigne par $F_{t,\alpha}, V_{t,\alpha}, W_{t,\alpha}$ respéctivement les sous-groupes à un paramètre obtenus par $h_{t,\alpha}, v_{t,\alpha}, w_{t,\alpha}$ à $z = 0$, il est clair que $(\varphi_+)_{|z=0} = e$ et de même

$W_{t,\alpha}$ est un groupe à un paramètre constant reduit à l'élément neutre e. Ainsi l'équation (4.11) à $z = 0$ se réduit en :

$$F_{t,\alpha} = V_{t,\alpha}.$$

Ce qui prouve la prémière affirmation. En utilisant la propriété de cocycle on obtient :

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi) = \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi_-^{*-1} * \varphi_+) = \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi_+) + \varphi_+^{*-1} * \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi_-^{*-1}) * \varphi_+.$$

Donc :

$$\operatorname{Res}\left(\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi)\right) = \operatorname{Res}\left(\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi_-^{*-1})\right).$$

Comme :

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(e) = \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi_- * \varphi_-^{*-1}) = \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi_-) + \varphi_-^{*-1} * \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi_-^{*-1}) * \varphi_- = 0.$$

Donc :

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi_-^{*-1}) = -\varphi_-^{*-1} * \widetilde{\mathcal{R}}_\alpha(\varphi_-) * \varphi_-.$$

D'où :

$$\operatorname{Res}(\varphi_-^{*-1} * B_\alpha) = -\operatorname{Res}(\varphi_- * B_\alpha).$$

□

Bibliographie

[1] Bogoliubov (N. N.) and Parasiuk (O. S.). — On the multiplication of causal functions in the quantum theory of fields. Acta Math., 97, p. 227-26, (1957).

[2] Calaque (D.), Ebrahimi-Fard (K.), Manchon (D.). — Two interacting Hopf algebras of trees : a Hopf-algebraic approach to composition and substitution of B-series, Advances in Applied Mathematics, 47, No 2, p. 282-308 (2011).

[3] Collins (J.). — Renormalization, Cambridge monographs in math. physics, Cambridge (1984).

[4] Connes (A.), Kreimer (D.). — Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. I. The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem, Comm. Math. Phys. 210, $n^\circ 1$, p. 249-273 (2000).

[5] Connes (A.), Kreimer (D.). — Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. II. The β-function, diffeomorphisms and the renormalization group, Comm. in Math. Phys. 216, p. 215-241 (2001).

[6] Ebrahimi-Fard (K.), Guo (L.), Manchon (D.). — Birkhoff type decompositions and the Baker-Campbell-Hausdorff recursion, Comm. Math. Phys. 267, p. 821-845 (2006).

[7] Foissy (L.). — Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés I + II, thèse, Univ. de Reims (2002), et Bull. Sci. Math. **126**, no. 3, p. 193-239 et no 4, p. 249-288 (2002).

[8] Kreimer (D.). — On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998).

[9] Manchon (D.). — Hopf algebras and renormalisation, Handbook of Algebra,Vol. 5 (M. Hazewinkel ed.), p. 365-427 (2008).

[10] Manchon (D.). — On bialgebra and Hopf algebra of oriented graphs, Confluentes Math. Volume No 04, Issue No 1 (2012).

[11] Sweedler (M. E.). — Hopf algebras, Benjamin, New-York (1969).

[12] Zimmermann (W.). — Convergence of Bogoliubov's method of renormalization in momentum space, Comm. in Math. Phys., 15, p. 208-234 (1969).