

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

JEAN-PAUL BÉZIVIN

Un q -analogue du Théorème de Fukazawa-Gel'fond-Gramain

Tome XXIII, n° 1 (2014), p. 181-195.

http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2014_6_23_1_181_0

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2014, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie de cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Un q -analogue du Théorème de Fukazawa-Gel'fond-Gramain

JEAN-PAUL BÉZIVIN⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Soit q dans \mathbb{Z} tel que $|q| \geq 2$. Dans cette note, nous démontrons que si une fonction entière f a une croissance assez lente et si $f(q^n + iq^m) \in \mathbb{Z}[i]$ pour $n, m \in \mathbb{N}$, alors f est un polynôme.

ABSTRACT. — Let $q \in \mathbb{Z}$ such that $|q| \geq 2$. In this note, we show that if f is an entire function such that $f(q^n + iq^m) \in \mathbb{Z}[i]$ for $n, m \in \mathbb{N}$, and if f is of sufficiently slow growth, then f is a polynomial.

1. Introduction, notations et résultats

Pour f fonction entière d'une variable complexe, on note dans la suite pour $r > 0$ $|f|(r) = \text{Sup}\{|f(z)|; |z| \leq r\}$.

Il y a eu de très nombreux travaux sur les fonctions entières arithmétiques, c'est-à-dire les fonctions entières d'une variable complexe prenant des valeurs entières en certains points de \mathbb{C} . Le premier résultat du genre est un résultat de G.Polya (voir [8]) :

THÉORÈME (G. POLYA). — *Soit f une fonction entière d'une variable complexe, telle que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$, et qu'il existe une constante $c < c_0 = \log 2$ telle que $|f|(r) \leq \exp(cr)$ pour tout r assez grand. Alors f est un polynôme. La constante $c_0 = \log 2$ est la meilleure possible.*

(*) Reçu le 05/05/2013, accepté le 23/09/2013

⁽¹⁾ 1, Allée Edouard Quincey, 94200, Ivry-sur-Seine, France
jp.bezivin@orange.fr, <http://jp.bezivin.pagesperso-orange.fr>

Article proposé par Damian Rössler.

Ce résultat a été étendu à $\mathbb{Z}[i]$ par S. Fukasawa (voir [3]), A. Gel'fond (voir [4]) et finalement F. Gramain (voir [6]) pour obtenir le théorème suivant :

THÉORÈME (FUKAZAWA-GEL'FOND-GRAMAIN). — *Soit f une fonction entière d'une variable complexe. On suppose que $f(\mathbb{Z}[i]) \subset \mathbb{Z}[i]$, et qu'il existe une constante $c < c_0 = \frac{\pi}{2e}$ telle que pour tout r assez grand, on a $|f|(r) \leq \exp(cr^2)$. Alors f est un polynôme. La constante $c_0 = \frac{\pi}{2e}$ est la meilleure possible.*

D'autre part, A. Gel'fond a démontré en 1933 un q -analogue du théorème de G. Polyá cité ci-dessus (voir [5]) :

THÉORÈME (GEL'FOND). — *Soit f une fonction entière d'une variable complexe, et $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geq 2$. On suppose que la fonction f vérifie $f(q^n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que l'on a $|f|(r) \leq \exp(c \frac{(\log r)^2}{\log |q|})$, avec $c < c_0 = \frac{1}{4}$, pour tout r assez grand. Alors f est un polynôme. La constante $c_0 = \frac{1}{4}$ est la meilleure possible.*

Dans cette note, nous allons étudier le problème suivant, qui est un mélange entre le théorème de Fukazawa-Gel'fond-Gramain et celui de A. Gel'fond : Soit $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geq 2$. Que peut-on dire des fonctions entières f telle que l'on ait $f(q^n + iq^m) \in \mathbb{Z}[i]$ pour tout couple (n, m) d'entiers naturels ?

Nous allons démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Soit $q \in \mathbb{Z}$, $|q| > 1$. Soit f une fonction entière d'une variable complexe. On suppose que, pour tous n, m dans \mathbb{N} , on a $f(q^n + iq^m) \in \mathbb{Z}[i]$. Si f vérifie de plus que*

$$|f|(r) \leq \exp\left(c \frac{(\log r)^3}{(\log |q|)^2}\right)$$

pour tout r assez grand, avec $0 < c < c_0 = \frac{2}{139}$, alors f est un polynôme.

Remarque 1.2. — 1) Nous n'avons pas essayé de trouver la meilleure constante possible c_0 , en nous contentant de donner une valeur explicite pour c_0 (et en faisant des majorations assez grossières). Par contre, le lemme 2.4 ci-dessous montre que l'exposant 3 de $\log r$ qui apparaît dans la majoration

du module maximum de f est le meilleur possible, puisque la fonction h entière qui y est construite n'est pas un polynôme, vérifie $h(q^n + iq^m) = 0$ pour tous n, m dans \mathbb{N} , et on a $|h|(r) \leq \exp(\frac{2(\log r)^3}{3(\log |q|)^2} + O((\log r)^2))$.

2) La démarche consistant à définir une fonction de deux variables complexes F par $F(z_1, z_2) = f(z_1 + iz_2)$, qui vérifie $F(q^n, q^m) \in \mathbb{Z}[i]$ pour tous n, m , et d'utiliser les résultats de P. Bundschuh (voir [1], en particulier Satz 1) ne semble pas aboutir, en raisons des conditions imposées à la croissance de f .

2. Résultats préliminaires

Notre premier outil sera un « Lemme de Schwarz » :

LEMME 2.1. — *Soit f une fonction entière d'une variable complexe. Soient r, R tels que $R > r > 0$. Soit U une partie finie du disque $\overline{D}(0, r)$, on suppose que f est nulle sur U . On a alors la majoration :*

$$\log |f|(r) \leq \log |f|(R) - \text{Card}(U) \log\left(\frac{R-r}{2r}\right)$$

Démonstration. — Voir [7], page 15. □

Notre deuxième outil est un « Lemme de Siegel » (nous avons utilisé une forme simple) :

LEMME 2.2. — *Soit $G = (g_{k,l})$ une matrice à coefficients dans \mathbb{Z} avec M lignes et N colonnes. On suppose que $N > M$. Posons $L_k = \sum_{l=1}^N |g_{k,l}|$.*

Il existe alors un vecteur $X = (x_l)$ non nul dans \mathbb{Z}^N , tel que $GX = 0$, et tel que

$$|x_l| \leq \left(\prod_{k=1}^M L_k\right)^{1/(N-M)}$$

Démonstration. — Voir [7], page 8. □

Cependant, nous utiliserons le lemme suivant qui s'en déduit :

LEMME 2.3. — *Soit $G = (g_{k,l})$ une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}[i]$ avec M lignes et N colonnes. On suppose que $N > M$. Posons $L_k = \sum_{j=1}^N |g_{k,l}|$.*

Il existe alors un vecteur $X = (x_l)$ non nul dans $\mathbb{Z}[i]^N$, tel que $GX = 0$, et tel que les x_l soient majorées par

$$|x_l| \leq (\sqrt{2})(\sqrt{2})^{M/(N-M)} \left(\prod_{k=1}^M L_k \right)^{1/(N-M)}$$

Démonstration. — On pose $g_{k,l} = a_{k,l} + ib_{k,l}$, avec $a_{k,l}, b_{k,l}$ dans \mathbb{Z} . On pose aussi $x_l = \alpha_l + i\beta_l$, avec $\alpha_l, \beta_l \in \mathbb{Z}$. Le système $GX = 0$ devient un système aux $2N$ inconnues $\alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_N$, et aux $2M$ équations obtenues en remplaçant l'équation de rang k : $\sum_{l=1}^N x_l g_{k,l} = 0$ par les deux équations

$$\sum_{l=1}^N (a_{k,l}\alpha_l - b_{k,l}\beta_l) = 0$$

et

$$\sum_{l=1}^N (b_{k,l}\alpha_l + a_{k,l}\beta_l) = 0$$

Si on note L_k la somme des valeurs absolues des $g_{k,l}$, $l = 1, \dots, N$, on voit que la somme des valeurs absolues des coefficients des deux équations fabriquées ci-dessus est plus petite que $\sqrt{2}L_k$.

On peut alors appliquer le lemme 2.3 : le système possède une solution non triviale $X = (x_l) \in (\mathbb{Z}[i])^N$, les valeurs absolues des parties réelles et imaginaires des x_l étant majorées par

$$\left(\prod_{k=1}^M (\sqrt{2}L_k)^2 \right)^{1/(2N-2M)} = (\sqrt{2})^{M/(N-M)} \left(\prod_{k=1}^M L_k \right)^{1/(N-M)}$$

et on en déduit immédiatement la majoration des $|x_l|$. □

LEMME 2.4. — On considère le produit infini suivant :

$$h(z) = \prod_{n,m \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{z}{q^n + iq^m} \right)$$

Alors h est une fonction entière d'une variable complexe.

On a :

$$\log |h|(r) \leq \frac{2(\log r)^3}{3(\log |q|)^2} + O((\log r)^2)$$

Démonstration. — Le fait que h est entière est laissé au lecteur. On utilise d'abord la minoration suivante :

$$|q^n + iq^m| = \sqrt{|q|^{2n} + |q|^{2m}} \geq \sqrt{2}|q|^{(n+m)/2}$$

ce qui fournit pour $r > 0$ et z dans \mathbb{C} tel que $|z| \leq r$:

$$|h(z)| \leq \prod_{n,m} \left(1 + \frac{r}{\sqrt{2}|q|^{(n+m)/2}}\right)$$

On regroupe les termes tels que $n + m = k$:

$$|h(z)| \leq \prod_k \left(1 + \frac{r}{\sqrt{2}|q|^{k/2}}\right)^{k+1}$$

Pour un r grand, on définit maintenant l'entier N par $\sqrt{2}|q|^{N/2} \leq r < \sqrt{2}|q|^{(N+1)/2}$. On a $N = \frac{2 \log r}{\log |q|} + O(1)$.

$$\text{Soit } A = \prod_{k \leq N} \left(1 + \frac{r}{\sqrt{2}|q|^{k/2}}\right)^{k+1} \text{ et } B = \prod_{k \geq N+1} \left(1 + \frac{r}{\sqrt{2}|q|^{k/2}}\right)^{k+1}.$$

On commence par majorer B . Comme $r < \sqrt{2}|q|^{(N+1)/2}$, on obtient

$$B \leq \prod_{k \geq N+1} \left(1 + \frac{1}{|q|^{(k-N-1)/2}}\right)^{k+1} = \alpha^N \beta$$

où on a posé $\alpha = \prod_{h \geq 0} \left(1 + \frac{1}{|q|^{h/2}}\right)$ et $\beta = \prod_{h \geq 0} \left(1 + \frac{1}{|q|^{h/2}}\right)^{h+2}$.

On poursuit avec A :

$$A \leq \prod_{k \leq N} \left(\frac{r}{\sqrt{2}|q|^{k/2}}\right)^{k+1} = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^{N^2/2 + O(N)} |q|^{-N^3/6 + O(N^2)}$$

Au total, on trouve que

$$\log |h|(r) \leq \frac{N^2 \log r}{2} - \frac{N^3 \log |q|}{6} + O(N^2)$$

et en remplaçant N par son expression en fonction de $\log r$:

$$\log |h|(r) \leq \frac{2(\log r)^3}{3(\log |q|)^2} + O((\log r)^2)$$

ce qui termine la démonstration. □

THÉORÈME 2.5 *Soit q un nombre complexe tel que $|q| > 1$, et f une fonction entière d'une variable complexe, non nulle. On suppose que f vérifie une équation aux q -différences non triviale à coefficients polynômes :*

$$\sum_{k=0}^s P_k(z) f(q^k z) = 0$$

avec donc P_s non nul. Alors il existe une constante $\lambda > 0$ telle que pour tout r assez grand, on ait :

$$\log |f|(r) \leq \lambda \frac{(\log r)^2}{(\log |q|)}.$$

Démonstration. — Voir [9], Theorem 4.8. □

3. Équations aux q -différences à coefficients polynomiaux

Nous allons utiliser la méthode de Schneider ; celle-ci a déjà été utilisée par Michel Waldschmidt (cf [10]) dans une preuve du théorème de Polya déjà cité.

Nous allons utiliser cette méthode de Schneider de la manière dont Peter Bunschuh l'a utilisée dans [2], (voir le Théorème 2).

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION 3.1. — *Soit $q \in \mathbb{Z}$, $|q| > 1$. Soit f une fonction entière d'une variable complexe. On suppose que, pour tous n, m dans \mathbb{N} , on a $f(q^n + iq^m) \in \mathbb{Z}[i]$. Si f vérifie de plus que*

$$\log |f|(r) \leq c \frac{(\log r)^3}{(\log |q|)^2}$$

pour tout r assez grand, avec $0 < c < c_0 = \frac{2}{139}$, alors f vérifie une équation aux q -différences de la forme :

$$P_0(z) f(z) + \cdots + P_k(z) f(q^k z) + \cdots + P_s(z) f(q^s z) = 0$$

où les P_k sont des polynômes, avec P_s non nul.

Nous décomposons la preuve en plusieurs parties.

3.1. Construction d'une fonction

Soit N dans \mathbb{N} non nul, et

$$g(z) = \sum_{k=0}^N P_k(z) f(q^k z)$$

où les P_k sont des polynômes que l'on suppose à coefficients dans $\mathbb{Z}[i]$, et de degré au plus un entier D .

On considère le système d'équations constitué par $g(q^n + iq^m) = 0$, avec n, m entiers naturels dans $\{0, \dots, L\}$. Les inconnues sont les coefficients $a_{k,j}$ des P_k , qui sont donc dans $\mathbb{Z}[i]$.

On a donc $(L+1)^2$ équations, et $(D+1)(N+1)$ inconnues.

Nous allons choisir ces quantités telles que $N = D = 2L$ et L sera pris supérieur à un entier $L_0 \geq 3$, de façon que les quantités $\log 2, 2 \log(2L+1), L \log 2$, soient toutes inférieures $L^2 \log |q|$, et $3L^2 + 2L \geq 2(L+1)^2$. Nous imposerons aussi que, pour tout $S \geq L_0$, on a :

$$-0,007(S+1)^3(\log |q|) + 16(S+1)^2(\log |q|) \leq -0,006(S+1)^3(\log |q|)$$

Une équation du système considéré ci-dessus est de la forme :

$$\sum_{k,j} a_{k,j} (q^n + iq^m)^j f(q^{k+n} + iq^{k+m}) = 0$$

Nous allons commencer par majorer la somme des modules coefficients d'une ligne.

Cette somme est :

$$\sum_{k,j} |q^n + iq^m|^j |f(q^{k+n} + iq^{k+m})|$$

On a $|q^n + iq^m| \leq \sqrt{2}|q|^{\max\{n,m\}}$, et $|f(q^{k+n} + iq^{k+m})| \leq |f|(\sqrt{2}|q|^{k+\max\{n,m\}})$.

On trouve donc comme première majoration :

$$\sum_{0 \leq k \leq N; 0 \leq j \leq D} (\sqrt{2}|q|^{\max\{n,m\}})^j |f|(\sqrt{2}|q|^{k+\max\{n,m\}})$$

que l'on peut immédiatement majorer par :

$$(N+1)(D+1)(\sqrt{2})^D |q|^{D \max\{n,m\}} |f|(\sqrt{2}|q|^{N+\max\{n,m\}})$$

Comme $\max\{n, m\} \leq L$, on obtient finalement comme majorant :

$$H = (N + 1)(D + 1)(\sqrt{2})^D |q|^{LD} |f|(\sqrt{2}|q|^{N+L})$$

On tient compte maintenant des valeurs de N, D , on trouve que $\log H$ est majoré par :

$$2 \log(2L + 1) + L \log 2 + 2L^2 \log |q| + c \frac{(\log \sqrt{2} + 3L \log |q|)^3}{(\log |q|)^2}$$

Compte tenu des hypothèses faites sur L :

$$\log H \leq 4L^2 \log |q| + c(1 + 3L)^3 \log |q|$$

(on a majoré $\log \sqrt{2}$ par $\log |q|$) et finalement, puisque $37c \leq 1$, il vient

$$\log H \leq 27cL^3 \log |q| + 37cL^2 \log |q| + 4L^2 \log |q| \leq 27cL^3 \log |q| + 5L^2 \log |q|$$

Par le lemme 2.3, le système envisagé a une solution non triviale $a_{k,j}$, les quantités $|a_{k,j}|$ étant majorées par :

$$T = \sqrt{2}(\sqrt{2})^{(L+1)^2 / ((N+1)(D+1) - (L+1)^2)} (H^{(L+1)^2})^{1 / ((N+1)(D+1) - (L+1)^2)}$$

Comme $(N + 1)(D + 1) - (L + 1)^2 = 3L^2 + 2L \geq 2(L + 1)^2$ par les hypothèses faites, les termes $\log(\sqrt{2})$, $\frac{\log \sqrt{2}(L + 1)^2}{(N + 1)(D + 1) - (L + 1)^2}$, sont tous majorés par $L^2(\log |q|)$, et le terme $\frac{(L + 1)^2 \log H}{(N + 1)(D + 1) - (L + 1)^2}$ par $\frac{1}{2} \log H$.

On obtient finalement :

$$\log T \leq 2L^2 \log |q| + \frac{\log H}{2} \leq \frac{27}{2} cL^3 \log |q| + 5L^2 \log |q|$$

3.2. Extrapolation

On considère donc désormais la fonction définie par $g(z) = \sum P_k(z)f(q^k z)$ trouvée dans la section précédente, qui vérifie donc $g(q^n + iq^m) = 0$ pour tout $n, m \leq L$. Nous allons montrer que l'hypothèse que g n'est pas la fonction nulle implique que g est la fonction nulle, (et cette contradiction montrera que g est la fonction nulle...).

Soit $c_1 = 0,006$. Pour un entier $S \geq L$, on considère maintenant les deux assertions suivantes :

I_S : Pour tous $n, m \leq S$, on a $g(q^n + iq^m) = 0$;

II_S : $\log |g|(\sqrt{2}|q|^S) \leq -c_1 S^3 (\log |q|)$.

L'assertion I_L est vraie par construction.

Nous montrons tout d'abord que II_S implique I_S .

En effet, on a pour $n, m \leq S$, l'inégalité

$$|g(q^n + iq^m)| \leq |g|(\sqrt{2}|q|^S) \leq \exp(-c_1 S^3 (\log |q|)) < 1.$$

Comme $g(q^n + iq^m)$ est dans $\mathbb{Z}[i]$, ceci implique qu'il est nul.

Nous montrons maintenant que I_S implique II_{S+1} .

Nous allons appliquer le lemme 2.1. On choisit $r = \sqrt{2}|q|^{S+1}$, l'ensemble U est l'ensemble des $q^n + iq^m$, avec $n, m \leq S$, qui est de cardinal $(S+1)^2$ et inclus dans le disque $\overline{D}(0, r)$, et $R = \sqrt{2}|q|^{3(S+1)}$.

On a donc :

$$\log |g|(r) \leq \log |g|(R) - (S+1)^2 \log\left(\frac{R-r}{2r}\right)$$

On a

$$\frac{R-r}{2r} = \frac{1}{2}(|q|^{2S+2} - 1) \geq \frac{1}{4}|q|^{2(S+1)}$$

ce qui donne :

$$\log |g|(r) \leq \log |g|(R) - 2(S+1)^3 (\log |q|) + 2(\log 2)(S+1)^2$$

et comme $\log 2 \leq \log |q|$:

$$\log |g|(r) \leq \log |g|(R) - 2(S+1)^3 (\log |q|) + 2(\log |q|)(S+1)^2$$

Nous estimons maintenant $|g|(R)$.

On a :

$$|g|(R) \leq \sum_{k=0}^N |P_k|(R) |f|(|q|^k R)$$

De plus :

$$|P_k|(R) \leq T(1 + R + \cdots + R^D) \leq T(D + 1)R^D$$

On en déduit que

$$|g|(R) \leq (N + 1)T(D + 1)R^D |f|(|q|^N R)$$

donc

$$\log |g|(R) \leq D \log R + \log T + \log((N + 1)(D + 1)) + \log |f|(|q|^N R)$$

Il vient alors :

$$\log |g|(R) \leq D \log R + \log T + \log((N + 1)(D + 1)) + c \frac{(N \log |q| + \log R)^3}{(\log |q|)^2}$$

On remplace N, D par leurs valeurs en fonction de L et R en fonction de S .

Le terme $D \log R = 6L(S + 1) \log |q| + L \log 2$ est majoré par $7(S + 1)^2 (\log |q|)$.

Le terme $\log((N + 1)(D + 1)) = 2 \log(2L + 1)$ est majoré par $L^2 (\log |q|)$ par hypothèse, donc par $(S + 1)^2 (\log |q|)$.

On a

$$\frac{(N \log |q| + \log R)^3}{(\log |q|)^2} = \frac{(2L \log |q| + 3(S + 1) \log |q| + \log(\sqrt{2}))^3}{(\log |q|)^2}$$

On majore $2L \log |q| + 3(S + 1) \log |q| + \log(\sqrt{2})$ par $5(S + 1) \log |q| + \log |q|$, ce qui donne :

$$\frac{(N \log |q| + \log R)^3}{(\log |q|)^2} \leq 125(S + 1)^3 (\log |q|) + 91(S + 1)^2 (\log |q|)$$

Enfin, on a :

$$\log T \leq \frac{27}{2} c L^3 \log |q| + 5L^2 \log |q| \leq \frac{27}{2} c (S + 1)^3 \log |q| + 5(S + 1)^2 \log |q|$$

Finalement, en majorant $91c$ par 2 :

$$\log |g|(R) \leq (125 + \frac{27}{2}) c (S + 1)^3 (\log |q|) + 14(S + 1)^2 (\log |q|)$$

Il en résulte que $\log |g|(r)$ est majoré par :

$$(138, 5c - 2)(S + 1)^3(\log |q|) + 16(S + 1)^2(\log |q|)$$

Comme $c < \frac{2}{139}$ et $S \geq L \geq L_0$, il vient :

$$\log |g|(r) \leq -0,007(S+1)^3(\log |q|) + 16(S+1)^2(\log |q|) \leq -0,006(S+1)^3(\log |q|)$$

et cette dernière majoration est II_{S+1} .

Compte tenu de ce qui précède, on obtient donc que I_S et II_S sont vraies pour tout $S \geq L + 1$. On a donc d'après II_S que $\log |g|(r) < 0$ pour tout r , ce qui montre que la fonction g est constante, donc nulle puisqu'elle a de nombreux zéros.

On a donc bien montré que la fonction f vérifie une équation non triviale aux q -différences.

4. Equation algébrique

Notre but est maintenant la proposition suivante :

PROPOSITION 4.1. — *Soit f une fonction entière telle qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que l'on ait pour r assez grand l'inégalité $|f|(r) \leq \exp(\lambda \frac{(\log r)^2}{\log |q|})$. On suppose de plus que $f(q^n + iq^m) \in \mathbb{Z}[i]$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$. Alors il existe un polynôme $Q(X, Y)$ non nul, à coefficients dans \mathbb{C} , tel que $Q(z, f(z)) = 0$.*

Nous suivons le schéma de la démonstration qui précède.

4.1. Construction d'une fonction auxiliaire.

Posons

$$g(z) = \sum_{k=0}^N P_k(z) f(z)^k$$

où les polynômes P_k sont de degré au plus D , les coefficients de P_k sont dans $\mathbb{Z}[i]$. On écrit

$$P_k(z) = \sum_{j=0}^D a_{k,j} z^j$$

Soit L un entier non nul. Nous allons considérer le système d'équations en les inconnues $a_{k,j}$ défini par $g(q^n + iq^m) = 0$, avec $n, m \leq L$. On a donc $(L+1)^2$ équations et $(N+1)(D+1)$ inconnues.

Nous notons $[x]$ la partie entière du réel positif x , et nous posons $N = [2L^{1/2}]$, $D = [2L^{3/2}]$. Soit L_0 tel que pour tout $L \geq L_0$, les quantités : $\log 2, \log(N+1), \log(D+1), D \log \sqrt{2}$, soient $\leq (L+1)^2(\log |q|)$. Nous imposons aussi que pour $L \geq L_0$, on ait $(N+1)(D+1) - (L+1)^2 \geq 2(L+1)^2$, que

$$(21\lambda + 17)(L+1)^{5/2}(\log |q|) - (L+1)^3(\log |q|) \leq -\frac{1}{2}(L+1)^3(\log |q|)$$

pour tout $L \geq L_0$.

Soit $L \geq L_0$.

On commence par majorer les coefficients d'une ligne d'une équation $g(q^n + iq^m) = 0$. On a une première majoration par :

$$\sum_{k,j} |q^n + iq^m|^j |f(q^n + iq^m)|^k$$

Le facteur $|q^n + iq^m|^j |f(q^n + iq^m)|^k$ est majoré par $(\sqrt{2}|q|^L)^j (|f|(\sqrt{2}|q|^L))^k$ et par suite par $(\sqrt{2}|q|^L)^D (|f|(\sqrt{2}|q|^L))^N$. Par conséquent, on obtient comme majorant :

$$H = (N+1)(D+1)(\sqrt{2}|q|^L)^D (|f|(\sqrt{2}|q|^L))^N$$

On a donc :

$$\log H \leq \log(N+1) + \log(D+1) + LD(\log |q|) + D(\log \sqrt{2}) + \lambda N \frac{((\log(\sqrt{2}) + L \log |q|))^2}{\log |q|}$$

On note que $((\log \sqrt{2}) + L \log |q|) \leq (L+1)(\log |q|)$, de sorte qu'avec les hypothèses faites,

$$\log H \leq LD(\log |q|) + \lambda N(L+1)^2(\log |q|) + 3(L+1)^2(\log |q|)$$

On a $D \leq 2L^{3/2} + 1$, donc $LD \leq 2L^{5/2} + L \leq 2(L+1)^{5/2} + (L+1)^2$, et $N \leq 2L^{1/2} + 1 \leq 2(L+1)^{1/2} + 1$, de sorte que $N(L+1)^2 \leq 2(L+1)^{5/2} + (L+1)^2$.

Finalement, on obtient que :

$$\log H \leq (2\lambda+2)(L+1)^{5/2} \log |q| + (4+\lambda)(L+1)^2(\log |q|) \leq (3\lambda+6)(L+1)^{5/2}(\log |q|)$$

Nous utilisons maintenant le lemme 2.2, qui entraîne que notre système a une solution non triviale, les valeurs absolues des $a_{k,j}$ étant majorées par

$$T = \sqrt{2}(\sqrt{2})^{(L+1)^2/((N+1)(D+1)-(L+1)^2)}(H^{(L+1)^2})^{1/((N+1)(D+1)-(L+1)^2)}$$

On a $\frac{1}{((N+1)(D+1)-(L+1)^2)} \leq \frac{1}{2(L+1)^2} \leq \frac{1}{(L+1)^2}$, ce qui donne comme majoration pour $\log T$:

$$\log T \leq \log \sqrt{2} + \log \sqrt{2} + \log H \leq (3\lambda + 7)(L+1)^{5/2}(\log |q|)$$

4.2. Extrapolation

Nous considérons la fonction g trouvée dans la section précédente, et nous procédons comme auparavant en supposant g non nulle. Soit $c_1 = \frac{1}{2}$.

Pour $S \geq L$, on considère les deux assertions :

I_S : On a $g(q^n + iq^m) = 0$ pour tous les $n, m \leq S$;

II_S : On a $|g|(\sqrt{2}|q|^S) \leq -c_1 S^3(\log |q|)$.

L'assertion I_L est vraie par construction.

On montre d'abord que l'assertion II_S implique l'assertion I_S .

En effet, si $n, m \leq S$, on aura que $g(q^n + iq^m) \in \mathbb{Z}[i]$, et $|g(q^n + iq^m)| \leq |g|(\sqrt{2}|q|^S) \leq \exp(-c_1 S^3(\log |q|)) < 1$, de sorte que $g(q^n + iq^m) = 0$.

On montre maintenant que l'assertion I_S implique l'assertion II_{S+1} .

Nous appliquons le lemme 2.1 en choisissant $r = \sqrt{2}|q|^{S+1}$, $R = \sqrt{2}|q|^{2(S+1)}$; U est l'ensemble des $q^n + iq^m$ avec $n, m \leq S$, de cardinal $(S+1)^2$.

Nous commençons par majorer $|g|(R)$. On a tout d'abord que

$$|P_k|(R) \leq T(1 + R + \dots + R^D) \leq (D+1)TR^D$$

Le terme $P_k(z)(f(z))^k$ est donc majoré par

$$T(D+1)R^D \exp\left(\lambda k \frac{(\log(\sqrt{2}) + 2(S+1)\log |q|)^2}{\log |q|}\right)$$

et on trouve donc comme majorant

$$|g|(R) \leq (N+1)T(D+1)R^D \exp\left(\lambda N \frac{(\log(\sqrt{2}) + 2(S+1)\log|q|)^2}{\log|q|}\right)$$

On majore $\log\sqrt{2}$ par $\log|q|$, on prend le logarithme, et on utilise les hypothèses faites sur L (en tenant compte que $S \geq L$) ; il vient :

$$\log|g|(R) \leq \log T + D \log R + \lambda N(2(S+1)+1)^2 \log|q| + 2(L+1)^2(\log|q|)$$

Le terme $D \log R = D(2(S+1)\log|q| + \log(\sqrt{2}))$ est $\leq 4(L+1)^{3/2}(S+1)\log|q| + 2(L+1)^{3/2}\log\sqrt{2} \leq 6(S+1)^{5/2}(\log|q|)$, et le terme $N(2(S+1)+1)^2$ est $\leq 8(S+1)^{5/2} + 10(S+1)^2 \leq 18(S+1)^{5/2}$ en procédant de même.

Par suite :

$$\log|g|(R) \leq (21\lambda + 15)(S+1)^{5/2}(\log|q|)$$

Nous regardons maintenant le terme $\frac{R-r}{2r} = \frac{1}{2}(|q|^{S+1} - 1) \geq \frac{|q|^{S+1}}{4}$, de sorte que $\log\left(\frac{R-r}{2r}\right) \geq (S+1)(\log|q|) - 2(\log 2) \geq (S+1)\log|q| - 2(\log|q|)$.

Par le lemme 2.1, on a la majoration :

$$\log|g|(r) \leq (21\lambda + 15)(S+1)^{5/2}(\log|q|) - (S+1)^2((S+1)\log|q| - 2(\log|q|))$$

soit

$$\log|g|(r) \leq (21\lambda + 17)(S+1)^{5/2}(\log|q|) - (S+1)^3(\log|q|)$$

Par le choix de L_0 , et le fait que $S \geq L \geq L_0$, on obtient que $\log|g|(r) \leq -\frac{1}{2}(S+1)^3(\log|q|)$, ce qui est II_{S+1} . On en déduit que I_S et II_S sont vrais pour tous les $S \geq L+1$, et par suite comme dans la conclusion de la partie précédente, la fonction g est nulle, ce qui termine la démonstration de la proposition 4.1.

5. Démonstration du théorème 1.1

Sous les hypothèses du théorème 1.1, on peut appliquer les résultats de la proposition 3.1 : Il existe une constante $\lambda > 0$ telle que, pour tout r assez grand, on a $|f|(r) \leq \exp\left(\lambda \frac{(\log r)^2}{\log|q|}\right)$.

On a donc vérifié les hypothèses de la proposition 4.1, ce qui montre qu'il existe un polynôme Q à deux variables, non nul, tel que $Q(z, f(z)) = 0$. Par suite, f est entière et algébrique sur $\mathbb{C}(z)$, c'est donc un polynôme, ce qui termine la démonstration.

Bibliographie

- [1] BUNDSCHUH (P.). — Arithmetische Eigenschaften ganzer Funktionen mehrerer Variablen. *J für die reine Angew Math*, 313, p. 116-132 (1980).
- [2] BUNDSCHUH (P.). — A theorem of Gel'fond via Schneider's method. In: *New trends in probability and statistics, vol II (Palanga 1991)* (ed by F.Schweiger and E. Manstavicius), 9-15. VSP, Utrecht (1992).
- [3] FUKAZAWA (S.). — Uber ganzwertige ganze Funktionen. *Tôhoku Math J*, 27, p. 41-52 (1926).
- [4] GEL'FOND (A.). — Sur les propriétés arithmétiques des fonctions entières. *Tôhoku Math J*, 30, p. 280-285 (1929).
- [5] GEL'FOND (A.). — Sur les fonctions entières qui prennent des valeurs entières dans les points β^n . *Mat Sb*, 40, p. 42-47 (1933).
- [6] GRAMAIN (F.). — Sur le théorème de Fukasawa-Gel'fond. *Invent. Math*, 63, no. 3, p. 495-506 (1981).
- [7] Les nombres transcendants. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, No. 13 (1984).
- [8] POLYA (G.). — Uber ganzwertige ganze Funktionen. *Rend Circ Mat Palermo*, 40, p. 1-16 (1915).
- [9] RAMIS (J-P.). — About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q -difference equations. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math*, 6, no. 1, p. 53-94 (1992).
- [10] WALDSCHMIDT (M.). — Polya's theorem by Schneider's method. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 31, no. 1-2, p. 21-25 (1978).