

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

LAURENT C. SIEBENMANN

Les bisections expliquent le théorème de Reidemeister-Singer : Un retour aux sources

Tome XXIV, n° 5 (2015), p. 1025-1056.

http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2015_6_24_5_1025_0

© Université Paul Sabatier, Toulouse, 2015, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques » (<http://afst.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://afst.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie de cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Les bisections expliquent le théorème de Reidemeister-Singer

Un retour aux sources

L.C. SIEBENMANN⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — Le théorème de Reidemeister-Singer des années 20 affirme que deux scindements de Heegaard d'une même variété de dimension 3 deviennent isotopes après une suite de sommes connexes deux-à-deux disjointes avec le scindement standard de la 3-sphère le long d'un tore plongé et non-noué. Cet article en donne une preuve qui n'utilise que les idées disponibles lorsque le théorème fut énoncé, en particulier la notion de bisection linéaire pour des complexes tels que ceux utilisés par J. W. Alexander en 1930. L'histoire est rappelée, en particulier celle des diverses démonstrations plus ou moins convaincantes du théorème.

ABSTRACT. — The Reidemeister-Singer theorem of the 1930s asserts that any two Heegaard splittings of a closed 3-manifold become ambient isotopic after repeated pairwise connected sum with the standard splitting of the 3-sphere by an embedded and unknotted 2-torus. This article gives a bootstrapping proof using only ideas available when the theorem was first asserted, notably a notion of linear bisection in complexes of a sort used by J.W. Alexander in 1930. Much history is recounted, including various convincing or unconvincing proofs of the theorem.

1. Introduction

Le théorème de Reidemeister-Singer des années '30 [Rei2] [Si] – surnommé (RST) – affirme unicité des scindements de Heegaard d'une 3-variété close et orientable, modulo un nombre fini d'applications d'une opération appelée stabilisation élémentaire, qui est définie au §2.

Les deux articles originaux sur (RST) en 1933 par K. Reidemeister [Rei2] et J. Singer [Si] offrent des preuves au mieux fragmentaires ou obscures

⁽¹⁾ Département mathématique, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay, France.

(cf. §5). Depuis lors jusqu'en 1980, deux preuves plus convaincantes de (RST) ont surgi, l'une de Robert Craggs [Cr] (1976) basée sur la collapsibilité de toute triangulation linéaire du 3-simplexe établie par D. Chillingworth [Ch] en 1967 (un résultat encore inconnu en dimensions > 3), et l'autre de F. Bonahon [Bon] (1980 approx) (voir [Laud]) basée sur la théorie de J. Cerf [Ce] (1970) des chemins génériques dans l'espace des fonctions réelles sur une variété lisse et close.

Cet article propose, au §4, une preuve autonome de (RST) dont l'idée dominante — apparue en 1930 dans un article de J.W. Alexander [Alex2] — est l'opération de *bissection linéaire* d'une cellule convexe (= polytope). Le Fait Fondamental, prouvé au §3, concerne deux cellulations de l'espace utilisée par Alexander d'un même espace compact *de dimension quelconque* — cellulations supposées compatibles entre elles par subdivisions linéaires quelconques. Il affirme qu'il existe toujours une troisième cellulation subdivisant les deux et obtenue à partir de chacune par *une suite finie de bisections linéaires*.

Cet article est basé sur ma prépublication [Sieb2] de 1980 à laquelle j'ai apporté en 2015 bon nombre de corrections et additions. La plus importante est l'exploitation pour tout 3-bretzel d'une cellulation dont toute 1-cellule se trouve dans le bord.

Le Fait Fondamental reste, je crois, d'actualité car il permet d'établir rapidement en toute dimension beaucoup d'invariances par homéomorphisme linéaire par morceaux, et par difféomorphisme ; par exemple, celles de l'homologie et celles des torsions de Reidemeister et de Whitehead, voir [Rei3] [Wh] [Mi]. Par contre, (RST) en est une conséquence rare qui soit foncièrement géométrique. À son tour, (RST) s'est révélé assez fort pour figurer dans plusieurs théorèmes marquants au sujet des 3-variétés. Par exemple, il a aidé F. Waldhausen [Wald] à prouver vers 1968 que tout scindement de Heegaard de la 3-sphère est standard, et il a aidé A. Casson à prouver vers 1985 que l'invariant de Rokhlin est nul pour toute 3-variété close et simplement connexe, voir [AkM][GM].

La notion de bissection a une longue histoire liée initialement à la caractéristique d'Euler. Au §6 j'en donne une petite chronologie. (La prépublication [Sieb2] de 1980 raconte plus amplement.)

Annexe(I) au §7 est dédiée à une esquisse de preuve de la variante (RST \sim) de (RST) où l'hypothèse "orientable" est remplacé par "non-orientable". (RST \sim) fut affirmée pour la première fois dans l'article [Si] (1933) de J. Singer. Ma preuve de (RST \sim) reste très proche de celle de (RST) au §4.

Annexe(II) au §8 repère quelques sommets atteints depuis 1980 dans l'étude des scindements de Heegaard. Un de ces sommets, atteint vers 2000, est une nouvelle preuve (voire peut-être plusieurs) de (RST) suite aux efforts

de plusieurs virtuoses de la topologie trois-dimensionnelle combinatoire. Elle contraste avec la preuve de (RST) au §4, car cette dernière utilise surtout des méthodes valables en toute dimension (les bisections linéaires), jointes à des constructions en dimension 2 (de cellulations de 2-variétés planaires), et finalement l'équation $3 = 2 + 1$.

Je tiens à remercier chaleureusement mes collègues Michel Boileau, Alexis Marin et Jean-Pierre Otal (et aussi l'arbitre) de m'avoir patiemment et discrètement facilité la mise en forme finale de ma preuve de (RST).

2. Formulation du théorème de Reidemeister-Singer (=RST)

Ce théorème (RST) concerne la catégorie PL (=pseudo-linéaire, =linéaire par morceaux, =semi-linéaire) dont les objets X, Y , etc. sont les "espaces PL" localement compacts définis dans [Hu] [RS] [Zee] (et aussi au §3), et dont les morphismes (appelés applications PL) $f : X \rightarrow Y$ sont les applications continues qui, pour des triangulations PL convenables (cf. §3) de X et Y , sont affine-linéaires sur chaque simplexe. Dans cet exposé, *linéaire* voudra dire affine linéaire (donc, conservant convexité et parallélisme). Isomorphisme PL est une relation d'équivalence entre espaces PL que nous noterons \cong . Sauf indication contraire, un sous-espace PL Y d'un espace PL Z est supposé fermé dans Z ; en plus, son inclusion $Y \hookrightarrow Z$ est PL. Une *isotopie ambiante* PL d'un espace PL X est un isomorphisme PL $H : X \times [0, 1] \rightarrow X \times [0, 1]$ de la forme $H : (x, t) \mapsto (h_t(x), t)$ où $h_0(x) = x$ pour tout $x \in X$. Dans la suite, *toute isotopie PL sera sous-entendue ambiante et à support compact*. L'équivalence de sous-espaces PL par une telle isotopie sera indiquée par \approx ; ainsi, pour un sous-espace PL Y de X on a $Y \approx h_t(Y)$ (ci-dessus) pour tout $t \in [0, 1]$. On utilisera souvent un *voisinage régulier* d'un sous-espace PL (fermé) $Y \subset X$; normalement il est noté $N(Y; X)$ ou simplement $N(Y)$.

Si X est une variété PL et Y est son bord, alors, tout voisinage régulier $N(Y; X)$ est un *voisinage collier* et $N(Y; X) \cong \partial Z \times [0, 1]$. Par la suite, il sera nécessaire de comprendre d'autres éléments de *la théorie des variétés* PL [Zee] [Gla] [Hu] [RS] [St], concernant en particulier leur théorie des anses (voir surtout [RS; chap. 3]). Une variété *close* est pour nous compacte, sans bord, et connexe.

Dans une 3-variété M sans bord, soit donnée une 3-sous-variété P à bord ∂P non-vide et connexe. On définit une modification de P appelée *stabilisation élémentaire*; elle est bien définie seulement à isotopies PL près (à support compact) de M : on choisit dans M un 2-disque compact D dont l'intersection $D \cap P$ est un arc PL compact A dans l'intersection $\partial D \cap \partial P$ des bords. L'adhérence de $\partial D - A$ est alors aussi un arc PL, soit A^* , dont le bord $\partial A^* = \partial A$ est deux points de ∂P . Le *stabilisé* P_s de P est par définition le bord de $P \cup N(A^*)$ où $N(A^*)$ est un voisinage régulier de A^* dans le

complément $P^* := M - \text{Int}P$. Ce $N(A)$ est une 1-anse attachée à P dans M . Par des théorèmes bien connus d'unicité pour D et $N(A^*)$, on déduit unicité de P_s à isotopie de M près, respectant P , et à support compact.

Dans ces conditions on dit que $P_s \subset M^3$ est un *stabilisé élémentaire* de P , et on écrit $P \overset{\circlearrowright}{\cong} P_s$ (ou parfois $P_s \overset{e}{\curvearrowright} P$).

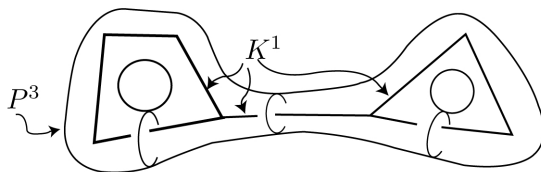
Voici quelques remarques qui sont logiquement inessentiellles pour la suite, mais qui aident à comprendre logiquement et visuellement :

Remarque. — Les deux images des applications $\pi_1(\partial P) \rightarrow \pi_1(M)$ et $\pi_1(\partial P_s) \rightarrow \pi_1(M)$ induites par inclusion coïncident — à conjugaison près dans $\pi_1(M)$. C'est le disque D qui l'assure.

Remarque. — P_s est à isotopie de M près (à support compact) le résultat d'ajouter à P dans M un petit tore solide T non-noué dans $M - \text{Int}P$, "collé" à P de façon que $T \cap P = \partial T \cap \partial P$ est un 2-disque. Pour démontrer ceci on peut considérer un voisinage régulier T de ∂D qui respecte D et aussi P .

Remarque. — Stabilisation de $P^* := M - \text{Int}P$ vaut stabilisation de P , c'est-à-dire que $(P^*)_s$ est équivalent à $(P_s)^*$ par une isotopie de M à support compact. En particulier leurs bords $\partial((P^*)_s)$ et ∂P_s sont ainsi isotopes. On peut visualiser cette isotopie; mais elle peut sembler miraculeuse. La théorie des anses en dimension 3 donne une explication systématique — en termes d'une paire d'anses d'indices 1 et 2 en position d'annulation mutuelle. Le point essentiel est ceci: Le dual par complémentation d'une telle paire d'anses en est une autre.

Dans une 3-variété M , un *bretzel* P est une 3-sous-variété compacte à bord qui est un voisinage régulier $N(K)$ dans M d'un sous-espace PL compact et connexe $K \subset \text{Int}M$ qui est de dimension 1. (Ce K n'est ni spécifié par P , ni unique.)



Un bretzel $P \subset M^3$ présente un *scindement de Heegaard* de M^3 si le complément de son intérieur $P^* = M - \text{Int}P$ est également un bretzel. M est alors forcément *close* (= compacte, sans bord, et connexe). P^* est appelé le *dual* de P .

La triade de variétés $(M; P, P^*)$ est alors un *scindement de Heegaard* de M . Son *genre* est le rang du groupe d'homologie $H_1(P; \mathbb{Z}) \cong H_1(P^*; \mathbb{Z})$.

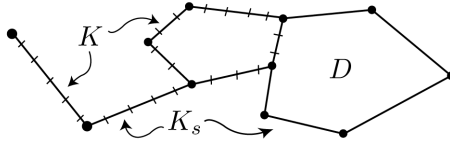
La surface close $H := P \cap P^* = \partial P = \partial P^*$ est sa *surface de Heegaard*. Par définition, la relation d'*isotopie* de scindements de Heegaard de M découle de façon évidente d'isomorphisme PL de triades réalisé par un automorphisme de M qui est PL isotope à l'identité.

Remarque. — Clairement, les trois inclusions dans M de H , P , et P^* induisent chacune une surjection de groupe fondamental.

Un exemple clef de scindement de Heegaard de M est un voisinage régulier du 1-squelette d'une triangulation PL de M . En effet, M^3 est alors un corps d'anses ayant une anse d'indice k pour chaque k -cellule, et le bretzel P est l'union des anses d'indices 0 et 1. Son dual $P^* := M - \text{Int}P$ est la réunion des anses d'indice 2 (= co-indice 1) et d'indice 3 (= co-indice 0), d'où P^* est aussi un bretzel.

Voici un contexte comportant stabilisation élémentaire qu'il faut bien retenir pour la suite. $N(X)$ y désigne un voisinage régulier d'un sous-espace PL X dans M .

EXEMPLE CLEF 2.1. — *On a $P \overset{\circlearrowright}{\nearrow} P_s$ quand $P = N(K)$ et $P_s = N(K_s)$, où K et K_s sont des sous-espaces PL dans la 3-variété M avec $K \subset K_s$, et où il existe un 2-disque PL $D \subset M$ tel que $K_s = K \cup \partial D$ et $D \cap K = \partial D \cap K$ est un arc ou un point.* \square



Une sous-variété compacte $P' \subset M$ est un *stabilisé* d'une autre, $P \subset M$, et on écrit $P \overset{\circlearrowright}{\nearrow} P'$ (ou $P' \overset{\circlearrowleft}{\searrow} P$) s'il existe une suite finie : $P = P_1, P_2, \dots, P_n = P'$ de bretzels dans M tels que $P_i \overset{\circlearrowright}{\nearrow} P_{i+1}$, pour $i = 1, \dots, n - 1$.

Voici finalement le principal théorème visé (RST).

(RST) THÉORÈME DE REIDEMEISTER-SINGER 2.2. — *Dans une 3-variété M^3 close et orientable, soient donnés deux bretzels P et P' présentant chacun un scindement de Heegaard de M^3 . Il existe toujours un troisième bretzel $\hat{P} \subset M^3$ tel que \hat{P} est un stabilisé et de P et de P' ; en symboles : $P \overset{\circlearrowright}{\nearrow} \hat{P} \overset{\circlearrowleft}{\searrow} P'$.*

Ce Théorème (RST) sera démontré au §4.

La variante (RST \sim) de (RST) remplace le mot *orientable* par le mot *non-orientable*; elle sera démontrée dans l'Annexe (I) au §7.

3. Les cellulations d'Alexander et leurs bisections

Les cellules en question seront des *polytopes*; la monographie [Zieg] expose bien ce qu'il faudra savoir de ces polytopes.

Un *polytope* est un compact convexe (sous-entendu non-vide) dans un espace vectoriel (ou affine) réel, qui n'a qu'un nombre fini de *points extrémaux*.

Un point x d'un polytope D appartient au *bord affine* de D noté $\text{bd}D$ si, dans l'espace affine $A(D)$ engendré par D , il existe un point $y \neq x$ dans $A(D)$ tel que l'intervalle rectiligne compact $[xy]$ sort immédiatement de D , c'est-à-dire $x = D \cap [xy]$. L'*intérieur affine* de D est $\text{int}D := D - \text{bd}D$.

Remarque. — Si le polytope D est un seul point, alors $\text{bd}D$ est vide et $\text{int}D = D$.

La *dimension* $\dim(D)$ d'un polytope D est la dimension affine (vectorielle) de $A(D)$. D est un disque (PL et topologique) de dimension $\dim(D)$ et $\text{bd}D$ est une sphère (PL et topologique) de dimension $\dim(D) - 1$.

Une *face* F d'un polytope D est une intersection non-vide $H \cap D$ dans $A(D)$ où H est un hyperplan (de codimension 1) de $A(D)$ qui est disjoint de $\text{int}D$. Ce F est un polytope. Sa *codimension* est $\dim D - \dim F$. Une face de dimension 0 d'un polytope est un point extrémal et inversement.

Les raisonnements à venir au §3 utilisent, de façon très essentielle, une notion que nous appelons *cellulation d'Alexander* d'un espace PL. Le célèbre topologue américain J.W. Alexander l'a exploitée *implicitement* dans [Alex2] de 1930. C'est une généralisation de la notion de complexe simplicial dont une vertu essentielle sera d'être stable par une opération appelée *bisection*.

Une *cellulation d'Alexander* d'un espace topologique localement compact et métrisable X est la donnée d'un recouvrement localement fini $\mathcal{D} = \{D_i\}$ de X par des compacts D_i appelés *cellules* de \mathcal{D} , dont chacune est dotée (par un homéomorphisme topologique) d'une structure de polytope. Ce recouvrement $\mathcal{D} = \{D_i\}$ est assujéti aux deux axiomes (i) en (ii) ci-dessous :

(i) les intérieurs affines $\text{int}D_i$, $D_i \in \mathcal{D}$, constituent une partition de X en ensembles disjoints.

(ii) pour chaque $D_i \in \mathcal{D}$, le bord affine $\text{bd}D_i \subset X$ est l'union finie d'autres cellules $D_j \in \mathcal{D}$, et pour chaque $D_j \subset D_i$ l'inclusion $D_j \hookrightarrow D_i$ est (affine) linéaire.



On dit aussi que l'espace X muni de \mathcal{D} est un *complexe d'Alexander*.

VARIANTE PL. — Nous allons rencontrer aussi la notion moins stricte (et moins utile!) de *cellulation* PL. On la définit en parallèle, en substituant : structure de polytope par structure de cellule PL, l'intérieur ou bord de polytope par intérieur ou bord de variété PL, et finalement application affine par application PL. Voir aussi la fin de ce paragraphe.

Convention "ad hoc" pour croquis. — Dans les deux croquis ci-dessus, et dans chaque croquis à suivre (sauf exceptions signalées), un complexe d'Alexander de dimension ≤ 2 est présenté succinctement par un graphe compact et non-vide dans le plan du papier; les arêtes sont rectilignes et les sommets sont conventionnellement marqués. Le 1-squelette du complexe présenté est par définition ce graphe. Ses 2-cellules sont, par définition, les adhérences des régions convexes du complément du graphe. Par exemple, le graphe de gauche ci-dessus présente un complexe ayant deux 2-cellules – un polytope trilatère (= 2-simplexe), et un polytope quadrilatère; et le graphe de droite présente un complexe ayant six 2-cellules, chacune un 2-simplexe.

Exemple. — Pour tout polytope P (de dimension ≥ 1), la collection des faces (de codimension ≥ 1 et non-vides) est un complexe d'Alexander homéomorphe à la sphère de dimension $\dim P - 1$.

Exemple. — La cellulation du cercle \mathbb{R}/\mathbb{Z} dont les 1-cellules sont $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$ est un complexe d'Alexander bien que l'intersection des deux 1-cellules est deux cellules et pas une seule cellule. Ce complexe d'Alexander n'admet aucun plongement dans un espace affine qui soit linéaire sur ses deux 1-cellules.

Exemple. — Il n'y a pas de cellulation d'Alexander de \mathbb{R}/\mathbb{Z} ayant une seule 1-cellule.

Exemple. — Cellulation d'une 2-sphère par deux 2-cellules triangulaires, dont l'intersection est un cercle fait de six 1-cellules.

K.Reidemeister, dans son livre [Rei3] de 1938, a *explicitement* introduit essentiellement cette notion sous le nom "randtreue Zerlegung eines Polyeders", et l'a traité en détail.

Un *sous-complexe* \mathcal{D}' de \mathcal{D} est une collection de cellules de \mathcal{D} qui vérifie les axiomes (i) et (ii); pour cela, il suffit que, pour chaque $D' \in \mathcal{D}'$, toute cellule $D \in \mathcal{D}$ vérifiant $D \subset D'$ est une cellule de \mathcal{D}' . On écrit $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$. L'*intersection* et l'*union* de sous-complexes sont bien définies et correspondent aux notions ensemblistes sous-jacentes.

On dit qu'une cellulation d'Alexander \mathcal{D}' de X est une *subdivision* d'une autre cellulation d'Alexander \mathcal{D} de X et on écrit $\mathcal{D}' \prec \mathcal{D}$ (ou parfois $\mathcal{D} \succ \mathcal{D}'$) si chaque cellule $D'_j \in \mathcal{D}'$ est contenue dans une cellule $D_i \in \mathcal{D}$ (qui dépend de D'_j) et que l'inclusion $D'_j \hookrightarrow D_i$ est linéaire.

Le sous-complexe de \mathcal{D} des cellules de \mathcal{D} de dimension $\leq d$ (où d est un entier ≥ 0) est appelé le d -*squelette* et est notée $\mathcal{D}^{(d)}$.

Deux cellulations d'Alexander $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ d'un même espace X sont *compatibles* s'il existe une subdivision commune \mathcal{D}_0 , c'est-à-dire $\mathcal{D}_1 \succ \mathcal{D}_0 \prec \mathcal{D}_2$. On écrit alors $\mathcal{D}_1 \succ \prec \mathcal{D}_2$.

LEMME 3.1. — *La compatibilité $\succ \prec$ est une relation d'équivalence entre les cellulations d'Alexander d'un même espace topologique.*

Preuve. — La symétrie de $\succ \prec$ étant évidente, on prouve la transitivité. Étant donnés, $\mathcal{D}_1 \succ \mathcal{D}_0 \prec \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_2 \succ \mathcal{D}'_0 \prec \mathcal{D}_3$, on a certainement $\mathcal{D}_0 \prec \mathcal{D}_2 \succ \mathcal{D}'_0$.

Affirmation. — *Il existe alors une subdivision canonique d'Alexander $\widehat{\mathcal{D}} \prec \mathcal{D}_2$ telle que $\mathcal{D}_0 \succ \widehat{\mathcal{D}} \prec \mathcal{D}'_0$.*

Soit D une cellule de \mathcal{D}_2 de dimension d . Les d -cellules de $\widehat{\mathcal{D}}$ qui rencontrent $\text{int} D$ sont par définition, les intersections non-vides de la forme $D_0 \cap D'_0$, où $D_0 \in \mathcal{D}_0$ et $D'_0 \in \mathcal{D}'_0$ sont d -cellules telles que $D_0 \cap D'_0 \cap \text{int} D \neq \emptyset$. \square

Remarque. — Ce $\widehat{\mathcal{D}}$ est alors la cellulation d'Alexander la moins fine qui vérifie $\mathcal{D}_0 \succ \widehat{\mathcal{D}} \prec \mathcal{D}'_0$.

Si D et D' sont deux polytopes, le produit cartésien $D \times D'$ est un polytope. Donc, si \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont deux complexes d'Alexander, il y a un complexe d'Alexander $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ dont l'espace PL sous-jacent est $|\mathcal{C}| \times |\mathcal{C}'|$.

Mathématiquement parlant, aucune notion de cellulation à part celle d'Alexander n'importe pour la suite. Mais d'autres notions de cellulation abondent dans la littérature, et méritent ainsi des remarques destinées aux lecteurs qui les ont rencontrés. Ces lecteurs se doivent de bien distinguer la cellulation d'Alexander de la notion banale et bien plus restrictive de *cellulation par polytopes* (= "polytopal complex" de [Zieg])(= "convex linear cell complex" de [Hu])(= "cell-complex" de [RS])(= "regular cell complex" souvent ailleurs).

Observation. — Toute *cellulation par polytopes* est une cellulation d'Alexander. Inversement une cellulation d'Alexander \mathcal{D} est une cellulation par polytopes si et seulement si elle vérifie cette condition: *Si deux cellules distinctes D_i et D_j de \mathcal{D} ont intersection $D_i \cap D_j$ non-vide, alors, ou bien leur intersection est une face de chaque, ou bien l'un est une face de l'autre.*

Observation. — Tout complexe simplicial non-ordonné est une cellulation par polytopes. Inversement, une cellulation par polytopes est une triangulation comme complexe simplicial non-ordonné si et seulement si chaque cellule est un simplexe linéaire.

On dit qu'une cellulation d'Alexander \mathcal{D}' , qui est une subdivision d'une autre \mathcal{D} , *résulte d'une bisection de \mathcal{D} dans la cellule $D \in \mathcal{D}$* , et on écrit :

$$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}' \text{ ou encore } \mathcal{D}' \leftarrow \mathcal{D},$$

si on peut former \mathcal{D}' en remplaçant $D \in \mathcal{D}$ par trois cellules D_-, D_+, D_0 où D_0 est linéaire de codimension 1 dans D (= une section hyperplane de D dans l'espace affine $A(D)$) et découpe D en deux cellules D_-, D_+ de même dimension dont l'union $D_- \cup D_+$ est D et l'intersection $D_- \cap D_+$ est D_0 . Il est à noter que $(\text{bd}D) \cap D_0$ est alors *forcément* une réunion de cellules de \mathcal{D} .



L'opération inverse $\mathcal{D}' \mapsto \mathcal{D}$ s'appelle *accouplement*.

On écrit $\mathcal{D} \twoheadrightarrow \mathcal{D}'$, ou encore $\mathcal{D}' \twoheadleftarrow \mathcal{D}$, s'il existe une suite finie de bisections telle que

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{D}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{D}_n = \mathcal{D}',$$

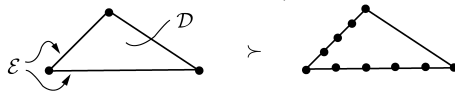


et on dit que \mathcal{D}' *se déduit de \mathcal{D} par bisections*. Évidemment, $\mathcal{D} \twoheadrightarrow \mathcal{D}'$ entraîne $\mathcal{D} \succ \mathcal{D}'$, mais la réciproque est loin d'être vraie :



Un avantage de la notion de cellulation d'Alexander, par rapport aux complexes simpliciaux par exemple, est la :

VERTU CARDINALE 3.2. — *Étant donné un complexe d'Alexander \mathcal{D} et un sous-complexe \mathcal{E} , toute subdivision de \mathcal{E} (éventuellement par bisections) induit canoniquement une subdivision (respectivement par bisections) de \mathcal{D} qui laisse intacte toute cellule D de \mathcal{D} qui n'est pas dans \mathcal{E} (tout en subdivisant éventuellement son bord $\text{bd}D$).* \square



Remarques. — Cette vertu n'est pas partagée par les *cellulations par polytopes* car, dans ces cellulations là, chaque *face* d'une cellule en tant que

polytope, doit, par hypothèse, être exactement *une cellule*. Par contre, notre notion d'*espace PL* est orthodoxe (modulo terminologie), cf. [Hu] [RS] [Zee].

Notons cette définition alternative d'*espace PL* : c'est un espace topologique X muni d'une famille maximale de cellulations d'Alexander qui sont compatibles entre elles. Quand il sera question d'une cellulation \mathcal{D} d'Alexander d'un espace PL, on supposera implicitement qu'elle appartient à cette famille.

Tout complexe d'Alexander \mathcal{D} a un *espace PL sous-jacent* – lequel on va noter $|\mathcal{D}|$; on accueille dans sa famille toute cellulation d'Alexander qui est PL compatible avec \mathcal{D} . Évidemment, l'*espace topologique sous-jacent* à $|\mathcal{D}|$ coïncide avec celui sous-jacent à \mathcal{D} ; on le note $\|\mathcal{D}\|$.

Tout espace Cartésien réel \mathbb{R}^n , $0 \leq n < \infty$, est naturellement un espace PL.

Tout ouvert d'un espace PL $|\mathcal{D}|$ est canoniquement un espace PL, mais pas de la forme $|\mathcal{E}|$ pour un sous-complexe $\mathcal{E} \prec \mathcal{D}$ – sauf si l'ouvert est aussi fermé.

LEMME DES BISSECTIONS PAR UN HYPERPLAN 3.3. — *Soit X un espace PL muni d'une cellulation \mathcal{C} d'Alexander. Soit D une cellule de \mathcal{C} plongée canoniquement dans l'espace affine réel $A(D)$ qu'elle engendre. Soit \mathcal{D} le sous-complexe de \mathcal{C} des cellules contenues dans D ; c'est ainsi une cellulation d'Alexander du polytope $|\mathcal{D}|$.*

Soit H un hyperplan de $A(D)$ (affine et de codimension 1) tel que l'intersection $H \cap \text{int}D$ est non-vide. Soient A_+ , A_- les deux demi-espaces de $A(D)$ connexes et fermés tels que $A_+ \cap A_- = H$, et $A_- \cup A_+ = A(D)$.

Alors H induit une subdivision par bisections $\mathcal{D} \# \widehat{\mathcal{D}}$ où $\widehat{\mathcal{D}}$ est une cellulation d'Alexander de D ayant comme cellules précisément :

(a) *les cellules de \mathcal{D} contenues dans A_+ ou dans A_- , et*

(b) *pour chaque cellule $E \in \mathcal{D}$ ni dans A_+ ni dans A_- , les trois cellules polytopes $E \cap A_+$, $E \cap A_-$, et $E \cap H$, les trois étant absentes de \mathcal{D} .*

Ces mêmes bisections élémentaires constituent une subdivision par bisections $\mathcal{C} \# \widehat{\mathcal{C}}$ laissant intacte toute cellule de \mathcal{C} qui n'est pas contenue dans D .

Preuve du lemme 3.3. — Il y a une bisection élémentaire pour chaque cellule $E \in \mathcal{D}$ découpée en deux par H selon le cas (b). Il suffit d'exécuter ces bisections élémentaires en ordre de dimension croissante de $E \in \mathcal{D}$, pour constater que $\mathcal{C} \# \widehat{\mathcal{C}}$. \square

FAIT FONDAMENTAL 3.4. — *Soit K un espace PL compact. Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux cellulations d'Alexander de K . Il existe toujours une cellulation*

d'Alexander \mathcal{E} de K qui est une subdivision par bisections de \mathcal{D} et de \mathcal{D}' , i.e. on a $\mathcal{D} \# \mathcal{E} \# \mathcal{D}'$.

La preuve du Fait Fondamental occupera moins qu'une page.

Caveat. — Il semble en pratique laborieux de calculer, et difficile d'estimer le nombre minimum de bisections élémentaires nécessaires pour $\mathcal{D} \# \mathcal{E} \# \mathcal{D}'$. (Même si on utilise le corps \mathbb{Q} à la place de \mathbb{R} .)

Remarque. — Ce Fait Fondamental entraîne facilement l'invariance par isomorphisme PL des groupes d'homologie d'un complexe, ainsi que des torsions de Reidemeister et de Whitehead; ces torsions ne sont pas toujours des invariants du type d'homotopie, cf. [Rei3] et [Mil].

Remarque. — Les bisections élémentaires des complexes d'Alexander jouent, pour les espaces PL compacts, un rôle tout à fait analogue au rôle que jouent les "Reidemeister moves" (voir Wikipedia) pour les noeuds et entrelacs compacts dans \mathbb{R}^3 . Dans les deux contextes, il s'agit de transformations simples qui engendrent, par itération finie, exactement l'équivalence d'isomorphie que le topologue est censé étudier.

Abordons la preuve de 3.4. Par nos hypothèses, \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont des cellulations d'Alexander compatibles, c'est-à-dire qu'il existe une cellulation \mathcal{D}_0 de K qui subdivise \mathcal{D} et aussi \mathcal{D}' , i.e. $\mathcal{D} \succ \mathcal{D}_0 \prec \mathcal{D}'$.

AFFIRMATION. — Il existe une cellulation \mathcal{D}_1 qui subdivise \mathcal{D} et \mathcal{D}_0 , et telle que $\mathcal{D} \# \mathcal{D}_1 \# \mathcal{D}_0$.

Preuve de l'affirmation. — En fixant l'attention sur une cellule de \mathcal{D} à la fois, et en usant de la Vertu Cardinale, on constate qu'il suffit de traiter le cas où K est lui-même une cellule $D \in \mathcal{D}$.



Alors $K = D$ est canoniquement plongé dans l'espace affine réel $A(D)$ qu'il engendre et nous y appliquerons le Lemme 2.2.

Notons qu'il existe une famille finie H_1, \dots, H_k d'hyperplans de codimension 1 dans $A(D) \supset D = K$ tels que :

(*) Toute cellule de \mathcal{D}_0 qui n'est pas contenue dans $\text{bd}D$ est une intersection finie de demi-espaces $V_{\pm, i}$ de $A(D)$ associés à H_i , $i = 1, \dots, k$.

Appliquant le lemme des bisections 3.3 successivement à H_1, \dots, H_k , on obtient une subdivision par bisections $\widehat{\mathcal{D}}$ de \mathcal{D} et de même une subdivision par bisections $\widehat{\mathcal{D}}_0$ de \mathcal{D}_0 . Or, (*) assure que $\widehat{\mathcal{D}} = \widehat{\mathcal{D}}_0$ et nous appelons \mathcal{D}_1 cette subdivision commune par bisections. On a $\mathcal{D} \# \mathcal{D}_1 \# \mathcal{D}_0$ et l'affirmation est prouvée. \square

Revenant à la preuve du Fait Fondamental, nous avons $\mathcal{D} \dashv\vdash \mathcal{D}_1 \dashv\vdash \mathcal{D}_0 \prec \mathcal{D}'$, et donc $\mathcal{D}_1 \prec \mathcal{D}'$. L'affirmation réappliquée à $\mathcal{D}_1 \prec \mathcal{D}'$, à la place de $\mathcal{D}_0 \prec \mathcal{D}$, offre une cellulation \mathcal{E} telle que $\mathcal{D}_1 \dashv\vdash \mathcal{E} \dashv\vdash \mathcal{D}'$. Alors $\mathcal{D} \dashv\vdash \mathcal{D}_1 \dashv\vdash \mathcal{E} \dashv\vdash \mathcal{D}'$, ce qui établit le Fait Fondamental 3.4. \square

EXISTENCE DES CELLULATIONS D'ALEXANDER 3.5. — une moitié de notre preuve au §4 du théorème de Reidemeister-Singer sera basée sur l'existence sur tout 3-bretzel d'une cellulation d'Alexander telle que le bord contient une "quasi-âme" et aussi tout le 1-squelette (voir la preuve de Proposition 4.2 et §4.6).

Pour discuter en général de ce problème d'existence il convient d'utiliser la notion de *cellulation* PL introduite après les cellulations d'Alexander.

QUESTION. — *Donnée \mathcal{C} , une telle cellulation PL, vient-elle d'une cellulation d'Alexander par oubli de ses structures affines ?*

Réponse pour dimension 1: Oui toujours. — Exercise. \square

Réponse pour dimension 2: Oui toujours. — J'esquisse une preuve. Pour commencer, nous pouvons supposer données des structures affines correctement installées sur les 1-cellules. Alors donnée une 2-cellule PL $D \in \mathcal{C}$ on peut plonger son bord ∂D sur un polygone convexe régulier du plan affine, par une application f qui est affine sur chaque 1-cellule affine dans ∂D ; alors l'adhérence de la région de Jordan bordée par ce polygone est un 2-polytope D' , et on peut l'identifier D PL à D' par un isomorphisme PL $F: D \rightarrow D'$ qui prolonge f , obtenant ainsi sur D une structure affine convenable. Continuant ainsi pour chaque 2-cellule, on construit une cellulation d'Alexander \mathcal{C}' dont la cellulation PL sous-jacente est \mathcal{C} . \square

Remarque. — Les solutions en dimension 2 sont loin d'être uniques. Par exemple, l'espace des 2-polytopes quadrilatères, à isomorphisme affine près respectant un marquage des quatre arêtes, est homéomorphe à \mathbb{R}^2 .

CONSÉQUENCE 3.6. — *Tout complexe PL qui est un produit cartésien fini de complexes PL de dimension au plus 2 admet une structure de complexe d'Alexander.* \square

Réponse pour la dimension 3: Souvent non. — Ernst Steinitz a établi (voir [Stz2] 1922 et [Stz3] 1934) une condition, nécessaire et suffisante pour qu'un 3-complexe PL \mathcal{C} soit isomorphe au complexe PL sous-jacent à un 3-complexe d'Alexander. Voir [Zieg] pour une excellente présentation, une preuve élémentaire, et des références à des preuves plus récentes par géométrisations nécessitant de l'analyse.

On n'a pas encore de réponse complète en dimension 4 ou plus. Ce problème ouvert n'est pas un obstacle fatal à l'exploitation en grandes dimensions des complexes d'Alexander (et donc de leurs bissections), car

chaque complexe PL a une subdivision (par exemple simpliciale) qui admet une structure de complexe d'Alexander.

4. Preuve du théorème (RST) de Reidemeister-Singer

Dans ce paragraphe, sauf indication contraire: (i) tout espace (et sous-espace) est PL, (ii) toute application et toute isotopie est PL, et (iii) tout complexe et toute cellulation est d'Alexander.

PROPOSITION 4.1. — *Soient \mathcal{A} , et \mathcal{B} deux cellulations d'un sous-espace compact et connexe X dans l'intérieur $\text{Int}M$ d'une 3-variété M^3 , telles que \mathcal{B} est une subdivision par bisections de \mathcal{A} , c'est-à-dire que $\mathcal{A} \dashv\vdash \mathcal{B}$. Soient A et $B \supset A$ les 1-squelettes respectivement de \mathcal{A} et \mathcal{B} ; soient $N(A)$ et $N(B)$ voisinages réguliers dans M de A et B . Alors le bretzel $N(B)$ est isotope dans M fixant $A \subset B$ à un stabilisé du bretzel $N(A)$, donc $N(A) \xrightarrow{\circlearrowright} N(B)$ dans M .*

Remarque. — Cette proposition ne suppose ni que le bretzel $N(A)$ présente un scindement de Heegaard de M ni que M est orientable.

Preuve 4.1. — Il suffit de traiter le cas d'une bisection élémentaire $\mathcal{A} \dashv\vdash \mathcal{B}$. Si la cellule coupée en deux est de dimension $\neq 2$, on a $A = B$, et il n'y a rien à démontrer. Si la bisection élémentaire bissecte une 2-cellule D de \mathcal{A} , en faisant deux 2-cellules D_+ , D_- , et une nouvelle 1-cellule $D_+ \cap D_-$. Alors l'Exemple Clef de §2.1 appliqué à D_+ (ou D_-) donne la conclusion voulue. \square

Il y a deux Étapes dans la preuve du théorème de Reidemeister-Singer (RST). Soit donnée une 3-variété M close et orientable.

ÉTAPE (A). — *L'énoncé (RST) est vrai pour M dans le cas où il s'agit de bretzels P et P' dans M , qui sont respectivement voisinages réguliers du 1-squelette de cellulations \mathcal{D} et \mathcal{D}' de M .*

Preuve de (A). — D'après le Fait Fondamental du §3.4, il existe une cellulation \mathcal{E} de M^3 telle que $\mathcal{D} \dashv\vdash \mathcal{E} \dashv\vdash \mathcal{D}'$; alors, deux applications de la Proposition 4.1 donnent un bretzel \widehat{P} tel que $P \xrightarrow{\circlearrowright} \widehat{P} \xrightarrow{\circlearrowleft} P'$ dans M . \square

Remarque. — La preuve d'Étape (A) est tellement simple qu'on peut facilement en prouver des analogues valables en toute dimension.

ÉTAPE (B). — *Dans le contexte de (RST) soit $P \subset M$ un bretzel qui présente un scindement de Heegaard de M . Alors, il existe un bretzel $P' \subset M$ obtenu par stabilisation de P dans M (c'est-à-dire que $P \xrightarrow{\circlearrowright} P'$ dans M), tel que P' est isotope au voisinage régulier du 1-squelette d'une cellulation de M .*

Il est évident que ces deux Étapes impliquent (RST).

Si V est une variété compacte à bord non-vide, on peut former une variété V^* de la somme disjointe $V \sqcup (\partial V \times [0, \infty))$ en identifiant ∂V à $\partial V \times 0$. Nous appelons V^* la *tanière* de V . C'est en un sens évident la plus petite variété sans bord qui contient V .

PROPOSITION 4.2. — *Soit P un 3-bretzel orientable. Il existe une cellulation d'Alexander \mathcal{P} de P , telle que:*

(a) $|\mathcal{P}^{(1)}| \subset \partial P$, c'est-à-dire, le 1-squelette de \mathcal{P} est entièrement contenu dans le bord ∂P .

(b) Pour tout plongement $P \hookrightarrow \text{Int}W$ où W est une 3-variété quelconque, on a $P \nearrow N(\mathcal{P}^{(1)})$ dans W .

COMPLÉMENT 4.2*. — *Il suffit de démontrer 4.2 dans le cas où W est la tanière P^* de P .*

Preuve de 4.2*. — En effet, si on identifie P^* à l'intérieur d'un petit voisinage régulier de P dans W , on constate que toute isotopie à support compact dans P^* s'étend par l'identité en une isotopie à support compact de W . \square

Puisque l'énoncé de 4.2 est très plausible, tandis que notre preuve de 4.2 sera brutalement constructive, nous donnons immédiatement :

Preuve d'Étape (B) en supposant 4.2. — Il s'agit de construire une cellulation d'Alexander \mathcal{M} de M telle que le bretzel $N(\mathcal{M}^{(1)})$ voisinage régulier dans M du 1-squelette $|\mathcal{M}^{(1)}|$ de \mathcal{M} est un stabilisé du bretzel donné P présentant un scindement de Heegaard de M .

Soit \mathcal{P} , respectivement \mathcal{P}^* , la cellulation d'Alexander offerte par 4.2 pour le bretzel P , respectivement pour le bretzel dual $P^* := M - \text{Int}P$.

Dans M , on a $\partial P = \partial P^* = P \cap P^*$, donc ce bord commun des deux bretsels a deux cellulations d'Alexander $\partial \mathcal{P}$ et $\partial \mathcal{P}^*$.

Par le Fait Fondamental du §3.4, il existe une cellulation d'Alexander \mathcal{E} de $P \cap P^*$ qui subdivise par bissections $\partial \mathcal{P}$ et $\partial \mathcal{P}^*$, c'est-à-dire, $\partial \mathcal{P} \# \mathcal{E} \# \partial \mathcal{P}^*$.

Par la Vertu Cardinale du §2, \mathcal{E} s'étend canoniquement par \mathcal{P} en une cellulation d'Alexander $\widehat{\mathcal{P}} \prec \mathcal{P}$ de P . De même, \mathcal{E} s'étend canoniquement par \mathcal{P}^* en une cellulation d'Alexander $\widehat{\mathcal{P}}^* \prec \mathcal{P}^*$ de P^* .

Ensemble, $\widehat{\mathcal{P}}$ et $\widehat{\mathcal{P}}^*$ définissent une cellulation \mathcal{M} de tout M puisque leurs restrictions coïncident avec \mathcal{E} sur $P \cap P^*$.

On a coïncidence des 1-squelettes de ces six complexes d'Alexander : \mathcal{E} , $\widehat{\mathcal{P}}$, $\partial \widehat{\mathcal{P}}$, $\widehat{\mathcal{P}}^*$, $\partial \widehat{\mathcal{P}}^*$, \mathcal{M} . Leurs 1-squelettes sont tous dans $P \cap P^*$!

La propriété (b) de 4.2 assure que $P \nearrow N(\mathcal{P}^{(1)}) = N(\partial \mathcal{P}^{(1)})$ dans M .

Puisque $\partial\mathcal{P} \dashv\vdash \mathcal{E}$, on a $\mathcal{P} \dashv\vdash \widehat{\mathcal{P}}$, d'où $N(\mathcal{P}^{(1)}) \cong N(\widehat{\mathcal{P}}^{(1)})$ dans M selon l'Étape A.

Mais $\widehat{\mathcal{P}}^{(1)} = \widehat{\mathcal{M}}^{(1)}$.

Donc, $P \cong N(\mathcal{P}^{(1)}) \cong N(\widehat{\mathcal{P}}^{(1)}) = N(\widehat{\mathcal{M}}^{(1)})$ dans M .

La preuve d'Étape (B) est complète modulo une preuve de 4.2. □

La preuve de Proposition 4.2 est élémentaire, mais assez technique; elle occupe le reste de §4. Elle part du fait que P est toujours un produit $P \cong Q \times [0, 1]$, et ensuite exploite des cellulations commodes de Q et de P .

Nous rencontrerons souvent la situation suivante. Donnée une d -variété connexe V , la soustraction de V de l'intérieur d'une collection de $n \geq 1$ disques disjointes de dimension d situés dans $\text{Int}V$, produit une d -variété V_0 . Ce V_0 s'appelle souvent V *trouée n fois*. Elle est bien définie par V et n à isomorphisme près; c'est essentiellement une conséquence de l'unicité des voisinages réguliers appliquée à n points de $\text{Int}V$.

Un bretzel P de dimension $d \geq 2$ est une variété compacte et connexe, qui admet une structure de corps d'anses constitué d'anses d'indices ≤ 1 (voir [RS; chap. 3]), soient a_0 anses d'indice 0 et a_1 anses d'indice 1.

Pour chaque $d > 2$, on montre classiquement, que la classification à isomorphisme près, des bretsels *orientables* se fait selon l'entier $a_0 - a_1$, qui s'avère être la caractéristique d'Euler $\chi(P)$.

Pour une 2-variété Q notons par $b(Q)$ le nombre de composantes connexes de ∂Q . Soit Q un 2-bretzel orientable. En dimension $d = 2$, l'entier $\chi(Q)$ ne détermine pas le 2-bretzel Q à isomorphisme près. En revanche, il déterminera ainsi Q dorénavant — car qu'on impose dès maintenant que Q est *planaire*, c'est-à-dire que Q est une 2-sphere $b(Q)$ fois trouée. Alors, ∂Q est linéairement lié à $\chi(Q)$ par la relation $b(Q) = 2 - \chi(Q)$. On a ainsi démontré le:

LEMME 4.3. — *Tout 3-bretzel orientable P est isomorphe à un produit $Q \times [0, 1]$ où Q est un 2-bretzel planaire, unique à isomorphisme près, dont $b(Q) = 2 - \chi(P) = 2 - \chi(Q)$.* □

Cherchons maintenant une cellulation d'Alexander d'un 2-bretzel orientable et planaire Q ayant $b := b(Q)$ composantes de bord. La prochaine figure (quelques pages ci-dessous) peut aider à la visualiser.

Soit D un 2-disque et soient $N_1, \dots, N_b, b \geq 0$, de petits voisinages réguliers disjoints dans D de b points distincts de ∂D . Chaque N_i est une 2-cellule tel que $N_i \cap \partial D$ est une 1-cellule. À partir de deux copies D^- de D^+ de D on forme une 2-sphère S en identifiant naturellement leurs bords.

On a une involution naturelle ρ de S qui échange D^- et D^+ fixant leur bord commun, le cercle équateur $E := D^- \cap D^+ = \partial D^\pm$. Dans S , on a b

2-disques D_1, \dots, D_b où chaque D_i est l'union des deux copies de N_i , à savoir $N_i^- \subset D^-$ et $N_i^+ \subset D^+$. Donc $Q := S - \{\text{Int}D_1 \cup \dots \cup \text{Int}D_b\}$ est une 2-sphère b -fois trouée.

Recensons les cellules PL dans Q apparaissant dans cette construction. L'équateur E découpe Q en deux grandes 2-cellules Q^- et Q^+ échangés par la réflexion ρ . L'intersection $Q^- \cap Q^+$ est b PL 1-cellules disjointes dans l'équateur E ; elles relient les b PL 2-disques D_i pour former "un collier de b perles" dans S . Chacune des composantes connexes du bord ∂Q est le bord d'un D_i , et E la découpe en deux 1-cellules. Au total on a $b + 2b = 3b$ PL 1-cellules dans Q . Finalement, on a $2b$ 0-cellules dans Q toutes dans ∂Q .

On constate facilement que ces cellules dans Q constituent un 2-complexe PL au sens de §3 — ayant exactement deux 2-cellules Q^- et Q^+ , $3b$ cellules de dimension 1, et finalement $2b$ cellules de dimension 0 dont chacun est dans ∂Q . Appelons ce complexe \mathcal{Q}_0 .

Selon §3.6, nous savons introduire, sur chaque cellule de \mathcal{Q}_0 une structure de polytope, de façon à faire de ce complexe un complexe d'Alexander \mathcal{Q} . En plus, ρ peut être affine sur chaque cellule de \mathcal{Q} . Plus loin nous allons visualiser l'anatomie PL de \mathcal{Q} à l'aide d'une figure plane.

Alternativement, on peut former Q et le complexe d'Alexander \mathcal{Q} directement à partir de deux copies d'un 2-polytope du plan \mathbb{R}^2 , dont le bord est un $2b$ -gon régulier. Il suffit d'introduire certaines identifications affines entre des faces de dimension 1.

Soit \mathcal{I} le 1-complexe d'Alexander dont les trois cellules sont $[0, 1]$ et ses deux points de bord $\{0\}, \{1\}$. Le 3-complexe d'Alexander \mathcal{P} affirmé par la Proposition 4.2 est, par définition, le complexe produit $\mathcal{Q} \times \mathcal{I}$. Le 3-bretzel $P := |\mathcal{P}|$ s'identifie ainsi naturellement à $Q \times [0, 1]$.

LEMME 4.4. — *Le bord ∂P contient tout le 1-squelette $|\mathcal{P}^{(1)}|$ de \mathcal{P} .*

Preuve de 4.4. — Une 1-cellule de \mathcal{P} qui rencontre $\text{Int}P = \text{Int}Q \times (0, 1)$ serait une 1-cellule de la forme $s \times [0, 1]$ où s est un 0-cellule de \mathcal{Q} qui se trouve dans $\text{Int}Q$. Mais il n'y a pas de tel s ! □

La preuve de la partie (a) de la Proposition 4.2 est ainsi complète. □

Les structures de polytope sur des cellules de \mathcal{Q} servent à permettre les bisections dans la preuve, déjà accomplie, que Proposition 4.2 implique Étape (B). Elles ne serviront plus dans la preuve à venir de la partie (b) de Proposition 4.2; en effet (b) concerne seul le complexe PL sous-jacent \mathcal{Q}_0 de \mathcal{Q} .

Notre stratégie pour prouver la partie (b) de Proposition 4.2 consiste à prouver cet énoncé plus précis:

PROPOSITION 4.5. — *Il existe un 1-sous-complexe \mathcal{L}_1 de $\mathcal{P}^{(1)}$ tel que $L_1 := |\mathcal{L}_1|$ a ces deux atouts :*

- (i) $N(L_1) \nearrow N(\mathcal{P}^{(1)})$ dans P^* , et
- (ii) $L_1 \subset \partial P$ est isotope dans P^* à un 1-sous-espace K de $\text{Int}P$ dont P est un voisinage régulier dans P^* .

Preuve que 4.5 implique la Proposition 4.2(b). — Dans P^* on a $N(L_1) \approx N(K) \approx P$ selon (ii). Donc (i) entraîne $P \nearrow N(\mathcal{P}^{(1)})$ dans P^* . \square

Il y aura plusieurs petites étapes dans la preuve de 4.5.

D’abord quelques observations générales portant sur toute variété PL V qui est compacte et à bord non-vide.

Une *âme* de V est par définition un sous-espace PL compact $X \subset \text{Int}V$ tel que $V - \text{Int}N(X; V)$ est isomorphe à $\partial V \times [0, 1]$.

Une *quasi-âme* de V est un sous-espace PL compact $Y \subset V$ tel que Y est isotope dans la *tanière* V^* de V à une âme $X \subset \text{Int}V$ (la *tanière* V^* étant définie avant 4.2).

Le lemme suivant est rassurant, mais n’est pas utilisé pour prouver (RST).

LEMME 4.6. — *Toute quasi-âme Y de V contenue dans $\text{Int}V$ est une (véritable) âme de V .*

Preuve de 4.6. — Supposons que Y est isotope dans V^* à une âme X de V , ceci par une isotopie f_t , $t \in [0, 1]$ de V^* , à support compact $Z \subset V^*$. On peut alors trouver un automorphisme h de V^* , à support compact dans V^* et disjoint de $X \cup Y \subset \text{Int}V$, tel que $h(Z) \subset \text{Int}V$. Alors $Y \approx X$ dans $\text{Int}V$ par l’isotopie $h \circ f_t \circ h^{-1}$, $t \in [0, 1]$ car elle a support dans $h(Z) \subset \text{Int}V$; donc Y est, autant que X , une âme de V . \square

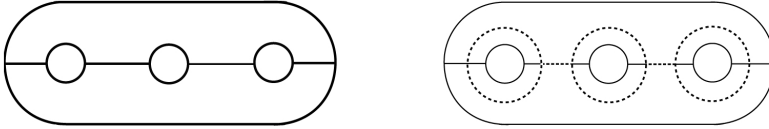
Nous avons choisi une identification $P = Q \times [0, 1]$. La théorie PL des voisinages réguliers (cas des colliers)² montre que cette identification admet une extension à un isomorphisme PL $P^* \cong Q^* \times [0, 1]^*$. Nous l’utiliserons par la suite pour identifier $P^* = Q^* \times [0, 1]^*$.

Visant la preuve de Proposition 4.5, cherchons des candidats pour $\mathcal{L}_1 \prec \mathcal{Q}$ et $K \subset \text{Int}P$.

Par construction, $Q = |\mathcal{Q}|$ est plongé dans une 2-sphère S de sorte qu’une réflexion ρ standard induit une involution du complexe \mathcal{Q} . Dans les trois figures qui suivent, S est le plan (du papier) plus un point à l’infini, et ρ est réflexion dans une évidente droite horizontale. Ainsi, le dessin

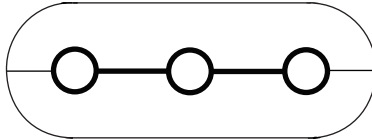
(2) La théorie plus simple des voisinages PL réguliers *ouverts* suffirait ici; voir [Sieb1].

de gauche ci-dessous exhibe \mathcal{Q} et $Q := |\mathcal{Q}|$ pour le cas où $\partial Q = \partial|\mathcal{Q}|$ est $4 = b(Q)$ cercles. Pour interpréter ce dessin de gauche, il faut réviser quelque peu nos conventions pour les dessins de complexes. Ici le 1-squelette $|\mathcal{Q}^{(1)}|$ est le graphe dessiné en noir, et ses 0-cellules sont ses 8 points tri-valents. En plus, il y a deux 2-cellules de \mathcal{Q} ; leurs intérieurs sont les deux plus grandes régions de Jordan bornées qui sont renfermées par $|\mathcal{Q}^{(1)}|$.



Le dessin de droite montre, en pointillés, une âme L de Q ; c'est un 1-sous-espace L de Q tel que $Q - \text{Int}N(L; Q)$ est un voisinage collier de ∂Q . Ce L n'est *pas* un sous-complexe de \mathcal{Q} . L'âme de P pour la Proposition 4.5 sera $K := L \times \frac{1}{2} \subset \text{Int}P$.

Dans le dessin ci-dessous, on voit, en gras, un 1-sous-espace L_1 de Q ; c'est seulement une *quasi-âme* de Q , mais qui, en revanche, a l'avantage d'être un sous-complexe de \mathcal{Q} ; c'est-à-dire qu'il hérite de \mathcal{Q} une structure de complexe \mathcal{L}_1 tel que $L_1 = |\mathcal{L}_1|$. On constate qu'il y a une isotopie de Q^* à support compact qui envoie L sur L_1 (cf. Lemme 4.6).



Dans les deux lemmes à suivre, il est sous-entendu que Q^* s'identifie à $Q^* \times 0$ dans la 3-variété $Q^* \times [0, 1]^*$ qui s'identifie à P^* .

LEMME 4.7. — *Il y a une suite de deux stabilisations élémentaires dans la 3-variété $Q^* \times [0, 1]^*$:*

$$N(L_1) \xrightarrow{\cong} N(L_2) \xrightarrow{\cong} N(|\mathcal{Q}^{(1)}|)$$

Preuve de 4.7. — Dans le croquis ci-dessus on voit deux 2-disques de stabilisation élémentaire offrant, selon l'Exemple Clef 2.1, les deux stabilisations voulues. Ce sont les deux 2-cellules de \mathcal{Q} . L'ordre de stabilisation ne compte pas. □

LEMME 4.8. — *Il y a une suite finie de stabilisations élémentaires dans $Q^* \times [0, 1]^*$:*

$$N(|\mathcal{Q}^{(1)}|) \xrightarrow{\cong} N(K_1) \xrightarrow{\cong} N(K_2) \xrightarrow{\cong} N(K_3) \xrightarrow{\cong} \dots \xrightarrow{\cong} N(|\mathcal{P}^{(1)}|)$$

Preuve de 4.8. — En effet, on a une stabilisation élémentaire selon l'Exemple Clef 2.1 pour chaque 1-cellule dans $\mathcal{Q} := \mathcal{Q} \times 0 \subset \mathcal{Q} \times \mathcal{I}$, c'est-à-dire, au

total, $3b := 3 \text{bd}(Q)$. Chaque 2-disque d'une telle stabilisation est le produit d'une 1-cellule de \mathcal{Q} avec l'intervalle $[0, 1] \subset [0, 1]^*$. L'union des bords de ces 2-disques est $|\mathcal{P}^{(1)}|$. L'ordre de ces $3b$ stabilisations ne compte pas. \square

Ensemble, les Lemmes 4.7 et 4.8 prouvent :

LEMME 4.9. — Dans $Q^* \times [0, 1]^* = P^*$ on a :

$$N(L_1) \curvearrowright N(|\mathcal{Q}^{(1)}|) \curvearrowright N(|\mathcal{P}^{(1)}|) \quad \square$$

Avec les identifications choisies, l'âme L du 2-bretzel Q s'identifie à $L \times 0 \subset Q \times 0$, et $Q \times 0 \subset Q \times [0, 1] := P \subset Q^* \times [0, 1]^* = P^*$. Ainsi $L := L \times 0$ se trouve dans P^* .

LEMME 4.10. — $K := L \times \frac{1}{2}$ est une âme de P , et $L \times \frac{1}{2} \approx L \times 0 \approx L_1$ dans $Q^* \times [0, 1]^* = P^*$.

Preuve de 4.10. — L'isotopie $K := L \times \frac{1}{2} \approx L \times 0 = L$ est évidente dans $Q^* \times [0, 1]^*$. L'âme $L = L \times 0$ de $Q \times 0$ est isotope dans $Q^* \times [0, 1]^*$ à la quasi-âme $L_1 \times 0$ de $Q \times 0$. \square

Les lemmes 4.9 et 4.10 entraînent immédiatement la Proposition 4.5 qui entraîne la partie (b) de la Proposition 4.2, c'est-à-dire que $P \curvearrowright N(\mathcal{P}^{(1)})$ dans P^* , et dans M selon le Complément 4.2*. Ainsi la Proposition 4.2 est complètement prouvé. La preuve du théorème de Reidemeister-Singer (RST) est complète. \square

Commentaires paroissiaux

Vers 1980, José Montesinos [Mo] a exposé à Orsay des travaux récents [Bi] [BGM] [BM] concernant les scindements de Heegaard. Ce faisant, il a intéressé plusieurs topologues à la recherche d'une preuve claire du théorème de Reidemeister-Singer, qu'eux-mêmes Reidemeister et Singer auraient pu donner !

Dans une telle recherche, R.D. Edwards et R.T. Miller ont déterré l'article de J.W. Alexander ([Alex2] de 1930 qui est cité dans [Si]) et m'ont raconté son contenu, surtout le §15; parmi pas mal d'autres idées, se trouvait la *bisection linéaire*.

Pendant que je rédigeais [Sieb2] vers 1980, je n'ai pas pu consulter le livre [Rei3] de Reidemeister; je l'avais seulement repéré à travers l'excellent sommaire de Erika Pannwitz [Pann]. Plus tard, suite à une collaboration [BZ1][BZ2] vers 1983 entre mon collègue Michel Boileau et Heiner Zieschang sur des questions concernant les scindements de Heegaard, j'ai eu le plaisir de rendre visite à Zieschang à Univ. Bochum. À cette occasion, Zieschang, jadis élève auprès de Reidemeister, m'a fait cadeau d'une de ses copies du livre

[Rei3]. Ce livre est épuisé et rarissime depuis les années 1970 : le site Internet <http://www.worldcat.org> pourrait vous aider à trouver une bibliothèque à proximité qui possède une copie.

L'ensemble de ces circonstances a fait que mon traitement des *bissections linéaires* (dans [Sieb2], et au §3) est peu influencé dans ses détails par les expositions d'Alexander [Alex2] (1930) et/ou de Reidemeister [Rei3] (1938), qui l'ont pourtant précédé et inspiré.

Alexis Marin, réagissant à une rédaction préliminaire de [Sieb2], m'a suggéré en 1980 l'idée d'obtenir des cellulations commodes de 3-bretzels en exploitant le fait que chacun est un produit PL avec $[0, 1]$. Cela m'a permis d'éviter dans [Sieb2] de 1980 tout argument basé sur la notion d'effondrement (= collapsing) laquelle est l'outil principal de la preuve proposée par Craggs dans [Cr] de 1976. (Je doute que l'effondrement ne fût pas connu de Reidemeister et Singer en 1933 tandis que la notion de bissection était exploitée depuis le 19^{ième} siècle.) Malheureusement, la rédaction dans [Sieb2] de 1980 n'était ni claire ni complète vers sa fin, et j'y ai émis, dans §3 de [Sieb2], ce bémol :

Une partie de la présente preuve qui me semble encore à améliorer est l'étape [...] qui relie une décomposition de Heegaard donnée à une triangulation [...]; Alexis Marin m'a aidé à la remanier au point où elle est.

En relevant ce défi en 2015, j'ai remarqué, pour tout 3-bretzel, la cellulation \mathcal{P} de Proposition 4.2, ce qui m'a permis de rendre très explicite l'Étape (B) de la preuve présente de (RST).

5. Les articles sur (RST) d'avant 1980

Dans son article de survol [Sch1] de 2001 sur les scindements de Heegaard, M. Scharlemann écrit concernant les arguments classiques en faveur de (RST) :

Similarly, since any two triangulations of the same 3-manifold are PL equivalent [... references to Moise and Bing ...] it follows that any two Heegaard splittings have a common stabilization. The classical argument, which goes back to Reidemeister and Singer, is more complicated than one might expect. See [AkM] for details.

Je suis provisoirement d'un tout autre avis, car (voir plus loin) je n'ai pas trouvé, dans les articles par Reidemeister et Singer de 1933, d'argument solide en faveur de (RST). D'ailleurs, [AkM] ne fournit point de preuve non plus.

Néanmoins, tous les outils que j'ai déployés pour prouver (RST) au §4 étaient disponibles aux topologues bien renseignés dès 1930. Il me semble

donc raisonnable de chercher des motivations historiques et mathématiques pour la parution simultanée en 1933 de deux articles affirmant (RST) sans preuve convaincante. Il me semble que l'allocution plénière [Alex3] de J.W. Alexander devant le congrès mondial à Zurich en 1932 a créé une motivation de taille. Voir §6, année 1932.

5.1. L'article de K. Reidemeister [Rei2] de 1933

À première lecture, on serait tenté de reprocher à Reidemeister de n'introduire aucun outil suffisamment puissant pour monter une preuve de (RST). Mais c'est peut-être mal comprendre le langage de Reidemeister, car il parle [Rei1, p. 191] du fait que

... *zwei homeomorphe Zellschemata eine gemeinsame Ableitung haben...*
... *two homeomorphic cell schemas have a common derived...*

Il est plausible qu'il emprunte ici le langage de Dehn et Heegaard [DH] et donc que le sens est :

Deux cellulations qui sont liées par une série de bisections et accouplements admettent une subdivision commune qui est liée à chacune par une série de bisections.

Si les complexes utilisés par Reidemeister (ses Zellschemata) étaient des complexes d'Alexander, il aurait pu citer [Alex2] de 1930 pour l'essentiel d'une preuve de notre Fait Fondamental de §3.4, et ainsi établir rigoureusement l'Étape (A) de notre §4. Malheureusement, les cellules utilisées par Reidemeister dans [Rei2] ne comportent pas de structure affine, seulement une structure PL. Et selon E. Steinitz, il n'est pas toujours possible d'en introduire une (voir [Stz2] [Stz3] [Zieg, Ch 4]). Ainsi, [Rei2] a frôlé l'idée clef de notre preuve d'Étape (A) sans en faire un argument convaincant.

D'ailleurs, quoi de notre Étape (B) ?

Cinq ans plus tard, en 1938, K. Reidemeister, dans son livre [Rei3], a fort bien exposé notre Fait Fondamental du §3.4. Il y cite correctement [Alex2] mais ne clarifie pas [Rei2]. Cela peut suggérer qu'en 1938 Reidemeister n'avait pas conçu de preuve adéquate de (RST). Mais ce n'est pas une certitude, car [Rei3] est un modèle de rigueur, tandis qu'en 1938, il n'existait encore aucune des plusieurs références [Zee] [St] [Gla] [RS] nous offrant, depuis les années 1970, des bases larges et rigoureuses pour la topologie PL.

5.2. L'article de J. Singer [Si]

L'article de J. Singer [Si] de 1933 (basé sur sa thèse à Princeton Univ.) décrit, en détail et avec soin, les *diagrammes de Heegaard* – qui permettent

de spécifier exactement, et manipuler explicitement tout scindement de Heegaard individuel en termes de plongements de bretzels standards. Il y affirme en même temps (RST), et sa variante (RST \sim) pour les 3-variétés closes et *non-orientables*. Par contre, Reidemeister, dans [Rei3], ne considère que les 3-variétés closes et *orientables*. Dans [Si], (RST) et (RST \sim) ne ressortent pas individuellement; ce sont des conséquences de son grand Theorem 7, qui donne une condition compliquée que Singer affirme être nécessaire et suffisante pour que deux 3-variétés closes et connexes, chacune présentée par un diagramme de Heegaard, soient PL isomorphes. Je n'ai pas détecté dans [Si] de preuve de (RST) ou (RST \sim); est-ce que Singer estimait qu'une preuve est inhérente à sa machinerie pour diagrammes de Heegaard? Singer cite [Alex2] et remercie J.W.Alexander pour de nombreuses suggestions (sans les spécifier).

5.3. L'article de R. Craggs [Cr]

Cet article de 1976 raconte que W.Haken et F.Waldhausen ont posé le problème de trouver une preuve détaillée de (RST); et que lui-même et le séminaire de topologie de U.Wisconsin à Madison y ont répondu. Ses arguments sont très condensés. Je ne peux pas me prononcer avec confiance sur leur valeur, et je m'en excuse. Ils exploitent surtout la notion simpliciale d'effondrement (= collapsing), et ce faisant, utilisent le théorème (voir §1) de Chillingworth [Ch] (1967), un résultat difficile qui est prouvé seulement pour dimensions ≤ 3 . La résurgence vers 1976 de (RST), après plus que 40 ans d'oubli, s'explique par la preuve par F.Waldhausen [Wald] (1968) que deux surfaces de Heegaard de même genre dans la 3-sphère S^3 sont toujours isotopes *sans stabilisations*; en effet, la preuve dans [Wald] utilise (RST).

6. Une chronologie des bisections linéaires et de (RST)

L'opération de bisection linéaire est, vraisemblablement, la catastrophe au sens de R.Thom, qui est à la base de la classification des espaces PL. Cet avis est appuyé d'un côté, par le §3; et d'un autre par le lien à la catastrophe cubique de "Riemann-Hugoniot", révélée par la théorie de Cerf mentionnée au §1. De ce fait, je crois que son histoire mérite d'être racontée, et d'autant plus que les bisections de polytopes ont presque disparu de la littérature de la topologie PL depuis les années 1940 (une modeste exception est le livre de J. Stallings [St]). Cette section esquisse cette histoire sous forme d'une chronologie. Les articles visés sans référence spécifique s'identifient facilement dans la bibliographie de Seifert et Threlfall [SeiT].

1890. W.Dyck mentionne les bisections en discutant la caractéristique d'Euler.

1894. H. Poincaré exploite les bisections en montrant l'invariance de la caractéristique d'Euler d'une variété différentiable; cette caractéristique est définie en termes d'une cellulation différentiable, cf. [Wh].

1907. M. Dehn et P. Heegaard adoptent comme nouvelle notion de « homéomorphisme » de cellulations de Poincaré, l'équivalence par certaines bisections (et accouplements). Ainsi les bisections se lient aux fondations mêmes de la topologie.

1908. E. Steinitz [Stz1] demande si, pour les variétés considérées par Poincaré, les trois équivalences dérivant des trois notions : (1) bisection, (2) subdivisions PL plus générales (3) homéomorphisme (1-1 et bicontenu), sont vraiment équivalentes. Réponses partielles: Si on suppose l'utilisation des triangulations de J.H.C. Whitehead, alors (1) = (2) par [Wh] de 1940 et les bisections linéaires d'Alexander au §3. Par contre, (2) \neq (3) par [KS] de 1969.

1911. O. Veblen [Veb1] [Veb2] utilise la topologie linéaire par morceaux; puis dans [VY, p. 476] 1917, il exécute par bisections linéaires un argument d'invariance d'une caractéristique d'Euler particulier.

1930. J.W. Alexander dans [Alex2] dégage la topologie PL en tant que discipline distincte "rectilinear analysis situs", tandis que M.H.A. Newman [N1] [N2] [N3] avait déjà dégagé clairement une topologie purement combinatoire des complexes simpliciaux en étudiant une équivalence par subdivisions stellaires élémentaires. Alexander démontre dans [Alex2] que, pour certains complexes (nommés ici complexes d'Alexander) homéomorphisme linéaire par morceaux vaut équivalence par bisections linéaires. (Une variante de son argumentation – pour des complexes "sphériques par morceaux" – est parue déjà dans [Alex1] en 1922.) Pour les complexes simpliciaux, [Alex2] (1930) démontre qu'homéomorphisme linéaire par morceaux vaut équivalence par les subdivisions stellaires de Newman. Bien plus tard, vers 1990, U. Pachner [Pach1] [Pach2] [Pach3] a fait nettement progresser l'étude combinatoire des *variétés*.

1932. Alexander, dans une partie importante de son allocution devant le Congrès International des Mathématiciens à Zurich [Alex3], explique en termes qualitatifs la topologie PL, la topologie combinatoire, et leur équivalence qu'il avait établi en 1930. Il estime vivre un moment propice pour entamer une classification PL des 3-variétés closes moyennant leurs scindements de Heegaard. Et il formule une conjecture forte :

I have a strong suspicion that if S and S' are two canonical surfaces [= surfaces de Heegaard] of the same genus in a manifold M then there is always a continuous deformation [= isotopie ambiante] of the manifold M into itself carrying the surface S into the surface S' . It would be interesting to have a proof of this hypothetical theorem

even for the case where the manifold M is a hypersphere [= 3-sphère standard $\cong \mathbb{S}^3$]. The theorem for a general manifold M seems to be reducible to this special case.

Cette conjecture affirme la conclusion de (RST) *sans aucune stabilisation!* Pour le cas de \mathbb{S}^3 , Waldhausen [Wald] l'a confirmé en 1968. Mais, elle est fautive pour certains sommes connexes de deux d'espaces lenticulaires, selon R. Engmann [Eng] (1970). Il me semble plausible que, vers 1933, Alexander ait reconnu qu'il se trompait sérieusement dans sa dernière phrase citée, et qu'il ait donc promptement et activement promu les deux premières publications (en 1933) affirmant (RST), à savoir celle [Rei2] de son collègue K. Reidemeister (élogieusement cité dans [Alex3] pour son livre [Rei1] de 1932), et celle [Si] de son propre élève J. Singer. Voilà une interrogation pour l'historien qui aura éventuellement accès à la correspondance des acteurs!

1933. Le théorème de Reidemeister-Singer (RST) est affirmé indépendamment dans [Si] et [Rei2], mais sans véritable preuve. Dans [Si], J. Singer affirme en plus la variante (RST \sim) pour variétés non-orientables; il remercie Alexander pour de multiples suggestions et cite [Alex2]. Dans [Rei2], K. Reidemeister suggère vaguement, en guise de preuve, d'utiliser l'idée de bissection. C'est en 1933 que Reidemeister fut congédié de son poste à Königsberg. Il s'était opposé verbalement en 1930 à une démonstration Nazi qui avait eu lieu pendant une célébration à Königsberg à l'occasion de la retraite de David Hilbert, voir [Epple; Chap 12]. Reidemeister en était un des organisateurs de cette célébration.

1938. Le livre de Reidemeister [Rei3] expose systématiquement l'idée de bissection *linéaire* et démontre *en tout détail* le Fait Fondamental 3.4 que deux cellulations (convenablement définies comme au §3) admettent toujours une subdivision commune par bisections. Il y cite [Alex2]; par contre, (RST) n'y est pas mentionné. À cette époque, Reidemeister était "limogé" sur un professorat à Marburg.

Attaché à la prépublication [Sieb2] (1980) de cet article, se trouvait un dernier chapitre "*Supplément du dimanche à mon exposé sur le théorème de Reidemeister-Singer — L'Histoire des Bisections*". C'est une histoire plus ample en ce qui concerne les bisections. En 2015, je n'ai pas eu le temps de retrouver les multiples références pour vérifier ou amplifier mes prononcements. J'ai donc exclu ce chapitre de la présente publication. Ma rédaction de 1980 [Sieb2] reste cependant disponible sous forme électronique.

7. Annexe (I) Une preuve esquissée de (RST \sim)

Il s'agit de démontrer (RST \sim), la variante de (RST) pour 3-variétés non-orientables; les concepts qui interviennent sont expliqués au §2.

(RST \sim) THÉORÈME DE REIDEMEISTER-SINGER NON-ORIENTABLE. — Dans une 3-variété M^3 close et non-orientable, soient donnés deux bretzels P et P' présentant chacun un scindement de Heegaard de M^3 . Il existe toujours un troisième bretzel $\widehat{P} \subset M^3$ qui est un stabilisé dans M , et de P , et de P' ; en symboles: $P \nearrow \widehat{P} \nwarrow P'$ dans M .

La preuve va calquer au possible celle de (RST) au §4. Ainsi, une stratégie raisonnable pour le lecteur consiste à essayer de donner lui-même une preuve de (RST \sim) après une relecture de §4; et ensuite comparer sa preuve avec l'esquisse qui suit.

OBSERVATION. — Si $(M; P, P^*)$ où $P^* := M - \text{Int}P$ est un scindement de Heegaard d'une 3-variété M qui est close et non-orientable, alors les trois variétés P , P^* , et $\partial P = \partial P^* = P \cap P^*$ sont toutes non-orientables.

Preuve. — Non-orientabilité d'une variété connexe V est équivalente à surjectivité de l'homomorphisme d'orientation $w_1 : \pi_1(V) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Par le théorème de Van Kampen (ou par position générale), l'inclusion de $P \cap P^*$ dans M induit une surjection sur $\pi_1(M)$. Donc la surface $P \cap P^*$ contient une courbe qui désoriente. *A fortiori* aussi P et P^* sont non-orientables. \square

Exactement comme dans la preuve de (RST) au §4 on établit :

ÉTAPE (A \sim). — L'énoncé (RST \sim) est vrai pour M dans le cas où il s'agit de bretzels P et P' dans M , qui sont respectivement voisinages réguliers du 1-squelette de cellulations d'Alexander \mathcal{D} et \mathcal{D}' de M . \square

Passons ensuite à :

ÉTAPE (B \sim). — Soit $P \subset M$ un 3-bretzel non-orientable qui présente un scindement de Heegaard d'une 3-variété close et non-orientable M . Alors, il existe un bretzel $P_s \subset M$ obtenu par une suite finie de stabilisations élémentaires de P dans M (c'est-à-dire que $P \nearrow P_s$ dans M), tel que P_s est PL isotope dans M au voisinage régulier du 1-squelette d'une cellulation d'Alexander de M .

Exactement comme dans la preuve de (RST) au §4, on constate que ÉTAPE (B \sim) est une conséquence de cette variante de la Proposition 4.2 :

PROPOSITION 4.2 \sim . — Dans le contexte de l'Étape (B \sim), on peut construire, pour le bretzel non-orientable donné $P \subset M$, une cellulation d'Alexander \mathcal{P} , telle que :

(a) $|\mathcal{P}^{(1)}| \subset \partial P$, c'est-à-dire, le 1-squelette de \mathcal{P} est entièrement contenue dans le bord ∂P .

(b) $P \nearrow N(\mathcal{P}^{(1)})$ dans M .

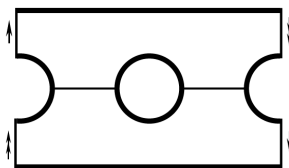
La preuve de 4.2[~] sera une modification de celle de 4.2 pour tenir compte de la non-orientabilité de P .

LEMME 4.3[~]. — *Tout 3-bretzel non-orientable P est PL isomorphe à un produit $Q \times [0, 1]$ où Q est un 2-bretzel isomorphe PL à un plan projectif réel troué, le nombre de trous étant $1 - \chi(P) = 1 - \chi(Q) \geq 1$. Ce 2-bretzel Q est unique à isomorphisme PL près.*

La preuve de Lemme 4.3 s'adapte sans grande difficulté. □

Revenons maintenant dans le contexte de la Proposition 4.2[~]. Nous esquissons une preuve assez concrète de 4.2[~] pour seul le cas où $P := Q \times I$ et Q est un plan projectif à 3 trous, c'est-à-dire $b(Q) = 3$. Ce cas est typique; il se généralise sans effort pour toute valeur de $b(Q) \geq 2$. Le cas $b(Q) = 1$, c'est-à-dire, Q une bande de Moebius (sans trou), est différent mais plus facile; je le laisse comme exercice au lecteur.

Ci-dessous on voit une figure planaire qui, après quelques d'explications, va bientôt nous présenter un plan projectif PL à trois trous Q , muni d'une cellulation d'Alexander.



Nous adoptons une convention classique pour commander des identifications. Dans cette figure, chaque couple de flèches similaires commande une identification affine des deux segments droits qui les portent. Ainsi, l'objet dessiné, qui s'obtient d'un rectangle en ôtant un trou rond et deux "demi-trous", nous présente, après les deux identifications décrites, une bande de Moebius à deux trous, ce qui est aussi un plan projectif à trois trous. Ainsi, $\chi(Q) = 1 - 3 = -2$.

Ce Q a une cellulation PL dont on peut identifier de suite les cellules. Il y a deux 2-cellules; ce sont les deux grandes adhérences de région bornée de Jordan (du complément de l'encre noire). Le bord de chacune est constituée de huit 1-cellules. Mais l'intersection des deux 2-cellules est quatre 1-cellules; donc le total de 1-cellules distinctes est $8 + 8 - 4 =$ douze. On voit les huit 1-cellules contenues dans ∂Q dessinées plus grasses que les autres. En dotant, d'une structure affine d'octagone régulier, chacune des deux 2-cellules notées, on élève cette cellulation PL au statut de complexe d'Alexander \mathcal{Q} (voir §3.6). Il y a un total de huit 0-cellules dans \mathcal{Q} . Donc $\chi(\mathcal{Q}) = 8 - 12 + 2 = -2 = \chi(Q)$.

Dans la moitié de gauche de la prochaine figure on voit en pointillés une *âme* unidimensionnelle L de Q ; elle n'est *pas* un sous-complexe de Q . Dans la moitié de droite, on voit en très gras une *quasi-âme* L_1 de Q , qui est sous-jacente à un 1-sous-complex \mathcal{L}_1 de Q , c'est-à-dire $L_1 = |\mathcal{L}_1|$. (Voir, juste avant §4.6, une introduction aux notions d'*âme* et de *quasi-âme*.) On voit une isotopie à support compact $L \approx L_1$ dans V^* la *tanière* de V .



Comme au §4, on définit $\mathcal{P} := Q \times \mathcal{I}$ et on constate que $K := L \times \frac{1}{2}$ est une âme de $P := Q \times I$.

Preuve de 4.2~(a). — C'est une conséquence immédiate du fait que toutes les 0-cellules de Q se trouvent dans le bord ∂Q de Q . (Voir preuve de 4.2.) □

Preuve de 4.2~(b). — Ayant vérifié 4.3~, et puis défini $Q, \mathcal{Q}, P, \mathcal{P}, L, L_1, \mathcal{L}_1$ et ayant vérifié certaines de leurs propriétés, on peut prouver 4.2~(b) en parallèle étroite avec les preuves de 4.4, 4.5, ..., 4.10 au §4. □

Ceci termine la preuve esquissée de la variante (RST~) pour les 3-variétés closes et non-orientables. Les deux variantes (RST) et (RST~) du Théorème de Reidemeister-Singer sont finalement démontrées. □

8. Annexe (II) Les scindements de Heegaard après 1980

Concernant les scindements de Heegaard, il existe deux articles de survol à examiner : l'un par H. Zieschang [Zies] (1988) et l'autre par M. Scharlemann [Sch1] (2001). Voir aussi Chap3 de Kirby [Ki2] (1997), et chapitre 6 du livre récent [Schu] de J. Schultens. Pour des travaux plus récents je recommande, sur Internet, le site ArXiv : <<http://arxiv.org/find/math>>.

Une question difficile que (RST) a mis au devant de la scène est celle ci :

QUESTION 8.1. — *Dans une 3-variété close M , supposons que P et P' présentent deux scindements de genre g . Combien de stabilisations élémentaires sur chacun de P et P' suffisent pour produire deux scindements P_s et P'_s qui sont isotopes dans M ?*

Rappelons un théorème qui a répondu *zéro* et ainsi semblait ouvrir une voie pour aborder la conjecture de Poincaré :

- [Wald] (1968). — *Si M est la 3-sphère \mathbb{S}^3 , tout scindement de Heegaard de genre ≥ 1 est obtenu par stabilisations d'une 3-boule dans \mathbb{S}^3 . Donc, pour chaque genre ≥ 0 , il n'y a qu'un seul scindement de \mathbb{S}^3 à isotopie de \mathbb{S}^3 près.*

Ce théorème avait été explicitement conjecturé par J.W. Alexander en 1932 [Alex3].

Dans les années 1980 et 1990 d'autres cas d'unicité de scindement de Heegaard ont été établis (voir [Sch1] pour les références) pour ces 3-variétés closes :

- $M \times \mathbb{S}^1$, où M est close et orientable, et
- $L_{p,q}$ tout espace lenticulaire.

- [Jo] (1995) et [Lei] (2000) donnent de nouvelles preuves de (RST).

— Le livre [Jo] (1995) de K. Johansson en propose une dans un contexte plus général au §25, pages 281-288.

— [Lei] (2000) en fournit une autre qui fait appel à une suite de travaux entre 1991 et 1997 qui sont partiellement réexposés dans Scharlemann [Sch] (2001). Voici un mini-sommaire. En 1991, J.-P. Otal [O], sans faire appel à (RST), a réussi à reprouver l'unicité pour \mathbb{S}^3 . Il a exploité une méthode que H. Schubert avait inventée dans les années 1950 pour sa classification des noeuds à deux ponts. Ensuite, M. Scharlemann et A. Thompson ont fait autant en exploitant plutôt une autre méthode appelée "Thin Position". Puis, avec H. Rubinstein ils ont prouvé d'autres résultats similaires même pour variétés à bord. Dans [Lei] (2000), Fengchun Lei a astucieusement combiné plusieurs de ces résultats, prouvés entre 1991 et 1997, pour en déduire (RST).

Jusqu'en 2009, tout exemple connu (cf. Sedgwick [Sed] de 1992) portait à croire (cf. [Ki2] [Sch1; 7.4]) à cette conjecture (trop!) optimiste – pour toute 3-variété close :

CONJECTURE. — *Une seule stabilisation suffit toujours.*

• [HTT] (2009) J. Hass, A. Thompson, and W. Thurston ont prouvé que, au contraire, pour certaines 3-variétés closes et orientables M , au moins g stabilisations sont *nécessaires*. Leurs outils techniques comportent : applications harmoniques, structures hyperboliques, et itération d'automorphismes pseudo-Anosov. Leurs deux bretzels P et P' de grand genre g dans M forment une paire duale, c'est-à-dire $P' = (M - \text{Int}P)$.

Inversement, il y a un joli petit théorème du "folklore" dont j'avais déjà eu vent en 1980 lorsque je rédigeais [Sie2] :

• — *Si P' est le dual de P , c'est-à-dire $P' = (M - \text{Int}P)$, alors g stabilisations de P et de P' suffisent. Plus explicitement, si H_0 est la surface ∂P trouée une fois, alors le voisinage régulier $N(H_0)$ de H_0 dans M est un bretzel g -stabilisé et de P et de P' .*

La preuve est élémentaire et explicite. Ainsi, en 2008–2009, est née soudainement une science exacte de grands écarts entre scindements de Heegaard.

Voici deux théorèmes importants qui donnent, pour certaines variétés, une réponse intéressante à la question 8.1.

- [Jo; Theorem 31.9] (1995). *Si M est close et irréductible, et contient au moins une surface essentielle, mais aucune fibration de Stallings nontriviale et essentielle, alors il existe une fonction polynomiale $f(x)$, qui dépend peut-être de M , telle que $f(g)$ stabilisations suffisent.*

- [RuS] (1996) *Si la 3-variété M est close et orientable, et ne contient aucune surface essentielle (c'est-à-dire M est irréductible et non-Haken), alors une réponse à la question 8.1 est que $13g-9$ stabilisations élémentaires de P et de P' suffisent. Il y a un énoncé plus précis si les deux scindements ont deux genres distincts $g \neq g'$.*

Bibliographie

- [AkM] AKBULUT (S.) AND MCCARTHY (J.). — Casson's Invariant for Oriented Homology 3-spheres: An Exposition, Mathematical Notes 36, Princeton University Press (1990).
- [Alex1] ALEXANDER (J.W.). — A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem, Transactions Amer. Math. Soc. 28, p.301-329 (1922).
- [Alex2] ALEXANDER (J.W.). — The combinatorial theory of complexes, Annals of Math. 31, p.292-320 (1930).
- [Alex3] ALEXANDER (J.W.). — Some problems in topology, Proceedings Int. Cong. Math. Zürich, 1932, Vol. 1, p. 249-257.
- [Bi] BIRMAN (J.). — On the equivalences of Heegaard splittings of closed orientable 3-manifolds, Ann. Math. Studies 84 p.137-164 (1975).
- [BGM] BIRMAN (J.), GONZALEZ-ACUNA (F.) AND MONTESINOS (J.). — Heegaard splittings of prime 3-manifolds are not unique, Michigan Math. J. 23, no. 2, 97-103 (1976).
- [BM] BIRMAN (J.) AND MONTESINOS (J.). — On minimal Heegaard splittings, Michigan Math. J. 27, no. 1, 47-56 (1980).
- [BZ1] BOILEAU (M.) ET ZIESCHANG (H.). — Genre de Heegaard d'une variété de dimension 3 et générateurs de son groupe fondamental, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 296, no.22, p.925-928 (1983).
- [BZ2] BOILEAU (M.) ET ZIESCHANG (H.). — Heegaard genus of closed orientable 3-manifolds, Invent. Math. 76 p.455-468 (1984).
- [Bon] BONAHOON (F.). — La démonstration du théorème de Reidemeister-Singer par les techniques de J. Cerf, un article manuscrit, circa 1979. Ce manuscrit est provisoirement introuvable; entretemps l'exploitation par Kirby dans [Ki1] (pour dimension 4) des mêmes méthodes de [Ce] offre un argument analogue. Voir aussi [Laud] de 2013.
- [Ce] CERF (J.). — La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie, Publ. Math. IHES 39, p. 5-173 (1970).

- [Ch] CHILLINGWORTH (D.R.H.). — Collapsing three-dimensional convex polyhedra, Proc. Cambridge Philos. Soc. 63, p. 353-357 (1967).
- [Cr] CRAGGS (R.). — A new proof of the Reidemeister-Singer theorem on stable equivalence of Heegaard splittings, Proc. Amer. Math. Soc. 57, p. 143-147 (1976).
- [DH] DEHN (M.) UND HEEGAARD (P.). — Analysis Situs, Enzyklopädie der Math. Wiss. III AB3, Leipzig (1907).
- [Eng] ENGMANN (D.). — Nicht-homéomorphe Heegaard-Zerlegungen vom Geschlecht 2 der zusammenhängenden Summe zweier Linsenräume, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 35 p. 33-38 (1970).
- [Epple] EPPLE (M.). — Die Entstehung der Knotentheorie, xv + 449 Z., Vieweg (1999).
- [Gla] GLASER (L.C.). — Geometrical combinatorial topology, Vol. I, Van Nostrand Reinhold Co., New York (1970).
- [GM] GUILLOU (L.) ET MARIN (A.). — Notes sur l'invariant de Casson des sphères d'homologie de dimension trois (avec annexe par Christine Lescop) L'Enseignement Mathématique, 38, p. 233-290 (1992).
- [HTT] HASS (J.), THOMPSON (A.) AND THURSTON (W.). — Stabilization of Heegaard splittings, Geom. Topol. 13, no. 4, p. 2029-2050 (2009).
- [Hu] HUDSON (J.F.P.). — Piecewise linear topology, Benjamin (1969).
- [Jo] JOHANSSON (J.). — Topology and combinatorics of 3-manifolds, Lecture Notes in Mathematics 1599, Springer (1995).
- [Ki1] KIRBY (R.). — A calculus for framed links in S^3 , Invent. Math. 45, no. 1, p. 35-56 (1978). Certains des lemmes laissés ici sans preuve sont prouvés dans [Laud].
- [Ki2] KIRBY (R.). — Problems in low-dimensional topology, AMS-IP Studies in Advanced Mathematics, v 2, Part 2, Geometric Topology 1993, Georgia International Topology Conference 1993, U. Georgia at Athens, Georgia U.S.A., W.H. Kazez, Editor, Chapter 3, p. 141-236 (1997).
- [KS] KIRBY (R.) and SIEBENMANN (L.). — On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung, Bull. Amer. Math. Soc. 75, p. 742-749 (1969).
- [Laud] LAUDENBACH (F.). — A proof of Reidemeister-Singer's theorem by Cerfs methods, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 23 (2014), p. 197-221; cette preuve est plus détaillée que celle de [Bon].
- [Lei] LEI (F.). — On stability of Heegaard splittings, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 129, p. 55-57 (2000).
- [Mo] MONTESINOS (J.M.). — Revêtements ramifiés de noeuds, espaces fibrés de Seifert et scindements de Heegaard, conférences donné à Orsay vers 1980; voir l'article [BM].
- [Mil] MILNOR (J.W.). — Whitehead Torsion, Bull. Amer. Math. Soc. 72 358-426 (1966).
- [N1] NEWMAN (M.H.A.). — Proc. London Math. Soc. 30, p. 339-346 (1926).
- [N2] NEWMAN (M.H.A.). — On the foundations of combinatory Analysis Situs, Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam 29, p. 611-641 (1926) and 30, p. 670-673 (1927).
- [N3] NEWMAN (M.H.A.). — Combinatory topology of convex regions, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 16, p. 440-442 (1930).
- [O] OTAL (J-P.). — Sur les scindements de Heegaard de la sphère S^3 , Topology 30, p. 249-258 (1991).
- [Pont] PONT (J.-C.). — La topologie algébrique, des origines à Poincaré, Presses Univ. de France, Paris (1974).

- [Pach1] PACHNER (U.). — Konstruktionsmethoden und das kombinatorische Homöomorphieproblem für Triangulationen kompakter semilinearer Mannigfaltigkeiten (Methods of construction and the combinatorial homeomorphism problem for triangulations of compact piecewise linear manifolds) *Abhandlungen Math. Sem. Univ. Hamburg* 57, p. 69-86 (1986).
- [Pach2] PACHNER (U.). — Shellings of simplicial balls and p.l. manifolds with boundary, *Discrete Math.* 81, p. 37-47 (1990).
- [Pach3] PACHNER (U.). — P.L. homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings, *European J. Combinatorics.* 12, no. 2, p. 129-145 (1991).
- [Pann] PANNWITZ (E.). — Jahrbuch Review JFM 64.0593.03 of [Rei3] from Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, (1868-1942); <http://www.emis.de/MATH/JFM/full.html>
- [Rei1] REIDEMEISTER (K.). — *Knotentheorie*, *Ergebnisse Math.* 1, Springer Vlg. (1932).
- [Rei2] REIDEMEISTER (K.). — Zur dreidimensionalen Topologie, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 9, p. 189-194 (1933).
- [Rei3] REIDEMEISTER (K.). — *Topologie der Polyeder und kombinatorische Topologie der Komplexe*, Akademie Verlag, Leipzig (1938) (2nd unaltered edition 1953). Also reprinted by Chelsea (1950).
- [RoS] ROURKE (C.) and SANDERSON (B.). — *Introduction to piecewise-linear topology*, *Ergebnisse Math.* Band 69, Springer (1972).
- [RuS] RUBINSTEIN (H.) AND SCHARLEMANN (M.). — Comparing Heegaard splittings of non-Haken 3-manifolds, *Topology*, 35 no.4, p. 1005-1026 (1996).
- [Sch1] SCHARLEMANN (M.). — Heegaard splittings of compact 3-manifolds, in *Handbook of geometric topology*, 921-953, North-Holland, Amsterdam (2002), see also arXiv: math/0007144v1, and [Sch2].
- [Sch2] SCHARLEMANN (M.). — Heegaard splittings of 3-manifolds, *Low dimensional topology*, *New Stud. Adv. Math.* 3 p. 25-39, Int. Press (2003).
- [SchT] SCHARLEMANN (M.) AND THOMPSON (A.). — Thin position and Heegaard splittings of the 3-sphere, *Jour. Diff. Geom.* 39 p. 343-357 (1994).
- [Schu] SCHULTENS (J.). — *Introduction to 3-Manifolds*, *Graduate Studies in Math.* v. 151, 286 pages, Amer. Math. Soc. (2014).
- [Sed] SEDGWICK (E.). — An infinite collection of Heegaard splittings that are equivalent after one stabilization, *Math. Ann.* 308 p. 65-72 (1992).
- [SeiT] SEIFERT (H.) und THRELFALL (W.). — *Lehrbuch der Topologie*, B.G. Teubner Vlg., Leipzig (1934) (später Chelsea); see also English translation by M.A. Goldman, Academic Press (1980).
- [Si] SINGER (J.). — Three dimensional manifolds and their Heegaard diagrams, *Trans. Amer. Math. Soc.* 35, p. 88-111 (1933).
- [Sieb1] SIEBENMANN (L.). — Regular (or canonical) open neighborhoods, (English) *General Topology Appl.* 3, p. 51-61 (1973).
- [Sieb2] SIEBENMANN (L.). — Les bisections expliquent le théorème de Reidemeister-Singer, un retour aux sources, (prépublication Orsay 1980) disponible à <http://lcs98.free.fr/biblio/> ou <http://topo.math.u-psud.fr/~lcs/biblio/>
- [St] STALLINGS (J.R.). — Lectures on polyhedral topology, *Tata Institute of Fundamental Research, Bombay* (1968), mimeographed.
- [Stz1] STEINITZ (H.). — Beiträge zur Analysis situs, *Sitzungsber. Berl. Math. Ges.* 7, p. 29-49 (1908).
- [Stz2] STEINITZ (E.). — Polyeder und Raumeinteilungen, *Enzyklopedie der Math. Wiss.*, Bd.III, AB12 (1916).

- [Stz3] STEINITZ (E.). — Vorlesungen über die Theorie der Polyeder unter Einschluss der Elemente der Topologie – (Aus dem Nachlass herausgegeben und ergänzt von Hans Rademacher), Springer, Grundlagen Bd.41(1934).
- [Veb1] VEBLEN (O.). — Decomposition of an n -space by a polyhedron, Transactions Amer. Math. Soc. 14, p.65-72 (1913).
- [Veb2] VEBLEN (O.). — Analysis situs, (Colloquium lectures of 1922), Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, Vol 5, (1922), (or 2nd edition 1931).
- [VY] VEBLEN (O.) and YOUNG (J.W.). — Projective geometry, Vol. II, Ginn, Boston (1918) (reprinted by Blaisdell).
- [Wa] WALDHAUSEN (F.). — Heegaard Zerlegungen der 3-Sphäre, Topology 7, p.195-203 (1968).
- [Wh] WHITEHEAD (J.H.C.). — On C^1 -complexes, Ann. of Math. 41, 804-824 (1940).
- [Zee] ZEEMAN (E.C.). — Seminar on combinatorial topology, mimeographed notes, I.H.E.S., Bures-sur-Yvette, France (1963).
- [Zieg] ZIEGLER (G.M.). — Lectures on Polytopes, Springer Vlg. GTM152 (1995).
- [Zies] ZIESCHANG (H.). — On Heegaard diagrams of 3-manifolds, On the geometry of differentiable manifolds (Rome, 1986), Asterisque 163-164, p.247-280 (1988).