ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE Mathématiques

Nicolas Lerner

Sur deux contributions de Y. V. Egorov (1938–2018)

Tome XXVIII, nº 1 (2019), p. 1-9.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2019_6_28_1_1_0>

Annales de la faculté des sciences de Toulouse Volume XXVIII, n° 1, 2019
pp. 1-9

Sur deux contributions de Y. V. Egorov (1938–2018) [*]

Nicolas Lerner [1]

Résumé. — Le mathématicien Youri Egorov est décédé le 6 octobre 2018 à Toulouse. Ce texte expose deux aspects fondamentaux de son travail, la quantification des transformations canoniques et l'étude des opérateurs sous-elliptiques.

Abstract. — The mathematician Yuri Egorov died on October 6, 2018 in Toulouse. This text outlines two fundamental aspects of his work, the quantification of canonical transformations and the study of subelliptic operators.

1. Introduction

Le mathématicien Youri Vladimirovitch Egorov[(i)], né à Moscou en 1938, est décédé le 6 octobre 2018 à Toulouse. Son nom reste attaché à l'un des plus importants théorèmes de l'analyse mathématique de la quantification, le théorème d'Egorov, qui décrit de manière asymptotique la quantification des transformations canoniques de l'espace des phases.

Bien évidemment, il ne faut pas confondre Youri Vladimirovitch Egorov avec Dimitri Fiodorovitch Egorov (1869–1931)[(ii)] [(iii)], auteur d'un théorème classique de la théorie de la mesure, bien que le lien entre eux ne soit pas inexistant sur le plan mathématique : la directrice de la thèse de

[*] Reçu le 16 janvier 2019, accepté le 17 janvier 2019.

[1] Institut de Mathématiques de Jussieu, Sorbonne Université, Campus Pierre et Marie Curie, 4 Place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France — nicolas.lerner@imj-prg.fr

Article proposé par Vincent Guedj.

[(i)] Юрий Владимирович Егоров.

[(ii)] Дмитрий Фёдорович Егоров.

[(iii)] La translittération en français des caractères cyrilliques a varié avec le temps et avant la seconde guerre mondiale, le “ов” russe était souvent transcrit en “off” ; le *théorème d'Egoroff* fait en général référence dans la littérature mathématique au résultat le plus connu de Dimitri Fiodorovitch Egorov, tandis que le *théorème d'Egorov* désigne la contribution de Youri Vladimirovitch Egorov sur la quantification des transformations canoniques.

Y. V. Egorov fut Mme Olga A. Oleinik, elle-même une élève de Ivan G. Petrovsky, dont le directeur de thèse était Dimitri Fiodorovitch Egorov, qui est donc un arrière-grand-père mathématique de Youri Vladimirovitch Egorov.

Y. V. Egorov a obtenu sa thèse en 1963 à la Faculté de mécanique et mathématique de l'université d'état de Moscou (Université Lomonosov), puis son *Doctorat de sciences* (analogue à la *Thèse d'état*) en 1970 dans la même université, dans laquelle il devient professeur en 1973. En 1992, il devient professeur à l'université de Toulouse. Les nombreux travaux de Y. V. Egorov, sa thèse sous la direction de Mme Oleinik, ses collaborations avec M. Shubin pour l'*Encyclopædia of Mathematical Sciences*, ses nombreux articles en commun avec V. Kondratiev en font l'un des représentants de la grande école russe de mathématiques. Ces quelques lignes ne sont évidemment pas le lieu d'une revue exhaustive des travaux de Y. V. Egorov, mais nous souhaitons mettre l'accent sur deux aspects fondamentaux de son travail, la quantification des transformations canoniques et l'étude des opérateurs sous-elliptiques.

2. Quantification des transformations canoniques

2.1. Mécanique hamiltonienne

Soit $a(x,\xi)$ une fonction (un hamiltonien) définie sur l'espace des phases $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$. En mécanique classique hamiltonienne, on introduit les courbes bicaractéristiques de a, qui sont les courbes intégrales du champ hamiltonien de a,

$$\dot\gamma = H_a(\gamma), \quad H_a = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \big(\partial_{\xi_j} a \partial_{x_j} - \partial_{x_j} a \partial_{\xi_j}\big).$$

L'espace des phases est muni d'une forme symplectique canonique

$$\sigma = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \mathrm{d}\xi_j \wedge \mathrm{d}x_j,$$

qui est une 2-forme fermée non dégénérée, le champ hamiltonien de a est défini par l'identité $\sigma(X, H_a) = \langle \mathrm{d}a, X\rangle$, où X est un champ de vecteurs arbitraire, i.e. $\sigma \lrcorner H_a = -\mathrm{d}a$, où $\lrcorner$ désigne le produit intérieur, et l'on définit également le crochet de Poisson $\{a,b\}$ par l'identité

$$H_a(b) = \{a,b\} = \sigma(H_a, H_b). \tag{2.1}$$

Une transformation canonique de $\mathbb{R}^{2n}$ est un difféomorphisme χ de $\mathbb{R}^{2n}$ tel que $\chi^*(\sigma) = \sigma$, ce qui est équivalent à l'identité

$$\{a\circ\chi, b\circ\chi\} = \{a,b\}\circ\chi, \tag{2.2}$$

pour tous les hamiltoniens a, b. La brève discussion qui précède montre que l'on peut choisir ad libitum des coordonnées symplectiques sur l'espace des phases, c'est-à-dire des coordonnées $(y, \eta) = \chi(x, \xi)$ où χ est une transformation canonique ; il y a donc une propriété d'invariance par transformation canonique de la mécanique hamiltonienne.

2.2. Calcul pseudo-différentiel

Si le hamiltonien a satisfait à des conditions de régularité ou de décroissance, il est possible de le *quantifier*, c'est à dire de lui associer linéairement un opérateur sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, en général non borné. De manière générale, si a est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on peut donner un sens à l'expression intégrale pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$(\mathrm{Op}(a)u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) \mathrm{d}\xi (2\pi)^{-n}, \tag{2.3}$$

où $\hat{u}$ est la transformée de Fourier de la fonction u donnée par $\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x) \mathrm{d}x$. Notons que la formule d'inversion de Fourier permet d'obtenir en particulier que pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\widehat{D_x^\alpha u}(\xi) = \xi^\alpha \hat{u}(\xi), \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n},$$

et par conséquent $(D_x^\alpha u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \xi^\alpha \hat{u}(\xi) \tilde{\mathrm{d}}\xi$, $\tilde{\mathrm{d}}\xi = (2\pi)^{-n} \mathrm{d}\xi$, ce qui donne

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leqslant m}} a_\alpha(x) (D_x^\alpha u)(x) = \int e^{ix\cdot\xi} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leqslant m}} a_\alpha(x) \xi^\alpha \hat{u}(\xi) \tilde{\mathrm{d}}\xi.$$

Nous utiliserons une quantification semi-classique où le petit paramètre $h \in]0, 1]$ joue le rôle de la constante de Planck et l'on considérera des hamiltoniens $a(x, \xi, h)$ qui sont des fonctions C^∞ de x, ξ telles que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$,

$$\sup_{\substack{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n} \\ 0 < h \leqslant 1}} |(\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a)(x, \xi, h)| h^{-|\beta|} < +\infty. \tag{2.4}$$

On dira que les fonctions vérifiant (2.4) appartiennent à la classe S^0_{sc}. Un exemple typique de fonction dans S^0_{sc} (on dira un symbole) est

$$a(x, \xi, h) = a_1(x, h\xi), \quad a_1 \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n}),$$

où $C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ désigne l'espace des fonctions C^∞ bornées ainsi que chacune de leurs dérivées. On peut résumer rapidement le calcul pseudo-différentiel semi-classique par le théorème suivant.

THÉORÈME 2.1. — *Soient* $a, b \in S^0_{sc}$. *Alors* $\operatorname{Op}(a)$, $\operatorname{Op}(b)$ *sont des opérateurs bornés sur* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *et des endomorphismes de la classe de Schwartz* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. *De plus, on a*

$$\operatorname{Op}(a)\operatorname{Op}(b) = \operatorname{Op}(ab) + h\operatorname{Op}(S^0_{sc}), \tag{2.5}$$

$$\big[\operatorname{Op}(a), \operatorname{Op}(b)\big] = \frac{1}{i}\operatorname{Op}(\{a,b\}) + h^2\operatorname{Op}(S^0_{sc}). \tag{2.6}$$

On a $\{a, b\} \in hS^0_{sc}$.

N.B. — *La formule* (2.5) *ci-dessus signifie que*

$$\operatorname{Op}(a)\operatorname{Op}(b) = \operatorname{Op}(ab) + h\operatorname{Op}(r),\ r \in S^0_{sc},$$

et le commutateur

$$\big[\operatorname{Op}(a), \operatorname{Op}(b)\big] = \operatorname{Op}(a)\operatorname{Op}(b) - \operatorname{Op}(b)\operatorname{Op}(a).$$

2.3. Quantification des transformations canoniques

On a vu que la mécanique hamiltonienne jouissait de propriétés d'invariance symplectique. Comment ces propriétés se traduisent-elles lorsqu'on quantifie les hamiltoniens en leur associant des opérateurs ? C'est la question à laquelle répond le théorème d'Egorov. Considérons une transformation canonique χ de $\mathbb{R}^{2n}$ donnée par une fonction génératrice $S(x, \eta)$, soit

$$\chi\big(\partial_\eta S(x,\eta), \eta\big) = \big(x, \partial_x S(x,\eta)\big),$$

avec $\det(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \eta}) \neq 0$. Notons qu'en choisissant $S(x,\eta) = \langle Bx, \eta\rangle$, avec $B \in Gl(n, \mathbb{R})$, on trouve que $\chi(Bx, \eta) = (x, {}^tB\eta)$, i.e.,

$$\chi(y,\eta) = (B^{-1}y, {}^tB\eta).$$

Si $S(x,\eta) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle x, \eta\rangle$, A matrice symétrique $n \times n$, on trouve $\chi(x,\eta) = (x, \eta + Ax)$ i.e. $\chi(y,\eta) = (y, \eta + Ay)$. Soit $a(x,\xi)$ un hamiltonien donné ; on souhaite exprimer $\operatorname{Op}(a \circ \chi)$ en fonction de $\operatorname{Op}(a)$ et *quantifier* la transformation canonique par un opérateur $\mathcal{M}_\chi$, proche d'un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, de sorte que

$$\mathcal{M}_\chi^* \operatorname{Op}(a)\mathcal{M}_\chi \approx \operatorname{Op}(a \circ \chi). \tag{2.7}$$

On peut remplir ce programme exactement avec un *Opérateur Intégral de Fourier* $\mathcal{M}_\chi$ unitaire pour les exemples de fonctions génératrices qui précèdent. Considérons par exemple l'opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ donné par

$$(\mathcal{M}_1 v)(x) = |\det B|^{1/2} \int e^{i\langle Bx, \eta\rangle}\hat{v}(\eta)\tilde{d}\eta = |\det B|^{1/2} v(Bx), \qquad B \in Gl(n, \mathbb{R}). \tag{2.8}$$

En utilisant la quantification de Weyl(iv), obtenue en modifiant la formule (2.3) par

$$(\mathrm{Op}_w(a)u)(x) = \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi} a\left(\frac{x+y}{2},\xi\right) u(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi(2\pi)^{-n}, \tag{2.9}$$

on obtient

$$\mathcal{M}_1^*\mathrm{Op}_w(a)\mathcal{M}_1 = \mathrm{Op}_w(a\circ\chi), \quad \chi(y,\eta) = (B^{-1}y, {}^tB\eta).$$

De manière analogue, en considérant l'opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ donné par

$$(\mathcal{M}_2 v)(x) = e^{\frac{i}{2}\langle Ax,x\rangle} v(x), \tag{2.10}$$

avec A matrice $n\times n$ symétrique réelle, on obtient

$$\mathcal{M}_2^*\mathrm{Op}_w(a)\mathcal{M}_2 = \mathrm{Op}_w(a\circ\chi),$$

et $\chi(y,\eta) = (y, \eta+Ay)$. On peut obtenir le même type de résultat de manière asymptotique dans un cadre semi-classique, avec ci-dessous une version du Théorème d'Egorov pour des transformations canoniques proches de l'identité.

Théorème 2.2. — *Soit χ une transformation canonique d'un voisinage de $(y_0,\eta_0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ sur un voisinage de (x_0,ξ_0) donnée par une fonction génératrice $S(x,\eta)$ telle que le hessien de $S(x,\eta)-\langle x,\eta\rangle$ s'annule en (x_0,η_0). Il existe un voisinage V_0 de (x_0,ξ_0) et un voisinage Ω_0 de (x_0,η_0) tels que pour $\omega_0\in C_c^\infty(\Omega_0)$, en définissant*

$$(\mathcal{M}v)(x) = \int e^{ih^{-1}S(x,h\eta)}\omega_0(x,h\eta)\hat{v}(\eta)\mathrm{d}\eta, \tag{2.11}$$

pour $a\in C_c^\infty(V_0)$, on ait

$$\mathcal{M}^*\,\mathrm{Op}(a(x,h\xi))\mathcal{M} = \mathrm{Op}((a\circ\chi)(y,h\eta)) + h\,\mathrm{Op}(S^0_{sc}). \tag{2.12}$$

On peut trouver plusieurs versions du théorème d'Egorov : le Theorem 25.3.5 dans le quatrième tome du traité d'Hörmander [10], le Lemma 3.1, “Sharp Egorov Principle” dans l'article de C. Fefferman & D. H. Phong [5] sur le principe d'incertitude d'Heisenberg, le Theorem 11.1 dans le livre de M. Zworski [17] sur l'analyse semi-classique et le Theorem 4.7.8 dans [11]. Le développement d'une théorie mathématique générale des opérateurs intégraux de Fourier est dû à L. Hörmander [7] et à J. J. Duistermaat & L. Hörmander dans [2]. Des développements plus récents sont dus à F. Trèves [16], D. Robert [14], A. Grigis & J. Sjöstrand dans [6] et à J.-M. Bony dans [1].

(iv) L'un des avantages de cette quantification est qu'un hamiltonien réel est quantifié par un opérateur formellement auto-adjoint, et de manière générale $(\mathrm{Op}_w(a))^* = \mathrm{Op}_w(\overline{a})$.

Donnons ici une illustration de ce théorème : considérons un opérateur pseudo-différentiel A d'ordre 1 de type principal réel sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, i.e. dont le symbole (principal) $a(x,\xi)$ est une fonction C^∞ à valeurs réelles sur $\dot{T}^*(\Omega) = \Omega \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, positivement homogène de degré 1 par rapport à la variable ξ, telle que $\nabla_\xi a \neq 0$. Alors, on peut trouver une transformation canonique (homogène) χ avec

$$(x,\xi) = \chi(y,\eta), \quad \eta_1 = a(x,\xi).$$

En quantifiant χ, on trouve un opérateur intégral de Fourier $\mathcal{M}$ (de type similaire à (2.11)) tel que

$$\mathcal{M}^* A \mathcal{M} = D_{y_1} + R_0, \tag{2.13}$$

où R_0 est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0. Si A est comme ci-dessus et u vérifie $Au \in C^\infty$, le résultat de propagation des singularités affirme que le front d'onde de u (cf. e.g. [9, Definition 8.1.2]) est invariant par le flot du champ hamiltonien de a (cf. [10, Theorem 26.1.1]). L'identité (2.13) permet de réduire la démonstration de ce résultat de propagation pour A au même énoncé pour D_{y_1}, un résultat essentiellement élémentaire (le lecteur pourra consulter la Section 8.3 de [9] pour une version simplifiée du Theorem 26.1.1 de [10]).

3. Opérateurs sous-elliptiques

3.1. Formes normales

Si on considère maintenant un hamiltonien scalaire p de type principal à valeurs complexes, alors il vient en utilisant le théorème de préparation de Malgrange (cf. [12], [9, Theorem 7.5.5]) pour un symbole elliptique e (i.e. qui ne s'annule pas en dehors de la section nulle), au voisinage d'un point caractéristique (un point où $p = 0$),

$$ep = \xi_1 + a(x_1, x', \xi') + ib(x_1, x', \xi'),$$

où a, b sont à valeurs réelles. On peut par conséquent trouver une transformation canonique χ, telle que $(x,\xi) = \chi(y_1, y', \eta_1, \eta')$ avec $\eta_1 = \xi_1 + a(x_1, x', \xi')$, $y_1 = x_1$, de sorte que

$$ep = \eta_1 + i(b \circ \chi)(y_1, y', \eta_1, \eta').$$

Il est important de remarquer que $b \circ \chi$ ne dépend pas de η_1 car, en utilisant (2.2), il vient

$$\frac{\partial (b \circ \chi)}{\partial \eta_1} = \{b \circ \chi, y_1\} = \{b \circ \chi, x_1 \circ \chi\} = \underbrace{\{b, x_1\}}_{\frac{\partial b}{\partial \xi_1} = 0} \circ \chi = 0.$$

En quantifiant cette transformation canonique et en utilisant le théorème d'Egorov, on trouve qu'un opérateur de type principal complexe peut s'écrire comme un opérateur d'évolution

$$D_t + i\,\mathrm{Op}(q(t,x,\xi)), \tag{3.1}$$

où $t \in \mathbb{R}$, modulo des termes d'ordre inférieur.

3.2. Condition (Ψ)

On s'intéresse à des opérateurs P sous-elliptiques d'ordre m sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, i.e. tels qu'il existe $\delta \in [0,1[$ de sorte que

$$Pu \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega) \Longrightarrow u \in H^{s+m-\delta}_{\mathrm{loc}}(\Omega), \tag{3.2}$$

où $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ désigne l'espace des distributions u sur Ω telles que pour toute fonction $\phi \in C^\infty_c(\Omega)$, $\phi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Le cas $\delta = 0$ est le cas elliptique et les cas $\delta \in (0,1)$ sont appelés sous-elliptiques avec perte de δ dérivée. Les opérateurs sous-elliptiques sont hypoelliptiques et par conséquent l'opérateur P doit vérifier la condition géométrique $(\overline{\psi})$ (introduite par L. Nirenberg & F. Trèves dans [13]) qui requiert essentiellement que la partie imaginaire du symbole principal de P ne change pas de signe de $+$ à $-$ le long des courbes bicaractéristiques orientées de la partie réelle du symbole principal de P (cf. [10, Definition 26.4.6]). Pour illustrer cette condition, on peut supposer que P est de type (3.1), de symbole principal $\tau + iq(t,x,\xi)$ ($\tau \in \mathbb{R}$, q est à valeurs réelles) ; dans ces coordonnées, la condition $(\overline{\psi})$ pour P signifie

$$q(t,x,\xi) > 0, s > t \Longrightarrow q(s,x,\xi) \geqslant 0. \tag{3.3}$$

En particulier, cette condition est vérifiée pour les opérateurs

$$D_t + ia(t,x,D_x)b(t,x,D_x), \quad a(t,x,\xi) \geqslant 0, \quad t \mapsto b(t,x,\xi) \text{ croissant},$$

avec a d'ordre 0 et b d'ordre 1.

3.3. Sous-ellipticité pour des opérateurs de type principal

Théorème 3.1. — *Soit P un opérateur pseudo-différentiel de type principal sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, de symbole principal p et soit $\delta \in]0,1[$. L'opérateur P est sous-elliptique avec perte de δ dérivée si et seulement si*

$$\begin{cases} P \textit{ vérifie la condition } (\overline{\psi}), \\ \forall\, w \in \dot{T}^*(\Omega), \exists\, z \in \mathbb{C}, \exists\, j \textit{ entier} \leqslant \frac{\delta}{1-\delta}, \\ H^j_{\mathrm{Re}(zp)}\big(\mathrm{Im}(zp)\big)(w) \neq 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

N.B. — *Si P est sous-elliptique alors le meilleur δ peut être choisi égal à $k/(k+1)$, $k \in \mathbb{N}$.*

Exemples 3.2. — Les opérateurs

$$D_t \pm it^{2p}|D_x|, \tag{3.5}$$

$$D_t + it^{2p}\big(D_{x_1} + t^{2q+1}x_1^{2r}|D_x|\big), \tag{3.6}$$

où $p, q, r \in \mathbb{N}$, sont sous-elliptiques. Le type (3.5) se ramène à l'étude d'une équation différentielle ordinaire, après une transformation de Fourier dans la variable x. Le type (3.6) est beaucoup plus difficile à traiter, même pour le cas $p = 1 = r, q = 0$, avec

$$D_t + it^2\big(D_{x_1} + tx_1^2|D_x|\big),$$

pour lequel on peut démontrer $\delta = 9/10$ (cf. e.g. la discussion page 206 de [11]).

La démonstration de ce théorème est l'œuvre de plusieurs auteurs, ayant travaillé indépendamment, mais Y. V. Egorov a joué un rôle crucial dans la genèse et la preuve de ce résultat, annoncé par lui dans [3]. Puis dans [4], Y. V. Egorov démontre la nécessité de (3.4), également obtenue dans l'article [13] de L. Nirenberg & F. Trèves. Une importante étape est due à F. Trèves dans [15] pour la caractérisation des opérateurs sous-elliptiques satisfaisant une condition géométrique plus forte que $(\overline{\psi})$. Le travail de L. Hörmander [8] (voir aussi [10, Chapitre XXVII]) a fourni une démonstration du caractère suffisant de (3.4) pour la sous-ellipticité. Dans tous ces travaux, la forme normale (3.1) et le théorème d'Egorov jouent un rôle décisif.

Bibliographie

[1] J.-M. Bony, « Evolution equations and generalized Fourier integral operators », in *Advances in phase space analysis of partial differential equations*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, vol. 78, Birkhäuser, 2009, p. 59-72.

[2] J. J. Duistermaat & L. Hörmander, « Fourier integral operators. II », *Acta Math.* **128** (1972), n° 3-4, p. 183-269.

[3] Y. V. Egorov, « Subelliptic pseudodifferential operators », *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **188** (1969), p. 20-22.

[4] ———, « Subelliptic operators », *Usp. Mat. Nauk* **30** (1975), n° 3, p. 57-104.

[5] C. Fefferman & D. H. Phong, « The uncertainty principle and sharp Gårding inequalities », *Commun. Pure Appl. Math.* **34** (1981), n° 3, p. 285-331.

[6] A. Grigis & J. Sjöstrand, *Microlocal analysis for differential operators. An introduction*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 196, Cambridge University Press, 1994, iv+151 pages.

[7] L. Hörmander, ≪ Fourier integral operators. I ≫, *Acta Math.* **127** (1971), n° 1-2, p. 79-183.

[8] ———, ≪ Subelliptic operators ≫, in *Seminar on Singularities of Solutions of Linear Partial Differential Equations (Inst. Adv. Study, Princeton, N.J., 1977/78)*, Annals of Mathematics Studies, vol. 91, Princeton University Press, 1979, p. 127-208.

[9] ———, *The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution theory and Fourier analysis*, Classics in Mathematics, Springer, 2003, x+440 pages.

[10] ———, *The analysis of linear partial differential operators. IV. Fourier integral operators*, Classics in Mathematics, Springer, 2009, viii+352 pages.

[11] N. Lerner, *Metrics on the phase space and non-selfadjoint pseudo-differential operators*, Pseudo-Differential Operators. Theory and Applications, vol. 3, Birkhäuser, 2010, xii+397 pages.

[12] B. Malgrange, *Ideals of differentiable functions*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, vol. 3, Oxford University Press, 1967, vii+106 pages.

[13] L. Nirenberg & F. Trèves, ≪ On local solvability of linear partial differential equations. I. Necessary conditions ≫, *Commun. Pure Appl. Math.* **23** (1970), p. 1-38.

[14] D. Robert, *Autour de l'approximation semi-classique*, Progress in Mathematics, vol. 68, Birkhäuser, 1987, x+329 pages.

[15] F. Trèves, ≪ A new method of proof of the subelliptic estimates ≫, *Commun. Pure Appl. Math.* **24** (1971), p. 71-115.

[16] ———, *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators. Vol. 2 Fourier integral operators*, The University Series in Mathematics, Plenum Press, 1980, xiv+301-649+xi pages.

[17] M. Zworski, *Semiclassical analysis*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 138, American Mathematical Society, 2012, xii+431 pages.