

MARCEL BRILLOUIN

Questions d'hydrodynamique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1^{re} série, tome 1, n° 4 (1887), p. 57-80

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1887_1_1_4_57_0

© Université Paul Sabatier, 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

qui donne

$$\int_s \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial n} \right)_e \cos \theta_e ds - \varphi'_2 + \varphi''_2 = 0, \quad \int_s \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial n} \right)_i \cos \theta_i ds - \varphi''_2 + \varphi'_2 + K = 0,$$

et par différence, en effectuant les intégrations,

$$(l'' - l') \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}} - K = 0.$$

De même, pour le potentiel total, un circuit extérieur donne

$$(l'' - l') \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}} - (I\varphi'_1 + \varphi'_2) + (I\varphi''_1 + \varphi''_2) = 0.$$

Toutes ces propriétés sont faciles à généraliser dans le cas du mouvement à trois variables.

35. Revenons aux exemples de Kirchhoff. Le mouvement plan d'un liquide peut être représenté au moyen de deux systèmes de courbes orthogonales, les lignes d'égal potentiel φ et les lignes de courant ψ . La condition d'incompressibilité et celle de l'existence d'un potentiel φ sont satisfaites, si les variables complexes $\omega = \varphi + i\psi$, $z = x + yi$ sont fonction l'une de l'autre. Alors, à chaque point du plan ω correspond un point du plan z . Les parois des solides, dans le plan z , correspondent, dans le plan ω , à des portions de lignes le long desquelles ψ est constant.

Dans le mouvement permanent les lignes de discontinuité sont aussi des portions de lignes le long desquelles non seulement ψ est constant comme pour les parois, mais la vitesse aussi est constante.

Formons

$$\frac{\partial(x + yi)}{\partial(\varphi + i\psi)} = \frac{\partial z}{\partial \omega};$$

c'est une nouvelle quantité complexe $\zeta = \xi + \eta i$; on reconnaît facilement que le rayon vecteur qu'elle représente a pour chaque système de valeurs de φ , ψ ou de x , y la même direction que la vitesse, et est inversement proportionnel à celle-ci. La ligne qui correspond à la ligne de discontinuité est un arc de circonférence, de rayon $\sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}$, dont le centre est à l'origine.

Dans le cas où les parois fixes sont rectilignes, comme la vitesse leur est tangente, les lignes correspondantes dans le plan ζ sont des portions de droites passant par l'origine et parallèles aux parois; ces droites s'étendent jusqu'à l'infini si la vitesse devient nulle en un point de la paroi; elles s'approchent jusqu'à la

circonférence de rayon $\sqrt{\frac{\rho}{2\rho_0}}$, si la vitesse atteint la valeur maximum compatible avec la pression p_0 , mais ne dépassent point cette circonférence. Ce sont ces remarques qui ont permis à Kirchhoff d'indiquer une méthode générale pour obtenir les surfaces de discontinuité qui prennent naissance en présence de parois planes. La méthode permet aussi de former d'autres exemples particuliers dans lesquels les parois ne sont pas planes, en se donnant arbitrairement dans le plan ζ les lignes qui représentent la vitesse le long des parois de forme inconnue, que l'achèvement de l'intégration déterminera.

Les vitesses en tous les points du liquide en mouvement sont représentées dans le plan ζ par les points intérieurs à un certain contour, fermé ou étendu jusqu'à l'infini; ces points ont leurs correspondants dans le plan ω , à l'intérieur d'une bande soit limitée, soit indéfinie, parallèle à l'axe des φ , et les contours se correspondent.

Le problème de trouver l'expression analytique de ζ en fonction de ω , de telle sorte que les contours se correspondent, est le problème de la *représentation conforme* (avec conservation des angles) de l'aire enfermée dans l'un des contours, sur l'aire enfermée dans l'autre. Lorsqu'à un point de l'une des aires doit correspondre un point et un seul de l'autre, le problème est entièrement déterminé pourvu qu'on se donne en outre trois valeurs particulières correspondantes sur les deux contours (DARBOUX, *Surfaces*, Livre II, Ch. IV, p. 172).

Si l'on réussit à former cette fonction

$$\zeta = \frac{\partial z}{\partial \omega} = f(\omega),$$

une quadrature donne z en fonction de ω qui, mise sous forme réelle, fournit les deux équations nécessaires pour déterminer φ et ψ en x, y .

Dans le cas des parois courbes, on obtiendra la forme de celles-ci en substituant à ψ les valeurs constantes par lesquelles on les a représentées dans le plan ω , entre les limites convenables de φ . Kirchhoff a indiqué quelques exemples de ce genre; je ne m'y arrêterai pas: je me bornerai à exposer les résultats relatifs aux parois planes.

36. Rappelons rapidement les transformations qui appliquent des figures de diverses formes tracées dans le plan $z = x + yi$ sur le demi-plan positif $\omega = \alpha + \beta i$, en faisant coïncider le contour avec l'axe α .

I. Aire comprise entre deux rayons vecteurs, qui font les angles θ_1, θ_2 avec l'axe des x

$$\omega = \alpha + \beta i = z^{\frac{\pi}{\theta_2 - \theta_1}} \cdot e^{-\frac{\pi \theta_1}{\theta_2 - \theta_1}}$$

Les rayons θ_1, θ_2 s'appliquent respectivement sur la partie positive et la partie négative de l'axe des α ; un arc de circonférence de rayon c ayant son centre à l'origine des xy devient une demi-circonférence de rayon $c^{\frac{\pi}{\theta_2 - \theta_1}}$ dont le centre est au point $\alpha = 0, \beta = 0$.

II. *Croissant*. — Aire comprise entre deux arcs de cercle qui se coupent aux points c_1, c_2 ; les tangentes aux arcs de cercle au point c_1 , faisant les angles θ_1, θ_2 avec la direction de la corde $c_2 c_1$.

$$\omega = \left(\frac{z - c_1}{z - c_2} \right)^{\frac{\pi}{\theta_2 - \theta_1}} e^{-\frac{\pi \theta_1}{\theta_2 - \theta_1}}.$$

Le sommet c_1 vient à l'origine; le point c_2 va à l'infini. L'arc dont la tangente a la direction θ_1 s'applique sur la partie positive de l'axe des α ; l'autre sur la partie négative du même axe.

III. L'aire indéfinie comprise entre les deux rayons et la circonférence de rayon c devient par la transformation I un croissant d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de sommets $+c^{\frac{\pi}{\theta_2 - \theta_1}}, -c^{\frac{\pi}{\theta_2 - \theta_1}}$. En lui appliquant la transformation II, on l'applique sur le demi-plan avec le sommet $+c^{\frac{\pi}{\theta_2 - \theta_1}}$ à l'origine

$$\omega = \left(\frac{\frac{\pi}{(z)^{\theta_2 - \theta_1}} e^{-\frac{\pi \theta_1}{\theta_2 - \theta_1}} - c^{\frac{\pi}{\theta_2 - \theta_1}}}{\frac{\pi}{(z)^{\theta_2 - \theta_1}} e^{-\frac{\pi \theta_1}{\theta_2 - \theta_1}} + c^{\frac{\pi}{\theta_2 - \theta_1}}} \right)^2.$$

IV. La transformation

$$\omega = e^{-\frac{\pi}{b}z}$$

applique la bande comprise entre $y = 0$ et $y = b$, sur le demi-plan; la ligne $y = 0$ est appliquée sur la partie positive de l'axe des α , et la ligne $y = b$ sur la partie négative; l'origine $\alpha = 0, \beta = 0$ correspond à $x = -\infty$, une portion de ligne $x = \text{const.}$ devient une demi-circonférence, et toute ligne $y = \text{const.}$ un rayon.

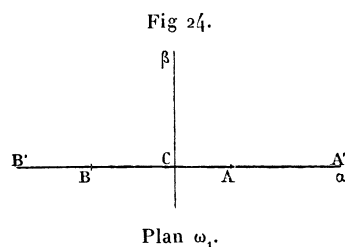
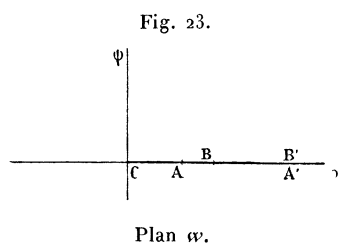
V. La transformation la plus générale qui applique une fois et une seule le demi-plan positif x, y sur le demi-plan positif α, β , avec correspondance de l'axe des x , est

$$\omega = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc > 0.$$

a, b, c, d sont des constantes réelles. Cette transformation établit en même temps

la correspondance entre les deux demi-plans négatifs, le point $x = -\frac{b}{a}$, $y = 0$, vient à l'origine, le point $x = -\frac{d}{c}$, $y = 0$, s'éloigne à l'infini; enfin le point $x = \frac{a}{c}$, $y = 0$, correspond au point ∞ .

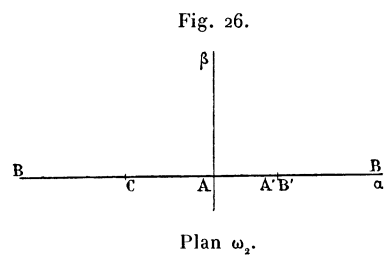
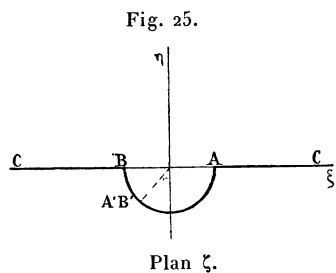
37. Exposons la méthode de Kirchhoff sur un exemple, celui d'une lame plane soumise à l'action d'un courant uniforme indéfini (*fig. 20*). A l'infini de tous les côtés, $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ a la même valeur $\sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}$, celle relative à la discontinuité. Dans le plan ω , cela donne une ligne double, de courant $\Psi = 0$, qui s'étend indéfini-



ment à partir de $\Phi = 0$ jusqu'à $\Phi = \infty$ (*fig. 23*). La transformation (I) applique ω sur le plan auxiliaire ω_1 (*fig. 24*),

$$\omega_1 = +\sqrt{\omega}.$$

Dans le plan ζ , la limite est formée par deux portions indéfinies de l'axe des ξ reliées par la demi-circonférence de rayon $\sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}$ qui répond à la surface de discontinuité, et c'est la portion du plan située du côté négatif qui représente ζ



(*fig. 25*). La transformation III applique ζ d'une manière particulière sur le demi-plan ω positif (*fig. 26*),

$$\omega_2 = - \left(\frac{\zeta - \sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}}{\zeta + \sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}} \right).$$

On fait coïncider les deux représentations sur le plan ω au moyen de la transformation V

$$+ \cot^2 \frac{\theta}{2} \frac{\sqrt{\omega} - \sqrt{\Phi_0}}{\sqrt{\omega} + \sqrt{\Phi_1}} = - \left(\frac{\zeta - \sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}}{\zeta + \sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}} \right)^2,$$

en appelant Φ_0, Φ_1 les valeurs de Φ aux deux bords de la lame et θ l'angle positif plus petit que deux droites du plan de la lame avec la direction opposée à celle du courant à grande distance. Enfin, si nous supposons Φ nul au point C où la ligne de courant $\psi = 0$ rencontre la lame et se dédouble, comme la vitesse en ce point est nulle, on a

$$+ \cot^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\Phi_0} = \sqrt{\Phi_1}.$$

Toutes les conditions relatives à la vitesse sont satisfaites et ne laissent arbitraire que l'une des deux quantités Φ_0, Φ_1 . Après l'intégration, celle-ci sera déterminée par la largeur de la lame. Résolvons l'équation par rapport à ζ

$$\zeta = \left[-\cos \theta + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{\Phi_1}{\omega}} + \sqrt{\left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{\Phi_1}{\omega}} - \cos \theta \right)^2 - 1} \right] \sqrt{\frac{\rho}{2p_0}},$$

et intégrons

$$z - c = \int \zeta d\omega = \sqrt{\frac{\rho}{2p_0}} \left\{ \begin{array}{l} -\omega \cos \theta + 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\Phi_1 \omega} \\ + \left(\sqrt{\omega} + \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \theta}{\sin^2 \theta} \sqrt{\Phi_1} \right) \sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\Phi_1} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\omega} \right) (\sqrt{\Phi_1} + \sqrt{\omega})} \\ + \frac{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \theta} \Phi_1 \arcsin \left(\frac{\sin^2 \theta}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\Phi_1}} + \cos \theta \right). \end{array} \right.$$

On peut choisir c de telle sorte que l'origine soit au point de la plaque où la vitesse est nulle

$$c = \frac{4 \sin^4 \frac{\theta}{2} \Phi_1}{\sin^3 \theta} \left(\cos \theta - \frac{\pi}{2} - \theta \right) \sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}.$$

De plus, on peut trouver facilement les valeurs de z qui correspondent aux deux bords de la lame. Elles sont données par

$$\sqrt{\omega} = \tan^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\Phi_1} = \sqrt{\Phi_0}, \quad \sqrt{\omega} = -\sqrt{\Phi_1}.$$

On obtient ainsi

$$x_0 = \sqrt{\frac{\rho}{2\rho_0}} \Phi_1 \left(-\cos\theta \operatorname{tang}^2 \frac{\theta}{2} + 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \operatorname{tang}^2 \frac{\theta}{2} + 2\pi \frac{\sin^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \theta} \right),$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{\rho}{2\rho_0}} \Phi_1 \left(-\cos\theta - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2\pi \frac{\sin^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \theta} \right),$$

et, par suite, la largeur de la lame est

$$x_0 - x_1 = l = \sqrt{\frac{\rho}{2\rho_0}} \Phi_1 \frac{4 + \pi \sin \theta}{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}}.$$

On a donc

$$\Phi_1 = \sqrt{\frac{2\rho_0}{\rho}} \frac{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4 + \pi \sin \theta} l.$$

La solution est maintenant complète. Kirchhoff n'a traité cet exemple que dans son premier Mémoire; dans son Livre il s'est borné au cas de l'incidence normale. Les formules qu'il a données ne diffèrent de celles-ci que par le choix des unités que j'ai laissées arbitraires (1).

38. Pour avoir la forme de la surface de discontinuité, il faut faire dans l'expression générale de z

$$\Psi = 0, \quad \text{avec} \quad \Phi > 0, \quad \text{et} \quad \sqrt{\Phi} > \sqrt{\Phi_1} \operatorname{tang}^2 \frac{\theta}{2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\Phi} < -\sqrt{\Phi_1}.$$

On trouve facilement

$$(1) \quad z - c = \sqrt{\frac{\rho}{2\rho_0}} \left\{ \begin{aligned} & -\Phi \cos\theta + 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\Phi_1 \Phi} + \frac{2\pi \sin^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \theta} \Phi_1 \\ & + i \left\{ \begin{aligned} & \frac{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \theta} \Phi_1 \log \left[2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{\Phi}{\Phi_1}} + \cos\theta \right. \\ & \left. + \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{\Phi}{\Phi_1}} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \left(\sqrt{\frac{\Phi}{\Phi_1}} + 1 \right)} \right] \\ & \left. + \left(\sqrt{\Phi} + \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos\theta}{\sin^2 \theta} \sqrt{\Phi_1} \right) \sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\Phi} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\Phi_1} \right) \left(\sqrt{\Phi} + \sqrt{\Phi_1} \right)} \right\} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right.$$

(1) On retrouve les formules de Kirchhoff en posant $\sqrt{\frac{2\rho_0}{\rho}} = 1$, $\sqrt{\Phi_1} = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$. Cela équivaut à

prendre pour unité de longueur $\frac{l \sin^4 \theta}{4 + \pi \sin \theta}$ et pour unité de temps $\frac{l \sin^4 \theta}{4 + \pi \sin \theta} \sqrt{\frac{\rho}{2\rho_0}}$.

où x et y sont séparés. Pour la même valeur de Φ , on obtient les deux valeurs de x , y , qui correspondent aux deux nappes en prenant $\pm \sqrt{\Phi}$. Cela donne en particulier

$$\delta x = \sqrt{\frac{\rho}{2\rho_0}} \cdot 8 \sin^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\Phi_1 \Phi}.$$

Cette différence croît constamment avec Φ : les deux nappes de la surface de discontinuité s'éloignent donc indéfiniment l'une de l'autre.

On aura la forme de la ligne de courant $\Psi = 0$ avant sa rencontre avec la lame, en faisant $\Phi < 0$.

Enfin, on aura la vitesse aux différents points de la paroi en faisant

$$\Psi = 0, \quad \Phi > 0, \quad -\sqrt{\Phi_1} < \sqrt{\Phi} < \tan^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\Phi_1}.$$

L'expression de ζ est réelle et l'on a

$$\zeta = \sqrt{\frac{\rho}{2\rho_0}} \left[-\cos \theta + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{\Phi_1}{\Phi}} + \sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\Phi_1} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\Phi} \right) (\sqrt{\Phi_1} + \sqrt{\Phi})} \right].$$

La pression en un point x , Φ de la lame est

$$p = p_0 - \frac{\rho}{2\xi^2} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{2p_0}{\rho} - \frac{1}{\xi^2} \right),$$

et la pression totale

$$P = \int_{x_1}^{x_0} \frac{\rho}{2} \left(\frac{2p_0}{\rho} - \frac{1}{\xi^2} \right) dx.$$

Mais le long de la paroi, la relation

$$\zeta = \frac{dz}{d\omega}$$

se réduit à

$$\xi = \frac{dx}{d\Phi};$$

on a ainsi, grâce à cette remarque de Kirchhoff,

$$P = \int \frac{\rho}{2} \left(\frac{2p_0}{\rho} \xi - \frac{1}{\xi} \right) d\Phi = \int \sqrt{2\rho p_0} \cdot \sqrt{\left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{\Phi_1}{\Phi}} - \cos \theta \right)^2 - 1} d\Phi,$$

et il faut faire l'intégration entre les limites $-\sqrt{\Phi_1}$ et $+\sqrt{\Phi_1} \tan^2 \frac{\theta}{2}$ pour $\sqrt{\Phi}$. Cette intégration a été effectuée dans la recherche de z :

$$P = \sqrt{2\rho p_0} \Phi_1 \frac{4\pi \sin^4 \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \theta} = p_0 \frac{\pi \sin \theta}{4 + \pi \sin \theta} l.$$

Sur la seconde face, la pression est nulle, comme sur la surface de discontinuité; P représente donc la pression qu'exerce le liquide en mouvement sur la lame plane, lorsque la surface de discontinuité a la forme (1).

Lord Rayleigh, qui a le premier donné la valeur de cette pression (1876), a aussi déterminé son moment par rapport au point où la vitesse est nulle. Il en a déduit pour le bras de levier de la pression P par rapport au milieu de la lame

$$D = \frac{3}{4} \frac{\cos \theta}{4 + \pi \sin \theta} l.$$

Le point d'application remonte à mesure que la lame s'éloigne de la position normale au courant.

39. La loi de l'obliquité trouvée ainsi par lord Rayleigh est très différente de celle du carré du sinus de l'angle θ , adoptée par les ingénieurs avec plus ou moins de confiance sous l'autorité de Newton et d'Euler, et souvent employée comme une loi applicable à un élément de surface pris dans une surface courbe quelconque.

Rien n'autorise à admettre même l'existence d'une loi élémentaire de pression d'un courant uniforme qui permette de calculer la grandeur et le point d'application de la pression résultante pour une surface courbe au moyen d'une quadrature, sans qu'il soit nécessaire d'intégrer les équations générales de l'Hydrodynamique. C'est le contraire qui est évident : sur une lame plane, une seule ligne de courant vient jusqu'au contact de la lame, s'y sépare en deux : au point de rencontre la vitesse est nécessairement nulle; elle croît depuis ce point jusqu'aux bords, et par conséquent la pression maximum au centre diminue en approchant des bords : sur les divers éléments d'une même lame plane la pression n'est pas uniforme. La pression en un point d'une surface courbe exposée à l'action d'un courant uniforme indéfini ne dépend donc pas seulement de la direction de la normale en ce point, mais de la forme de toute la surface et de la position du point sur cette surface.

Puisqu'il en est ainsi, on peut dire que la formule de Rayleigh fournit le premier et le seul résultat complet qu'on puisse regarder comme une conséquence des principes de l'Hydrodynamique pour un corps immergé dans un courant liquide indéfini. Le Tableau suivant du Mémoire de Lord Rayleigh donne la comparaison des résultats des expériences de Vince (*Ph. Trans.*, 1798) et de ceux que donneraient diverses formules d'obliquité. La dernière colonne indique la distance calculée du bord supérieur au point où la vitesse est nulle.

θ .	$\sin^2\theta$.	Exp.	$P_0 : P_{90}$.	$D_0 : L$.	$(x_0 - c) : l$.
90.....	1,0000	1,000	1,0000	0,0000	0,5000
70.....	0,8830	0,974	0,9652	0,0369	0,2676
50.....	0,5868	0,873	0,8537	0,0752	0,0981
30.....	0,2500	0,613	0,6411	0,1166	0,0173
20.....	0,1170	0,458	0,4814	0,1389	0,0040
10.....	0,0302	0,778	0,2728	0,1625	0,0004

L'avantage appartient nettement à la formule de Rayleigh, quatrième colonne, et il est permis de penser qu'il serait plus décisif encore, si la vitesse avait approché davantage de la limite, ou si l'on réussissait à faire la théorie pour des vitesses inférieures à la vitesse limite.

Les déplacements du point d'application de la résultante en fonction de l'obliquité ont aussi été étudiés par lord Rayleigh : ce point s'éloigne du milieu quand l'obliquité croît; mais il ne va pas jusqu'au bord, l'écart maximum, correspondant à $\alpha = 0$, c'est-à-dire à la lame parallèle au courant, est $\frac{3l}{16}$. Ce résultat est facile à contrôler par des expériences fort simples : une lame verticale, qui peut glisser horizontalement entre deux coulisses fixées à un axe vertical, est plongée dans un courant horizontal indéfini. Quand l'axe passe par le milieu de la lame, la position stable de celle-ci est normale au courant. On fait glisser la lame, de manière à éloigner peu à peu l'axe du milieu; la lame tourne autour de l'axe et prend une orientation oblique. Bien avant que l'axe ait atteint le bord de la lame, celle-ci se place parallèlement au courant; on ne fait qu'augmenter la stabilité de cette position quand on approche de plus en plus l'axe du bord de la lame.

40. Les autres cas traités par Kirchhoff conduisent aux résultats suivants :

1° Écoulement par une fente en mince paroi plane a de largeur l

$$z = \frac{l}{2 + \pi} (1 - e^{-aw} + \sqrt{e^{-2aw} - 1} + \text{arc tang } \sqrt{e^{-2aw} - 1}),$$

en posant

$$a = \frac{2 + \pi}{l} \sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}.$$

Il se forme un jet (*fig. 19*) dont la largeur à grande distance de l'ouverture est $\frac{\pi}{2 + \pi} l$; la contraction de la veine plane est environ 0,61; le débit par seconde est $\frac{\pi}{2 + \pi} l \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}$.

I. — *Fac. de T.*

2° Écoulement à l'intérieur d'un tube plat vertical de largeur l (Ex. d'Helmholtz)

$$z = -i \frac{l}{2\pi} [e^{-2bw} + bw - 1 + e^{-bw} \sqrt{e^{-2bw} - 1} - \log(e^{-bw} + \sqrt{e^{-2bw} - 1})] \quad (1),$$

en posant

$$b = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}.$$

Il se forme un jet à l'intérieur du tube, dont la largeur à grande distance est seulement $\frac{l}{2}$. Le débit est égal à $l \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}$.

Les parties ombrées représentent le liquide en repos.

41. *Instabilité des jets; flammes sensibles; flammes chantantes.* — Les mouvements discontinus étudiés par Helmholtz et Kirchhoff sont des mouvements permanents possibles des liquides; avant de pouvoir affirmer que ce sont bien les mouvements limites correspondant aux mouvements réels des fluides naturels, qui prennent naissance spontanément et se maintiennent, il faut étudier la stabilité de ces mouvements. Au point de vue expérimental, tous les jets subissent assez fortement l'influence des moindres mouvements périodiques, comme le montrent les expériences connues de Savart sur les jets d'eau, de Tyndall (*Son*, 6^e Leçon) sur les flammes sensibles et les jets de gaz. Chaque jet a un maximum de sensibilité pour une certaine hauteur de son variable avec la pression d'écoulement. On peut même rendre la flamme tellement sensible à un son de hauteur déterminée, que, brûlant dans un tuyau accordé sur ce son, elle fasse parler ce tuyau spontanément et devienne une flamme chantante. De même dans les tuyaux d'orgue, on peut donner à la lame d'air qui sort par la fente d'une embouchure de flûte son maximum de sensibilité pour le son du tuyau en réglant la distance du biseau à la fente; la production des harmoniques successifs du même tuyau en forçant le vent montre bien l'influence de la vitesse d'écoulement.

Dans le mouvement limite adopté par Helmholtz, ce caractère se retrouve exagéré; la forme de la surface de discontinuité paraît être toujours instable, et d'autant plus instable que la longueur d'onde de la perturbation est moindre. Lord Rayleigh a étudié cette question dans deux Mémoires (1878) dont je vais faire connaître les principaux résultats.

Occupons-nous seulement des mouvements plans dans lesquels il y a une ligne de discontinuité, et conservons les notations des numéros précédents. Appelons, en outre, s l'arc de la ligne de discontinuité compté depuis le point où elle se sé-

(¹) Cette équation permettra au lecteur de corriger facilement l'équation correspondante de la page 51, transcrite inexactement.

pare de la paroi, et supposons le potentiel nul en ce point. En un point de la ligne le potentiel a pour valeur Vs du côté où le liquide se meut avec la vitesse limite V , et zéro de l'autre côté. Une petite déformation simple, dont l'ordonnée n normale à la ligne de discontinuité est la partie réelle de $H e^{ips+at}$, correspond à des accroissements de potentiel qui, dans le voisinage immédiat de cette ligne, se réduisent à la partie réelle de $\Phi_1 = A_1 e^{ips+pn+at}$ et de $\Phi_2 = A_2 e^{ips-pn+at}$; A_1 et A_2 sont des constantes imaginaires. Cette forme satisfait à la condition d'incompressibilité, $\Delta_2 \varphi = 0$, dans le voisinage de la ligne de discontinuité. On aurait la forme générale en remplaçant s et n par ΦV^{-1} et ΨV^{-1} , Φ et Ψ ayant les valeurs relatives à l'état permanent.

1° La ligne de discontinuité se meut avec le liquide

$$\frac{D}{Dt}(n - H e^{ips+at}) = 0.$$

Les termes du premier ordre satisfont à cette relation en posant

$$A_1 = -H \left(\frac{\alpha}{p} + iV \right), \quad A_2 = +H \frac{\alpha}{p}.$$

2° La pression est à chaque instant la même de part et d'autre; en tenant compte de l'égalité de pression dans l'état permanent, il reste

$$\frac{1}{2} V^2 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[\left(V + \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \right)^2 \right] = - \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right)^2 \right]$$

et, au premier ordre,

$$\left(\frac{\alpha}{p} + iV \right)^2 = - \left(\frac{\alpha}{p} \right)^2$$

ou

$$\alpha = \frac{pV}{2} (\pm 1 - i).$$

Une solution simple de longueur d'onde $\frac{2\pi}{p}$ est donc de la forme

$$n = \left(H e^{+\frac{pVt}{2}} + H' e^{-\frac{pVt}{2}} \right) \cos p \left(s - \frac{Vt}{2} \right) + \left(G e^{+\frac{pVt}{2}} + G' e^{-\frac{pVt}{2}} \right) \sin p \left(s - \frac{Vt}{2} \right).$$

Les constantes H , H' , G , G' dépendent de l'état initial et de la forme des parois; l'oscillation se propage avec la vitesse $\frac{V}{2}$ et croît en même temps. L'amplitude devient environ vingt-trois fois plus grande pendant le temps de parcours d'une longueur d'onde; c'est un mouvement d'autant plus instable que la longueur d'onde est plus petite. Cette solution est complète quand le liquide en mouvement et le

liquide en repos s'étendent indéfiniment, l'un du côté des n négatifs, l'autre du côté positif et quand, de plus, la ligne de discontinuité est indéfinie.

Mais il faut bien remarquer qu'elle n'est plus satisfaisante près du point de jonction de cette ligne à la paroi; là le mouvement ne saurait être symétrique de part et d'autre; le point de jonction peut seulement osciller le long de la paroi, sans que la ligne de discontinuité cesse d'être tangente à la paroi; c'est une condition à laquelle cette solution simple ne satisfait pas; le mouvement oscillatoire qui peut prendre naissance dans ce cas est donc plus compliqué, et l'influence de cette liaison sur la stabilité est inconnue. Tous les cas traités par lord Rayleigh se rapportent à une surface de discontinuité illimitée.

Quand le liquide est limité latéralement par des lignes de courant à distance finie, il faut compléter la solution par une autre analogue, où la vitesse de propagation est $-\frac{V}{2}$, et qui correspond à des termes en e^{-pn} dans le potentiel du liquide en mouvement, et en e^{+pn} dans l'autre. Les quatre constantes sont déterminées en fonction des quatre premières par les circonstances du mouvement permanent et ne permettent de satisfaire à aucune nouvelle condition initiale. On trouve ainsi, pour un jet rectiligne indéfini de largeur $2l$ et de vitesse V au milieu d'un liquide indéfini en repos, la déformation simple

$$n = H e^{\pm \mu p V t} \cos p(\lambda V t - x)$$

avec les relations

$$\mu = \frac{\sqrt{\operatorname{tanh} pl}}{1 + \operatorname{tanh} pl}, \quad \lambda = \frac{1}{1 + \operatorname{tanh} pl},$$

lorsque les déformations des deux faces sont symétriques; quand les déformations des deux faces sont parallèles, il faut remplacer $\operatorname{tanh} pl$ par $\operatorname{coth} pl$. Lorsque la longueur d'onde est très grande par rapport à la largeur du jet, pl est très petit; μ et λ deviennent égaux à \sqrt{pl} , 1, ou à \sqrt{pl} , pl , suivant que les déformations sont symétriques ou parallèles; l'instabilité mesurée par $\mu p V$ a la même limite dans les deux cas, mais non la vitesse de propagation. La déformation est toujours instable, quelle que soit la longueur d'onde.

42. Dans les liquides naturels, le frottement rend impossible l'existence d'une surface de discontinuité; il ne peut y avoir que des couches épaisses de tourbillons. Dans quelle mesure la stabilité d'une couche de tourbillons surpasse-t-elle celle d'une surface de discontinuité, même pour un liquide sans frottement? C'est ce qu'il est intéressant d'examiner avec lord Rayleigh sur quelques exemples de mouvement plan parallèle à l'axe des x . On satisfait à la condition d'incompressi-

bilité en posant

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \Psi = f(y) + Y e^{\alpha t + i p x}.$$

$f(y)$ est une fonction arbitraire de y seule, relative à l'état permanent, et Y une autre fonction de y correspondant à la perturbation de période $\frac{2\pi}{p}$. En éliminant la pression entre les deux équations du mouvement, on obtient une équation unique dont les termes du premier ordre donnent, pour les petites déformations,

$$\left[\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - Y \left(p^2 + \frac{i p f'''}{\alpha + i p f'} \right) \right] (\alpha + i p f') = 0.$$

Quand la couche peut être séparée en bandes dans chacune desquelles f'' a une valeur constante, Y est de la forme $A e^{\pm p x}$, et les conditions de continuité de vitesse normale et tangentielle, ainsi que de pression d'une bande à l'autre, donnent des relations homogènes entre les constantes A , qui entraînent une relation entre α , p , les diverses valeurs de f'' et les épaisseurs des bandes.

S'il y a une seule bande d'épaisseur b , d'un côté de laquelle la vitesse est uniforme et égale à V , et de l'autre à $-V$, on a $f'' = \frac{2V}{b}$. Ce mouvement est instable pour les perturbations de grande longueur d'onde, comme si b était nul; l'instabilité est maximum lorsque la longueur d'onde est égale à $8b$, elle se change en stabilité croissante pour des longueurs d'onde inférieures à $5b$; en même temps les sinuosités des deux surfaces limites de la bande deviennent parallèles.

Les résultats sont un peu différents pour des bandes dans lesquelles la vitesse maximum est au milieu, et qui sont limitées par du liquide en repos. Toutes les déformations symétriques sont stables; les déformations non symétriques sont stables quand la longueur d'onde est petite, instables quand elle est grande. Ces résultats établis par lord Rayleigh, dans quelques cas où la distribution de la vitesse dans la bande est représentée par un polygone convexe, paraissent susceptibles d'extension au cas plus général d'une courbe convexe quelconque.

43. Discussion de l'hypothèse d'Helmholtz. — De ces recherches il semble résulter que le mouvement est toujours instable quand il y a une surface de discontinuité; qu'il est stable, au contraire, dans des limites de longueur d'onde fort étendues quand la vitesse est continue, la discontinuité portant seulement sur les rotations élémentaires, c'est-à-dire sur les dérivées de la vitesse, et sous certaines réserves supplémentaires.

Ces résultats, il faut bien l'avouer, ne sont guère favorables à l'hypothèse d'une surface de discontinuité des vitesses, et l'on doit se demander si cette conception de Helmholtz correspond bien à l'état limite d'un fluide à frottement très faible.

Ayant exposé de mon mieux cette hypothèse dans les paragraphes précédents, on me permettra de terminer par quelques réflexions personnelles. Il me semble que, dans cette discussion, on a trop souvent regardé le liquide entièrement dénué de frottement comme ayant une existence propre, et que l'on s'est fort embarrassé de difficultés n'existant que pour ce liquide parfait, dont nous ne connaissons point d'exemple, mais nullement pour les liquides naturels. Le liquide parfait de l'Hydrodynamique est une conception idéale, dont les propriétés rigoureuses donnent souvent, mais pas toujours, une première approximation suffisante du mouvement des liquides réels. En particulier, nous savons que les vitesses tangentielles d'un liquide à la surface d'un corps qu'il mouille restent toujours très petites ou même nulles; ce dernier cas est sensiblement réalisé, d'après les expériences d'Helmholtz et Piotrowski, pour l'éther et l'alcool au contact d'un métal. Si l'un de ces liquides, d'abord en repos, est mis en mouvement et qu'on le traite comme un fluide parfait, il y aura un potentiel des vitesses, et le mouvement correspondant sera très différent du mouvement réel dans le voisinage des parois; la vitesse tangentielle n'y sera pas nulle. Par exemple, dans un tube cylindrique, la vitesse serait uniforme dans toute la section droite. Si l'on traite le problème en tenant compte du frottement, on trouve qu'il se produit une couche de tourbillons près de la paroi. Cette couche n'est pas nécessairement confinée au voisinage immédiat de la paroi, comme on le suppose implicitement en prenant le mouvement à potentiel comme mouvement limite. Un exemple simple est fourni par l'écoulement dans un tube circulaire indéfini de rayon a . Pour un liquide visqueux, la vitesse à une distance r de l'axe est donnée, comme on sait, par les relations

$$u = \frac{2I}{\pi a^4} (a^2 - r^2), \quad v = 0, \quad w = 0,$$

en appelant I le débit par seconde, quand le liquide reste immobile le long de la paroi. Le coefficient de frottement intervient seulement dans l'expression de la chute de pression par unité de longueur, $\mu \frac{8I}{\pi a^4}$. Quand le coefficient μ tend vers zéro, la chute de pression tend aussi vers zéro, mais la distribution de vitesse reste la même pour le même débit. Elle satisfait à toutes les équations du mouvement permanent d'un liquide parfait.

Dans le cas général, l'état limite correspondant au frottement infiniment petit comportera des rotations non confinées à la surface des solides ou à des surfaces de discontinuité.

44. La nécessité de tenir compte du frottement dans le raisonnement est particulièrement évidente quand il s'agit de l'état permanent. Un état permanent in-

dépendant de l'état initial n'est possible que s'il y a frottement. La période variable dure d'autant plus longtemps que le frottement est plus faible, et l'énergie totale absorbée par le frottement et transformée en chaleur dans le passage de l'état initial à l'état permanent a une valeur finie même pour un frottement interne très faible.

Les équations différentielles du mouvement d'un liquide parfait suffisent donc à rendre compte des mouvements qui se produisent pendant un temps fini dans un liquide à frottement très faible; elles doivent être satisfaites par le mouvement permanent de ce liquide; mais elles sont absolument insuffisantes pour rendre compte du passage d'un état initial quelconque, et en particulier du repos, à un état permanent, quelque faible que soit le frottement intérieur.

Les rotations élémentaires ne subissent en un temps fini que des variations très petites comme le frottement intérieur; mais des variations finies quelconques peuvent se produire dans le passage d'un état initial quelconque à l'état permanent. Les rotations permanentes ont une limite différente de zéro quand le frottement intérieur diminue indéfiniment. C'est toute une étude à refaire et ce n'est pas ici le lieu. Il suffit de remarquer que, dans un fluide naturel, c'est certainement par le jeu du frottement interne que les vitesses se règlent, de manière à ne donner jamais de pression négative, et qu'on peut obtenir le même résultat dans le mouvement limite, grâce à l'existence des rotations. Dans ce cas, en effet, la relation qui détermine la pression est

$$\frac{p}{\rho} + V + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \Pi$$

avec

$$2(v\zeta - w\eta) = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad 2(w\xi - u\zeta) = \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad 2(u\eta - v\xi) = \frac{\partial \Pi}{\partial z},$$

et il peut y avoir une surface le long de laquelle p a sa valeur minimum positive ou nulle, sans discontinuité ni des vitesses, ni des dérivées de la pression.

45. Qu'il s'agisse d'un fluide parfait ou visqueux, il paraît probable que, dans un espace simple, la connaissance des trois composantes de la vitesse en chaque point de la surface limite est nécessaire et suffisante pour déterminer entièrement le mouvement permanent continu. Mais il y a une grande différence entre le liquide parfait et le liquide visqueux; pour ce dernier, la distribution de la vitesse dans chacune des ouvertures de la surface limite n'a d'influence sensible que près de l'ouverture même; loin de la surface limite, le mouvement du fluide visqueux ne dépend que du débit total de chaque ouverture. Rien de pareil pour le fluide

parfait. Ce que j'appelle le *mouvement limite*, ce qu'il est intéressant de connaître, c'est ce que devient le mouvement caractéristique du fluide visqueux quand on y annule le coefficient de frottement. Ce mouvement principal du fluide visqueux est probablement celui dans lequel le travail transformé en chaleur par le frottement est le plus petit qui soit compatible avec des valeurs déterminées du débit de chaque ouverture, et les conditions d'adhérence aux parois; cette condition est indépendante de la grandeur du coefficient de frottement; elle détermine aussi le mouvement limite.

Reprenons l'exemple du tube cylindrique indéfini, le long des parois duquel le liquide est en repos. Avec un fluide parfait, une distribution quelconque de vitesses parallèles aux génératrices, sans vitesses normales, peut se maintenir d'un bout à l'autre du tube. Avec le fluide visqueux, au contraire, une seule distribution de ce genre est uniforme; si l'on en produit une différente en un point quelconque du tube, le jeu naturel des frottements la transformera rapidement. Cette distribution uniforme, rappelée au n° 42, rend minimum absolu le travail dépensé en frottement pour un débit I , avec une vitesse nulle le long des parois, comme on peut facilement s'en convaincre.

J'arrêterai provisoirement ici cette Revue, sans avoir complètement rempli le programme que je m'étais tracé. Je compte, d'ailleurs, que l'interruption ne sera pas de longue durée; j'ai hâte d'arriver à l'étude du mouvement des solides dans un liquide naturel, et des résistances qu'il y éprouve, la plus difficile peut-être et la plus intéressante de toutes les questions qui se présentent en Hydrodynamique.



BIBLIOGRAPHIE

(1858-1885).

N. B. — Pour ne pas allonger indéfiniment cette liste, on a laissé de côté presque tous les Mémoires relatifs aux mouvements continus sans rotation élémentaire.

I. — Traités généraux et Collections de Mémoires étrangers.

1877. KIRCHHOFF Vorlesungen über mathematische Physik. — Zweite Auflage. (Leipzig, Teubner.)
1879. H. LAMB A Treatise on the mathematical theory of the motion of fluids. (Cambridge, University Press.)
1879. STOKES Mathematical and physical Papers. (Cambridge, University Press.)
1882. HELMHOLTZ Wissenschaftliche Abhandlungen. (Leipzig, Barth.)
1882. KIRCHHOFF Gesammelte Abhandlungen. (Leipzig, Barth.)
1883. J.-J. THOMSON A Treatise on the motion of vortex-rings. (London, Macmillan.)
1883. Sir W. THOMSON { Treatise on natural Philosophy. New edition. (Cambridge,
and TAIT { University Press.)

II. — Équations générales de l'Hydrodynamique.

1827. CAUCHY Mémoire sur la théorie des ondes. (*Mém. Sav. étr.*)
1857. CLEBSCH Ueber eine allgemeine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen. (*Crelle J.*, LIV.)
1858. HELMHOLTZ Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. (*Crelle J.*, LV.)
1859. CLEBSCH Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen. (*Crelle J.*, LVI.)
1862. STEFAN Ueber die Bewegung flüssiger Körper. (*Sitz. Ak. Wiss. Wien.*, XLVI.)
1868. J. BERTRAND { Discussion. (*C. R.*, LXVI, LXVII.)
et HELMHOLTZ }
1868. W. THOMSON On vortex motion. (*Tr. R. S. Ed.*, XXV.)

I. — *Fac. de T.*

1868. WEBER..... Ueber eine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen. (*Crelle J.*, LXVIII.)
1870. COCKLE..... On the motion of fluid \dot{s} . (*Q. J.*, X-XI.)
1870. VELTMAN..... Die Helmholtz'sche Theorie der Flüssigkeitswirbel. (*Schlöm. Zeitsch. f. Math. Phys.*, XV.)
- 1871-1872-1873. BELTRAMI. Sui principii fondamentali dell' Idrodinamica razionale (1^{re}, 2^e, 3^e P.). (*Mem. di Bologna*, I, II, III.)
1873. BOBYLEW..... Einige Betrachtungen über die Gleichungen der Hydrodynamik. (*Clebsch Ann.*, VI.)
1874. E. BELTRAMI.... Sui principii fondamentali dell' Idrodinamica razionale (4^e P.). (*Mem. di Bologna*, V.)
1876. BELTRAMI..... Intorno al moto piano di un disco ellittico in fluido. (*Rend. Bologna*, 1875-1876.)
1876. COTTERILL..... On the distribution of energy in a mass of liquid in a state of steady motion. (*Ph. Mag.*, I.)
1877. HICKS..... Quaternion investigations on strains and fluid motion. (*Q. J.*, XIV.)
1878. LAMB..... On the conditions of steady motion of a fluid. (*Pr. L. M. S.*, IX.)
1879. MULLER..... Einleitung in die Hydrodynamic. (*Wolf Zeitsch.*, XXVIII.)
1880. GRAETZ..... Ueber Wirbelbewegungen in compressiblen Flüssigkeiten. (*Schlöm. Zeitsch. f. Math. Phys.*, XXV.)
1880. HILL..... Some properties of the equations of Hydrodynamics. (*Q. J.*, XVII.)
1880. ROWLAND..... On the motion of a perfect incompressible fluid, when no solid bodies are present. (*Am. J.*, III.)
1880. MARGULES..... Ueber discrete Wirbelfäden. (*Wien. Ber.*, LXXXI.)
1881. CRAIG..... Methods and Results. — General properties of the equations of steady motion. (*U. St. Coast and Geodetic Survey.*)
1881. HICKS..... Report on recent progress in Hydrodynamics. (*Br. Ass. Rep.*)
1881. PACI..... Sopra una trasformazione delle equazioni fondamentali della Idrodinamica. (*N. Cim.*, IX.)
1883. GILBERT..... Transformation des équations de l'Hydrodynamique. (*Ann. Soc. Sc. Brux.*, VII.)
1884. BJERKNES..... Les équations hydrodynamiques et les relations supplémentaires (*Acta math.*, IV.)
1885. LAMB..... Hydrodynamical theorem. (*Mess.*, XIV.)
1885. NANSON..... Note on Hydrodynamics. (*Mess.*, XIV.)

III. — Expériences sur les tourbillons.

1858. W. ROGERS. On the formation of rotating rings by air and liquids under certain conditions of discharge. (*Am. J. Arts and Sc.*, XXVI.)
1860. REUSCH. Ueber Ringbildung in Flüssigkeiten. (*Pogg. Ann.*, CX.)
1864. TOMLINSON. On a new variety of cohesion figures. (*Ph. Mag.*, XXVII, XXVIII.)
1868. BALL. On vortex rings in air. (*Ph. Mag.*, XXXVI.) — Sur les couronnes de fumée. (*Ann. Ch. Ph.*, XV.) — Sur les anneaux tourbillons dans l'air. (*Les Mondes*, XVII.)
1871. BALL. Experiments upon the retardation experienced by vortex rings of air when moving through air. (*Ph. Trans. Ir. Ac.*, XXV.) — Account of experiments upon the resistance of air to the motion of vortex-rings. (*Ph. Mag.*, XLII.)
1871. DEACON. Ring vortices in water. (*Chem. news*, XXIV.)
1876. O. REYNOLDS. On the resistance encountered by vortex-rings, and the relation between the vortex-rings and streamlines of a disc. (*Nat.*, XIV.)
1876. O. REYNOLDS. On the action of rain to calm the sea. (*Proc. Manch. Soc.*, XIV.)
1877. O. REYNOLDS. On vortex in fluids. (*Nat.*, XV.)
1877. TROWBRIDGE. On liquid vortex-rings. (*Ph. Mag.*, III.)
1879. GIESEN. Oscillationen einer homogenen Flüssigkeitsmasse in Folge ihrer Oberflächenspannung. (*Schlöm. Zeitsch. f. Math. Phys.*, XXIV.)
1881. GUEBHARDT. Sur les tourbillons annulaires des liquides et des gaz. (*Ass. fr.*, 1879; *La Nat.*)
- 1883 J.-J. THOMSON } On the formation of vortex-rings by drops falling into liquids
and NEWALL. } and some allied phenomena. (*Pr. R. S. L.*, XXXIX.)

IV. — Mouvement sans rotation des fluides autour des solides.

1863. RANKINE. On plane water lines in two dimensions. (*Ph. Trans.*)
1864. RANKINE. Summary of the properties of certain stream lines. (*Ph. Mag.*, XXVIII.)
1870. MAXWELL. On the displacement in a case of fluid motion. (*Pr. L. M. S.*, III.)

1871. RANKINE On the mathematical theory of stream lines, especially with four foci and upwards. (*Ph. Tr. R. S. L.*, CLXI.)
1874. F.-D. THOMSON Some cases of fluid motion. (*Mess.*, III, IV.)
1874. FERRERS On the motion of a mass of water about a moving cylinder. (*Q. J.*, XIII.)
1875. FERRERS On the motion of an infinite mass of water about a moving ellipsoid. (*Q. J.*, XIII.)
1877. LAMB On some hydrodynamical solutions. (*Q. J.*, XIV.)
1878. BELTRAMI Intorno ad un caso di moto a due coordinate. (*Rend. Inst. Lomb.*, XI.)
1878. FERRERS Solution of certain questions in potentials and motion of liquids. (*Q. J.*, XIV.)
1878. GREENHILL Fluid motion in a rotating quadrantal cylinder. (*Mess.*, VIII.)
1878. HICKS On velocity and electric potentials between parallel planes. (*Q. J.*, XV.)
1878. HICKS Fluid motion in a rotating semicircular cylinder. (*Mess.*, VIII.)
1879. GREENHILL Fluid motion between confocal elliptic cylinders and confocal ellipsoids. (*Q. J.*, XVI.)
1879. GREENHILL Fluid motion in a rotating rectangle formed by two concentric circular arcs and two radii. (*Q. J.*, XVI.)
1880. FERRERS On the motion of water contained in certain cylindrical vessels and on certain analytical theorems connected with that problem. (*Q. J.*, XVII.)
1880. HICKS On functional images in ellipses. (*Q. J.*, XVII.)
1881. HICKS On toroidal functions. (*Ph. Tr. Lond.*, CLXX.)
1881. ROUTH Some applications of conjugate functions. (*Pr. L. M. S.*, XIII.)
1882. SAINT-VENANT Mouvement dans un vase d'où sort un liquide par un petit trou. (*C. R.*, XCIV.)
1883. BASSET On the motion of a liquid in and about cylinders whose transverse sections are the inverses of confocal ellipses with respect to their centre. (*Q. J.*, XIX.)
1883. BASSET On certain physical problems connected with surfaces which are the inverses of ellipsoids of revolution. (*Q. J.*, XIX.)
1885. BASSET On the velocity potential due to the motion of an infinite liquid about a spherical bowl. (*Pr. L. M. S.*, XVI.)

V. — Mouvements des tourbillons dans les liquides. — Vibrations. — Vortex-atomes.

1867. W. THOMSON . . . Vortex-atoms. (*Pr. R. S. Ed.*, VI; *Ph. Mag.*, XXXIV.)
1875. W. THOMSON . . . On two-dimensional motion of mutually influencing vortex columns and on two-dimensional approximately motion of a liquid. — Titre seul. (*Pr. Ed. S.*, IX.)
1876. W. THOMSON . . . On vortex motion. — On the ultramundane corpuscles of Lesage. (*Proc. Ed. S.*, VII; *Ph. Mag.*, 5^e série, I.)
1876. W. THOMSON . . . A mechanical illustration of the vibrations of a triad of columnar vortices. — Titre. (*Proc. R. S. Ed.*, IX.)
1876. W. THOMSON . . . On the vortex theory of gases, of the condensation of gases on solids and of the continuity between the gaseous and liquid state of matter. — Titre. (*Pr. R. S. Ed.*, IX.)
1877. GREENHILL Plane vortex motion. (*Q. J.*, XV.)
1877. GROEBLI Specielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden. (*Wolff Zeitsch.*, XXII.)
1878. COATES Vortex motion in and about elliptic cylinders. (*Q. J.*, XV, XVI.)
1879. COATES On circular vortex-rings. (*Q. J.*, XVI.)
1879. LEWIS On the images of vortices in a spherical vessel. (*Q. J.*, XVI.)
1879. LEWIS Some cases of vortex motion. (*Mess.*, IX.)
1880. W. THOMSON . . . Vibrations of columnar vortex. (*Pr. Ed.*, X; *Ph. Mag.*, X.)
1880. W. THOMSON . . . On vortex statics. (*Ph. Mag.*, X.)
1880. W. THOMSON . . . On an experimental illustration of minimum energy in vortex motion. (*Br. Ass. Rep.*; *Nat.*, XXIII.)
1882. J.-J. THOMSON . . . On the vibrations of a vortex-ring and the action upon each other of two vortices in a perfect fluid. (*Ph. Tr. L.*, CLXXIII.)
1883. HICKS On the steady motion of a hollow vortex. (*Pr. R. S. L.*, XXXV.)
1884. HICKS On the steady motion and small vibrations of a hollow vortex. (*Ph. Tr. L.*, CLXXV.)
1884. HILL The differential equations of cylindrical and annular vortices. (*Pr. L. M. S.*, XVI.)
1885. J.-J. THOMSON . . The vortex-ring theory of gases. On the law of the distribution of energy among the molecules. (*Pr. R. Soc. L.*, XXXIX.)

VI. — Mouvement d'un solide non percé dans un liquide.

1852. DIRICHLET..... Ueber einige Fälle in welchen sich die Bewegung eines festen Körpers in einem incompressibeln flüssigen Medium theoretisch bestimmen lässt. (*Berl. Monatsber.*)
1854. HOPPE..... Vom Widerstande der Flüssigkeiten gegen die Bewegung fester Körper. (*Pogg. Ann.*, XCIII.)
- 1856-1857. CLEBSCH.... Ueber die Bewegung eines Ellipsoïds in einer tropfbaren Flüssigkeit. (*Crelle J.*, LII et LIII.)
1870. CLEBSCH..... Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. (*Math. Ann.*, III.)
1870. KIRCHHOFF..... Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit. (*J. Borch.*, LXXI; *Abh.*)
1870. W. THOMSON.... On the forces experienced by solids immersed in a moving liquid. (*Pr. R. S. Ed.*, VII.)
1871. W. THOMSON.... Hydrokinetic solutions and observations. On the motion of free solids through a liquid. (*Pr. R. S. Ed.*, VII; *Ph. Mag.*, XLII.)
1873. BJERKNES..... Verallgemeinerung des Problems von dem ruhenden Ellipsoid in einer bewegten unendlichen Flüssigkeit. (*Gött. Nachr.*)
1873. BJERKNES..... Verallgemeinerung des Problems von den Bewegungen welche in einer ruhenden, unelastischen Flüssigkeit die Bewegung eines Ellipsoïds hervorbringt. (*Gött. Nachr.*)
1873. MICHAELIS..... Mouvement d'un solide dans un liquide. (*Arch. néerl.*, VIII.)
1877. LAMB..... On the motion of a solide through an infinite mass of liquid. (*Pr. L. M. S.*, VIII.)
1877. KOPCKE..... Zur Discussion der Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit. (*Math. Ann.*, XII.)
1877. Lord RAYLEIGH.. On the irregular flight of a tennis-ball. (*Messenger*, VII.)
1878. GREENHILL..... On the motion of a top and allied problems in Dynamics. (*Q. J.*, XV.)
1878. PURSER..... On the applicability of Lagrange's equations in certain cases of fluid motion. (*Ph. Mag.*, 5^e série, VI.)
1879. CRAIG..... On the motion of a solid in a fluid. (*Am. J.*, II.)
1879. CRAIG..... On the motion of an ellipsoid in a fluid. (*Am. J.*, II.)
1879. GREENHILL..... Notes on Hydrodynamics. (*Mess.*, IX.)
1880. GREENHILL..... On the steady motion of a top and of a solid of revolution moving in an infinite liquid. (*Q. J.*, XVII.)

1882. LAMB..... On the forces experienced by a solid moving in an infinite mass of liquid. (*Q. J.*, XIX.)
1882. SCHULKE..... Die Bewegung eines Rotationskörpers in einer incompressiblen Flüssigkeit. (*Arch. f. Math. Phys.*, LXVIII.)
1882. WEBER..... Anwendung der Thetafunctionen zwei Veränderlicher auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. (*Math. Ann.*, XIV.)
1883. KOLACECK..... Ueber Schwingungen fester Körper in Flüssigkeiten. (*Wien. Ber.*, LXXXVII.)

VII. — Mouvement d'un solide percé ou de plusieurs solides.

1869. BJERKNES..... Om omsætning af oscillatoriske bevægelser i progressive. (*Vidensk. Selsk. Forhandl.*, XI.)
1869. BJERKNES..... Om den samtidige bevægelse af kugleformige legemer i incompressibelt fluidum. (*Skand. Naturforsk. Forhandl.*, X.)
1869. KIRCHHOFF..... Ueber die Kräfte welche zwei unendlich dünne starre Ringe in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben können. (*Crelle J.*, LXXI.)
1871. BOLTZMANN..... Ueber die Druckkräfte welche auf Ringe wirksam sind die in bewegte Flüssigkeit tauchen. (*Crelle J.*, LXXIII.)
1873. BJERKNES..... Geschichtliche Notizen über das Dirichlet'sche Kugel- und Ellipsoid-Problem. (*Gött. Nachr.*)
1873. W. THOMSON.... On the motion of rigid solids in a liquid circulating irrotationally through perforations in them or in any fixed solid. (*Proc. R. S. Ed.*, VII; *Ph. Mag.*, XLV.)
1878. HICKS..... On the motion of two cylinders in a fluid. (*Rep. Br. Ass.*)
1879. HICKS..... On the motion of two cylinders in a fluid. (*Q. J.*, XVI.)
1879. GODECKER..... Die Bewegung eines kreisförmigen Ringes in einer unendlichen incompressiblen Flüssigkeit. (Göttingen.)
1880. HICKS..... On the condition of steady motion of two cylinders in a fluid. (*Q. J.*, XVII.)
1880. HICKS..... On the problem of two pulsating spheres in a fluid. (*Pr. M. S. Cambr.*, IV.)
1880. HICKS..... On the motion of two spheres in a fluid. (*Ph. Tr.*, CLXXI.)

VIII. — Mouvements discontinus.

1868. HELMHOLTZ..... Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen. (*Berl. Mon.; Abh.*)

1869. KIRCHHOFF Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. (*J. Borch.*, LXX.)
1873. HELMHOLTZ Ein Theorem über geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper nebst Anwendungen auf das Problem Luftballons zu lenken. (*Berl. Mon.; Abh.*)
1874. HANLON and }
MAXWELL } The vena contracta. (*Proc. L. M. S.*, III.)
1876. LORD RAYLEIGH Notes on Hydrodynamics. — On the resistance of fluids. (*Ph. Mag.*, II.)
1877. CHRISTOFFEL Untersuchungen über die mit dem Fortbestehen linearer Differentialgleichungen verträglichen Unterstetigkeiten. (*Brioschi Ann.*, VIII.)
1877. OBERBECK Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegung. (*Pogg. A.*, II.)
1879. STEARN Vortex sheets. (*Q. J.*, XVI.)
1884. PLANCK Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen. (*Wied. Ann.*, XXI.)
1884. REIFF Ueber stationäre Strömung auf krummen Flächen. (*Beibl.*)
1884. TAIT On vortex motion. (*Pr. R. S. Ed.*, XII.)
1885. KOTSCHAU Studien der Flüssigkeitsbewegungen. (*Wied. Ann.*, XXVI.)

IX. — Stabilité des mouvements tourbillonnaires et discontinus.

1871. W. THOMSON On the influence of wind on waves in water supposed frictionless. (*Ph. Mag.*, 4^e série, XLII.)
1876. W. THOMSON On vortex vibrations and on instability of vortex motions. — Titre. (*Proc. R. S. Ed.*, IX.)
1878. RAYLEIGH On the instability of jets. (*Pr. L. M. S.*, X.)
1878. RAYLEIGH On the stability or instability of certain fluid motions. (*Pr. L. M. Soc.*, XI.)
1880. W. THOMSON On a disturbing infinity in lord Rayleigh's solution for waves in a plane vortex stratum. (*Nat.*, XXIII.)
1880. W. THOMSON On maximum and minimum energy in vortex motion. (*Br. Ass. Rep.; Nat.*, XXII.)
1882. RAYLEIGH Liquid jets. (*Pr. R. S. L.*, XXXIV.)

