ANNALES
DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES
DE
TOULOUSE
Mathématiques

Ibrahima Hamidine

Approches courantielles à la Mellin dans un cadre non archimédien

Tome XXVIII, nº 2 (2019), p. 357-396.

<http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2019_6_28_2_357_0>

Annales de la faculté des sciences de Toulouse Volume XXVIII, n° 2, 2019
pp. 357-396

Approches courantielles à la Mellin dans un cadre non archimédien [*]

Ibrahima Hamidine [1]

Résumé. — On propose une approche du type Mellin pour l'approximation des courants d'intégration ou la réalisation effective de courants de Green normalisés associés à un cycle $\bigwedge_1^m[\mathrm{div}(s_j)]$, où s_j est une section méromorphe d'un fibré en droites $\mathscr{L}_j \to U$ au-dessus d'un ouvert U d'un bon espace de Berkovich, lorsque chaque $\mathscr{L}_j$ est équipé d'une métrique lisse et que $\mathrm{codim}_U(\bigcap_{j\in J}\mathrm{Supp}[\mathrm{div}(s_j)]) \geqslant \#J$ pour tout ensemble $J \subset \{1,\dots,p\}$. On étudie aussi la transposition au cadre non archimédien des formules de Crofton et de King, en particulier la réalisation approchée de courants de Vogel et de Segre.

Abstract. — We propose an approach of Mellin type for the approximation of integration currents or the effective realization of normalized Green currents associated with a cycle $\bigwedge_1^m[\mathrm{div}(s_j)]$, where s_j is a meromorphic section of a line bundle $\mathscr{L}_j \to U$ over an open U in a good Berkovich space when each $\mathscr{L}_j$ has a smooth metric and $\mathrm{codim}_U(\bigcap_{j\in J}\mathrm{Supp}[\mathrm{div}(s_j)]) \geqslant \#J$ for every set $J \subset \{1,\dots,p\}$. We also study the transposition to the non archimedean context of Crofton and King formulas, particularly the approximate realization of Vogel and Segre currents.

Introduction

Étant donnée une fonction f holomorphe dans un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{C}^n$ et une $(n-1,n-1)$-forme différentielle φ à support compact dans $\mathscr{U}$, la transformée

[*] Reçu le 8 avril 2016, accepté le 23 mai 2017.

Mots-clés : courants, diviseurs, équations de Lelong–Poincaré, formule de King, nombres de Lelong.

Classification Mathématique (2010) : 32U25, 32U35, 32U40, 14G22, 14G40, 14TXX.

[1] Département de Mathématiques, UFR Sciences et Technologies, Université Assane Seck de Ziguinchor, BP : 523, Sénégal — i.hamidine5818@zig.univ.sn

This work was Supported by NLAGA-Simons project, partially supported by IMB of Bordeaux (France) and UASZ (Sénégal).

Article proposé par Damian Rössler.

de Mellin de la fonction

$$\varepsilon \in]0, +\infty[\longmapsto I_f(\varphi)(\varepsilon) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\{|f|^2=\varepsilon\}} \frac{\mathrm{d}f \wedge \varphi}{f}$$

est formellement la fonction méromorphe

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathbb{C} \longmapsto \lambda \int_0^\infty \varepsilon^{\lambda-1}\, I_f(\varphi)(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon &= \frac{1}{2i\pi} \left\langle [\lambda |f|^{2(\lambda-1)}\, \overline{\mathrm{d}f}]\,,\, \mathrm{d}f \wedge \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle \mathrm{dd}^c \left[\frac{|f|^{2\lambda}}{\lambda}\right], \varphi \right\rangle,\end{aligned}$$

($\mathrm{dd}^c = \frac{-\partial\bar{\partial}}{2i\pi}$) et sa valeur en $\lambda = 0$ (qui n'est pas un pôle) est exactement $\langle [\mathrm{div}(f)]\,, \varphi\rangle$, ce qui constitue une manière alternative de formuler dans le cadre de la géométrie analytique complexe la formule de Lelong–Poincaré. Introduite pour la première fois dans un tel contexte dans [4, chapitre 1, sections 1 et 2], cette approche s'est révélée particulièrement utile pour envisager les problèmes d'intersection et de division dans le cadre de la géométrie analytique complexe en profitant du scindage du courant d'intégration $[\mathrm{div}(f)]$ en $[\mathrm{div}(f)] = \bar{\partial}[1/f] \wedge \mathrm{d}f$, où $[1/f]$ est le $(0,0)$-courant Valeur Principale extension standard depuis l'ouvert $\mathscr{U}_f = \mathscr{U} \setminus \mathrm{Supp}([\mathrm{div}(f)])$ de la fonction holomorphe inversible $1/f$. Quand bien même pareil scindage du courant $[\mathrm{div}(f)]$ ne s'avère plus possible dans le contexte de la géométrie analytique sur un corps $\mathbb{K}$ équipé d'une valeur absolue non archimédienne, un des objectifs de ce travail est de montrer qu'une approche du même type peut néanmoins être conduite dans ce cadre, suivant en particulier l'approche à la théorie de l'intersection incomplète proposée dans [1] (toujours dans le cadre de la géométrie analytique complexe).

Soit $\mathbb{K}$ un corps équipé d'une valeur absolue ultramétrique (triviale ou non) $|\cdot|$ pour laquelle $\mathbb{K}$ est aussi complet et Γ son groupe des valeurs, c'est-à-dire le sous-groupe de $\mathbb{R}$ obtenu comme l'image de $\mathbb{K}^*$ par la valuation $-\log|\cdot|$. Soit X une variété algébrique de dimension n définie sur $\mathbb{K}$. On note X^{an} l'analytifié de X au sens de Berkovich [6, Remarque 3.4.2], ensemblistement décrit ainsi (voir par exemple [17, section 4]) : si $U = \mathrm{Spec}(A)$ est un ouvert affine de X, on considère l'ensemble U^{an} de toutes les semi-normes multiplicatives ultramétriques sur l'algèbre A prolongeant la valeur absolue $|\cdot|$ sur $\mathbb{K}$ et l'on équipe cet ensemble U^{an} de la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications d'évaluation $x \in U^{\mathrm{an}} \mapsto x(a) = |a|_x (a \in A)$; en recollant les divers U^{an} pour tous les ouverts affines U de X, on obtient un espace topologique connexe, localement compact et séparé, sur lequel il reste à construire un faisceau structural $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ de fonctions dites régulières. Ce faisceau est défini ainsi (voir par exemple [8, chapitre 1, section 1.2] pour une présentation rapide). Chaque point x de U^{an} induit une norme sur l'anneau intègre $B_x = A/\ker x$, où $\ker x = \{a \in A\,;\, x(a) = 0\}$, cette norme s'étendant en une norme $|\cdot|_x$ sur le corps des fractions de B_x, corps que l'on complète relativement à cette norme en un corps $\mathscr{H}_x$. Si $\mathscr{U}$ est un ouvert de U^{an}, une fonction régulière dans $\mathscr{U}$ (c'est-à-dire un élément de $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}(\mathscr{U})$) est par définition une fonction

$$x \in \mathscr{U} \longmapsto f(x) \in \bigsqcup_{x\in\mathscr{U}} \mathscr{H}_x$$

se pliant à la clause d'approximation suivante : pour tout $x \in \mathscr{U}$, il existe un voisinage $\mathscr{U}_x$ de x dans $\mathscr{U}$ tel que

$$\begin{aligned} &\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, a_{x,\epsilon} \in A,\ \exists\, b_{x,\epsilon} \in A \setminus \ker x,\ \text{tels que} \\ &\forall\, \xi \in \mathscr{U}_x\,,\ |f(\xi) - a_{x,\epsilon}(\xi)/b_{x,\epsilon}(\xi)|_\xi < \epsilon, \end{aligned} \tag{0.1}$$

où il faut ici entendre $a_{x,\epsilon}(\xi)$ et $b_{x,\epsilon}(\xi)$ comme les classes dans B_ξ des éléments $a_{x,\epsilon}(\xi) = \xi(a_{x,\epsilon})$ et $b_{x,\epsilon}(\xi) = \xi(b_{x,\epsilon})$, le quotient $a_{x,\epsilon}(\xi)/b_{x,\epsilon}(\xi)$ étant alors un élément du corps des fractions de cet anneau intègre B_ξ, donc de son complété $\mathscr{H}_\xi$ pour la norme $|\cdot|_\xi$.

Lorsque X est le tore $T_r := \operatorname{Spec} \mathbb{K}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_r^{\pm 1}]$ (plus généralement $\mathbb{K}[M_r]$, où M_r est un groupe abélien libre de rang r), l'analytifié T_r^{an} se visualise ensemblistement ainsi : se donner une semi-norme multiplicative sur $\mathbb{K}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_r^{\pm 1}]$ prolongeant la valeur absolue $|\cdot|$ sur $\mathbb{K}$ revient à se donner une $\mathbb{K}$-extension $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ avec une valeur absolue $|\cdot|_{\mathbb{L}}$ prolongeant la valeur absolue sur $\mathbb{K}$, un point $\ell \in \mathbb{L}^r$ et à poser $x_{\mathbb{L},\ell}(a) = |a(\ell)|_{\mathbb{L}}$. On dispose d'une application continue et propre de tropicalisation :

$$x \in T_r^{\mathrm{an}} \overset{\mathrm{trop}}{\longmapsto} (-\log(x(X_1)), \ldots, -\log(x(X_r))) \in \mathbb{R}^r$$
$$(\text{où } N_{r,\mathbb{R}},\ N_r = \operatorname{Hom}(M_r, \mathbb{Z})).$$

Cette application de tropicalisation admet la section suivante : à $(\omega_1, \ldots, \omega_r) \in \mathbb{R}^r$ (respectivement dans $N_{r,\mathbb{R}}$), on associe la norme multiplicative sur $\mathbb{K}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$ (respectivement sur $\mathbb{K}[M_r]$) définie par

$$x_\omega(a) := \sup_{\alpha \in \operatorname{Supp}(a)} |a_\alpha|\, e^{-\langle \alpha, \omega \rangle}.$$

L'image de $\mathbb{R}^r$ (ou plus généralement de $N_{r,\mathbb{R}}$) par cette section $\omega \mapsto x_\omega$ est appelée squelette de T_r^{an} ; c'est un sous-ensemble fermé de T_r^{an} sur lequel T_r^{an} se rétracte continument au sens fort.

Le rôle des cartes locales sur X^{an} est tenu par les analytifications des applications moment de la variété algébrique X (voir par exemple [17]).

On dispose aussi sur X^{an} d'êtres cette fois « souples » et non plus « rigides » (comme le sont les sections locales du faisceau structurant), à savoir des sections du faisceau $\mathscr{A}^{0,0}$ des fonctions lisses. Si U est un ouvert de X^{an}, une section de $\mathscr{A}^{0,0}$ dans U est par définition une fonction de U dans $\mathbb{R}$

pouvant s'exprimer localement (au voisinage de tout point x de U) sous la forme

$$\xi \longmapsto \phi(\log|f_{x,1}|_\xi, \dots, \log|f_{x,m_x}|_\xi), \tag{0.2}$$

où les fonctions $f_{x,j}$ sont des fonctions régulières inversibles au voisinage de x et ϕ une fonction de $\mathbb{R}^{m_x}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ au voisinage de l'image dans $\mathbb{R}^{m_x}$ d'un voisinage de x par l'application

$$\xi \longmapsto \big(\log|f_{x,1}|_\xi, \dots, \log|f_{x,m_x}|_\xi\big) \in \mathbb{R}^{m_x}.$$

Tel est le cas par exemple des fonctions s'exprimant au voisinage U_x de tout point x de U sous la forme

$$\xi \longmapsto \prod_{j=1}^{m_x} \left(\frac{|f_{x,j}(\xi)|_\xi}{e^{\rho_{x,j}}}\right)^{\lambda_j} = \prod_{j=1}^{m_x} \exp(\lambda_j\,(\log|f_{x,j}(\xi)|_\xi - \rho_{x,j}))$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_{m_x}$ sont des paramètres réels, $f_{x,1}, \dots, f_{x,m_x}$ des fonctions régulières et inversibles au voisinage de x et $\rho_{x,1}, \dots, \rho_{x,m_x}$ des éléments de $\mathscr{A}^{0,0}(U_x)$.

On dispose aussi sur X^{an}, pour tout couple d'entiers p, q entre 0 et n, du faisceau $\mathscr{A}^{p,q}$ des (p,q)-formes et, par dualité, du faisceau $\mathscr{D}_{p,q}$ des (p,q)-courants, tous deux introduits par A. Chambert-Loir et A. Ducros ([11, 12]) et W. Gubler [17]). Rappelons brièvement comment sont définis ces faisceaux. Afin de pouvoir profiter, tout en travaillant dans un cadre réel, de la positivité inhérente au cadre complexe, on introduit dans un premier temps sur $\mathbb{R}^r$ (ou $\mathbb{N}_{r,\mathbb{R}}$) le faisceau des (p,q) super-formes ($0 \leqslant p, q \leqslant r$) : une section de ce faisceau dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ (ou $N_{r,\mathbb{R}}$) est une (p,q)-forme (au sens usuel) dans l'ouvert $\mathrm{Log}^{-1}(\Omega) \subset (\mathbb{C}^*)^r$ (ou $\mathbb{C}[N_r](\mathbb{C})$) s'exprimant comme

$$\omega = \sum_{\substack{1\leqslant i_1<\dots<i_p\leqslant r\\ 1\leqslant j_1<\dots<j_q\leqslant r}} \omega_{I,J}(\mathrm{Log}(z))\,\frac{\mathrm{d}z_I}{z_I} \wedge \frac{\mathrm{d}\bar{z}_J}{\bar{z}_J},$$

où $\mathrm{Log} : z \mapsto (\log|z_1|, \dots, \log|z_r|)$ et les $\omega_{I,J}$ sont des fonctions à valeurs réelles de classe C^∞ dans Ω. Par dualité, on dispose du faisceau des super-courants de bidimension (p,q), dont les sections dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ (ou $N_{r,\mathbb{R}}$) sont les courants de bidimension (p,q) dans $\mathrm{Log}^{-1}(\Omega)$ s'exprimant sous la forme

$$T = \sum_{\substack{1\leqslant i'_1<\dots<i'_{n-p}\leqslant r\\ 1\leqslant j'_1<\dots<j'_{n-q}\leqslant r}} T_{I',J'}(\mathrm{Log}(z))\,\frac{\mathrm{d}z_{I'}}{z_{I'}} \wedge \frac{\mathrm{d}\bar{z}_{J'}}{\bar{z}_{J'}},$$

où les distributions $T_{I',J'}$ sont des distributions réelles dans Ω et

$$\langle T_{I',J'}(\mathrm{Log}(z)), \varphi\rangle := \left\langle T_{I',J'}(x), \frac{1}{(2\pi)^r}\int_{[0,2\pi]^r} \varphi(e^{x+i\theta})\,\mathrm{d}\theta_1\dots\mathrm{d}\theta_r\right\rangle$$

pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{Log}^{-1}(\Omega), \mathbb{R})$. Le courant tropical de bidimension (n, n) attaché (voir [2, 3]) à un cycle tropical de dimension $n < r$ dans $\mathbb{R}^r$ ou $N_{r,\mathbb{R}}$ (la pondération étant prise en compte) constitue un exemple important de super-courant de bidimension (n, n) dans $\mathbb{R}^r$ ou $N_{r,\mathbb{R}}$. Pour plus de détails sur la manière dont les formes différentielles réelles sur les espaces de Berkovich sont introduites, voir [17]. Le faisceau $\mathscr{D}_{p,q}(U)$ des courants de bidimension (p, q) sur X^{an} est défini comme le dual du faisceau $\mathscr{A}^{p,q}(U)$ des (p, q)-formes différentielles (on notera par la suite, pour tout ouvert U de X^{an} par $\mathscr{A}_c^{p,q}(U)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des (p, q)-formes différentielles à support compact inclus dans U) [17, section 6]. On dispose en particulier du courant de bidegré (p, p) d'intégration sur une sous-variété Y de X de codimension $0 \leqslant p \leqslant n$ et, lorsque f est une fonction régulière dans un ouvert U de X^{an}, du courant de bidegré $(1, 1)$ d'intégration (avec multiplicités prises en compte) $[\mathrm{div}(f)]$. Si $u : U \to \mathbb{R}$ est une fonction continue dans un ouvert U de X^{an}, u définit naturellement un courant de bidegré $(0, 0)$ dans U (voir par exemple [18, section 6]), noté $[u]$.

Le but de ce travail est de développer une approche basée sur le prolongement analytique aux fins de la résolution de l'équation de Lelong–Poincaré, de la construction de courants de Green (voir la section 2) et de l'explicitation des courants de Vogel (section 3) ou de Segre (section 4) ; une interprétation de la formule de King, en relation avec la décomposition de Siu des courants positifs fermés et le couplage « composantes stables/composantes mobiles » en théorie de l'intersection impropre [1] est aussi évoquée dans ce travail (section 6). L'objectif visé ici est d'esquisser une transposition au cadre non archimédien de l'approche à la théorie de l'intersection dans le cadre impropre telle qu'elle est développée dans [1] (dans le contexte analytique complexe). À plus long terme, nous espérons exploiter cette approche en la combinant avec le calcul d'Igusa [19] (dans le contexte ultamétrique) aux fins d'unifier les contributions aux places finies et infinies dans par exemple l'expression de la hauteur logarithmique (relativement à un choix de métrique, lisse ou non) d'un cycle arithmétique [8].

1. Approche du type Mellin aux équations de Lelong–Poincaré

Soit X un bon $\mathbb{K}$-espace de Berkovich, c'est-à-dire un $\mathbb{K}$-espace de Berkovich dont tout point admet un voisinage affinoïde, donc une base de voisinages affinoïdes. On suppose X de dimension pure n et sans bord. On pourra penser X comme l'analytifié d'une variété algébrique de dimension n définie au-dessus de $\mathbb{K}$.

Soit $U \subset X$ un ouvert de X et f une fonction méromorphe régulière non diviseur de zéro dans U, c'est-à-dire une fonction s'exprimant au voisinage de tout point $x \in U$ comme le quotient de deux sections locales de $\mathcal{O}_X$. On note U_f le plus grand ouvert de U dans lequel f s'exprime localement comme une section locale inversible du faisceau $\mathcal{O}_X$.

Si ω est une section à support compact de $\mathscr{A}_c^{n-1,n-1}(U)$, le support (compact) de la $(n-1,n)$-forme $\mathrm{d}''\omega$ évite tout sous-ensemble fermé de Zariski d'intérieur vide [12, lemme 3.2.5]. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, la forme

$$x \in U_f \mapsto \left(\mathrm{d}'\left(\frac{|f|^\lambda}{\lambda}\right) \wedge \mathrm{d}''\omega\right)(x) = \left(\mathrm{d}'\left(\frac{e^{\lambda \log|f|}}{\lambda}\right) \wedge \mathrm{d}''\omega\right)(x)$$

appartient à $\mathscr{A}_c^{n,n}(U_f)$ et l'on a d'après la formule de Stokes (X est supposée sans bord), si φ désigne une fonction lisse identiquement égale à 1 au voisinage du support de $\mathrm{d}''\omega$ et de support compact dans U_f (que l'on peut encore construire grâce au théorème de partitionnement de l'unité, [12, proposition 3.3.6]),

$$\begin{aligned}\int_{U_f} \mathrm{d}'\left(\frac{|f|^\lambda}{\lambda}\right) \wedge \mathrm{d}''\omega &= \int_X \mathrm{d}'\left(\varphi\frac{|f|^\lambda}{\lambda}\right) \wedge \mathrm{d}''\omega \\ &= -\int_X \left(\varphi\,\frac{|f|^\lambda}{\lambda}\right)\mathrm{d}'\mathrm{d}''\omega = -\left\langle \left[\frac{|f|^\lambda}{\lambda}\right], \mathrm{d}'\mathrm{d}''\omega\right\rangle = \left\langle \mathrm{d}'\left[\frac{|f|^\lambda}{\lambda}\right], \mathrm{d}''\omega\right\rangle,\end{aligned}$$

où le courant $[|f|^\lambda/\lambda]$ est le $(0,0)$-courant défini à partir de la fonction lisse

$$|f|^\lambda/\lambda : U_f \to \mathbb{R}$$

suivant le lemme 4.6.1 de [12].

On définit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, un courant $T_\lambda^f \in \mathscr{D}_{1,1}(U)$ en posant

$$\begin{aligned}\forall\, \omega \in \mathscr{A}_c^{n-1,n-1}(U), \quad \langle T_\lambda^f, \omega\rangle &:= -\left\langle \mathrm{d}'\left[\frac{|f|^\lambda}{\lambda}\right], \mathrm{d}''\omega\right\rangle \\ &= -\int_{U_f} \mathrm{d}'\left(\frac{|f|^\lambda}{\lambda}\right) \wedge \mathrm{d}''\omega = -\int_{U_f} |f|^\lambda \mathrm{d}'\left(\log|f|\right) \wedge \mathrm{d}''\omega.\end{aligned}$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, la fonction $\lambda \mapsto T_\lambda^f$ (à valeurs dans $\mathscr{D}_{1,1}(U)$) admet comme limite lorsque λ tend vers 0 le $(1,1)$-courant

$$\begin{aligned}\omega \in \mathscr{A}_c^{n-1,n-1}(U) \longmapsto -\int_{U_f} \mathrm{d}'\left(\varphi \log|f|\right) \wedge \mathrm{d}''\omega &= \int_{X^{\mathrm{an}}} \varphi \log|f|\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\omega \\ = \left\langle \left[\varphi \log|f|\right], \mathrm{d}'\mathrm{d}''\omega\right\rangle = \left\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''\left[\varphi \log|f|\right], \omega\right\rangle &= \left\langle [\mathrm{div}(f)], \omega\right\rangle\end{aligned}$$

d'après la formule de Stokes, une nouvelle fois le lemme 4.6.1 de [12], et enfin la formule de Lelong–Poincaré [12, théorème 4.6.5].

On peut maintenant envisager le cas où f_1 et f_2 sont deux fonctions régulières méromorphes dans un ouvert U de X, telles que

$$\mathrm{codim}_U(\mathrm{Supp}([\mathrm{div}(f_1)]) \cap \mathrm{Supp}([\mathrm{div}(f_2)])) \geqslant 2.$$

Suivant la description du courant $[\mathrm{div}(f_1)]$ donnée dans la section 4.6 de [12, commentaire après la preuve du lemme 4.6.4], on exprime ce courant comme la somme de courants d'intégration $\pm[\mathrm{div}(f_{1,\kappa})]$, où $f_{1,\kappa}$ est une fonction régulière dans U non diviseur de 0. On désigne par $Z_{1,\kappa}$ le $\mathbb{K}$-sous-espace analytique fermé (de dimension $n-1$) $f_{1,\kappa}^{-1}(\{0\})$, que l'on considère comme un $\mathbb{K}$-espace analytique de dimension $n-1$; on note $\iota_{1,\kappa}$ le morphisme de $\mathbb{K}$-espaces analytiques correspondant à l'inclusion $Z_{1,\kappa} \subset U$. L'action du courant $[\mathrm{div}(f_1)]$ s'exprime sous la forme

$$\omega \in \mathscr{A}_c^{n-1,n-1}(U) \longmapsto \big\langle [\mathrm{div}(f_1)]\,, \omega \big\rangle := \sum_{\kappa} \int_{Z_{1,\kappa}\cap U} \omega = \sum_{\kappa} \int_{\iota_{1,\kappa}^{-1}(U)} \iota_{1,\kappa}^*(\omega).$$

Pour chaque indice κ, on définit, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, suivant le lemme 4.6.1 de [12], un $(1,1)$-courant $[|f_2|^\lambda/\lambda]\,[\mathrm{div}(f_{1,\kappa})]$ par :

$$\left\langle \left[\frac{|f_2|^\lambda}{\lambda}\right][\mathrm{div}(f_{1,\kappa})]\,, \omega \right\rangle := \int_{\iota_{1,\kappa}^{-1}(U)} \left(\frac{\iota_{1,\kappa}^*(\theta)\,|\iota_{1,\kappa}^*(f_2)|^\lambda}{\lambda} \right) \iota_{1,\kappa}^*(\omega)$$

pour tout $\omega \in \mathscr{A}_c^{n-1,n-1}(U)$ (θ désignant encore une fonction lisse de support inclus dans U_{f_2} identiquement égale à 1 au voisinage de $Z_{1,\kappa} \cap \mathrm{Supp}\,\omega$, que l'on peut encore construire grâce au théorème de partitionnement de l'unité, [12, proposition 3.3.6]). On observe en utilisant la formule de Stokes dans $Z_{1,\kappa}$ et le lemme 4.6.1 de [12] que

$$\begin{aligned}\Big\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \left(\left[\frac{|f_2|^\lambda}{\lambda} \right] \right) [\mathrm{div}(f_{1,\kappa})]\,, \omega \Big\rangle \\ &= - \int_{\iota_{1,\kappa}^{-1}(U_{f_2})} \left(\mathrm{d}' \left(\frac{|\iota_{1,\kappa}^* f_2|^\lambda}{\lambda} \right) \right) \wedge \mathrm{d}''\big(\iota_{1,\kappa}^*(\omega)\big) \\ &= - \int_{\iota_{1,\kappa}^{-1}(U_{f_2})} |\iota_{1,\kappa}^*(f_2)|^\lambda \,\mathrm{d}' \log |\iota_{1,\kappa}^*(f_2)| \wedge \mathrm{d}''\big(\iota_{1,\kappa}^*(\omega)\big)\end{aligned}$$

pour tout $\omega \in \mathscr{A}_c^{n-2,n-2}(U)$. La limite lorsque λ tend vers 0 dans $\mathbb{R}^*$ (au sens de la convergence faible des $(2,2)$-courants sur U) de $\mathrm{d}'\mathrm{d}''[|f_2|^\lambda/\lambda][\mathrm{div}(f_{1,\kappa})]$ existe et définit un $(2,2)$-courant de support inclus dans $Z_1 \cap Z_2$ que l'on conviendra de noter $[\mathrm{div}(f_{1,\kappa})] \wedge [\mathrm{div}(f_2)]$ (en respectant pour l'instant cet ordre). On observe d'ailleurs que

$$[\mathrm{div}(f_{1,\kappa})] \wedge [\mathrm{div}(f_2)] = (\iota_{1,\kappa})_* \left(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\big[\log |\iota_{1,\kappa}^* f_2|\big]\right). \tag{1.1}$$

On pose, en respectant pour l'instant l'ordre,

$$[\mathrm{div}(f_1)]\wedge[\mathrm{div}(f_2)] := \sum_\kappa \pm[\mathrm{div}(f_{1,\kappa})]\wedge[\mathrm{div}(f_2)],$$

puisque $[\mathrm{div}(f_1)] := \sum_\kappa \pm[\mathrm{div}(f_{1,\kappa})]$ (voir [12, lemme 4.6.4] et commentaire qui suit la démonstration du dit lemme).

Proposition 1.1. — *Soient f_1 et f_2 deux fonctions méromorphes dans un ouvert U de X, telles que*

$$\mathrm{codim}_U\left(\mathrm{Supp}\left([\mathrm{div}(f_1)]\right)\cap\mathrm{Supp}\left([\mathrm{div}(f_2)]\right)\right)\geqslant 2.$$

Pour tout $(\lambda_1,\lambda_2)\in(\mathbb{R}^*)^2$, on définit un courant $T^{f_1,f_2}_{\lambda_1,\lambda_2}$ appartenant à $\mathscr{D}_{2,2}(U)$ en posant

$$\forall\,\omega\in\mathscr{A}_c^{n-2,n-2}(U),\quad \left\langle T^{f_1,f_2}_{\lambda_1,\lambda_2},\omega\right\rangle = -\int_U \mathrm{d}'\left(\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right)\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(\frac{|f_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right)\wedge\mathrm{d}''\omega$$

après avoir découpé cette intégrale suivant un partitionnement de l'unité $1=\sum_\iota\varphi_\iota$ subordonnée au support de $\mathrm{d}''\omega$ afin d'en assurer la convergence. Alors, on a, au sens des courants

$$\lim_{\substack{(\lambda_1,\lambda_2)\to(0,0)\\ \lambda_1\neq0,\ \lambda_2\neq0}} T^{f_1,f_2}_{\lambda_1,\lambda_2} = [\mathrm{div}(f_1)]\wedge[\mathrm{div}(f_2)], \tag{1.2}$$

où le courant figurant au membre de droite a été précédemment défini en termes des non-diviseurs de zéro $f_{1,\kappa}$ figurant dans $f_j\,(j=1,2)$.

Démonstration. — On note Z_1 et Z_2 les sous-espaces analytiques fermés (au sens de Zariski) de U définis comme les supports des courants $[\mathrm{div}(f_1)]$ et $[\mathrm{div}(f_2)]$. Soit $\omega\in\mathscr{A}_c^{n-2,n-2}(U)$. Du fait de l'hypothèse

$$\mathrm{codim}_U\left(\mathrm{Supp}\left([\mathrm{div}(f_1)]\right)\cap\mathrm{Supp}\left([\mathrm{div}(f_2)]\right)\right)\geqslant 2,$$

il résulte du lemme 3.2.5 de [12] et de la définition de la dimension locale $d_{\mathbb{K}}(x)$ $(x\in U)$ comme le minimum des dimensions $\mathbb{K}$-analytiques des domaines $\mathbb{K}$-affinoïdes qui contiennent x (voir par exemple [14, définition 1.16]), que le support de la $(n-2,n-1)$-forme différentielle $\mathrm{d}''\omega$ ne rencontre pas le sous-ensemble de Zariski $Z_1\cap Z_2$. D'après le lemme de partitionnement de l'unité [12, proposition 3.3.6], on peut introduire dans U une partition de l'unité $1=\sum_\iota\varphi_\iota$ (par des fonctions lisses à support compact), subordonnée au recouvrement du compact $\mathrm{Supp}(\mathrm{d}''\omega)$ de U par les deux ouverts U_{f_1} et U_{f_2}. On donne le sens suivant à l'expression

$$-\int_U \mathrm{d}'\left(\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right)\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(\frac{|f_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right)\wedge\varphi_\iota\,\mathrm{d}''\omega \tag{1.3}$$

dans les deux cas (de fait symétriques) où $\mathrm{Supp}\,\varphi_\iota\subset U_{f_1}$ et $\mathrm{Supp}\,\varphi_\iota\subset U_{f_2}$.

- Dans le premier cas, le sens que l'on donne à l'expression (1.3) est le suivant : on introduit suivant le lemme 4.6.1 de [12] le courant $[|f_2|^{\lambda_2}/\lambda_2]$ et le sens que l'on donne à (1.3) est

$$\begin{aligned}
&- \left\langle \mathrm{d}' \left[\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2} \right], \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \left(\varphi \frac{|f_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1} \right) \wedge \varphi_\iota \, \mathrm{d}''\omega \right\rangle \\
&= - \left\langle \mathrm{d}' \left[\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2} \right], \mathrm{d}'\big(\varphi \, |f_1|^{\lambda_1} \, \mathrm{d}''(\varphi \, \log |f_1|)\big) \wedge \varphi_\iota \, \mathrm{d}''\omega \right\rangle \\
&= - \left\langle \mathrm{d}' \left[\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2} \right], |f_1|^{\lambda_1} (\varphi \, \mathrm{d}'\mathrm{d}''(\log |f_1|)) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \lambda_1 \mathrm{d}'(\varphi \log |f_1|) \wedge \mathrm{d}''(\varphi \log |f_1|) \wedge \varphi_\iota \, \mathrm{d}''\omega \right\rangle \\
&= -\lambda_1 \left\langle \mathrm{d}' \left[\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2} \right], \varphi \, |f_1|^{\lambda_1} \, \mathrm{d}'(\varphi \log |f_1|) \wedge \mathrm{d}''(\varphi \log |f_1|) \wedge \varphi_\iota \, \mathrm{d}''\omega \right\rangle \quad (1.4)
\end{aligned}$$

  où φ est une fonction lisse de support inclus dans U_{f_1}, identiquement égale à 1 au voisinage du support de $\varphi_\iota \, \mathrm{d}''\omega$. On a utilisé ici le fait que $\mathrm{d}'\mathrm{d}'' \log |f_1| = 0$ dans U_{f_1}, conséquence de la formule de Lelong–Poincaré [12, théorème 4.6.5].
- Dans le second cas, le sens que l'on donne à l'expression (1.3) est le suivant :

$$\begin{aligned}
&- \left\langle T^{f_1}_{\lambda_1}, \mathrm{d}' \left(\psi \frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2} \right) \wedge \varphi_\iota \, \mathrm{d}''\omega \right\rangle \\
&\qquad\qquad = - \left\langle T^{f_1}_{\lambda_1}, \varphi_\iota \, |f_2|^{\lambda_2} \, \mathrm{d}'(\psi \log |f_2|) \wedge \mathrm{d}''\omega \right\rangle, \quad (1.5)
\end{aligned}$$

  où ψ est une fonction lisse de support inclus dans U_{f_2}, identiquement égale à 1 au voisinage du support de $\varphi_\iota \, \mathrm{d}''\omega$.

On sait d'autre part que dans l'ouvert U_{f_j} $(j = 1, 2)$, on a l'identité suivante entre fonctions lisses :

$$\forall \, \lambda_j \in \mathbb{R}^*, \qquad \frac{|f_j|^{\lambda_j}}{\lambda_j} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_j^{k-1} \frac{(\log |f_j|)^k}{k!},$$

la convergence étant uniforme sur tout compact de U_{f_2}. Si l'on note $[(\log |f_j|)^k]$ le $(0,0)$-courant dans U associé à la fonction $(\log |f_j|)^k$ suivant le lemme 4.6.1 de [12], on a donc les identités courantielles

$$\left[\frac{|f_j|^{\lambda_j}}{\lambda_j} \right] = \frac{[1]}{\lambda_j} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_j^{k-1}}{k!} \, [(\log |f_j|)^k],$$

la convergence de la série figurant au membre de droite étant entendue ici au sens faible dans $\mathscr{D}_{0,0}(U)$. On en déduit

$$\begin{aligned} T_{\lambda_1}^{f_1} &= \mathrm{d}'\mathrm{d}''\left[\frac{|f_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1^{k-1}}{k!}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\left[(\log|f_1|)^k\right] \\ \mathrm{d}'\left[\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right] &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_2^{k-1}}{k!}\,\mathrm{d}'\left[(\log|f_2|)^k\right]. \end{aligned} \tag{1.6}$$

On observe que chacune des contributions

$$(\lambda_1,\lambda_2) \longmapsto -\int_U \mathrm{d}'\left(\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right)\wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(\frac{|f_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right)\wedge \varphi_\iota\,\mathrm{d}''\omega$$

admet une limite lorsque (λ_1,λ_2) tend vers 0. Dans le premier cas, on a

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{(\lambda_1,\lambda_2)\to(0,0)\\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}^*}} \left(-\int_U \mathrm{d}'\left(\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right)\wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(\frac{|f_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right)\wedge \varphi_\iota\,\mathrm{d}''\omega\right) \\ &= \lim_{\substack{(\lambda_1,\lambda_2)\to(0,0)\\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}^*}} \Bigg(-\lambda_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_2^{k-1}}{k!} \\ &\qquad \left\langle \mathrm{d}'\left[(\log|f_2|)^k\right],\, \varphi\,|f_1|^{\lambda_1}\,\mathrm{d}'(\varphi\log|f_1|)\wedge \mathrm{d}''(\varphi\log|f_1|)\wedge\varphi_\iota\,\mathrm{d}''\omega\right\rangle\Bigg) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

d'après le théorème de convergence dominée. Dans le second cas, on a pour les mêmes raisons

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{(\lambda_1,\lambda_2)\to(0,0)\\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}^*}} \left(-\int_U \mathrm{d}'\left(\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right)\wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(\frac{|f_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right)\wedge \varphi_\iota\,\mathrm{d}''\omega\right) \\ &= \lim_{\substack{(\lambda_1,\lambda_2)\to(0,0)\\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_1^{k-1}}{k!}\left\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''\left[(\log|f_1|)^k\right],\, \varphi_\iota\,|f_2|^{\lambda_2}\,\mathrm{d}'(\psi\log|f_2|)\wedge\mathrm{d}''\omega\right\rangle\right) \\ &= \lim_{\substack{\lambda_2\to 0\\ \lambda_2\in\mathbb{R}^*}} \left\langle [\mathrm{div}(f_1)]\,,\, \varphi_\iota\,|f_2|^{\lambda_2}\,\mathrm{d}'(\psi\log|f_2|)\wedge\mathrm{d}''\omega\right\rangle \\ &= \lim_{\substack{\lambda_2\to 0\\ \lambda_2\in\mathbb{R}^*}} \left\langle [\mathrm{div}(f_1)]\,,\, \varphi_\iota\,\mathrm{d}'\left(\frac{\psi|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right)\wedge\mathrm{d}''\omega\right\rangle \\ &= \lim_{\substack{\lambda_2\to 0\\ \lambda_2\in\mathbb{R}^*}} \Bigg(\left\langle \left[\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right][\mathrm{div}(f_1)]\,,\, \varphi_\iota\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\omega\right\rangle \\ &\qquad + \left\langle \left[\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right][\mathrm{div}(f_1)]\,,\, \mathrm{d}'(\varphi_\iota)\wedge\mathrm{d}''\omega\right\rangle\Bigg). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Or, dans le premier cas, on a, puisque le support de φ_ι ne rencontre pas Z_1, que pour tout λ_2 dans $\mathbb{R}^*$

$$\left\langle \left[\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right] [\mathrm{div}(f_1)]\,,\, \varphi_\iota\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\omega \right\rangle + \left\langle \left[\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right] [\mathrm{div}(f_1)]\,,\, \mathrm{d}'(\varphi_\iota) \wedge \mathrm{d}''\omega \right\rangle = 0.$$

En tenant donc compte de (1.7) et de (1.8), on constate que la limite lorsque (λ_1, λ_2) tend vers $(0,0)$ dans $(\mathbb{R}^*)^2$ de l'expression

$$-\int_U \mathrm{d}'\left(\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right) \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(\frac{|f_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right) \wedge \mathrm{d}''\omega$$
$$:= -\sum_{\iota\in I}\int_U \mathrm{d}'\left(\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right) \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(\frac{|f_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right) \wedge \varphi_\iota\, \mathrm{d}''\omega$$

est égale à la limite lorsque λ tend vers 0 de

$$\sum_{\iota\in I}\left(\left\langle \left[\frac{|f_2|^{\lambda}}{\lambda}\right] [\mathrm{div}(f_1)]\,,\, \varphi_\iota\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\omega \right\rangle + \left\langle \left[\frac{|f_2|^{\lambda}}{\lambda}\right] [\mathrm{div}(f_1)]\,,\, \mathrm{d}'\varphi_\iota \wedge \mathrm{d}''\omega \right\rangle\right),$$

c'est-à-dire, puisque $\sum_{\iota\in I}\varphi_\iota = 1$ et que par conséquent $\sum_{\iota\in I}\mathrm{d}'\varphi_\iota = 0$, à l'action sur ω du courant $[\mathrm{div}(f_1)] \wedge [\mathrm{div}(f_2)]$ tel qu'il a été défini avant l'énoncé de la proposition 1.1. □

Remarque 1.2. — On vérifie que $T^{f_1,f_2}_{\lambda_1,\lambda_2} = T^{f_2,f_1}_{\lambda_2,\lambda_1}$ pour tout couple (λ_1,λ_2) de $(\mathbb{R}^*)^2$ et toute paire de fonctions méromorphes (f_1, f_2). On commence par définir dans $U_{f_1} \cup U_{f_2}$ les deux courants $[|f_2|^{\lambda}/\lambda_2]\, T^{\lambda_1}_{f_1}$ et $[|f_1|^{\lambda_1}/\lambda_1]\, T^{\lambda_2}_{f_2}$ de la manière suivante (symétrique). Par exemple

$$\forall\, \omega \in \mathscr{A}^{n-1,n-1}_c(U),$$
$$\left\langle \left[\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right] T^{f_1}_{\lambda_1}\,,\, \omega \right\rangle := \begin{cases} \left\langle \left[\dfrac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right], \mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(\dfrac{|f_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right) \wedge \omega \right\rangle & \text{si } \mathrm{Supp}\,\omega \subset U_{f_1} \\ \left\langle T^{f_1}_{\lambda_1}\,,\, \dfrac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\,\omega \right\rangle & \text{si } \mathrm{Supp}(\omega) \subset U_{f_2} \end{cases}$$

(dans le premier cas, on utilise le lemme 4.6.1 de [12]). Les deux définitions alternatives proposées se recollent ici dans $U_{f_1} \cap U_{f_2}$. On définit alors les deux courants suivants dans $U_{f_1} \cup U_{f_2}$:

$$\mathrm{d}'\left[\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right] \wedge T^{f_1}_{\lambda_1} := \mathrm{d}'\left(\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\, T^{f_1}_{\lambda_1}\right),\ \mathrm{d}'\left[\frac{|f_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right] \wedge T^{f_2}_{\lambda_2} := \mathrm{d}'\left(\frac{|f_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1}\, T^{f_2}_{\lambda_2}\right).$$

On observe que le courant $\mu_{\lambda_1,\lambda_2}$ défini comme la différence de ces deux courants est un courant d″-fermé dans $U_{f_1} \cup U_{f_2}$: en effet, on a par exemple, si $\alpha \in \mathscr{A}_c^{n-2,n-2}(U_{f_1})$,

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathrm{d}'\left[\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right] \wedge T_{\lambda_1}^{f_1}\,,\,\mathrm{d}''\alpha\right\rangle\\
&\quad= -\left\langle \left[\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right],\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(\frac{|f_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right) \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\alpha\right\rangle\\
&\quad= -\left\langle \left[\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right],\,\mathrm{d}'\left(\mathrm{d}''\left(\frac{|f_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right) \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\alpha\right)\right\rangle\\
&\quad= \left\langle \mathrm{d}'\left[\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right],\,\mathrm{d}''\left(\frac{|f_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right) \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\alpha\right\rangle\\
&\quad= \left\langle \mathrm{d}'\left[\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right],\,\mathrm{d}''\left(\frac{|f_1|^{\lambda_1}}{f_1}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\alpha\right)\right\rangle\\
&\quad= \left\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''\left[\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right],\,\frac{|f_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1}\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\alpha\right\rangle = \left\langle \mathrm{d}'\left[\frac{|f_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right] \wedge T_{\lambda_2}^{f_2}\,,\,\mathrm{d}''\alpha\right\rangle; \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

le calcul est symétrique dans U_{f_2}. On rappelle que l'on a par définition

$$\begin{aligned}
&\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*, \quad \forall\, \omega \in \mathscr{A}_c^{n-2,n-2}(U),\\
&\left\langle T_{\lambda_1,\lambda_2}^{f_1,f_2} - T_{\lambda_2,\lambda_1}^{f_2,f_1}\,,\,\omega\right\rangle = \sum_{\iota\in I}\langle \mu_{\lambda_1,\lambda_2}, \varphi_\iota\,\mathrm{d}''\omega\rangle = -\sum_{\iota\in I}\langle \mu_{\lambda_1,\lambda_2}\,,\,\mathrm{d}''\varphi_\iota \wedge \omega\rangle\\
&\qquad\qquad = \left\langle \mu_{\lambda_1,\lambda_2}\,,\left(\sum_{\iota\in I}\mathrm{d}''\varphi_\iota)\right) \wedge \omega\right\rangle = 0.
\end{aligned}$$

On conviendra de noter par la suite pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$:

$$T_{\lambda_1,\lambda_2}^{f_1,f_2} = \mathrm{d}'\mathrm{d}''\left[\frac{|f_2|^{\lambda_2}}{\lambda_2}\right] \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\left[\frac{|f_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right], \qquad (1.10)$$

l'ordre des deux facteurs étant ici sans importance, ce qui en cohérent avec le fait qu'il s'agisse (formellement) d'un produit de 2-courants. On a de plus

$$[\mathrm{div}(f_1)] \wedge [\mathrm{div}(f_2)] = [\mathrm{div}(f_2)] \wedge [\mathrm{div}(f_1)].$$

On peut envisager le cas où l'on a trois fonctions méromorphes régulières sans diviseurs de zéro dans un ouvert U de X. On rappelle que l'action du courant $[\mathrm{div}(f_1)] \wedge [\mathrm{div}(f_2)]$ sur $\omega \in \mathscr{A}_c^{n-2,n-2}(U)$ est définie par

$$\begin{aligned}
&\sum_\kappa \left(-\int_{\iota_{1,\kappa}^{-1}(U_{f_2})\cap Z_{1,\kappa}} \mathrm{d}'(\chi_\kappa\,\log|\iota_{1,\kappa}^*(f_2)|) \wedge \mathrm{d}''\big(\iota_{1,\kappa}^*(\omega)\big)\right)\\
&\qquad = \sum_\kappa \left(-\int_{\iota_{1,\kappa}^{-1}(U)\cap Z_{1,\kappa}} \mathrm{d}'(\chi_\kappa\,\log|\iota_{1,\kappa}^*(f_2)|) \wedge \mathrm{d}''\big(\iota_{1,\kappa}^*(\omega)\big)\right),
\end{aligned}$$

où χ_κ est une fonction lisse sur le $\mathbb{K}$-espace analytique Z_1 identiquement égale à 1 au voisinage du support de la $(n-2,n-1)$-forme lisse $\mathrm{d}''(\iota_{1,\kappa}^*(\omega)$ et de support inclus dans le plus grand ouvert de $Z_{1,\kappa}\cap\iota_{1,\kappa}^{-1}(U)$ dans lequel la fonction méromorphe régulière $\iota_{1,\kappa}^*(f_2)$ ne s'annule pas. Pour $\lambda\in\mathbb{R}^*$, on utilise dans chaque ouvert $\iota_{1,\kappa}^{-1}(U)$ le lemme 4.6.1 de [12] pour justifier la définition du $(3,3)$-courant

$$\big([\mathrm{div}(f_1)]\wedge[\mathrm{div}(f_2)]\big)\wedge[\mathrm{div}(f_3)]$$

de la manière suivante. On rappelle d'abord (voir (1.1)) que

$$\begin{aligned}[\mathrm{div}(f_1)]\wedge[\mathrm{div}(f_2)] &:= \sum_\kappa \pm(\iota_{1,\kappa})_*\left(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\big[\log|\iota_{1,\kappa}^*(f_2)|\big]\right)\\ &= \sum_\kappa \pm(\iota_{1,\kappa})_*\left([\mathrm{div}(\iota_{1,\kappa}^*(f_2)]\right)\end{aligned}$$

d'après la formule de Lelong–Poincaré appliquée à la fonction méromorphe régulière $\iota_{1,\kappa}^*(f_2)$ dans l'ouvert $\iota_{1,\kappa}^{-1}(U)$ du $\mathbb{K}$-espace analytique(de dimension $n-1$) $Z_{1,\kappa}$. On définit alors (en respectant pour l'instant l'ordre)

$$\begin{aligned}&[\mathrm{div}(f_1)]\wedge[\mathrm{div}(f_2)]\wedge[\mathrm{div}(f_3)]\\ &\qquad := \sum_\kappa \pm\,(\iota_{1,\kappa})_*\left([\mathrm{div}(\iota_{1,\kappa}^*(f_2))]\wedge[\mathrm{div}(\iota_{1,\kappa}^*(f_3))]\right).\end{aligned}$$

Plus généralement, l'on aboutit à la définition suivante :

Définition 1.3. — *Si $f_1,\dots,f_p$ sont p fonctions régulièrement méromorphes dans U telles que pour toute liste d'indices $1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant p$ (avec $k=1,\dots,p$) on a*

$$\mathrm{codim}_U\left(\bigcap_{\ell=1}^k \mathrm{Supp}\left([\mathrm{div}(f_{j_\ell})]\right)\right)\geqslant k,$$

on définit inductivement pour tout k entre 2 et p

$$\begin{aligned}&[\mathrm{div}(f_1)]\wedge[\mathrm{div}(f_2]\wedge\cdots\wedge[\mathrm{div}(f_k)]\\ &\qquad := \sum_\kappa \pm\,(\iota_{1,\kappa})_*\left([\mathrm{div}(\iota_{1,\kappa}^*(f_2))]\wedge\cdots\wedge[\mathrm{div}(\iota_{1,\kappa}^*(f_k))]\right).\end{aligned}\tag{1.11}$$

On se doit pour l'instant dans cette construction de respecter l'ordre dans lequel sont prises les fonctions régulièrement méromorphes f_j.

Théorème 1.4. — *Soient $f_1,\dots,f_p (p\geqslant 1)$ des fonctions méromorphes régulières dans un ouvert U d'un bon $\mathbb{K}$-espace analytique de Berkovich de dimension n sans bord. On fait l'hypothèse que pour toute liste d'indices*

$1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant p$ (avec $k = 1, \ldots, p$) on a

$$\operatorname{codim}_U \left(\bigcap_{\ell=1}^{k} \operatorname{Supp}\left([\operatorname{div}(f_{j_\ell})]\right) \right) \geqslant k.$$

On définit un courant $T^{f_1,\ldots,f_p}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p} \in \mathscr{D}_{p,p}(U,\mathbb{R})$ en posant, $\forall\, \omega \in \mathscr{A}_c^{n-p,n-p}(U)$,

$$\langle T^{f_1,\ldots,f_p}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}, \omega\rangle := -\int_U \mathrm{d}' \left(\frac{|f_p|^{\lambda_p}}{\lambda_p} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{p-1} \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \left(\frac{|f_j|^{\lambda_j}}{\lambda_j} \right) \right) \wedge \mathrm{d}''\omega$$

après avoir découpé cette intégrale suivant un partitionnement de l'unité $1 = \sum_\iota \varphi_\iota$ subordonnée au support de $\mathrm{d}''\omega$ afin de lui donner un sens et d'en assurer la convergence. Alors, ce courant ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont prises les fonctions $f_1, \ldots, f_p$ et l'on a donc pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, p\}$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\to(0,\ldots,0)\\ \lambda_1\neq 0,\ldots,\lambda_p\neq 0}} T^{f_1,\ldots,f_p}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p} &= [\operatorname{div}(f_1)] \wedge \cdots \wedge [\operatorname{div}(f_p)] \\ &= [\operatorname{div}(f_{\sigma(1)})] \wedge \cdots \wedge [\operatorname{div}(f_{\sigma(p)})], \end{aligned} \tag{1.12}$$

où l'opération multiplicative entre courants $[\operatorname{div}(f_j)]$ (respectant un ordre a priori imposé) a été introduite préalablement.

Démonstration. — Le résultat est acquis pour $p = 2$ d'après la proposition 1.1 et la remarque 1.2. On le suppose donc acquis (hypothèse de récurrence) pour $p-1$ fonctions méromorphes ($p \geqslant 3$). On note, pour $j = 1, \ldots, p$, Z_j les sous-espaces analytiques fermés (au sens de Zariski) de U de codimension 1 définis comme les supports des courants $[\operatorname{div}(f_j)]$. Pour chaque $j = 1, \ldots, p$, on note $\widehat{Z}_j$ l'intersection des sous-ensembles $\mathbb{K}$-analytiques Z_ℓ pour $\ell = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, p$. Si $\widehat{Z_j}$ est non vide ($\operatorname{codim}_U \widehat{Z_j} < +\infty$), on a nécessairement $\operatorname{codim}_U \widehat{Z_j} = p-1$ car cette codimension est minorée par $p-1$ par hypothèses et que $\widehat{Z_j}$ est défini comme lieu des zéros communs d'exactement $p-1$ équations. On peut donc considérer $\widehat{Z_j}$ comme un $\mathbb{K}$-espace analytique de dimension $n-p+1$. Soit $\omega \in \mathscr{A}_c^{n-p,n-p}(U)$. Du fait de l'hypothèse que pour toute liste d'indices $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant p$ (avec $k = 1, \ldots, p$)

$$\operatorname{codim}_U \left(\bigcap_{\ell=1}^{k} \operatorname{Supp}\left([\operatorname{div}(f_{j_\ell})]\right) \right) \geqslant k,$$

il résulte du lemme 3.2.5 de [12] et de la définition de la dimension locale $d_{\mathbb{K}}(x)$ ($x \in U$) comme le minimum des dimensions $\mathbb{K}$-analytiques des domaines $\mathbb{K}$-affinoïdes qui contiennent x (voir par exemple [14], définition 1.16), que le support de la forme différentielle $\mathrm{d}''\omega$ de bidegré $(n-p, n-p+1)$ ne rencontre pas le sous-ensemble de Zariski $Z_1 \cap Z_2 \cdots \cap Z_p$. D'après le lemme de partitionnement de l'unité [12, proposition 3.3.6], on peut introduire dans U une partition de l'unité $1=\sum_\iota \varphi_\iota$ (par des fonctions lisses à support compact), subordonnée au recouvrement du compact $\mathrm{Supp}(\mathrm{d}''\omega)$ de U par les p ouverts U_{f_1}, U_{f_2},..., U_{f_p}.

Dans un premier temps, étant donnés $p-1$ fonctions méromorphiquement régulières $g_1,\dots,g_{p-1}$ satisfaisant la condition

$$\mathrm{codim}_U\left(\bigcap_{\ell=1}^{k}\mathrm{Supp}\left([\mathrm{div}(g_{j_\ell})]\right)\right)\geqslant k$$

pour tout k entre 1 et $p-1$ et tous $1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant p-1$, il nous faut donner un sens (à l'aide du lemme 4.6.1 de [12]) au courant

$$\left[\frac{|g_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right]T^{g_2,\dots,g_{p-1}}_{\lambda_2,\dots,\lambda_{p-1}}\in\mathscr{D}_{p-2,p-2}(U).$$

On procède pour cela ainsi : étant donné $\eta\in\mathscr{A}_c^{n-p+2,n-p+2}(U)$, on introduit, puisque le support de la forme η ne rencontre pas $Z_{g_1}\cap\cdots\cap Z_{g_{p-1}}$ d'après le lemme 3.2.5 de [12], une partition de l'unité $\sum_\iota\tau_\iota$ du support de η subordonnée au recouvrement de ce support par les ouverts U_{g_ℓ}, $\ell=1,\dots,p-1$. On définit alors

$$\begin{aligned}&\left\langle\left[\frac{|g_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right]T^{g_2,\dots,g_{p-1}}_{\lambda_2,\dots,\lambda_{p-1}},\tau_\iota\eta\right\rangle\\ &:=\begin{cases}\left\langle T^{g_2,\dots,g_{p-1}}_{\lambda_2,\dots,\lambda_{p-1}},\left(\frac{|g_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right)\tau_\iota\eta\right\rangle & \text{si }\ \mathrm{Supp}(\tau_\iota)\subset U_{g_1}\\ \left\langle\left[\frac{|g_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right]T^{g_2,\dots,\widehat{g_{j_0}},\dots,g_{p-1}}_{\lambda_2,\dots,\widehat{\lambda_{j_0}},\dots\lambda_{p-1}},\mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(\frac{|g_{j_0}|^{\lambda_{j_0}}}{\lambda_{j_0}}\right)\wedge\tau_\iota\eta\right\rangle & \text{si }\ \mathrm{Supp}(\tau_\iota)\subset U_{g_{j_0}}.\end{cases}\end{aligned}\tag{1.13}$$

La seconde alternative se traite inductivement et la construction finit par se conclure lorsque $p=2$ à l'application du lemme 4.6.1 de [12]. La construction montre aussi (par récurrence sur le nombre de fonctions g_j en jeu) que la limite

$$\lim_{\substack{(\lambda_1,\dots,\lambda_{p-1})\to(0,\dots,0)\\ \lambda_1,\dots,\lambda_{p-1}\in\mathbb{R}^*}}\left(\left[\frac{|g_1|^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right]T^{g_2,\dots,g_{p-1}}_{\lambda_2,\dots,\lambda_{p-1}}\right)\tag{1.14}$$

existe inconditionnellement dans $\mathscr{D}_{p-2,p-2}(U)$ (au sens faible de la convergence des courants).

On est maintenant en mesure de donner le sens suivant à l'expression

$$-\int_U\mathrm{d}'\left(\frac{|f_p|^{\lambda_p}}{\lambda_p}\right)\wedge\left(\bigwedge_{j=1}^{p-1}\mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(\frac{|f_j|^{\lambda_j}}{\lambda_j}\right)\right)\wedge\varphi_\iota\mathrm{d}''\omega\tag{1.15}$$

suivant que le support de φ_ι est inclus dans l'un des U_{f_j} pour $j = 1, \ldots, p-1$ ou que le support de φ_ι est inclus dans U_{f_p}.

- Si $\operatorname{Supp} \varphi_\iota \subset U_{f_{j_0}}$ pour un indice j_0 entre 1 et $p-1$, on définit l'expression (1.15) par

$$\begin{aligned}
&- \int_U \mathrm{d}' \left(\frac{|f_p|^{\lambda_p}}{\lambda_p} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{p-1} \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \left(\frac{|f_j|^{\lambda_j}}{\lambda_j} \right) \right) \wedge \varphi_\iota \mathrm{d}''\omega \\
&:= - \left\langle \mathrm{d}' \left(\left[\frac{|f_p|^{\lambda_p}}{\lambda_p} \right] T^{f_1, \ldots, \widehat{f_{j_0}}, \ldots, f_{p-1}}_{\lambda_1, \ldots, \widehat{\lambda_{j_0}}, \ldots, \lambda_{p-1}} \right), \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \left(\frac{\varphi |f_{j_0}|^{\lambda_{j_0}}}{\lambda_{j_0}} \right) \wedge \varphi_\iota \mathrm{d}''\omega \right\rangle \\
&= -\lambda_{j_0} \Big\langle \mathrm{d}' \left(\left[\frac{|f_p|^{\lambda_p}}{\lambda_p} \right] T^{f_1, \ldots, \widehat{f_{j_0}}, \ldots, f_{p-1}}_{\lambda_1, \ldots, \widehat{\lambda_{j_0}}, \ldots, \lambda_{p-1}} \right), \\
&\qquad \varphi\, |f_{j_0}|^{\lambda_{j_0}}\, \mathrm{d}'(\varphi \log |f_{j_0}|) \wedge \mathrm{d}''(\varphi \log |f_{j_0}|) \wedge \varphi_\iota\, \mathrm{d}''\omega \Big\rangle, \qquad (1.16)
\end{aligned}$$

  où φ désigne une fonction lisse identiquement égale à 1 au voisinage du support de $\varphi_\iota\, \mathrm{d}''\omega$ et de support inclus dans $U_{f_{j_0}}$.
- Si $\operatorname{Supp} \varphi_\iota \subset U_{f_p}$, on définit l'expression (1.15) par

$$\begin{aligned}
&- \int_U \mathrm{d}' \left(\frac{|f_p|^{\lambda_p}}{\lambda_p} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{p-1} \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \left(\frac{|f_j|^{\lambda_j}}{\lambda_j} \right) \right) \wedge \varphi_\iota \mathrm{d}''\omega \\
&\qquad := - \left\langle T^{f_1, \ldots, f_{p-1}}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}}, \mathrm{d}' \left(\varphi \frac{|f_p|^{\lambda_p}}{\lambda_p} \right) \wedge \varphi_\iota\, \mathrm{d}''\omega \right\rangle. \qquad (1.17)
\end{aligned}$$

On étudie maintenant le comportement de chaque fonction

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \longmapsto \int_U \mathrm{d}' \left(\frac{|f_p|^{\lambda_p}}{\lambda_p} \right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{p-1} \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \left(\frac{|f_j|^{\lambda_j}}{\lambda_j} \right) \right) \wedge \varphi_\iota \mathrm{d}''\omega \qquad (1.18)$$

lorsque $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ tend vers $(0, \ldots, 0)$ inconditionnellement dans $(\mathbb{R}^*)^p$ suivant que l'on se trouve dans l'un des deux cas distingués ci-dessus.

- Si $\operatorname{Supp}(\varphi_\iota) \subset U_{f_{j_0}}$ pour $j_0 \in \{1, \ldots, p-1\}$, on peut remplacer dans le crochet figurant au membre de droite (1.16) l'expression $|f_{j_0}|^{\lambda_{j_0}}$ par

$$|f_{j_0}|^{\lambda_{j_0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_{j_0}^k}{k!} (\log |f_{j_0}|)^k.$$

  Il résulte alors du fait que la limite inconditionnelle (1.14) existe au sens faible dans $\mathscr{D}_{p-1,p-1}(U)$ que la fonction (1.18) tend vers 0 lorsque $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ tend inconditionnellement vers $(0, \ldots, 0)$ dans $(\mathbb{R}^*)^p$.

- Si $\mathrm{Supp}(\varphi_\iota) \subset U_{f_1}$, on observe que l'expression (1.17) s'exprime aussi

$$-\int_U \mathrm{d}'\left(\frac{|f_p|^{\lambda_p}}{\lambda_p}\right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{p-1} \mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(\frac{|f_j|^{\lambda_j}}{\lambda_j}\right)\right) \wedge \varphi_\iota \mathrm{d}''\omega$$
$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_p^{k-1}}{k!}\left\langle T^{f_1,\dots,f_{p-1}}_{\lambda_1,\dots,\lambda_{p-1}}\,,\,(\varphi \log|f_p|)^k\,\mathrm{d}'(\varphi\log|f_p|) \wedge \varphi_\iota\,\mathrm{d}''\omega\right\rangle.$$

  et la fonction (1.18) admet d'après l'hypothèse de récurrence comme limite inconditionnelle lorsque $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ tend vers $(0, \dots, 0)$ dans $(\mathbb{R}^*)^p$ l'expression

$$\begin{aligned}\langle[\mathrm{div}(f_1)] \wedge \cdots \wedge [\mathrm{div}(f_{p-1})]\,,\,\log|f_p|\,\varphi_\iota\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\omega\rangle \\ + \langle[\mathrm{div}(f_1)] \wedge \cdots \wedge [\mathrm{div}(f_{p-1})]\,,\,\log|f_p|\,\mathrm{d}'\varphi_\iota \wedge \mathrm{d}''\omega\rangle \\ = \left\langle[\log|f_p|]\,T^{f_1,\dots,f_{p-1}}_{0,\dots,0}\,,\,\varphi_\iota\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\omega\right\rangle \\ + \left\langle[\log|f_p|]\,T^{f_1,\dots,f_{p-1}}_{0,\dots,0}\,,\,\mathrm{d}'\varphi_\iota \wedge \mathrm{d}''\omega\right\rangle,\end{aligned} \tag{1.19}$$

  où le courant

$$[\log|f_p|]\,T^{f_1,\dots,f_{p-1}}_{0,\dots,0} = [\log|f_p|]\,([\mathrm{div}(f_1)] \wedge \cdots \wedge [\mathrm{div}(f_{p-1})])$$

  est bien défini grâce au lemme 4.6.1 de [12] compte-tenu de l'expression inductive du courant $[\mathrm{div}(f_1)] \wedge \cdots \wedge [\mathrm{div}(f_{p-1})]$ (de support par construction même inclus dans $Z_1 \cap \cdots \cap Z_{p-1}$).

On remarque également que si $\mathrm{Supp}(\varphi_\iota) \subset U_{j_0}$ avec $1 \leqslant j_0 \leqslant p-1$, alors

$$\left\langle[\log|f_p|]\,T^{f_1,\dots,f_{p-1}}_{0,\dots,0}\,,\,\varphi_\iota\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\omega\right\rangle + \left\langle[\log|f_p|]\,T^{f_1,\dots,f_{p-1}}_{0,\dots,0}\,,\,\mathrm{d}'\varphi_\iota \wedge \mathrm{d}''\omega\right\rangle = 0 \tag{1.20}$$

compte-tenu du fait que le support du courant

$$[\log|f_p|]\,T^{f_1,\dots,f_{p-1}}_{0,\dots,0} = [\log|f_p|]\,([\mathrm{div}(f_1)] \wedge \cdots \wedge [\mathrm{div}(f_{p-1})])$$

est inclus dans le sous-ensemble de Zariski $Z_1 \cap \cdots \cap Z_{p-1}$ de codimension $p-1$. On en déduit donc que la limite lorsque $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ tend vers $(0, \dots, 0)$ inconditionnellement dans $(\mathbb{R}^*)^p$ de

$$\left\langle T^{f_1,\dots,f_p}_{\lambda_1,\dots,\lambda_p}\,,\,\omega\right\rangle := -\sum_{\iota\in I}\int_U \mathrm{d}'\left(\frac{|f_p|^{\lambda_p}}{\lambda_p}\right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{p-1} \mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(\frac{|f_j|^{\lambda_j}}{\lambda_j}\right)\right) \wedge \varphi_\iota \mathrm{d}''\omega$$

existe et vaut

$$\sum_{\iota\in I}\Big(\big\langle[\log|f_p|]\,[\mathrm{div}(f_1)]\wedge\cdots\wedge[\mathrm{div}(f_{p-1})]\,,\,\varphi_\iota\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\omega\big\rangle$$

$$+\big\langle[\log|f_p|]\,[\mathrm{div}(f_1)]\wedge\cdots\wedge[\mathrm{div}(f_{p-1})]\,,\,\mathrm{d}'\varphi_\iota\wedge\mathrm{d}''\omega\big\rangle\Big)$$

$$=\big\langle[\log|f_p|]\,[\mathrm{div}(f_1)]\wedge\cdots\wedge[\mathrm{div}(f_{p-1})]\,,\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\omega\big\rangle$$

$$=\langle[\mathrm{div}(f_1)]\wedge\cdots\wedge[\mathrm{div}(f_p)]\,,\,\omega\rangle$$

compte-tenu de la définition inductive des courants $[\mathrm{div}(f_1)\wedge\cdots\wedge[\mathrm{div}(f_k)]$ pour $k=2,\ldots,p$ et de la formule de Lelong–Poincaré sur le fermé de Zariski $Z_1\cap\cdots\cap Z_{p-1}$ (de codimension $p-1$) considéré comme un $\mathbb{K}$-espace analytique de dimension $n-(p-1)$.

Il reste à justifier l'égalité

$$T^{f_{\tau(1)},\ldots,f_{\tau(p)}}_{\lambda_{\tau(1)},\ldots,\lambda_{\tau(p)}}=T^{f_1,\ldots,f_p}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}$$

pour toute transposition τ de $\mathscr{S}_{\{1,\ldots,p\}}$ (groupe des permutations). Le résultat est acquis du fait de l'hypothèse de récurrence lorsque $\tau(p)=p$ et l'on peut se ramener ainsi à prouver l'égalité courantielle

$$T^{f_1,\ldots,f_{p-2},f_{p-1},f_p}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-2},\lambda_{p-1},\lambda_p}=T^{f_1,\ldots,f_{p-2},f_p,f_{p-1}}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-2},\lambda_p,\lambda_{p-1}}. \tag{1.21}$$

On définit pour cela comme dans la remarque 1.2 le courant

$$\mu_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}=\mathrm{d}'\left(\left[\frac{|f_p|^{\lambda_p}}{\lambda_p}\right]T^{f_1,\ldots,f_{p-2},f_{p-1}}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-2},\lambda_{p-1}}\right)-\mathrm{d}'\left(\left[\frac{|f_{p-1}|^{\lambda_{p-1}}}{\lambda_{p-1}}\right]T^{f_1,\ldots,f_{p-2},f_p}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-2},\lambda_p}\right)$$

où la multiplication des courants s'effectue suivant la démarche inductive (1.13). Si l'on remarque que

$$T^{f_1,\ldots,f_{p-2},f_{p-1}}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-2},\lambda_{p-1}}=\mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(\left[\frac{|f_{p-1}|^{\lambda_{p-1}}}{\lambda_{p-1}}\right]T^{f_1,\ldots,f_{p-2}}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-2}}\right),$$

$$T^{f_1,\ldots,f_{p-2},f_p}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-2},\lambda_p}=\mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(\left[\frac{|f_p|^{\lambda_p}}{\lambda_p}\right]T^{f_1,\ldots,f_{p-2}}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-2}}\right),$$

on se met en situation de reprendre les calculs (1.9). On vérifie que le courant $\mu_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}$ est d$''$-fermé dans l'union des ouverts U_{f_j} pour $j=1,\ldots,p$:

- si $\alpha\in\mathscr{A}^{n-p,n-p}_c(U)$ est de support dans $U_{f_{p-1}}\cup U_{f_p}$, les calculs sont identiques à ceux conduits dans (1.9) et le courant d$'$ et d$''$-fermé $T^{f_1,\ldots,f_{p-2}}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-2}}$ qui y intervient y joue un rôle neutre ;
- si d'autre part $\alpha\in\mathscr{A}^{n-p,n-p}_c(U)$ est de support dans $U_{f_{j_0}}$ pour j_0 entre 1 et $p-2$, on est amené à remplacer la forme α par la forme lisse $\alpha\wedge\mathrm{d}'\mathrm{d}''(|f_{j_0}|^{\lambda_{j_0}}/\lambda_{j_0})$ et à éliminer ainsi la fonction f_{j_0} de la liste $[f_1,\ldots,f_{p-2}]$, ce qui permet d'abaisser le nombre de fonctions $f_1,\ldots,f_{p-2}$.

Comme dans la remarque 1.2, on conclut à l'égalité courantielle (1.21). Ce qui achève la preuve du théorème 1.4. □

2. Réalisation à la Mellin de courants de Green normalisés

Dans cette section, comme dans la précédente, X désigne un bon espace de Berkovich sans bord de dimension pure n.

Soit $\mathscr{L} \to U$ un fibré en droites au-dessus d'un ouvert U de X équipé d'une métrique continue $\|\cdot\| = \exp(-\rho)$, où ρ est une fonction continue réelle. On pourra se repporter à [12, section 6.2] pour la notion de fibré en droites avec une métrique et à [12, section 6.4.1] pour la définition de la forme de Chern ou du courant de Chern suivant que la métrique $\|\cdot\|$ est lisse ou non. Étant donnée une section méromorphe s du fibré $\mathscr{L}$ au-dessus de l'ouvert U, on convient d'appeler courant de Green normalisé subordonné au courant $[\mathrm{div}(s)]$ dans U un courant $G \in \mathscr{D}_{0,0}(U)$ tel que

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''G + [\mathrm{div}(s)] = c_1(\mathscr{L}, \|\cdot\|),$$

où $\|\cdot\|$ désigne une métrique continue sur le fibré en droites $\mathscr{L}$ et $c_1(\mathscr{L}, \|\cdot\|)$ désigne le $(1,1)$-courant de Chern associé à la métrique $\|\cdot\|$. Lorsque cette métrique est lisse, il en est de même de la première forme de Chern que l'on convient de noter pour simplifier $c_1(\mathscr{L}, \|\cdot\|)$ et le $(0,0)$-courant G est alors un courant de Green pour $[\mathrm{div}(s)]$, au sens où $\mathrm{d}'\mathrm{d}''G + [\mathrm{div}(s)]$ est un $(1,1)$-courant de la forme $\varphi \mapsto \int_U \omega \wedge \varphi$, où $\omega = c_1(\mathscr{L}, \|\cdot\|)$ est une forme lisse.

Soit $\omega \in \mathscr{A}_c^{n,n}(U)$. Le support (compact) de ω évite tout sous-ensemble fermé de Zariski d'intérieur vide [12, lemme 3.2.5] et l'on peut donc affirmer qu'il existe, pour tout $x \in \mathrm{Supp}(\omega)$, un voisinage V_x de x dans U au-dessus duquel le fibré $\mathscr{L}$ admet un repère σ_{V_x} dans lequel la section s s'exprime sous la forme $f_{V_x}\sigma_{V_x}$, où f_{V_x} est une fonction régulière inversible dans V_x.

Définition 2.1. — *Soit $s : U \to \mathscr{L}$ une section méromorphe du fibré $\mathscr{L}$ au-dessus de U, équipé d'une métrique lisse $\|\cdot\|$. On définit donc, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, un élément de $\mathscr{D}_{0,0}(U)$ par :*

$$G_\lambda^s = -\left[\frac{\|s\|^\lambda}{\lambda}\right] : \omega \in \mathscr{A}_c^{n,n}(U) \longmapsto -\int_U \frac{\|s\|^\lambda}{\lambda}\,\omega.$$

Il résulte de la formule de Lelong–Poincaré que l'on a, au sens des courants dans U,

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \neq 0}} (\mathrm{d}'\mathrm{d}''G_\lambda^s) + [\mathrm{div}(s)] = c_1(\mathscr{L}, \|\cdot\|). \tag{2.1}$$

En effet, l'on a d'après la formule de Stokes (X est supposé sans bord), si φ désigne une fonction lisse identiquement égale à 1 au voisinage du support de $\mathrm{d}''\omega$ et de support compact dans U (que l'on peut encore construire grâce au théorème de partitionnement de l'unité, [12, proposition 3.3.6]),

$$\begin{aligned}
&\forall\, \omega \in \mathscr{A}_c^{n-1,n-1}(U),\\
&\big\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''G_\lambda^s\,,\, \omega\big\rangle = -\big\langle \mathrm{d}'G_\lambda^s\,,\, \mathrm{d}''\omega\big\rangle\\
&\qquad\qquad = -\int_{X^{\mathrm{an}}} \mathrm{d}'\left(\varphi\frac{\|s\|^\lambda}{\lambda}\right)\wedge \mathrm{d}''\omega = -\int_{U_s} \|s\|^\lambda\, \mathrm{d}'\big(\log\|s\|\big)\wedge \mathrm{d}''\omega,
\end{aligned}$$

avec $U_s := U \setminus Z$, où Z est le sous-espace analytique fermé (au sens de Zariski) de U définit comme le support du courant $[\mathrm{div}(s)]$.

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, la fonction $\lambda \mapsto \mathrm{d}'\mathrm{d}''G_\lambda^s$ (à valeurs dans $\mathscr{D}_{1,1}(U)$) admet comme limite lorsque λ tend vers 0

$$\begin{aligned}
&\forall\, \omega \in \mathscr{A}_c^{n-1,n-1}(U), \longmapsto -\int_{U_s} \mathrm{d}'\big(\log\|s\|\big)\wedge \mathrm{d}''\omega\\
&\qquad\qquad = -\int_{U_s} \mathrm{d}'\mathrm{d}''\big(\log\|s\|\big)\wedge \omega = -\big\langle[\mathrm{div}(s)] - \mathrm{d}'\mathrm{d}''[\rho]\,,\, \omega\big\rangle. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Ainsi on conclut de (2.2), avec $c_1(\mathscr{L}, \|\cdot\|) = \mathrm{d}'\mathrm{d}''[\rho]$, ce qui achève la justification de l'égalité (2.1).

Supposons maintenant que $\mathscr{L}_1 \to U$ et $\mathscr{L}_2 \to U$ sont deux fibrés en droites au-dessus de U, chacun équipé d'une métrique lisse $(e^{-\rho_{j,\iota}})_\iota$ (subordonnée à un recouvrement $(V_\iota)_\iota$ de U suffisamment fin pour que les deux fibrés se trivialisent au-dessus de chaque V_ι), ce qui signifie que, pour chaque ι, les deux fonctions $\rho_{j,\iota}$ s'expriment localement au voisinage ξ de chaque point de V_ι comme des fonctions C^∞ à valeurs réelles de fonctions du type $\log|f_{\iota,\xi}|$ où $f_{\iota,\xi}$ est une fonction régulière inversible. Pour $j = 1, 2$, les premiers courants de Chern $c_1(\mathscr{L}_j, \|\cdot\|_j)$ sont dans ce cas associés à des éléments de $\mathscr{A}^{1,1}(U)$ (que l'on notera de la même manière, mais ce sont cette fois des $(1,1)$-formes différentielles dans U, que l'on traitera comme telles), dites premières formes de Chern des fibrés $\mathscr{L}_j$ (chacun équipé de la métrique lisse $\|\cdot\|_j$).

La proposition suivante s'inscrit dans la droite ligne de la proposition 1.1.

Proposition 2.2. — *Soient $\mathscr{L}_1 \to U$ et $\mathscr{L}_2 \to U$ deux fibrés en droites au-dessus d'un ouvert U d'un bon $\mathbb{K}$-espace de Berkovich X sans bord, chacun équipé d'une métrique lisse $\|\cdot\|_j$. Soient s_1 et s_2 deux sections méromorphes respectivement de $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ telles que*

$$\mathrm{codim}_U\big(\mathrm{Supp}\,\big([\mathrm{div}(s_1)]\big) \cap \mathrm{Supp}([\mathrm{div}(s_2)])\big) \geqslant 2.$$

Pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{R}^*)^2$*, on définit un élément* $G^{s_1,s_2}_{\lambda_1,\lambda_2}$ *de* $\mathscr{D}_{1,1}(U)$ *par*

$$G^{s_1,s_2}_{\lambda_1,\lambda_2} : \omega \in \mathscr{A}^{n-1,n-1}_c(U) \longmapsto -\int_U \frac{\|s_2\|_2^{\lambda_2}}{\lambda_2}\, \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \left(\frac{\|s_1\|_1^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right) \wedge \omega$$

après avoir découpé cette intégrale suivant un partitionnement de l'unité $1 = \sum_\iota \varphi_\iota$ *subordonnée au support de* $\mathrm{d}''\omega$ *afin d'en assurer la convergence. De plus on a, au sens de la convergence faible des courants sur* U,

$$\lim_{\substack{(\lambda_1,\lambda_2)\to(0,0)\\ \lambda_1\neq 0, \lambda_2\neq 0}} \left(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(G^{s_1,s_2}_{\lambda_1,\lambda_2} + c_1(\mathscr{L}_1, \|\cdot\|_1)\wedge G^{s_2}_{\lambda_2} + c_1(\mathscr{L}_2, \|\cdot\|_2)\wedge G^{s_1}_{\lambda_1}\right)\right) \\ + [\mathrm{div}(s_1)]\wedge[\mathrm{div}(s_2)] = \big[c_1(\mathscr{L}_1, \|\cdot\|_1)\wedge c_1(\mathscr{L}_2, \|\cdot\|_2)\big], \quad (2.3)$$

où le produit de courants $[\mathrm{div}(s_1)]\wedge[\mathrm{div}(s_2)]$ *est défini localement comme l'est le courant* $[\mathrm{div}(f_1)]\wedge[\mathrm{div}(f_2)]$ *dans la Proposition 1.1 à partir des fonctions méromorphes coordonnées* f_1 *et* f_2 *respectivement de* s_1 *et* s_2 *dans les repères locaux pour les fibrés* $\mathscr{L}_1$ *et* $\mathscr{L}_2$.

Démonstration. — La preuve est similaire à celle de la proposition 1.1. On note encore Z_1 et Z_2 les sous-espaces analytiques fermés (au sens de Zariski) de U définis comme les supports des courants $[\mathrm{div}(s_1)]$ et $[\mathrm{div}(s_2)]$ et $U_{s_j} := U \setminus Z_j (j = 1, 2)$. Notons $\iota_j : Z_j \to U$ les morphismes de $\mathbb{K}$-espaces analytiques correspondant aux inclusions $Z_j \subset U$ (où $j = 1, 2$). Soit $\omega \in \mathscr{A}^{n-1,n-1}_c(U)$. Du fait de l'hypothèse $\mathrm{codim}_U(\mathrm{Supp}([\mathrm{div}(s_1)]) \cap \mathrm{Supp}([\mathrm{div}(s_2)])) \geqslant 2$, il résulte du lemme 3.2.5 de [12] et de la définition de la dimension locale $d_{\mathbb{K}}(x)$ $(x \in U)$ comme le minimum des dimensions $\mathbb{K}$-analytiques des domaines $\mathbb{K}$-affinoïdes qui contiennent x (voir par exemple [14, définition 1.16]), que le support de la $(n-2, n-1)$-forme différentielle $\mathrm{d}''\omega$ ne rencontre pas le sous-ensemble de Zariski $Z_1 \cap Z_2$. D'après le lemme de partitionnement de l'unité [12, proposition 3.3.6], on peut introduire dans U une partition de l'unité $1 = \sum_\iota \varphi_\iota$ (par des fonctions lisses à support compact), subordonnée au recouvrement du compact $\mathrm{Supp}(\mathrm{d}''\omega)$ de U par les deux ouverts U_{s_1} et U_{s_2}. Pour chaque indice ι, l'intégrale

$$-\int_U \frac{\|s_2\|_2^{\lambda_2}}{\lambda_2}\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(\frac{\|s_1\|_1^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right)\wedge \varphi_\iota\, \omega$$

est bien définie. Il est donc clair que l'on définit l'action d'un courant de bidimension $(n-1, n-1)$ en posant

$$\big\langle G^{s_1,s_2}_{\lambda_1,\lambda_2}, \omega\big\rangle := -\sum_\iota \int_U \frac{\|s_2\|_2^{\lambda_2}}{\lambda_2}\, \mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(\frac{\|s_1\|_1^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right)\wedge \varphi_\iota\, \omega. \qquad (2.4)$$

Il résulte de (2.1) et (2.2) que l'on a respectivement dans U_{s_2} et U_{s_1} les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(\lambda_1,\lambda_2)\to(0,0)\\ \lambda_1\neq 0,\lambda_2\neq 0}} &\mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(c_1(\mathscr{L}_1,\|\cdot\|_1)\wedge G^{s_2}_{\lambda_2}\right)\\ &= c_1(\mathscr{L}_1,\|\cdot\|_1)\wedge\left(-[\mathrm{div}(s_2)]+c_1(\mathscr{L}_2,\|\cdot\|_2)\right)\\ \lim_{\substack{(\lambda_1,\lambda_2)\to(0,0)\\ \lambda_1\neq 0,\lambda_2\neq 0}} &\mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(c_1(\mathscr{L}_2,\|\cdot\|_2)\wedge G^{s_1}_{\lambda_1}\right)\\ &= c_1(\mathscr{L}_2,\|\cdot\|_2)\wedge\left(-[\mathrm{div}(s_1)]+c_1(\mathscr{L}_1,\|\cdot\|_1)\right).\end{aligned}\tag{2.5}$$

Il résulte aussi de la proposition 1.1 que dans chacun des deux ouverts U_{s_j}, $j=1,2$, on a

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{(\lambda_1,\lambda_2)\to(0,0)\\ \lambda_1\neq 0,\lambda_2\neq 0}}\left(\mathrm{d}'\mathrm{d}''(G^{s_1,s_2}_{\lambda_1,\lambda_2})\right)\\ &\quad=\left(c_1(\mathscr{L}_2,\|\cdot\|_2)-[\mathrm{div}(s_2)]\right)\wedge\left([\mathrm{div}(s_1)]-c_1(\mathscr{L}_1,\|\cdot\|_1)\right)\\ &\quad=-[\mathrm{div}(s_1)]\wedge[\mathrm{div}(s_2)]-\left[c_1(\mathscr{L}_1,\|\cdot\|_1)\wedge c_1(\mathscr{L}_2,\|\cdot\|_2)\right]\\ &\qquad\qquad+c_1(\mathscr{L}_1,\|\cdot\|_1)\wedge[\mathrm{div}(s_2)]+c_1(\mathscr{L}_2,\|\cdot\|_2)\wedge[\mathrm{div}(s_1)].\end{aligned}\tag{2.6}$$

Du fait de la possibilité de décomposer $\langle G^{s_1,s_2}_{\lambda_1,\lambda_2},\omega\rangle$ sous la forme (2.4) suivant une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement de l'adhérence d'un voisinage ouvert de $\mathrm{Supp}(\omega)$ par des ouverts dans lesquelles une des sections s_j au moins est régulière et inversible, cette relation asymptotique entre courants est valide dans U tout entier. En combinant (2.5) et (2.6) et en tenant compte de (1.1), on obtient bien la relation asymptotique (2.3) voulue. $\square$

Par récurrence sur l'entier $p=2,\dots,n$, nous sommes en mesure de démontrer le résultat suivant, pendant naturel du théorème 1.4.

Théorème 2.3. — *Soient $\mathscr{L}_j\to U$, $j=1,\dots,p$, $p\geqslant 2$ fibrés en droites au-dessus d'un ouvert U d'un bon $\mathbb{K}$-espace analytique X au sens de Berkovich sans bord, équipé chacun d'une métrique lisse $\|\cdot\|_j$. Pour chaque $j=1,\dots,p$, soit s_j une section méromorphe du fibré $\mathscr{L}_j$ dans U. On suppose que pour tout $1\leqslant j_1<\dots<j_k\leqslant p$ (avec $k=1,\dots,p$) on a $\mathrm{codim}_U(\bigcap_1^k\mathrm{Supp}([\mathrm{div}(s_{j_\ell})]))\geqslant k$ comme au théorème 1.4. Pour tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in(\mathbb{R}^*)^p$, on peut définir l'action d'un courant $G^{s_1,\dots,s_p}_{\lambda_1,\dots,\lambda_p}$ de $\mathscr{D}_{n-p+1,n-p+1}(U)$ par*

$$G^{s_1,\dots,s_p}_{\lambda_1,\dots,\lambda_p}:\omega\in\mathscr{A}^{n-p+1,n-p+1}_c(U)\longmapsto-\int_U\frac{\|s_p\|_p^{\lambda_p}}{\lambda_p}\bigwedge_{j=1}^{p-1}\mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(\frac{\|s_j\|_j^{\lambda_j}}{\lambda_j}\right)\wedge\omega$$

après avoir découpé cette intégrale suivant un partitionnement de l'unité $1=\sum_\iota\varphi_\iota$ subordonnée au support de $\mathrm{d}''\omega$ afin d'en assurer la convergence. De *plus on a, au sens de la convergence faible des courants sur* U*,*

$$\lim_{\substack{(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\to(0,\dots,0)\\ \lambda_1\neq 0,\dots,\lambda_p\neq 0}} \Bigg(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\Bigg(G^{s_1,\dots,s_p}_{\lambda_1,\dots,\lambda_p} + \sum_{k=1}^{p-1}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant p}\Bigg(\bigwedge_{j\neq j_1,\dots,j_k} c_1(\mathscr{L}_j,\|\cdot\|_j)\Bigg)\wedge G^{s_{j_1},\dots,s_{j_k}}_{\lambda_{j_1},\dots,\lambda_{j_k}}\Bigg)\Bigg) + \bigwedge_{j=1}^{p}[\mathrm{div}(s_j)] = \Bigg[\bigwedge_{j=1}^{p} c_1(\mathscr{L}_j,\|\cdot\|_j)\Bigg], \quad (2.7)$$

où le produit de courants $[\mathrm{div}(s_1)]\wedge\cdots\wedge[\mathrm{div}(s_p)]$ *est défini localement comme l'est le courant* $[\mathrm{div}(f_1)]\wedge\cdots\wedge[\mathrm{div}(f_p)]$ *dans le théorème 1.4 à partir des fonctions méromorphes coordonnées* $f_1,\dots,f_p$ *des* s_j *dans les repères locaux pour les fibrés* $\mathscr{L}_j$*,* $j=1,\dots,p$*.*

Démonstration. — La preuve est calquée sur celle du théorème 1.4. Le résultat est acquis pour $p=2$ d'après la proposition 2.2. On suppose donc le résultat acquis pour $p-1$ fibrés en droites ($p\geqslant 3$). On note, pour $j=1,\dots,p$, Z_j les sous-espaces analytiques fermés (au sens de Zariski) de U de codimension 1 définis comme les supports des courants $[\mathrm{div}(s_j)]$. Pour chaque $j=1,\dots,p$, on note $\widehat{Z}_j$ l'intersection des sous-ensembles $\mathbb{K}$-analytiques Z_ℓ pour $\ell=1,\dots,j-1,j+1,\dots,p$. On note U_{s_j} le plus grand ouvert de U dans lequel la section s_j est localement régulière et inversible. Soit $\omega\in\mathscr{A}_c^{n-p+1,n-p+1}(U)$. On est maintenant en mesure de donner le sens suivant à l'expression (en tenant compte de la démarche conduisant à (1.14))

$$-\int_U \mathrm{d}'\left(\frac{\|s_p\|_p^{\lambda_p}}{\lambda_p}\right)\wedge\left(\bigwedge_{j=1}^{p-1}\mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(\frac{\|s_j\|_j^{\lambda_j}}{\lambda_j}\right)\right)\wedge\mathrm{d}''(\varphi_\iota\omega) \qquad (2.8)$$

suivant que le support de φ_ι est inclus dans l'un des U_{s_j} pour $j=1,\dots,p-1$ ou que le support de φ_ι est inclus dans U_{s_p}.

- Si $\mathrm{Supp}\,\varphi_\iota\subset U_{f_{j_0}}$ pour un indice j_0 entre 1 et $p-1$ et si $\mathrm{codim}_U\,\widehat{Z_j}=p-1$, on peut considérer $\widehat{Z_j}$ comme un $\mathbb{K}$-espace analytique de dimension $n-p+1$, on définit l'expression (2.8) par

$$
\begin{aligned}
&-\int_U \mathrm{d}'\Big(\frac{\|s_p\|_p^{\lambda_p}}{\lambda_p}\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{j=1}^{p-1} \mathrm{d}'\mathrm{d}''\Big(\frac{\|s_j\|_j^{\lambda_j}}{\lambda_j}\Big)\Big) \wedge \mathrm{d}''(\varphi_\iota \omega) \\
&:= -\Big\langle \mathrm{d}'\Big(\Big[\frac{\|s_p\|_p^{\lambda_p}}{\lambda_p}\Big] \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, G^{s_1,\ldots,\widehat{s_{j_0}},\ldots,s_{p-1}}_{\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_{j_0}},\ldots,\lambda_{p-1}}\Big), \mathrm{d}'\mathrm{d}''\Big(\frac{\|s_{j_0}\|_{j_0}^{\lambda_{j_0}}}{\lambda_{j_0}}\Big) \wedge \mathrm{d}''(\varphi_\iota \omega)\Big\rangle \\
&= -\lambda_{j_0} \Big\langle \mathrm{d}'\Big(\Big[\frac{\|s_p\|_p^{\lambda_p}}{\lambda_p}\Big] \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, G^{s_1,\ldots,\widehat{s_{j_0}},\ldots,s_{p-1}}_{\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_{j_0}},\ldots,\lambda_{p-1}}\Big), \\
&\qquad\qquad \|s_{j_0}\|_{j_0}^{\lambda_{j_0}}\, \mathrm{d}'(\log\|s_{j_0}\|_{j_0}) \wedge \mathrm{d}''(\log\|s_{j_0}\|_{j_0}) \wedge \mathrm{d}''(\varphi_\iota \omega)\Big\rangle, \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

et (d'après l'hypothèse de récurrence) on a aussi

$$
\big\langle G^{s_1,\ldots,s_p}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}\,,\, \varphi_\iota\omega\big\rangle := \Big\langle G^{s_1,\ldots,\widehat{s_{j_0}},\ldots,s_p}_{\lambda_1,\ldots,\widehat{\lambda_{j_0}},\ldots,\lambda_p}, \varphi_\iota\omega \wedge \mathrm{d}'\mathrm{d}''\Big(\frac{\|s_{j_0}\|_{j_0}^{\lambda_{j_0}}}{\lambda_{j_0}}\Big)\Big\rangle.
$$

- Si $\operatorname{Supp}\varphi_\iota \subset U_{s_p}$, on définit l'expression (1.15) par

$$
\begin{aligned}
&-\int_U \mathrm{d}'\left(\frac{\|s_p\|_p^{\lambda_p}}{\lambda_p}\right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{p-1} \mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(\frac{\|s_j\|_j^{\lambda_j}}{\lambda_j}\right)\right) \wedge \mathrm{d}''(\varphi_\iota \omega) \\
&\qquad\qquad := -\Big\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}''\, G^{s_1,\ldots,s_{p-1}}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1}}\,,\, \mathrm{d}'\Big(\frac{\|s_p\|_p^{\lambda_p}}{\lambda_p}\Big) \wedge \mathrm{d}''(\varphi_\iota\omega)\Big\rangle, \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

et toujours suivant l'hypothèse de récurrence

$$
\big\langle G^{s_1,\ldots,s_p}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}\,,\, \varphi_\iota\omega\big\rangle := \Big\langle \mathrm{d}'\mathrm{d}'' G^{s_1,\ldots,s_{p-1}}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1}}\,,\, \varphi_\iota\omega\, \frac{\|s_p\|_p^{\lambda_p}}{\lambda_p}\Big\rangle.
$$

On définit l'action du courant $G^{s_1,\ldots,s_p}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}$ en exploitant le partitionnement de l'unité (par des ouverts tous inclus dans au moins un U_{s_j}) de l'adhérence d'un voisinage ouvert du support de ω :

$$
\big\langle G^{s_1,\ldots,s_p}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}\,,\, \omega\big\rangle = \sum_\iota \big\langle G^{s_1,\ldots,s_p}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}\,,\, \varphi_\iota\, \omega\big\rangle.
$$

Il résulte du théorème 1.4 et des égalités (2.6), (2.9) et (2.10) que dans chaque ouvert U_{s_j} ($j = 1, \ldots, p$), on a, pour la convergence au sens de la limite faible des courants dans U,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\to(0,\dots,0)\\ \lambda_1\neq 0,\dots,\lambda_p\neq 0}} \Big(\mathrm{d}'\mathrm{d}''(G^{s_1,\dots,s_p}_{\lambda_1,\dots,\lambda_p})\Big) = -\bigwedge_{j=1}^{p}\big([\mathrm{div}(s_j)] - c_1(\mathscr{L}_j,\|\cdot\|_j)\big)\\
&= -[\mathrm{div}(s_1)]\wedge\cdots\wedge[\mathrm{div}(s_p)]\\
&\quad + \sum_{k=1}^{p-1}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant p}(-1)^{p-1-j}\Bigg(\bigwedge_{\ell=1}^{k}[\mathrm{div}(s_{j_\ell})]\Bigg)\wedge\Bigg(\bigwedge_{j\neq j_1,\dots,j_k} c_1(\mathscr{L}_j,\|\cdot\|_j)\Bigg),
\end{aligned} \tag{2.11}$$

avec

$$\begin{aligned}
&-\bigwedge_{j=1}^{p}\big([\mathrm{div}(s_j)] - c_1(\mathscr{L}_j,\|\cdot\|_j)\big)\\
&:= \begin{cases} (c_1(\mathscr{L}_p,\|\cdot\|_p) - [\mathrm{div}(s_p)])\bigwedge_{j=1}^{p-1}([\mathrm{div}(s_j)] - c_1(\mathscr{L}_j,\|\cdot\|_j)) & \text{dans } U_{s_p}\\ (c_1(\mathscr{L}_{j_0},\|\cdot\|_{j_0}) - [\mathrm{div}(s_{j_0})])\bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{p}([\mathrm{div}(s_j)] - c_1(\mathscr{L}_j,\|\cdot\|_j)) & \text{dans } U_{s_{j_0}}. \end{cases}
\end{aligned}$$

La formule asymptotique (2.11) est donc valide au sens des courants dans U puisque l'on peut utiliser un partitionnement de l'unité subordonné au recouvrement d'une forme test $\mathrm{Supp}\,\omega$ par les U_{s_j}. Pour chaque valeur de k entre 1 et $p-1$, pour chaque suite de k indices distincts $1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant p$, on substitue au second membre de la relation (2.11) les relations asymptotiques

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{\ell=1}^{k}[\mathrm{div}(s_k)] &= \Bigg[\bigwedge_{\ell=1}^{k} c_1(\mathscr{L}_{j_\ell},\|\cdot\|_{j_\ell})\Bigg] - \lim_{\substack{(\lambda_{j_1},\dots,\lambda_{j_k})\to(0,\dots,0)\\ \lambda_{j_1}\neq 0,\dots,\lambda_{j_k}\neq 0}}\Bigg(\mathrm{d}'\mathrm{d}''\Bigg(G^{s_{j_1},\dots,s_{j_k}}_{\lambda_{j_1},\dots,\lambda_{j_k}}\\
&\quad + \sum_{\kappa=1}^{k-1}\sum_{1\leqslant\iota_1<\cdots<\iota_\kappa\leqslant k}\Bigg(\bigwedge_{\iota\neq\iota_1,\dots,\iota_\kappa} c_1(\mathscr{L}_{j_\iota},\|\cdot\|_{j_\iota})\Bigg)\wedge G^{s_{j_{\iota_1}},\dots,s_{j_{\iota_k}}}_{\lambda_{j_{\iota_1}},\dots,\lambda_{j_{\iota_\kappa}}}\Bigg)\Bigg)
\end{aligned}$$

avant de regrouper dans le membre de gauche de (2.11) ainsi transformé tous les termes s'exprimant comme des limites (et devant lesquels figure l'action de l'opérateur de Green d′d″). □

Le théorème 2.3 est à rapprocher de la construction de courants de Green normalisés inspirée par la méthode de prolongement analytique, telle qu'elle est par exemple décrite dans [5, section 3]. On note que dans ce nouveau cadre on dispose de p paramètres $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ (au lieu d'un seul, comme dans [5, proposition 4]) pour construire une solution $G^{s_1,\dots,s_p}_{\lambda_1,\dots,\lambda_p}$ à une approximation de l'équation de Green normalisée

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''G + \bigwedge_{j=1}^{p}[\mathrm{div}(s_j)] = \Bigg[\bigwedge_{j=1}^{p} c_1(\mathscr{L}_j,\|\cdot\|_j)\Bigg]. \tag{2.12}$$

Mais il est par contre possible (dans ce cadre des espaces $\mathbb{K}$-analytiques au sens de Berkovich) de supposer les sections s_j méromorphes et non seulement holomorphes comme c'était le cas dans le cadre analytique complexe ; le fait que toute (ℓ, k)-forme lisse à support compact sur un bon espace analytique Y de dimension k soit telle que son support évite tout fermé de Zariski d'intérieur non vide de Y (voir [12, lemme 3.2.5]) joue dans ce cadre non archimédien un rôle majeur. Par contre, il convient de faire, lorsque l'on travaille dans un tel cadre, une hypothèse plus forte concernant les supports des diviseurs que celle consistant à juste supposer que ces supports s'intersectent proprement ; il est nécessaire en effet de supposer que c'est aussi le cas pour toute sous-famille extraite de la famille des supports des s_j, $j = 1, \ldots, p$.

Pour construire une solution G à l'équation de Green normalisée (2.12) (et non seulement une solution à une approximation de cette équation suivant (2.7)), il convient par exemple de complexifier le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{D}_{n-p+1,n-p+1}(U)$ et de former, dans ce complexifié $\mathscr{D}_{n-p+1,n-p+1}(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, le courant

$$\begin{aligned} G^{s_1,\ldots,s_p} &:= \frac{1}{(2i\pi)^p} \times \int_{\Gamma_{r_1,\ldots,r_p}} \Bigg(G^{s_1,\ldots,s_p}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p} \\ &+ \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant p} \Bigg(\bigwedge_{j\neq j_1,\ldots,j_k} c_1(\mathscr{L}_j, \|\cdot\|_j) \Bigg) \wedge G^{s_{j_1},\ldots,s_{j_k}}_{\lambda_{j_1},\ldots,\lambda_{j_k}} \Bigg) \bigwedge_1^p \frac{\mathrm{d}\lambda_j}{\lambda_j} \end{aligned} \tag{2.13}$$

où $r_1, \ldots, r_p > 0$,

$$\Gamma_{r_1,\ldots,r_p} : (t_1, \ldots, t_p) \in [0,1]^p \mapsto (r_1 e^{2i\pi t_1}, \ldots, r_p e^{2i\pi t_p}) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p).$$

Il est en effet possible de supposer dans les théorèmes 1.4 et 2.3 que les paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont dans $\mathbb{C}^*$ et non plus dans $\mathbb{R}^*$. Le courant « moyen » $G^{s_1,\ldots,s_p}$ ainsi construit est un courant réel car $\overline{G^s_\lambda + \cdots} = G^s_{\bar\lambda} + \cdots$ et que la forme $\Gamma^*_{r_1,\ldots,r_p}(\bigwedge \mathrm{d}\lambda_j/(2i\pi\lambda_j))$ est la forme réelle $\bigwedge_j(\mathrm{d}\theta_j/(2\pi))$. Ce courant dépend naturellement de l'ordre dans lequel sont considérés les fibrés $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_p$ et les sections méromorphes qui y sont attachées. Il résulte des théorèmes 1.4 et 2.3 (repris en supposant cette fois les λ_j dans $\mathbb{C}^*$) que le courant $G^{s_1,\ldots,s_p}$ est solution de l'équation de Green normalisée (2.12).

3. Approche du type Mellin aux courants de Vogel dans le cadre algébrique

Dans cette section, nous nous plaçons dans le cadre algébrique et considérons une variété algébrique projective X de dimension n définie au-dessus du corps valué $\mathbb{K}$, un entier $m \in \mathbb{N}^*$, et la variété algébrique projective produit $\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}} \times X$ de dimension $n+m$. On se donne un fibré en droites $L_X \to X$ au-dessus de X et des sections globales $s_0, \dots, s_m$ du fibré L_X au-dessus de X. Comme le foncteur d'analytification est compatible avec le produit fibré, on a $(\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}} \times X)^{\mathrm{an}} = (\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}})^{\mathrm{an}} \times X^{\mathrm{an}}$.

Soit $\|\cdot\|$ une métrique semi-positive sur le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1) \to \mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}$. On sait(voir [7, 9, 10, 16], [12, section 6.9] ou aussi le survey [20, section 3.3]) lui associer une mesure de Monge–Ampère que l'on note en effet $(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1), \|\cdot\|))^{\wedge^m}$ sur l'analytification $(\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}})^{\mathrm{an}}$ telle que

$$\int_{(\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}})^{\mathrm{an}}} (c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1), \|\cdot\|))^{\wedge^m}(\kappa) = \deg_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1)}(\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}) = 1.$$

Lorsque le fibré ainsi métrisé $\overline{(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1))^{\mathrm{an}}}$ est un fibré vectoriel PL (voir [12, définition 6.2.9], ceci signifiant essentiellement que l'on puisse disposer localement de repères orthonormés), la mesure de Monge–Ampère $(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1), \|\cdot\|))^{\wedge^m}$ est une mesure atomique supportée par un sous-ensemble discret $S_{\|\cdot\|}$, *i.e.* il existe des réels positifs γ_η tels que pour toute fonction φ continue de $(\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}})^{\mathrm{an}}$ dans $\mathbb{R}$ ([12, proposition 6.9.2 et définition 6.7.2 pour la définition de $S_{\|\cdot\|}$])

$$\int_{(\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}})^{\mathrm{an}}} \varphi(\kappa)\, (c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1), \|\cdot\|))^{\wedge^m}(\kappa) = \sum_{\eta \in S_{\|\cdot\|}} \gamma_\eta\, \varphi(\eta). \tag{3.1}$$

On supposera par la suite que l'on est toujours dans cette situation (métrique $\|\cdot\|$ semi-positive et fibré métrisé $\overline{(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1))^{\mathrm{an}}}$ PL) ; si la métrique n'est plus semi-positive mais que le fibré métrisé $\overline{(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1))^{\mathrm{an}}}$ est toujours PL, les masses γ_η dans (3.1) sont des nombres réels non nécessairement positifs ou nuls.

Exemple 3.1. — Dans le cas particulier où $\|\cdot\|$ désigne la métrique standard

$$\|\langle \kappa, z\rangle\|_{\mathrm{std}} = \frac{|\langle \kappa, z\rangle|}{\max(|z_0|, \dots, |z_m|)}, \quad \kappa \in \mathbb{K}^{m+1} \backslash \{(0, \dots, 0)\},\ z = [z_0 : \cdots : z_m]$$

(qui est bien semi-positive, se référer par exemple à la section 1.3 de [10]), la mesure de Monge–Ampère $(c_1(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1), \|\cdot\|))^{\wedge^m}$ sur $(\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}})^{\mathrm{an}}$ qui lui est attachée est la mesure de Dirac δ_ξ au point de Gauß.

Remarque 3.2. — Dans le cadre archimédien ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), la métrique sur $\mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}$ construite sur le même principe que celui sur lequel est construite $(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1), \|\cdot\|))^{\wedge^m}$ s'obtient comme image directe de la mesure de Haar normalisée sur le tore

$$\{[z_0 : \cdots : z_m] \in \mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}\,;\, |z_0| = \cdots = |z_m|\}.$$

Notons que la métrique $\|\cdot\|_{\mathrm{std}}$ est continue mais non lisse. Toujours dans ce cadre archimédien, mais lorsque la métrique $\|\cdot\|$ est la métrique de Fubini–Study (qui, elle, est lisse)

$$\|\langle\kappa, z\rangle\|_{\mathrm{fs}} = \frac{|\langle\kappa, z\rangle|}{\sqrt{|z_0|^2+\cdots+|z_m|^2}},\quad \kappa\in\mathbb{C}^{m+1}\backslash\{(0,\ldots,0)\},\ z=[z_0:\cdots:z_m],$$

on obtient naturellement $(c_1(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}}(1),\|\cdot\|_{\mathrm{fs}}))^{\wedge^m} = (\mathrm{dd}^c\log\|z\|^2)^{\wedge^m}$, métrique pour laquelle on rappelle que l'on dispose de la formule de Crofton : si $f_0,\ldots,f_m$ sont $m+1$ éléments de $\mathcal{O}_X(U)$ (où U désigne un ouvert d'un espace analytique complexe X), on a, lorsque les f_j n'ont aucun zéro commun dans U :

$$\begin{aligned}&\mathrm{dd}^c(\log\|f(x)\|^2_{\mathrm{eucl}})\\ &\qquad= \int_{[\kappa_0:\cdots:\kappa_m]\in\mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}}[\mathrm{div}(\langle\kappa, f(x)\rangle)]\wedge\big(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}},\|\cdot\|_{\mathrm{fs}})\big)^{\wedge^m}(\kappa),\end{aligned}\tag{3.2}$$

$\|\cdot\|_{\mathrm{eucl}}$ désignant la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^{n+1}$ (voir par exemple [1, lemme 6.3]) et $f=(f_0,\ldots,f_m)$.

Dans le cadre non archimédien (algébrique), nous pouvons énoncer ce qui peut être considéré comme le pendant de la formule de Crofton. On considère les analytifications $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1))^{\mathrm{an}}$ et $\mathscr{L}_X^{\mathrm{an}}$ respectivement des fibrés en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1)$ et L_X (considérés tous deux comme des fibrés en droites au-dessus de la variété algébrique projective produit $\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}\times X$) et la section du fibré produit $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1))^{\mathrm{an}}\otimes\mathscr{L}_X^{\mathrm{an}}$ obtenue en analytifiant la section $(\kappa, z)\mapsto\langle\kappa, f(z)\rangle$ du fibré en droites produit $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1)\otimes L_X$. On notera $[\mathrm{div}(\langle\kappa, f\rangle)]$ le courant d'intégration correspondant à ce diviseur effectif sur $(\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}\times X)^{\mathrm{an}} = (\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}})^{\mathrm{an}}\times X^{\mathrm{an}}$. On suppose ici que le fibré métrisé $\overline{(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1))^{\mathrm{an}}}$ est PL. La formule de Crofton (3.2) dans ce cadre non archimédien s'énonce alors ainsi : Étant données des sections holomorphes $s_0,\ldots,s_m$ de L_X telles que $\bigcap_0^m \mathrm{Supp}([\mathrm{div}(s_j)])=\emptyset$ et $s_j^{\mathrm{an}}(j=0,\ldots,m)$ leurs analytifications, on a[(1)] :

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}'\mathrm{d}''\Bigg(\sum_{\eta\in S_{\|\cdot\|}}\lambda_\eta\big[\log\|\langle\eta, s^{\mathrm{an}}(x)\rangle\|\big]\Bigg)\\ &\qquad= \int_{\kappa\in(\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}})^{\mathrm{an}}}\big[\mathrm{div}(\langle\kappa, s^{\mathrm{an}}(x)\rangle)\big]\wedge\big(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1),\|\cdot\|)\big)^{\wedge^m}(\kappa).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Elle se réduit pour la métrique standard à l'équation de Lelong–Poincaré

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''\big(\big[\log\|\langle\xi, s^{\mathrm{an}}(x)\rangle\|_{\mathrm{sdt}}\big]\big) = \big[\mathrm{div}\langle\xi, s^{\mathrm{an}}(x)\rangle\big],$$

(1) Il faut comprendre ici $\langle\kappa, s^{\mathrm{an}}\rangle$ comme l'analytification de la section $\langle\kappa, s\rangle$ du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1)\otimes L_X\to\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}\times X$ en une section du fibré $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1))^{\mathrm{an}}\otimes\mathscr{L}_X^{\mathrm{an}}\to(\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}})^{\mathrm{an}}\times X^{\mathrm{an}}$.

où $\xi \in (\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}})^{\mathrm{an}}$ désigne le point de Gauß.

Soit $\pi : \widehat{X}^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ un éclatement normalisé de X^{an} ([13], commentaire avant le lemme 2.2.1). Les composantes irréductibles de X^{an} sont des sous-ensembles analytiques de la forme $U_i = \pi(\widehat{U_i})$, avec $\widehat{U_i}$ les composantes connexes de l'éclatement normalisé $\pi : \widehat{X}^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$. On dit que X^{an} est irréductible si il est non vide et admet une unique composante irréductible ([13, lemme 2.2.1 et définition 2.2.2]).

Pour définir une approche de type Mellin au cycle de Vogel attaché à une famille $(s_0, \ldots, s_m)$ de sections d'un fibré en droites $L_X \to X$, une fois choisie une métrique lisse $\|\cdot\|_{L_X}$ sur le fibré $\mathscr{L}_X^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$, il suffit d'exploiter de manière itérative le lemme suivant, directement inspiré de [1, lemme 3.1].

Lemme 3.3. — *Soit U un ouvert d'un bon $\mathbb{K}$-espace analytique au sens de Berkovich X^{an} de dimension n,*

$$Z = \sum_\iota \mu_\iota Z_\iota$$

une combinaison formelle localement finie de sous-ensembles analytiques de U de dimension pure $n-p$ ($1 \leqslant p \leqslant n-1$) et s une section holomorphe d'un fibré métrisé $\mathscr{L}^{\mathrm{an}} \to U$ équipé d'une métrique lisse $\|\cdot\|$ de première forme de Chern $c_1(\mathscr{L}^{\mathrm{an}}, \|\cdot\|)$. On note

$$\begin{aligned} Z^{\mathrm{div}(s)} &:= \sum_{\{\iota\,;\,\mathrm{Supp}(Z_\iota) \subset \mathrm{Supp}(\mathrm{div}(s))\}} \mu_\iota Z_\iota \\ Z^{U\setminus \mathrm{div}(s)} &:= \sum_{\{\iota\,;\,\mathrm{Supp}(Z_\iota) \not\subset \mathrm{Supp}(\mathrm{div}(s))\}} \mu_\iota Z_\iota. \end{aligned}$$

Soit $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$. On définit

$$\tilde{T}^s_\lambda \in \big(\mathscr{D}_{n-p,n-p}(U) \oplus \mathscr{D}_{n-p-1,n-p-1}(U)\big) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

comme

$$\tilde{T}^s_\lambda := \sum_\iota \left([1 - \|s\|^\lambda] + \big[\|s\|^\lambda \; c_1(\mathscr{L}^{\mathrm{an}}, \|\cdot\|)\big] + \mathrm{d}'\mathrm{d}''\left[\frac{\|s\|^\lambda}{\lambda}\right]\right) \wedge [Z_\iota], \quad (3.4)$$

où le courant $[\|s\|^\lambda]\,[Z_\iota]$ est défini à partir du lemme 4.6.1 de [12] comme l'image directe par $i_{Z_\iota} : Z_\iota \to U$ du courant $[\|s \circ i_{Z_\iota}\|^\lambda]$. On a

$$\tilde{T}^s_\lambda = \big[Z^{\mathrm{div}(s)}\big] + \big[\|s\|^\lambda\, c_1(\mathscr{L}^{\mathrm{an}}, \|\cdot\|)\big] \wedge \big[Z^{U\setminus\mathrm{div}(s)}\big] + \mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(\left[\frac{\|s\|^\lambda}{\lambda}\right]\right) \wedge \big[Z^{U\setminus\mathrm{div}(s)}\big]$$

et, par conséquent :

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \mathrm{Re}\,\lambda > 0}} \tilde{T}^s_\lambda = \big[Z^{\mathrm{div}(s)}\big] + [\mathrm{div}(s)] \wedge \big[Z^{U\setminus\mathrm{div}(s)}\big]. \quad (3.5)$$

Démonstration. — Ce lemme résulte immédiatement de l'équation de Lelong–Poincaré. □

Suivant l'approche proposée dans [1] (voir en particulier le théorème 6.2 dans cette référence) et la transcription (3.3) que nous avons proposé pour la formule de Crofton dans le cadre non archimédien, il est naturel de définir ainsi le courant de Vogel (et son approche du type Mellin) attaché à $m+1$ sections globales $s_0, \dots, s_m$ d'un fibré $L_X \to X$ au-dessus d'une variété projective X définie au-dessus d'un corps valué $\mathbb{K}$, une fois choisie une métrique lisse $\|\cdot\|_{L_X}$ sur le fibré $\mathscr{L}^{\mathrm{an}}$. On note $\|\cdot\|_{L_X,\mathrm{moy}}$ la métrique induite sur le fibré $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1))^{\mathrm{an}} \otimes \mathscr{L}_X^{\mathrm{an}}$ par le choix des métriques $\|\cdot\|$ sur $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1))^{\mathrm{an}}$ et $\|\cdot\|_{L_X}$ sur $\mathscr{L}^{\mathrm{an}}$.

Définition 3.4. — *Le courant de Vogel attaché à $s_0, \dots, s_m$ est défini comme la limite suivante au sens (faible) des courants sur X^{an} :*

$$\lim_{\lambda_\nu \to 0} \left(\lim_{\lambda_{\nu-1} \to 0} \left(\cdots \left(\lim_{\lambda_1 \to 0} \int_{\left((\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}})^{\mathrm{an}}\right)^\nu} \left(\bigwedge_{j=1}^{\nu} \left(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1), \|\cdot\|)\right)^{\wedge^m} (\kappa_j) \right) \right.\right.\right.$$
$$\wedge \bigwedge_{j=1}^{\nu} \Bigg([1 - \|\langle \kappa_j, s^{\mathrm{an}}\rangle\|^{\lambda_j}_{L_X,\mathrm{moy}}] + \Big[\|\langle \kappa_j, s^{\mathrm{an}}\rangle\|^{\lambda_j}_{L_X,\mathrm{moy}} (c_1(L_X, \|\cdot\|)\Big]$$
$$\left.\left.\left. + \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \left(\left[\frac{\|\langle \kappa_j, s^{\mathrm{an}}\rangle\|^{\lambda_j}_{L_X,\mathrm{moy}}}{\lambda_j} \right] \right) \Bigg) \right) \cdots \right) \right) \tag{3.6}$$

lorsque $\nu := \min(m+1, n+1)$, où le produit des courants se trouve justifié par le lemme 4.6.1 de [12] *si l'on tient compte de* (3.5) *et du fait que les limites suivant $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ sont prises les unes après les autres.*

Remarque 3.5. — Du fait que la mesure correspondant aux courant $[c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}}(1), \|\cdot\|_{\mathrm{moy}})]^{\wedge^m}$ est une mesure atomique (combinaison linéaire de masses de Dirac), il résulte du lemme 3.3 que le courant de Vogel est un courant d'intégration sur un cycle analytique (non de dimension pure) de X^{an} que l'on convient de définir comme le cycle (moyen) de Vogel.

4. Approche de type Mellin aux courants de Segre dans le cadre algébrique

Soit X une variété algébrique projective de dimension n définie sur $\mathbb{K}$ et X^{an} son analytification au sens de Berkovich. On considère un fibré algébrique $E_X \to X$ de rang $m+1$ au-dessus de X et on équipe son analytifié $E_X^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ d'une métrique formelle PL (voir [12, définition 6.2.9]) notée $\|\cdot\|_{E_X^{\mathrm{an}}}$ au-dessus de l'analytification X^{an}.

Exemple 4.1. — Si $X^{\mathrm{an}} = (\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}})^{\mathrm{an}}$ et si $E_X^{\mathrm{an}} = (\mathscr{O}_X(d_0))^{\mathrm{an}} \oplus \cdots \oplus (\mathscr{O}_X(d_m))^{\mathrm{an}}$, on peut équiper chaque $(\mathscr{O}_X(d_j))^{\mathrm{an}}$ de la métrique standard

$$\|s_j([z_0 : \cdots : z_n])\|_{\mathrm{std}} = \frac{|s_j(z_0, \ldots, z_n)|}{\max_\ell |z_\ell|^{d_j}}$$

qui est une métrique globalement psh-approchable [12, proposition 6.3.2] et le fibré E_X^{an} de la métrique

$$\|s\|_{E_X^{\mathrm{an}}} := \max_j \|s_j\|_{\mathrm{std}}.$$

Soit $s \in \mathscr{O}_X(E_X)$ une section globale de E_X dont on notera s^{an} l'analytification. Soit $\pi : \widehat{X} \to X$ l'éclatement normalisé de X suivant le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_X$ induit par s et $\pi^{\mathrm{an}} : \widehat{X}^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ son analytification. On note $L_{\widehat{X}}$ le fibré en droites correspondant au diviseur exceptionnel D_s de $\pi : \widehat{X} \to X$ et $\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}}$ le fibré que $L_{\widehat{X}}$ induit au-dessus de l'analytification $\widehat{X}^{\mathrm{an}}$. On a (du fait de la définition de l'éclatement normalisé π) $\pi^*(s) = \sigma \otimes \tau$, où σ est une section globale du fibré en droites $L_{\widehat{X}}$ et τ une section ne s'annulant pas du fibré $F_{\widehat{X}} := L_{\widehat{X}}^{-1} \otimes \pi^*(E_X)$ (de rang $m+1$ comme E_X, et dont on notera $F_{\widehat{X}}^{\mathrm{an}} \to \widehat{X}^{\mathrm{an}}$ l'analytification).

Comme dans la section 4 de [1], on équipe le fibré $L_{\widehat{X}}$ de la métrique $\|\cdot\|_\tau$ telle que $\|\sigma\|_\tau = \|\pi^*(s)\|_{\pi^*(E_X)}$. On note σ^{an} et τ^{an} les sections holomorphes respectivement des fibrés $\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}}$ et $F_{\widehat{X}}^{\mathrm{an}}$ au-dessus de $\widehat{X}^{\mathrm{an}}$ déduites de σ et τ par analytification. On note $\|\cdot\|_{\tau^{\mathrm{an}}}$ la métrique formelle définie sur le fibré $\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}}$. Le courant $-\mathrm{d}'\mathrm{d}'' \log \|\tau^{\mathrm{an}}\|_{\pi^*(E_X)}$ (calculé ici localement en choisissant arbitrairement une trivialisation locale de $(\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}})^{-1}$) est le courant de Chern $c_1(\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}}, \|\cdot\|_{\tau^{\mathrm{an}}})$.

Si $a_0, \ldots, a_\mu$ sont des fonctions régulières globalement inversibles dans un ouvert U de X^{an}, la fonction $\log \max(|a_0|, \ldots, |a_\mu|)$ est globalement psh approchable (voir [12, Proposition 6.8.3]) dans U. Comme la métrique $\|\cdot\|_{E_X^{\mathrm{an}}}$ est supposée PL, il en est de même pour la métrique $\|\cdot\|_{\pi^*(E_X^{\mathrm{an}})}$ sur $\widehat{X}^{\mathrm{an}}$ [12, 6.2.15]. Par conséquent, la fonction $-\mathrm{d}'\mathrm{d}'' \log \|\tau^{\mathrm{an}}\|_{\pi^*(E_X^{\mathrm{an}})}$ est une fonction globalement psh-approchable au voisinage de tout point $\hat{x}$ où σ n'est pas inversible (il suffit pour cela de travailler dans un ouvert de carte $U_{\pi(\hat{x})}$ au-dessus duquel on dispose d'un repère orthonormé pour le fibré E_X^{an} et de considérer le voisinage $\pi^{-1}(U_{\pi(x)})$ de $\hat{x}$) et l'on sait donc donner un sens (en approchant cette fonction par des fonctions psh lisses) aux puissances extérieures $(-c_1(\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}}, \|\cdot\|_{\tau^{\mathrm{an}}}))^{\wedge^{k-1}}$, $k = 1, \ldots, n$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on peut donc définir sur $\widehat{X}^{\mathrm{an}}$ le courant $[\mathrm{div}(\sigma^{\mathrm{an}})] \wedge (-c_1(\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}}, \|\cdot\|_{\tau^{\mathrm{an}}}))^{\wedge^{k-1}}$.

En transposant la notion de courant de Segre M^s introduite dans [1, section 4], on aboutit à la définition suivante :

Définition 4.2. — *Le courant de Segre attaché à la section s est le courant*

$$M^s := [1 - \|s^{\mathrm{an}}\|^{\lambda}_{E_X^{\mathrm{an}}}]_{\lambda=0} + \pi_* \left(\sum_{k=1}^{n} [\mathrm{div}(\sigma^{\mathrm{an}})] \wedge \big(-c_1(\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}}, \|\cdot\|_{\tau^{\mathrm{an}}})\big)^{\wedge^{k-1}} \right).$$

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 4.3. — *Le courant de Segre M^s s'exprime aussi comme $M^s = \sum_{k=0}^{n} M_k^s$, où*

$$M_0^s = \lim_{\lambda_0 \to 0} \big[1 - \|s^{\mathrm{an}}\|^{\lambda_0}_{E_X^{\mathrm{an}}}\big];$$

$$M_k^s = \lim_{\lambda_k \to 0} \left(\lim_{\lambda_{k-1} \to 0} \left(\cdots \left(\lim_{\lambda_1 \to 0} \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. \left(\mathrm{d}''[\|s^{\mathrm{an}}\|^{\lambda_k}_{E_X^{\mathrm{an}}}] \wedge \mathrm{d}'[\log \|s^{\mathrm{an}}\|_{E_X^{\mathrm{an}}}] \wedge \bigwedge_{\ell=1}^{k-1} \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \left(\left[\frac{\|s^{\mathrm{an}}\|^{\lambda_\ell}_{E_X^{\mathrm{an}}}}{\lambda_\ell} \right] \right) \right) \right) \cdots \right) \right). \tag{4.1}$$

Démonstration. — La preuve est directement inspirée de celle qui est conduite dans le cadre complexe dans [1, section 4]. Puisqu'on a localement l'égalité (au sens des courants)

$$[\log \|\pi^*[s^{\mathrm{an}}]\|_{\pi^*(E_X^{\mathrm{n}})}] = [\log |\sigma^{\{\mathrm{an}\}}|] + [\log \|\tau^{\mathrm{an}}\|] = [\log \|\sigma^{\mathrm{an}}\|_{\|\tau\|^{\mathrm{an}}}],$$

où nous avons noté $\sigma^{\{\mathrm{an}\}}$ la fonction coordonnée de σ^{an} dans un repère local, il découle de la formule de Lelong–Poincaré que

$$\mathrm{d}'\mathrm{d}''\big[\log \|\pi^*[s^{\mathrm{an}}]\|_{\pi^*(E_X^{\mathrm{an}})}\big] = [\mathrm{div}(\sigma^{\mathrm{an}})] - c_1(\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}}, \|\cdot\|_{\tau^{\mathrm{an}}}).$$

au sens des courants. Notons $M_k^{s,\lambda} (k = 0, \ldots, n)$ la composante de bidegré $(0, k)$ dans le courant dont on prend la limite lorsque les λ_j tendent (les uns après les autres) vers 0 au second membre de (4.1). On a pour $\lambda_0 > 0$

$$\pi^*(M_0^{s,\lambda}) = 1 - [\|\pi^*[s^{\mathrm{an}}]\|^{\lambda_0}_{E_{X^{\mathrm{an}}}^{\mathrm{an}}}]$$

et, pour $\lambda_k > 0 (k = 1, \ldots, n)$:

$$\pi^*(M_k^{s,\lambda}) = [\mathrm{div}(\sigma^{\mathrm{an}})] \wedge \big(-c_1(\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}}, \|\cdot\|_{\tau^{\mathrm{an}}})\big)^{\wedge^{k-1}}.$$

Si l'on remplace le $(1, 1)$-courant $-c_1(\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}}, \|\cdot\|_{\tau^{\mathrm{an}}})$ par une $(1, 1)$-forme lisse $\hat{\omega}$ qui l'approche au sens des courants (on a observé que cela était possible puisque la fonction $-\mathrm{d}'\mathrm{d}'' \log \|\tau^{\mathrm{an}}\|_{\pi^*(E_X^{\mathrm{an}})}$ est une fonction globalement psh-approchable au voisinage de tout point $\hat{x}$ où σ n'est pas inversible), il résulte du lemme 3.3 que l'on a pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda_k \to 0_+} \cdots \lim_{\lambda_1 \to 0_+} M_k^{s,\underline{\lambda}} &= \pi_* \left(\left(\ldots \pi^*(M_k^{s,\lambda})_{\lambda_1=0} \cdots \right)_{\lambda_k=0} \right) \\ &= \pi_* \left([\mathrm{div}(\sigma^{\mathrm{an}})] \wedge \hat{\omega}^{\wedge^{k-1}} \right).\end{aligned}$$

On déduit le résultat de la Proposition 4.3 en approchant au sens des courants (au fur et à mesure que les λ_k tendent successivement vers 0) la forme $-c_1(\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}}, \|\cdot\|_{\tau^{\mathrm{an}}})$ par une $(1,1)$-forme lisse $\hat{\omega}$. $\square$

5. Nombres ou cycles de Lelong dans le contexte non archimédien

Soit $\mathscr{X}$ un espace analytique complexe de dimension n et T un (k,k)-courant positif sur $\mathscr{X}$. Soit $x_0 \in \mathscr{X}$. Le nombre de Lelong (ordinaire) $\nu(T, x_0)$ du courant T au point x_0 est défini comme la limite lorsque ϵ tend vers 0^+ de la fonction croissante sur $]0, \epsilon_0]$ (avec $0 < \epsilon_0 << 1$) :

$$\epsilon \mapsto \frac{1}{\epsilon^{2(n-k)}} \int_{\|x-x_0\|<\epsilon} T \wedge (dd^c \|x - x_0\|^2)^{\wedge^{n-k}}.$$

Appelons cycle généralisé de $\mathscr{X}$ tout courant de la forme $\pi_*(c)$, où $\pi : \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ est un morphisme propre entre espaces analytiques complexes et c est un produit de composantes de formes de Chern lisses sur $\mathscr{Y}$, chacune attachée à un fibré holomorphe $(F \to \mathscr{Y}, \|\cdot\|)$ équipé d'une métrique lisse ; tel est le cas par exemple des courants

$$\pi_*\big([Y_\iota] \wedge (-c_1(\hat{L}, \|\cdot\|_\tau))^{\wedge^{k-1}}\big) = (\pi \circ i_\iota)_* \left(-\big(c_1(\hat{L}_{|Y_\iota}, (\|\cdot\|_\tau)_{|Y_\iota})\big)^{\wedge^{k-1}} \right)$$

$(k = 1, \ldots, n)$, où Y_ι désigne l'une des composantes irréductibles du diviseur exceptionnel $[D]$ de l'éclatement $\pi : \hat{\mathscr{X}} \to \mathscr{X}$ le long du faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$ attaché à une section s d'un fibré hermitien $E_{\mathscr{X}} \to \mathscr{X}$ et $i_\iota : Y_\iota \to \hat{\mathscr{X}}$ l'immersion de Y_ι dans $\hat{\mathscr{X}}$; la métrique $\|\cdot\|_\tau$ sur le fibré en droites $\hat{L} = \mathcal{O}(-[D])$ est ici définie par $\|\sigma\|_\tau = \|\pi^* s\|_{\pi^*(E_{\mathscr{X}})}$. Étant donné un point x_0 de $\mathscr{X}$ et un cycle généralisé T sur $\mathscr{X}$, on sait associer à T un nombre de Lelong $\nu(T, x_0) \in \mathbb{Z}$ au point x_0. Par exemple, le nombre de Lelong $\nu(T_\iota, x_0)$ du courant $T_\iota = \pi_*([Y_\iota] \wedge (-c_1(\hat{L}, \|\cdot\|_\tau))^{\wedge^{k-1}})$ au point x_0 s'exprime ainsi lorsque $\xi_{x_0} = \xi_{x_0,0}, \ldots, \xi_{x_0,m_{x_0}}$ désigne un système de générateurs de l'idéal maximal $\mathfrak{M}_{x_0}$ de $\mathscr{O}_{\mathscr{X},x_0}$:

$$\begin{aligned}\Bigg[\cdots\Bigg[\int_{\left(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{m_{x_0}}\right)^{\nu}}\left(\bigwedge_{j=1}^{\nu}\left(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{m_{x_0}}}(1),\|\cdot\|_{\mathrm{fs}})\right)^{\wedge^{m_{x_0}}}(\kappa_j)\right)\\ \wedge\bigwedge_{j=1}^{\nu}\left(1-|\langle\kappa_j,\xi_{x_0}\rangle|_{\mathrm{fs}}^{2\lambda_j}+\mathrm{dd}^c\left(\frac{|\langle\kappa_j,\xi_{x_0}\rangle|_{\mathrm{fs}}^{2\lambda_j}}{\lambda_j}\right)\right)\wedge T_\iota\Bigg]_{\lambda_1=0}\cdots\Bigg]_{\lambda_\nu=0}\\ =\nu(T_\iota,x_0)\,[\{x_0\}]\end{aligned} \tag{5.1}$$

où $\nu=\min(n+1,m_{x_0}+1)$ et $|\langle\kappa,\xi\rangle|_{\mathrm{fs}}:=|\langle\kappa,\xi\rangle|/\|\kappa\|$ si $\kappa=[\kappa_0:\cdots:\kappa_{m_{x_0}}]$ et $\|\kappa\|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{C}^{m_{x_0}+1}$ (voir [1, Proposition 5.3]) ; la notation $[\dots]_{\lambda_j=0}$ signifie ici que l'on prolonge méromorphiquement la fonction holomorphe (à valeurs courants) de λ_j (pour $\mathrm{Re}\,\lambda_j>>1$) enserrée par les crochets et que l'on évalue ensuite le coefficient de λ_j^0 dans le développement en série de Laurent de ce prolongement méromorphe au voisinage de l'origine.

Soit maintenant X une variété algébrique projective de dimension n définie sur un corps valué $\mathbb{K}$ et X^{an} son analytification au sens de Berkovich. Considérons un courant T sur X^{an} de la forme $T=\sum_{\iota,\iota'}(\pi_\iota)_*[\omega_{\iota'}]$, où $\pi_\iota: Y_\iota^{\mathrm{an}}\to X^{\mathrm{an}}$ est un morphisme analytique entre analytifiés au sens de Berkovich de variétés algébriques projectives définies sur $\mathbb{K}$ et $\omega_{\iota'}$ est un produit de premières formes de Chern de fibrés en droites $(\mathscr{L}_{\iota,\iota'}^{\mathrm{an}},\|\cdot\|_{\iota,\iota'}^{\mathrm{an}})$, où $\|\cdot\|_{\iota,\iota'}^{\mathrm{an}}$ est une métrique formelle PL globalement psh approchable sur le fibré $\mathscr{L}_{\iota,\iota'}^{\mathrm{an}}\to Y_\iota^{\mathrm{an}}$. Si x_0 est un point fermé de X, on peut analytifier le morphisme $\iota_{x_0}:\{x_0\}\to X$ et considérer $\{x_0\}^{\mathrm{an}}$ comme un sous-ensemble de Zariski de dimension 0 de X^{an}. Soit $\xi_{x_0}=(\xi_{x_0,0},\dots,\xi_{x_0,m_{x_0}})$ un système de générateurs de l'idéal maximal $\mathfrak{M}_{x_0}$ de $\mathscr{O}_{X,x_0}$ et $\nu=\min(n+1,m_{x_0}+1)$. On considère le fibré $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_{x_0}}}(1))^{\mathrm{an}}\otimes\mathbb{K}^{\mathrm{an}}$ sur $(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_{x_0}}\times\mathscr{U})^{\mathrm{an}}$($\mathscr{U}$ ouvert affine contenant x_0) et on analytifie la section $(\kappa,x)\mapsto\langle\kappa,\xi_{x_0}(x)\rangle$ en une section du fibré $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_{x_0}}}(1))^{\mathrm{an}}\otimes\mathbb{K}^{\mathrm{an}}$ au-dessus de $(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_{x_0}}\times\mathscr{U})^{\mathrm{an}}=(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_{x_0}})^{\mathrm{an}}\times U$. On choisit une métrique semi-positive sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_{x_0}}}(1)$ induisant une métrique PL sur $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_{x_0}}}(1))^{\mathrm{an}}$ que l'on note $\|\cdot\|_{\mathrm{moy}}$ et pour laquelle la mesure de Monge–Ampère $(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_{x_0}}}(1),\|\cdot\|_{\mathrm{moy}}))^{\wedge^{m_{x_0}}}$ est une mesure atomique (par exemple la mesure de Dirac au point de Gauß lorsque $\|\cdot\|_{\mathrm{moy}}$ est la métrique induite par le choix de la métrique standard sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_{x_0}}}(1)$). On définit ainsi un courant sur X^{an} (en s'inspirant de l'approche (5.1)) de support le sous-ensemble de Zariski $\{x_0\}^{\mathrm{an}}$:

$$\lim_{\lambda_\nu\to 0}\Bigg(\lim_{\lambda_{\nu-1}\to 0}\Bigg(\cdots\Bigg(\lim_{\lambda_1\to 0}\int_{\big((\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_{x_0}})^{\mathrm{an}}\big)^\nu}$$
$$\Bigg(\bigwedge_{j=1}^{\nu}\big(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_{x_0}}}(1),\|\cdot\|_{\mathrm{moy}})\big)^{\wedge^{m_{x_0}}}(\kappa_j)\Bigg)\wedge\bigwedge_{j=1}^{\nu}\Bigg([1-\|\langle\kappa_j,\xi_{x_0}^{\mathrm{an}}\rangle\|_{\mathrm{moy}}^{\lambda_j}]$$
$$+\,\mathrm{d}'\mathrm{d}''\Bigg(\Bigg[\frac{\|\langle\kappa_j,\xi_{x_0}^{\mathrm{an}}\rangle\|_{\mathrm{moy}}^{\lambda_j}}{\lambda_j}\Bigg]\Bigg)\Bigg)\wedge T(x)\Bigg)\cdots\Bigg)\Bigg). \quad (5.2)$$

Lorsque l'on choisit comme métrique la métrique standard sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_{x_0}}}(1)$, le courant ainsi construit est indépendant du choix du système générateur ξ_{x_0} de l'idéal maximal : si l'on dispose de deux systèmes de générateurs ξ_{x_0} et $\tilde{\xi}_{x_0}$ pour l'idéal maximal $\mathfrak{M}_{x_0}$, on peut les compléter par des fonctions nulles pour en faire deux systèmes de générateurs de la même longueur $m_{x_0}+\tilde{m}_{x_0}$ et on compare les deux courants construits en utilisant la métrique PL induite par la métrique standard sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_{x_0}+\tilde{m}_{x_0}-1}}(1)$. Le courant ainsi construit correspond à un cycle analytique de dimension pure 0, de support $\{x_0\}^{\mathrm{an}}$ que l'on peut appeler cycle de Lelong du courant T sur le $\mathbb{K}$-espace analytique $\{x_0\}^{\mathrm{an}}$.

6. La formule de King dans le contexte non archimédien

Soit (comme dans la section 4) X une variété algébrique projective de dimension n définie sur un corps valué $\mathbb{K}$ et X^{an} son analytification au sens de Berkovich. On considère un fibré algébrique $E_X \to X$ de rang fini au-dessus de X et on équipe son analytifié $E_X^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ d'une métrique formelle PL [12, définition 6.2.9], que l'on supposera ici globalement psh approchable notée $\|\cdot\|_{E_X^{\mathrm{an}}}$ au-dessus de l'analytification X^{an}. Soit $s \in \mathcal{O}_X(E_X)$ une section globale de E_X dont on notera $s^{\mathrm{an}} : X^{\mathrm{an}} \to E_X^{\mathrm{an}}$ l'analytification.

Soit $\pi : \widehat{X} \longmapsto X$ l'éclatement normalisé de X via le faisceau cohérent d'idéaux attaché à la section globale $s \in \mathcal{O}_X(E_X)$ et $\pi^{\mathrm{an}} : \widehat{X}^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ son analytification.

Pour chaque $k = 0,\dots,n$, on note $(Y_{k,\iota_k})_{\iota_k}$ la liste des composantes exceptionnelles de l'éclatement normalisé $\pi : \widehat{X} \longmapsto X$ telles que $\mathrm{codim}_X\, \pi(Y_{k,\iota_k}) = k$ et $(Y_{k,\iota_k}^{\mathrm{an}} \hookrightarrow \widehat{X}^{\mathrm{an}})_{\iota_k}$ la liste de leurs analytifications au sens de Berkovich. On introduit également l'analytifié $\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}}$ induit au-dessus de $\widehat{X}^{\mathrm{an}}$ par le fibré $L_{\widehat{X}}$ correspondant au diviseur exceptionnel de l'éclatement π. Ce fibré $\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}}$ est équipé de la métrique $\|\cdot\|_{\tau^{\mathrm{an}}}$ induite par la métrique définie par $\|\sigma\| = \|\pi^*(s)\|_{\pi^*(E_X)}$ si $s = \sigma \otimes \tau$, où σ est une section de $L_{\widehat{X}}$ et τ une section ne s'annulant pas de $L_{\widehat{X}}^{-1} \otimes \pi^*(E)$.

Pour chaque paire d'entiers $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$, pour chaque indice ι_ℓ, on introduit le courant $T_{k,\ell,\iota_\ell} := \pi_*^{\mathrm{an}}([Y_{\ell,\iota_\ell}^{\mathrm{an}}] \wedge (-c_1(\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}}, \|\cdot\|_{\tau^{\mathrm{an}}}))^{\wedge^{k-1}})$. Le support de ce courant est inclus dans l'union des ensembles de Zariski $\pi^{\mathrm{an}}(Y_{\ell,\iota_\ell}^{\mathrm{an}})$, sous-ensemble analytique fermé de X^{an} de codimension ℓ.

Lorsque $\ell > k$ et que $\omega \in \mathscr{A}_c^{n-k,n-k}(X^{\mathrm{an}})$, on a $(j_{\iota_\ell}^{\mathrm{an}})^*\omega = 0$ si

$$j_{\iota_\ell}^{\mathrm{an}} : Y_{\ell,\iota_\ell}^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$$

désigne l'analytification du morphisme

$$Y_{\ell,\iota_\ell} \hookrightarrow \widehat{X} \xrightarrow{\pi} X$$

(pour des raisons de dimension, du fait que $\mathrm{codim}_X(\pi(Y_{\ell,\iota_\ell})) = \ell > k$). Il en résulte donc que, dès que $\ell > k$, on a $T_{k,\ell,\iota_\ell} = 0$ pour tout indice ι_ℓ.

On remarque aussi que si $\ell < k$, le cycle de Lelong du courant T_{k,ℓ,ι_ℓ} en $\{x_0\}^{\mathrm{an}}$ dans X^{an} est le cycle nul (pour tout $x_0 \in X$). On raisonne pour cela ainsi, après avoir dans un premier temps approché le $(1,1)$-courant $-c_1(\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}}, \|\cdot\|_{\tau^{\mathrm{an}}})$ par une suite de $(1,1)$-formes de Chern lisses en utilisant le fait que la métrique PL en jeu ici est supposée globalement psh approchable.

- On multiplie le courant T_{k,ℓ,ι_ℓ} par le « courant moyen » (on rappelle que le courant $(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_{x_0}}}(1), \|\cdot\|_{\mathrm{moy}}))^{\wedge^{m_{x_0}}}(\kappa_1)$ correspond à une mesure atomique)

$$\int_{\left(\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_{x_0}}\right)^{\mathrm{an}}} \left(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_{x_0}}}(1), \|\cdot\|_{\mathrm{moy}})\right)^{\wedge^{m_{x_0}}}(\kappa_1) \wedge \left([1 - \|\langle \kappa_1, \xi_{x_0}^{\mathrm{an}}\rangle\|_{\mathrm{moy}}^{\lambda_1}] + \mathrm{d}'\mathrm{d}''\left(\left[\frac{\|\langle \kappa_1, \xi_{x_0}^{\mathrm{an}}\rangle\|_{\mathrm{moy}}^{\lambda_1}}{\lambda_1}\right]\right)\right).$$

  En utilisant le fait que le support de toute forme $\varphi \in \mathscr{A}_c^{p,n-1}(Y_{\ell,\iota_\ell}^{\mathrm{an}})$ $(0 \leqslant \ell \leqslant n-1)$ ne saurait intersecter aucun sous-ensemble de Zariski propre de $Y_{\ell,\iota_\ell}^{\mathrm{an}}$ (on applique à nouveau [11, 5.1]), on voit que soit le courant obtenu ainsi est nul, soit l'analytifié de $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_{x_0}} \times \pi(Y_{\iota_\ell,\ell})$ dans $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_{x_0}} \times \mathscr{U}$ (on reprend ici les notations utilisées dans la section 5) est inclus dans $\{\langle \kappa_1, \xi_{x_0}^{\mathrm{an}}\rangle = 0\}$ pour un κ_1 générique (la moyennisation effectuée ici correspond à la prise de mesure de Dirac au point de Gauß).
- On réitère si nécessaire (lorsque $\ell < k-1$) cette opération $k - \ell - 1$ fois. Cette opération ne saurait se poursuivre sans que l'on ne rencontre lors du processus le courant nul.

Ainsi l'on peut écrire, pour tout $k \in [\mathrm{codim}_X\, s^{-1}(0), n]$,

$$\pi_*^{\mathrm{an}}\Big([\mathrm{div}(\sigma^{\mathrm{an}})] \wedge \big(-c_1(\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}}, \|\cdot\|_{\tau^{\mathrm{an}}})\big)^{\wedge^{k-1}}\Big)$$
$$= \sum_{\iota_k} \pi_*^{\mathrm{an}}\Big([Y_{k,\iota_k}^{\mathrm{an}}] \wedge \big(-c_1(\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}}, \|\cdot\|_{\tau^{\mathrm{an}}})\big)^{\wedge^{k-1}}\Big) + \mathscr{N}_k[s]\,, \quad (6.1)$$

de manière à ce que le sous-ensemble des points $\{x_0\}^{\mathrm{an}}$ de X^{an} où le (k,k)-courant $\mathscr{N}_k[s]$ a un cycle de Lelong non nul soit de codimension au moins égale à $k+1$.

On peut donc énoncer la version suivante du Théorème de King, dans le cadre cette fois non archimédien. Ce résultat constitue le pendant du Théorème 1.1 de [1]. Nous ne donnerons l'énoncé ici que dans le contexte algébrique, contexte où nous nous plaçons dans cet article. La terminologie « stable » et « mobile » fait ici référence à celle classiquement introduite dans le cadre de la théorie de l'intersection impropre en géométrie analytique complexe, voir par exemple l'introduction de [1] ainsi que [15] où cette terminologie est introduite.

Théorème 6.1. — *Soit X une variété algébrique projective de dimension n définie sur un corps valué $\mathbb{K}$ et X^{an} son analytification au sens de Berkovich. On considère un fibré algébrique $E_X \to X$ de rang fini au-dessus de X, l'on suppose que le fibré $E_X^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ est équipé d'une métrique formelle PL, notée $\|\cdot\|_{E_X^{\mathrm{an}}}$, au-dessus de l'analytification X^{an}. Soit $s \in \mathcal{O}_X(E_X)$ une section globale de E_X et $s^{\mathrm{an}} \in \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}(E_X^{\mathrm{an}})$ son analytification. Pour tout $k = 0, \ldots, n$, on note $(Y_{k,\iota_k})_{\iota_k}$ la liste des composantes exceptionnelles de l'éclatement normalisé $\pi : \widehat{X} \longmapsto X$ (le long du faisceau cohérent d'idéaux attaché à la section s) telles que* $\mathrm{codim}_X\, \pi(Y_{k,\iota_k}) = k$ *et $(Y_{k,\iota_k}^{\mathrm{an}} \hookrightarrow \widehat{X}^{\mathrm{an}})_{\iota_k}$ la liste de leurs analytifications au sens de Berkovich. La composante de bidegré (k,k) du courant M^s de Segre se scinde, pour $k = 1, \ldots, n$ en sa composante « stable » :*

$$(M_k^s)_{\mathrm{stable}} = \sum_{\iota_k} \pi_*^{\mathrm{an}}\Big([Y_{k,\iota_k}^{\mathrm{an}}] \wedge \big(-c_1(\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}}, \|\cdot\|_{\tau^{\mathrm{an}}})\big)^{\wedge^{k-1}}\Big)$$

et sa composante « mobile » :

$$(M_k^s)_{\mathrm{mobile}} = \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{\iota_\ell} \pi_*^{\mathrm{an}}\Big([Y_{\ell,\iota_\ell}^{\mathrm{an}}] \wedge \big(-c_1(\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}}, \|\cdot\|_{\tau^{\mathrm{an}}})\big)^{\wedge^{k-1}}\Big)$$

telle que, pour tout point fermé $x \in X$, le cycle de Lelong du courant $(M_k^s)_{\mathrm{mobile}}$ sur $\{x\}^{\mathrm{an}}$ soit nul.

Démonstration. — Supposons que E_X soit de rang $m+1$. Soit x^{an} un point de X^{an} et $U_{x^{\mathrm{an}}}$ un domaine analytique contenant x^{an} au-dessus duquel E^{an} admette un repère orthonormé $\{e_0, \ldots, e_m\}$. La section s^{an} s'exprime dans $U_{x^{\mathrm{an}}}$ sous la forme

$$s^{\mathrm{an}} = \sum_{\ell=0}^{m} s_\ell^{\mathrm{an}}\, e_j,$$

où les fonctions coordonnées s_ℓ^{an}, $\ell = 0, \ldots, m$, sont des fonctions analytiques et où

$$\|s\| = \max_{0 \leqslant \ell \leqslant m} |s_\ell^{\mathrm{an}}|.$$

Auquel cas, on peut considérer, au lieu de la factorisation $(\pi^{\mathrm{an}})^*(s) = \sigma^{\mathrm{an}} \otimes \tau^{\mathrm{an}}$ (où σ^{an} est une section du fibré $\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}}$), indépendamment chaque factorisation $(\pi^{\mathrm{an}})^*(s_\ell^{\mathrm{an}}) = \sigma^{\mathrm{an}} \otimes \tau_\ell^{\mathrm{an}}$, les $\tau_\ell^{\mathrm{an}} (\ell = 0, \ldots, m)$ étant des sections au-dessus de $(\pi^{\mathrm{an}})^{-1}(U_{x^{\mathrm{an}}})$ du fibré $(\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}})^{-1}$. Reprenant la construction des courants de Vogel telle qu'elle a été décrite dans la section 3, on observe que, pour tout $k = 1, \ldots, n$, pour tout ι_k, on peut construire à l'aide du Théorème 2.3 un $(k-1, k-1)$-courant $A_k \in \mathscr{D}_{n-(k-1),n-(k-1)}(\pi^{\mathrm{an}}(U_{x^{\mathrm{an}}}))$ de support inclus dans l'ensemble de Zariski $\pi^{\mathrm{an}}(Y_{k,\iota_k}^{\mathrm{an}})$ (de codimension k dans X^{an}, donc dans $U_{x^{\mathrm{an}}}$), solution de l'équation de Green « moyennisée »

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}'\mathrm{d}'' A_k \\
&= \lim_{\lambda_{k-1}\to 0} \Bigg(\cdots \Bigg(\lim_{\lambda_1 \to 0} \int_{\left((\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^m)^{\mathrm{an}}\right)^{k-1}} \Bigg(\bigwedge_{j=1}^{k-1} \left(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^m}(1), \|\cdot\|_{\mathrm{moy}})\right)^{\wedge^m} (\kappa_j) \Bigg) \\
&\qquad\qquad \wedge \bigwedge_{j=1}^{k-1} \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \left(\left[\frac{\|\langle \kappa_j, \tau^{\mathrm{an}} \rangle\|^{\lambda_j}_{(\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}})^{-1},\mathrm{moy}}}{\lambda_j} \right] \right) \wedge [\mathrm{Y}_{k,\iota_k}^{\mathrm{an}}] \\
&\qquad\qquad\qquad - [\mathrm{Y}_{k,\iota_k}^{\mathrm{an}}] \wedge \left(- c_1(\widehat{\mathscr{L}}^{\mathrm{an}}, \|\cdot\|_{\tau^{\mathrm{an}}})\right)^{\wedge^{k-1}} \Bigg)\Bigg)
\end{aligned}$$

Chaque courant $\pi_*^{\mathrm{an}}(A_{k,\iota_k}) \in \mathscr{D}_{n-(k-1),n-(k-1)}(U_{x^{\mathrm{an}}})$ est de support inclus dans l'ensemble de Zariski $\pi^{\mathrm{an}}(Y_{k,\iota_k}^{\mathrm{an}})$; un tel courant, de part sa construction même via le prolongement analytique, est donc nul pour des raisons de dimension et la composante stable $(M_k^s)_{\mathrm{stable}}$ de la composante M_k^s du courant de Segre M^s s'exprime donc aussi comme

$$\begin{aligned}
&(M^s_k)_{\text{stable}}\\
&= \pi^{\text{an}}_* \Bigg(\sum_{\iota_k} \Bigg(\lim_{\lambda_{k-1}\to 0} \Bigg(\cdots \Bigg(\lim_{\lambda_1 \to 0} \int_{\left((\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}})^{\text{an}}\right)^{k-1}} \\
&\qquad \left(\bigwedge_{j=1}^{k-1} \left(c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m(\mathbb{K})}(1), \|\cdot\|_{\text{moy}})\right)^{\wedge^m}(\kappa_j) \right) \\
&\qquad \wedge \bigwedge_{j=1}^{k-1} \mathrm{d}'\mathrm{d}'' \left(\left[\frac{\|\langle \kappa_j, \tau^{\text{an}}\rangle\|^{\lambda_j}_{(\widehat{\mathscr{L}}^{\text{an}})^{-1},\text{moy}}}{\lambda_j} \right] \right) \Bigg) \wedge [Y^{\text{an}}_{k,\iota_k}] \Bigg) \Bigg) \Bigg).
\end{aligned}$$

Lorsque x est un point fermé de X, le cycle de Lelong de M^s_k en x^{an} (qui est aussi celui de $(M^s_k)_{\text{stable}}$) s'interprète donc comme un courant de Vogel (au sens introduit dans la section 3), ce de manière analogue à ce qui se produit dans le cadre archimédien (voir les sections 7 et 8 de [1]). $\square$

Remerciements. L'auteur tient à remercier le rapporteur pour avoir lu extrêment attentivement les différentes versions de ce document et de lui avoir proposé de nombreuses remarques et suggestions qui ont grandement contribué à l'améliorer. L'auteur tient aussi à exprimer sa profonde gratitude à Alain Yger, Professeur à l'Institut de mathématiques de Bordeaux (Université de Bordeaux, France), pour son aide tant précieuse lors de la recherche. Il lui est également agréable de remercier Salomon Sambou, Professeur de l'Université Assane Seck de Ziguinchor (Sénégal), pour des discussions intéressantes.

Bibliographie

[1] M. Andersson, H. Samuelsson Kalm, E. Wulcan & A. Yger, « Segre numbers, a generalized King formula, and local intersections », *J. Reine Angew. Math.* **728** (2017), p. 105-136.

[2] F. Babaee, « Complex Tropical Currents : Extremality, and Approximation », `https://arxiv.org/abs/1403.7456`.

[3] F. Babaee & J. Huh, « A tropical approach to a generalized Hodge conjecture for positive currents », *Duke Math. J.* **166** (2017), n° 14, p. 2749-2813.

[4] C. A. Berenstein, R. Gay, A. Vidras & A. Yger, *Residue currents and Bezout identities*, Progress in Mathematics, vol. 114, Birkhäuser, 1993.

[5] C. A. Berenstein & A. Yger, « Green currents and analytic continuation », *J. Anal. Math.* **75** (1998), p. 1-50.

[6] V. G. Berkovich, *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, 1990.

[7] S. Boucksom, C. Favre & M. Jonsson, « Singular semipositive metrics in non-Archimedean geometry », *J. Algebr. Geom.* **25** (2016), n° 1, p. 77-139.
[8] J. I. Burgos Gil, P. Philippon & M. Sombra, *Arithmetic geometry of toric varieties. Metrics, measures and heights*, Astérisque, vol. 360, Société Mathématique de France, 2014.
[9] A. Chambert-Loir, « Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich », *J. Reine Angew. Math.* **595** (2006), p. 215-235.
[10] ———, « Heights and measures on analytic spaces. A survey of recent results, and some remarks », in *Motivic integration and its interactions with model theory and non-Archimedean geometry. Volume II*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 384, Cambridge University Press, 2011, p. 1-50.
[11] ———, « Differential forms and currents on Berkovich spaces », 2013, lecture at the Simons Symposium on Nonarchimedean and tropical geometry, held in St John.
[12] A. Chambert-Loir & A. Ducros, « Formes différentielles réelles et courants sur les espaces de Berkovich », `https://arxiv.org/abs/1204.6277v1`.
[13] B. Conrad, « Irreducible components of rigid spaces », *Ann. Inst. Fourier* **49** (1999), n° 2, p. 473-541.
[14] A. Ducros, « Variation de la dimension relative en géométrie analytique p-adique », *Compos. Math.* **143** (2007), n° 6, p. 1511-1532.
[15] T. Gaffney & R. Gassler, « Segre numbers and hypersurface singularities », *J. Algebr. Geom.* **8** (1999), n° 4, p. 695-736.
[16] W. Gubler, « Equidistribution over function fields », *Manuscr. Math.* **127** (2008), n° 4, p. 485-510.
[17] ———, « Forms and current on the analytification of an algebraic variety (after Chambert-Loir and Ducros) », in *Nonarchimedean and tropical geometry*, Simons Symposia, Springer, 2016, p. 1-30.
[18] W. Gubler & K. Künnemann, « A tropical approach to nonarchimedean Arakelov geometry », *Algebra Number Theory* **11** (2017), n° 1, p. 77-180.
[19] J.-i. Igusa, *An introduction to the theory of local zeta functions*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 14, American Mathematical Society ; International Press, 2000.
[20] X. Yuan, « Algebraic dynamics, canonical heights and Arakelov geometry », in *Fifth International Congress of Chinese Mathematicians. Part 2*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 51-2, American Mathematical Society, 2012, p. 893-929.