Annales de la faculté des sciences de Toulouse

P. Duhem

Étude historique sur la théorie de l'aimantation par influence

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 2 (1888), p. 1-40

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1888_1_2__1_0>

REVUE DE PHYSIQUE.

ÉTUDE HISTORIQUE

SUR LA

THÉORIE DE L'AIMANTATION PAR INFLUENCE,

PAR M. P. DUHEM,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille.

I. — Formation des équations d'équilibre. — Travaux de Poisson.

1. S'il est une partie de la Physique théorique dont l'insuffisance soit souvent et vivement déplorée par l'expérimentateur et le praticien, c'est assurément l'étude de l'aimantation par influence. Au fur et à mesure que se répand l'usage des machines dynamo-électriques, les phénomènes qui dépendent de l'aimantation par influence jouent dans l'industrie un rôle de plus en plus important. Cependant la théorie est à peu près impuissante à aborder l'étude de l'induction magnétique. C'est seulement dans le cas particulier de pièces de fer doux immobiles en présence d'aimants permanents que, grâce aux travaux de Poisson, l'Analyse mathématique peut pénétrer un peu avant dans l'étude des phénomènes; encore les principes sur lesquels repose cette analyse donnent-ils prise, pour le géomètre comme pour le physicien, à bien des doutes et à bien des difficultés.

Nous nous proposons, dans le présent travail, d'étudier l'histoire des idées théoriques qui ont été émises sur ce difficile sujet; nous chercherons surtout à préciser les principes mêmes qui, dans chaque théorie, servent à établir les équations de l'équilibre magnétique, en glissant plus rapidement sur les cas particuliers dans lesquels on est parvenu à intégrer ces équations. L'exposé complet de la marche suivie dans l'étude de l'aimantation par influence ne se trouve dans aucun Traité classique.

Nous examinerons, en premier lieu, la voie suivie par Poisson pour établir la théorie de l'aimantation du fer doux sous l'influence d'aimants permanents, les difficultés qui se rencontrent dans cette voie et les efforts par lesquels d'autres physiciens ont cherché à supprimer ces difficultés; en second lieu, nous indiquerons brièvement les conséquences qui ont été déduites de ces équations; enfin nous exposerons l'histoire des découvertes par lesquelles a été constituée la théorie de l'aimantation des cristaux.

2. « Avant les travaux de Coulomb sur le Magnétisme, dit Poisson (I, p. 250) [1], on supposait les deux fluides transportés dans l'acte de l'aimantation aux deux extrémités des aiguilles de boussole et accumulés à leurs pôles; tandis que, suivant cet illustre physicien, les fluides boréal et austral n'éprouvent que des déplacements infiniment petits et ne sortent pas de la molécule du corps aimanté à laquelle ils appartiennent. »

La notion d'*élément magnétique* ainsi introduite dans la Physique par Coulomb est la base sur laquelle repose la théorie donnée par Poisson de l'*induction magnétique du fer doux*. D'après Poisson, les fluides magnétiques se distribuent sur un morceau de fer doux soumis à des forces magnétiques déterminées suivant des lois semblables à celles qui régleraient la distribution, sous l'influence de forces électriques données, des fluides électriques sur un ensemble de corps conducteurs très petits, séparés les uns des autres par une substance isolante.

Voici, en effet, les hypothèses sur lesquelles Poisson fait reposer l'étude de l'induction magnétique :

« Considérons, dit-il (I, p. 262), un corps aimanté par influence, de forme et de dimensions quelconques, dans lequel la force *coercitive* soit nulle et que nous appellerons A, pour abréger.

» D'après ce qui précède, nous regarderons ce corps comme un assemblage d'*éléments magnétiques*, séparés les uns des autres par des intervalles inaccessibles au magnétisme, et voici, par rapport à ces éléments, les diverses suppositions résultant de la discussion dans laquelle nous venons d'entrer :

» 1° Les dimensions des éléments magnétiques, et celles des espaces qui les isolent, sont insensibles et pourront être traitées comme des infiniment petits relativement aux dimensions du corps A.

» 2° La matière de ce corps n'oppose aucun obstacle à la séparation des deux fluides *boréal* et *austral* dans l'intérieur des éléments magnétiques.

» 3° Les portions des deux fluides que l'aimantation sépare dans un élément quelconque sont toujours très petites relativement à la totalité du *fluide neutre* que cet élément renferme, et ce fluide neutre n'est jamais épuisé.

---

(1) Ce renvoi et les suivants se rapportent à l'Index bibliographique qui termine le présent travail.

» 4° Ces portions de fluide, ainsi séparées, se transportent à la surface de l'élément magnétique où elles forment une couche dont l'épaisseur, variable d'un point à un autre, est partout très petite et pourra aussi être considérée comme infiniment petite, même en la comparant aux dimensions de cet élément. »

Ces hypothèses conduisent Poisson à admettre, comme point de départ de la théorie de l'aimantation par influence, un principe entièrement semblable à celui qu'il avait pris comme point de départ de la théorie de la distribution électrique sur les corps conducteurs : *Le fluide magnétique doit se distribuer sur chaque élément, de telle façon que l'action exercée en un point de l'élément par le fluide décomposé que renferme cet élément contrebalance exactement l'action exercée au même point par tout le magnétisme extérieur à l'élément.* Toute la mise en équation du problème de l'induction magnétique consiste, une fois ce principe admis, à exprimer les deux actions dont il vient d'être question et à écrire qu'elles sont égales et directement opposées.

Avec Coulomb, Poisson admet que deux particules de fluide magnétique s'attirent ou se repoussent selon qu'elles sont de nom contraire ou de même nom ; que l'action qu'elles exercent l'une sur l'autre est proportionnelle au produit des quantités de fluide qui forment ces deux particules et en raison inverse du carré de la distance qui les sépare. Cette loi conduit aux conséquences suivantes :

Soient A, B, C les composantes, suivant trois axes de coordonnées rectangulaires, du *moment magnétique* d'un élément magnétique. Soit r la distance d'un point quelconque, pris à l'intérieur de cet élément, à un point M dont la distance à tous les points de l'élément est supposée très grande par rapport aux dimensions mêmes de l'élément ; soient x, y, z les coordonnées d'un point de l'élément ; soient ξ, η, ζ les coordonnées du point M ; soit enfin h une constante positive. Si nous posons

$$V = A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z},$$

les composantes de l'action exercée par l'élément considéré sur une quantité de fluide magnétique positif (fluide austral) placée au point M auront pour valeur

$$X = -h \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = -h \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = -h \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Considérons un volume v très petit, mais renfermant cependant un grand nombre d'éléments magnétiques. Posons pour ce petit volume

$$\mathcal{A} = \frac{1}{v} \Sigma A, \qquad \mathcal{B} = \frac{1}{v} \Sigma B, \qquad \mathcal{C} = \frac{1}{v} \Sigma C;$$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ seront en général des fonctions continues des coordonnées x, y, z du point autour duquel le petit volume v est supposé décrit, et elles sont indépendantes de la forme et de la grandeur de ce petit volume. Elles sont les composantes d'une grandeur géométrique dont la valeur

$$\mathfrak{M} = (\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2)^{\frac{1}{2}}$$

porte le nom d'*intensité de l'aimantation* au point (x, y, z) et dont la direction porte le nom de *direction de l'aimantation* au même point.

Moyennant ces définitions, il nous devient facile d'exprimer l'action d'un système d'aimants en un point M dont la distance à tout point de ces aimants peut être regardée comme extrêmement grande par rapport aux dimensions d'un élément magnétique. Si l'on pose, en effet,

$$(1) \qquad \mathcal{V} = \int\int\int \left(\mathcal{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz,$$

l'intégrale triple s'étendant au volume occupé par tous les aimants que l'on considère, les composantes de l'action dont il s'agit auront pour valeur

$$X = -h \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi}, \qquad Y = -h \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta}, \qquad Z = -h \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta}.$$

D'après cela, pour calculer l'action exercée en un point M, intérieur à un élément magnétique par tout le fluide magnétique répandu à l'extérieur de cet élément, Poisson partage l'espace en deux régions :

1° Un volume v, limité par une surface qui entoure l'élément de toutes parts et dont tous les points sont séparés de tous les points de l'élément par une distance très petite par rapport aux dimensions du corps, mais très grande par rapport aux dimensions d'un élément magnétique;

2° La partie de l'espace qui est extérieure à v.

Si l'on étend alors l'intégrale (1) à toute cette seconde région de l'espace et si l'on désigne par X_1, Y_1, Z_1 les composantes de l'action exercée au point M par tout le fluide répandu à l'intérieur du volume v en exceptant le fluide distribué sur l'élément auquel appartient le point M, l'action exercée au point M par tout le fluide extérieur à l'élément auquel appartient ce point aura pour composantes

$$X = -h \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} + X_1,$$

$$Y = -h \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta} + Y_1,$$

$$Z = -h \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta} + Z_1.$$

Si α, β, γ sont les composantes de l'action exercée au point M par le fluide magnétique répandu à la surface de l'élément dont ce point fait partie, les conditions de l'équilibre magnétique à l'intérieur de cet élément seront, d'après la manière de voir de Poisson,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} -h\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\xi}+X_1+\alpha&=0,\\ -h\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\eta}+Y_1+\beta&=0,\\ -h\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\zeta}+Z_1+\gamma&=0.\end{aligned}\right.$$

3. Jusqu'à présent la théorie de Poisson, tout en invoquant un certain nombre d'hypothèses, ne donne lieu à aucun reproche, car ces hypothèses sont toutes énoncées avec précision et les égalités proposées en sont des conséquences rigoureuses; mais, dans les transformations que Poisson fait ensuite subir aux équations (2), plusieurs difficultés graves vont se présenter sur lesquelles il est nécessaire d'appeler l'attention.

Poisson commence par établir que *les trois composantes désignées* par X_1, Y_1, Z_1 *sont égales à* 0 *pourvu seulement que le volume* v *admette un centre et que le point* M *soit ce centre*. Reproduisons intégralement ici le raisonnement par lequel il croit pouvoir établir cette proposition :

« Menons, dit-il (t. I, p. 272), par le point M une droite CMC′ dont les deux parties soient égales entre elles et d'une grandeur telle qu'on puisse les considérer à la fois comme infiniment petites, en les comparant aux dimensions de A, et comme infinies relativement aux dimensions des éléments magnétiques et des espaces qui les séparent les uns des autres. La proposition dont nous avons besoin consiste en ce que, si les deux extrémités C et C′ de cette droite sont toutes les deux hors d'un élément magnétique, la somme des particules de fluide libre devra être considérée comme égale sur ses deux parties MC et MC′, en n'y comprenant pas le fluide libre appartenant à l'élément magnétique dont le point M fait partie.

» En effet, tous les éléments traversés par la droite CMC′ seront sensiblement dans le même état magnétique, puisque la longueur de cette droite est insensible, eu égard aux dimensions de A; de plus, abstraction faite de l'élément dont le point M fait partie, la droite CM en allant de C vers M, et la droite MC′ en allant de M vers C′, rencontreront, en général, un même nombre de fois les surfaces des éléments magnétiques en pénétrant dans leur intérieur; elles rencontreront aussi ces surfaces le même nombre de fois en sortant des éléments. A la vérité, ces points de rencontre ne sont point semblablement situés sur toutes les surfaces; mais leur nombre étant très grand, et comme infini, les mêmes circonstances devront toutes se présenter des deux côtés du point M, et alors il n'y aura pas de raison de supposer la quantité de fluide libre plus grande d'un côté que de l'autre.

» Cela posé, appelons, pour abréger, v la petite portion de A dont nous voulons déterminer l'action sur le point M, et, pour cette détermination, décomposons v en une infinité de cônes infiniment aigus dont les sommets soient en ce point M. Comme l'autre partie de A, ... se compose d'éléments magnétiques qui sont tous complets, il sera nécessaire que v se compose de même d'éléments entiers; d'où il résulte que l'axe de chacun de ces cônes devra se terminer hors d'un élément magnétique.

» Soit ω l'aire infiniment petite de la section faite dans l'un de ces cônes, perpendiculairement à son axe et à l'unité de distance du sommet M; désignons par r la distance d'un point quelconque de cet axe au point M; l'élément de volume du cône, à cette distance r, sera $r^2 \omega\, dr$; et si l'on appelle μ la quantité de fluide libre qui répond au même point, l'action de cet élément sur le sommet, dirigée suivant l'axe du cône, sera exprimée par $\mu\omega\, dr$. L'action du cône entier aura la même direction, et pour valeur $\omega \int \mu\, dr$, l'intégrale étant prise dans toute la longueur de son axe et exprimant évidemment la quantité de fluide libre qui se trouve sur cette droite. L'action du cône dont le prolongement est celui-ci sera dirigée en sens contraire; ces deux forces opposées se détruiront en partie, et si l'on suppose, ce qui est permis, ces deux cônes d'égale longueur et de même ouverture ω, ces deux forces se réduiront, en vertu de la proposition précédente, à la seule action du fluide libre appartenant à la fois à l'un des cônes et à l'élément magnétique dont le point M fait partie. Il en sera de même à l'égard de tous les cônes considérés deux à deux, en sorte que l'action totale de v sur le point M sera réduite à celle de la couche magnétique qui occupe la surface même de cet élément. On voit aussi par ce raisonnement que, si le point M était situé hors d'un élément magnétique, l'action de v sur ce point se détruirait complètement, c'est-à-dire qu'une particule de fluide boréal ou austral qu'on y placerait y demeurerait en équilibre, si elle n'était soumise qu'à cette seule action. »

Il nous semble utile d'insister sur l'insuffisance du raisonnement que nous venons de rapporter. Il nous suffira d'ailleurs, pour faire ressortir cette insuffisance, de montrer l'inexactitude de l'une des conséquences auxquelles il conduit; c'est Poisson lui-même qui nous fournira cette conséquence :

« Ces conclusions, dit-il (t. I, p. 274), sont indépendantes de la forme de v; elles exigent seulement que cette portion de A ne contienne que des éléments magnétiques complets, et que les rayons menés du point M à sa surface soient tous très grands par rapport aux dimensions des éléments et néanmoins insensibles relativement aux dimensions de A; et, en effet, pourvu que ces conditions soient toujours remplies, on pourra augmenter ou diminuer v sans altérer sensiblement son action sur le point M; l'action des éléments entiers que l'on ajoutera ou que l'on retranchera de cette manière se calculera par la méthode du n° 1;

mais, vu la petite étendue dans laquelle ces éléments seront circonscrits, les intégrales triples qui s'y rapporteront pourront être négligées par rapport aux forces auxquelles doivent être ajoutées les composantes de l'action de v. »

Cette conséquence, avons-nous dit, est erronée. Nous croyons utile d'en montrer l'inexactitude, parce que cette même inexactitude se retrouve dans plusieurs des raisonnements de Poisson et constitue l'un des graves défauts analytiques que l'on peut reprocher à la théorie de l'illustre physicien.

Considérons un premier volume, tel que v, limité par une surface s ayant pour centre le point M; supposons qu'une autre surface s', ayant aussi pour centre le point M, limite un second volume v' renfermant v à son intérieur. D'après Poisson, l'action qu'exerce au point M l'ensemble formé par tous les éléments magnétiques du volume v, à l'exception de l'élément auquel appartient le point M, est égale à o. Il en est de même de l'action exercée au point M par l'ensemble que forment tous les éléments magnétiques du volume s', sauf l'élément auquel appartient le point M. Par conséquent, d'après Poisson, l'ensemble des éléments situés entre les deux surfaces s et s' n'exerce au point M aucune action. Or, tous ces éléments sont à une distance du point M très considérable par rapport à leurs dimensions. Si donc on pose

$$\mathfrak{V} = \int\int\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

l'intégrale triple s'étendant au volume compris entre les surfaces s et s', l'action exercée au point M par le fluide magnétique compris entre ces deux surfaces aura pour composantes

$$X = -h\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\xi}, \qquad Y = -h\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\eta}, \qquad Z = -h\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\zeta}.$$

Calculons l'une d'entre elles, la première par exemple.

Les égalités

$$\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial\xi} = -\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial\xi} = -\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y},$$

$$\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial\xi} = -\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}$$

permettent d'écrire

$$X = h\int\int\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2} + \mathcal{B}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\right)dx\,dy\,dz.$$

Une intégration par parties permet alors de transformer cette égalité. Soit R le rayon vecteur d'un point de la surface s, ce rayon vecteur étant compté à partir du point M ; soit, au même point, N la normale à la surface s, dirigée vers l'extérieur de la surface s ; soient, de même, R′ le rayon vecteur d'un point de la surface s' et N′ la normale en ce point dirigée vers l'extérieur de la surface s'. On aura

$$\begin{aligned} X = &-h \mathop{\mathbf{S}} [\mathcal{A}' \cos(N', x) + \mathcal{B}' \cos(N', y) + \mathcal{C}' \cos(N', z)] \frac{\cos(R', x)}{R'^2} ds' \\ &+ h \mathop{\mathbf{S}} [\mathcal{A} \cos(N, x) + \mathcal{B} \cos(N, y) + \mathcal{C} \cos(N, z)] \frac{\cos(R, x)}{R^2} ds \\ &- h \iiint \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} \right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dx\, dy\, dz. \end{aligned}$$

Si l'on désigne par $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{C}_0$ les valeurs de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, au point M, et par $\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial r}\right)$ la valeur que prend la dérivée de $\mathcal{A}$ suivant la direction du rayon vecteur R en un certain point de ce rayon vecteur dont la distance au point M est inférieure à R ; par $\left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial r}\right)$, $\left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial r}\right)$ des quantités analogues à $\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial r}\right)$, on aura, au point où le rayon R rencontre la surface s,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_0 + R \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial r} \right), \\ \mathcal{B} &= \mathcal{B}_0 + R \left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial r} \right), \\ \mathcal{C} &= \mathcal{C}_0 + R \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial r} \right), \end{aligned}$$

et semblablement au point où le rayon vecteur R′ rencontre la surface s',

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= \mathcal{A}_0 + R' \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial r} \right)', \\ \mathcal{B}' &= \mathcal{B}_0 + R' \left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial r} \right)', \\ \mathcal{C}' &= \mathcal{C}_0 + R' \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial r} \right)'. \end{aligned}$$

L'expression précédemment obtenue pour X peut donc s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} X = &-h \mathop{\mathbf{S}} [\mathcal{A}_0 \cos(N', x) + \mathcal{B}_0 \cos(N', y) + \mathcal{C}_0 \cos(N', z)] \frac{\cos(R', x)}{R'^2} ds' \\ &+ h \mathop{\mathbf{S}} [\mathcal{A}_0 \cos(N, x) + \mathcal{B}_0 \cos(N, y) + \mathcal{C}_0 \cos(N, z)] \frac{\cos(R, x)}{R^2} ds \\ &- h \mathop{\mathbf{S}} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial r} \right)' \cos(N', x) + \left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial r} \right)' \cos(N', y) + \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial r} \right)' \cos(N', z) \right] \frac{\cos(R', x)}{R'} ds' \\ &+ h \mathop{\mathbf{S}} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial r} \right) \cos(N, x) + \left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial r} \right) \cos(N, y) + \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial r} \right) \cos(N, z) \right] \frac{\cos(R, x)}{R} ds \\ &- h \frac{\partial}{\partial \xi} \iiint \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} \right) \frac{1}{r} dx\, dy\, dz. \end{aligned}$$

Le dernier terme est, à un facteur constant près, la composante suivant l'axe des x de l'action exercée au point M par une masse soumise aux conditions suivantes :

Cette masse agit conformément à la loi de Newton.

Elle est comprise entre les surfaces s et s'.

Elle a pour densité en chaque point $\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}\right)$.

Or on sait qu'une telle action est une quantité très petite du même ordre que R et R' si R et R' sont très petits.

Il est facile de voir également que le troisième et le quatrième terme du second membre sont des quantités très petites de l'ordre de R et de R'. Si donc, comme le fait Poisson, on néglige les quantités de cet ordre, on aura

$$\begin{aligned} X = -h\mathcal{A}_0 &\left[\mathrm{S} \frac{\cos(N', x)\cos(R', x)}{R'^2}\, ds' - \mathrm{S} \frac{\cos(N, x)\cos(R, x)}{R^2}\, ds \right] \\ -h\mathcal{B}_0 &\left[\mathrm{S} \frac{\cos(N', y)\cos(R', x)}{R'^2}\, ds' - \mathrm{S} \frac{\cos(N, y)\cos(R, x)}{R^2}\, ds \right] \\ -h\mathcal{C}_0 &\left[\mathrm{S} \frac{\cos(N', z)\cos(R', x)}{R'^2}\, ds' - \mathrm{S} \frac{\cos(N, z)\cos(R, x)}{R^2}\, ds \right]. \end{aligned}$$

Si les deux surfaces s et s' sont homothétiques et ont le point M pour centre d'homothétie, le second membre sera identiquement nul ; mais, si cette condition n'est pas réalisée, les coefficients de $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{C}_0$ seront en général des quantités finies, indépendantes de la grandeur des deux surfaces s et s' et dépendant seulement de leur forme et de leur orientation. On peut aisément démontrer de la manière suivante que ces quantités ne sont pas identiquement nulle pour des surfaces de forme différente. Imaginons, par exemple, que les surfaces s et s' soient deux cylindres droits, ayant leurs génératrices parallèles à Ox et pour centre le point O. Si l'on désigne par ω et ω' les angles solides sous lesquels du point O on voit les bases de ces deux cylindres, on aura

$$\mathrm{S} \frac{\cos(N', x)\cos(R', x)}{R'^2}\, ds' - \mathrm{S} \frac{\cos(N, x)\cos(R, x)}{R^2}\, ds' = 2(\omega' - \omega).$$

Si les deux cylindres ne sont pas homothétiques, cette quantité ne sera pas égale à 0, et X ne pourra être indépendant de $\mathcal{A}_0$, ni, partant, identiquement nul. La proposition énoncée par Poisson est donc manifestement inexacte.

4. Cette proposition joue cependant un rôle si capital dans la théorie de Poisson qu'il serait impossible de poursuivre l'exposé de cette théorie si l'on admettait pour un instant l'exactitude de la proposition en question. Nous admettrons donc que l'on ait

$$X_1 = 0, \qquad Y_1 = 0, \qquad Z_1 = 0;$$

les équations (2) deviendront alors

$$
(3) \quad \left\{
\begin{aligned}
&- h \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} + \alpha = 0, \\
&- h \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta} + \beta = 0, \\
&- h \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta} + \gamma = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Voyons maintenant comment Poisson évalue α, β, γ.

Chacune des trois quantités $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta}$ est, à l'intérieur de l'élément magnétique auquel appartient le point M, une fonction continue des coordonnées ξ, η, ζ de ce point; lors donc que le point M se déplace à l'intérieur de l'élément magnétique dont il fait partie, ces trois quantités ne subissent qu'une variation de l'ordre de grandeur de l'élément; α, β, γ, qui sont des quantités finies, ne varient donc d'un point à l'autre d'un élément magnétique que de quantités infiniment petites par rapport à leur propre valeur. En d'autres termes, le fluide magnétique doit se distribuer à l'intérieur de l'élément et à sa surface de telle façon que l'action exercée par ce fluide ait la même grandeur et la même direction en tous les points intérieurs à l'élément. Si l'on connaît la forme de l'élément magnétique, cette condition détermine la distribution qu'affecte le fluide magnétique en cet élément.

Poisson suppose que, pour les corps isotropes, l'élément magnétique a la forme d'une sphère; dans ce cas, il est aisé de trouver la distribution que doit affecter le fluide magnétique. Faisons glisser parallèlement à elle-même la surface qui limite l'élément magnétique de telle façon que son centre décrive un chemin infiniment petit dirigé comme la force constante que l'on veut obtenir et proportionnel à cette force. Entre l'ancienne et la nouvelle position de cette surface se trouvent deux espaces vides, l'un intérieur à l'élément magnétique, l'autre extérieur à cet élément. Imaginons que le fluide boréal remplisse uniformément un de ces espaces et que le fluide austral remplisse l'autre avec la même densité. Nous obtiendrons ainsi la distribution magnétique cherchée.

Dans ces conditions, si nous désignons par u le volume de l'élément magnétique et par $\mathrm{A}u$, $\mathrm{B}u$, $\mathrm{C}u$ les composantes suivant les axes coordonnés du moment magnétique de cet élément, les composantes de l'action exercée en un point intérieur à l'élément par le fluide magnétique distribué sur cet élément auront pour valeur

$$\alpha = -\frac{4}{3}\pi h \mathrm{A}, \qquad \beta = -\frac{4}{3}\pi h \mathrm{B}, \qquad \gamma = -\frac{4}{3}\pi h \mathrm{C}.$$

Considérons un volume v très petit par rapport au volume du corps aimanté, mais très grand par rapport au volume u des éléments magnétiques ; soit k la fraction de ce volume occupée par les éléments magnétiques ; soient $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{C}_0$ les composantes de l'aimantation au point $M(\xi, \eta, \zeta)$, intérieur à l'un des éléments de ce volume v ; nous aurons sensiblement

$$\mathcal{A}_0 = kA, \qquad \mathcal{B}_0 = kB, \qquad \mathcal{C}_0 = kC,$$

et par conséquent

$$\alpha = -\frac{4\pi h}{3k}\mathcal{A}_0, \qquad \beta = -\frac{4\pi h}{3k}\mathcal{B}_0, \qquad \gamma = -\frac{4\pi h}{3k}\mathcal{C}_0,$$

ce qui donne aux égalités (3) la forme

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} + \frac{4\pi}{3k}\mathcal{A}_0 = 0, \\ &\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta} + \frac{4\pi}{3k}\mathcal{B}_0 = 0, \\ &\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta} + \frac{4\pi}{3k}\mathcal{C}_0 = 0. \end{aligned}\right.$$

Telle est la forme que prennent les équations (3) lorsqu'on suppose que les éléments magnétiques ont la forme sphérique.

5. A ces équations (4), Poisson fait subir une dernière transformation dans laquelle nous allons rencontrer une nouvelle inexactitude.

Désignons par $\mathcal{U}$ l'intégrale

$$\int\int\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz,$$

étendue à tous les corps du système autres que A, et par $\mathcal{L}$ la même intégrale étendue à toute la partie du corps A située en dehors du volume v. Nous aurons

$$\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{L},$$

et les équations (4) deviendront

$$(4\ bis) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} + \frac{4\pi}{3k}\mathcal{A}_0 = 0, \\ &\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} + \frac{4\pi}{3k}\mathcal{B}_0 = 0, \\ &\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \zeta} + \frac{4\pi}{3k}\mathcal{C}_0 = 0. \end{aligned}\right.$$

Désignons par $\mathcal{W}$ l'intégrale

$$\int\int\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

étendue au corps A tout entier, *y compris le volume v*. D'un raisonnement où se retrouvent des inexactitudes analogues à celles que nous avons signalées au n° 3, Poisson (I, p. 296-298) croit pouvoir déduire les égalités suivantes :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \xi} &= \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \xi} - \frac{4\pi}{3}\mathcal{A}_0, \\ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta} &= \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \eta} - \frac{4\pi}{3}\mathcal{B}_0, \\ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \zeta} &= \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \zeta} - \frac{4\pi}{3}\mathcal{C}_0. \end{aligned}\right.$$

Si de telles expressions étaient inexactes, comme rien dans le second membre de chacune d'elles ne dépend de la forme du volume v, les trois quantités $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \zeta}$ seraient indépendantes de la forme de ce volume, ce que du reste Poisson énonce expressément (I, p. 298); et ce n'est pas là une simple inadvertance de sa part, ainsi que le suppose M. E. Mathieu (LXI, p. 156), mais une conséquence du raisonnement erroné que nous avons rapporté au n° 3.

D'ailleurs, on peut montrer directement l'inexactitude des égalités (5) en obtenant les expressions exactes qui leur doivent être substituées. Cette démonstration, pour être rigoureuse, suppose que l'on se soit assuré au préalable de l'existence de la fonction $\mathfrak{P}$, ce que l'on peut faire de la manière suivante ;

Entourons le point $M(\xi, \eta, \zeta)$ d'une surface fermée σ et démontrons que l'intégrale

$$\int\int\int \left(\mathcal{A}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz,$$

étendue à toute la partie du corps A extérieure à la surface σ, tend, lorsque cette surface σ se contracte d'une manière quelconque jusqu'à venir s'évanouir au point M, vers une limite indépendante de la série de formes par laquelle passe la surface σ. Cette limite sera alors la fonction $\mathfrak{P}$.

L'intégrale précédente étendue à l'espace compris entre la surface σ et la surface Σ du corps A peut se transformer au moyen d'une intégration par parties. N désignant la normale vers l'extérieur de la surface Σ et n la normale vers l'extérieur de la surface σ, elle devient

$$\begin{aligned} &\mathsf{S}\frac{1}{r}[\mathcal{A}\cos(N, x) + \mathcal{B}\cos(N, y) + \mathcal{C}\cos(N, z)]\,d\Sigma \\ -&\mathsf{S}\frac{1}{r}[\mathcal{A}\cos(n, x) + \mathcal{B}\cos(n, y) + \mathcal{C}\cos(n, y)]\,d\sigma \\ -&\int\int\int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz. \end{aligned}$$

La première intégrale est indépendante de la surface σ; la deuxième tend vers 0 lorsque la surface σ se contracte; la troisième tend vers une limite indépendante des formes par lesquelles passe la surface σ en se contractant, ainsi qu'il résulte de la théorie de la fonction potentielle.

L'existence de la fonction $\mathfrak{P}$ est ainsi démontrée, et de plus on voit que l'on a

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{P} = & \mathbf{S}\frac{1}{r}\left[\mathcal{A}\cos(N,x) + \mathcal{B}\cos(N,y) + \mathcal{C}\cos(N,z)\right]d\Sigma \\ & - \iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz, \end{aligned}\right.$$

la dernière intégrale s'étendant au corps A tout entier.

La théorie de la fonction pontentielle nous enseigne en outre que, sous certaines conditions bien connues imposées à la quantité

$$\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\xi} + \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial\eta} + \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial\zeta},$$

la fonction $\mathfrak{P}$ est continue et admet par rapport aux coordonnées ξ, η, ζ du point M des dérivées partielles du premier ordre. L'une de ces dérivées, la dérivée par rapport à ξ par exemple, a pour expression

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\xi} = & \mathbf{S}\left[\mathcal{A}\cos(N,x) + \mathcal{B}\cos(N,y) + \mathcal{C}\cos(N,z)\right]\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}d\Sigma \\ & - \iiint \left(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right.$$

Comparons cette quantité à $\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\xi}$, c'est-à-dire l'intégrale

$$\iiint\left(\mathcal{A}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial\xi} + \mathcal{B}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial\xi} + \mathcal{C}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial\xi}\right)dx\,dy\,dz,$$

étendue à tout l'espace compris entre la surface Σ et la surface S qui limite le volume v. Il est facile de voir que l'on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\xi} = & \mathbf{S}\left[\mathcal{A}\cos(N,x) + \mathcal{B}\cos(N,y) + \mathcal{C}\cos(N,z)\right]\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}d\Sigma \\ & - \mathbf{S}\left[\mathcal{A}\cos(n,x) + \mathcal{B}\cos(n,y) + \mathcal{C}\cos(n,z)\right]\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}dS \\ & - \iiint\left(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}dx\,dy\,dz, \end{aligned}$$

n désignant la normale à la surface S vers l'extérieur de cette surface

La dernière intégrale triple s'étend seulement au volume compris entre la surface S et la surface Σ; mais il est aisé de voir qu'en la supposant étendue au corps A tout entier on néglige des quantités du même ordre de grandeur que l'une des dimensions linéaires du volume v; au même degré d'approximation, d'après un calcul fait au n° 3, la seconde intégrale peut être remplacée par

$$\mathbf{S}\,[\mathcal{A}_0 \cos(n,x) + \mathcal{B}_0 \cos(n,y) + \mathcal{C}_0 \cos(n,z)]\,\frac{\cos(\mathrm{R},x)}{\mathrm{R}^2}\,d\mathrm{S}.$$

On aura donc

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \xi} = {} & \mathbf{S}\,[\mathcal{A} \cos(\mathrm{N},x) + \mathcal{B} \cos(\mathrm{N},y) + \mathcal{C} \cos(\mathrm{N},z)]\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\,d\Sigma \\ & - \mathcal{A}_0\,\mathbf{S}\,\frac{\cos(n,x)\cos(\mathrm{R},x)}{\mathrm{R}^2}\,d\mathrm{S} \\ & - \mathcal{B}_0\,\mathbf{S}\,\frac{\cos(n,y)\cos(\mathrm{R},x)}{\mathrm{R}^2}\,d\mathrm{S} \\ & - \mathcal{C}_0\,\mathbf{S}\,\frac{\cos(n,z)\cos(\mathrm{R},x)}{\mathrm{R}^2}\,d\mathrm{S} \\ & - \int\!\!\int\!\!\int \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}\right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\,dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right.$$

De cette égalité (8) résulte en premier lieu cette proposition, dont nous verrons plus tard l'importance :

Le symbole

$$\int\!\!\int\!\!\int \left(\mathcal{A}\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial \xi} + \mathcal{B}\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial \xi} + \mathcal{C}\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial \xi}\right) dx\,dy\,dz.$$

dans lequel l'intégration s'étend au corps A *tout entier, n'a aucun sens.*

En effet, au second membre de l'égalité (8), les limites vers lesquelles tendent les coefficients de $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{C}_0$, lorsque la surface S se contracte indéfiniment, dépendent de la série de formes par laquelle cette surface passe en se contractant.

En second lieu, la comparaison des égalités (7) et (8) donne

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \xi} & - \mathcal{A}_0\,\mathbf{S}\,\frac{\cos(n,x)\cos(\mathrm{R},x)}{\mathrm{R}^2}\,d\mathrm{S} \\ & - \mathcal{B}_0\,\mathbf{S}\,\frac{\cos(n,y)\cos(\mathrm{R},x)}{\mathrm{R}^2}\,d\mathrm{S} \\ & - \mathcal{C}_0\,\mathbf{S}\,\frac{\cos(n,z)\cos(\mathrm{R},x)}{\mathrm{R}^2}\,d\mathrm{S}. \end{aligned}\right.$$

Cette égalité (9) doit être substituée à la première des égalités (5); une substitution analogue doit affecter les deux autres égalités (5).

L'inexactitude des égalités (5) est ainsi mise directement en évidence. Néanmoins, pour continuer l'exposé de la théorie de Poisson, il nous faut conserver ces égalités; car c'est en les comparant aux égalités (4 *bis*) que nous obtiendrons les égalités

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi\,\frac{1-k}{k}\,\mathcal{A}_0 &= -\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\xi},\\ \frac{4}{3}\pi\,\frac{1-k}{k}\,\mathcal{B}_0 &= -\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\eta},\\ \frac{4}{3}\pi\,\frac{1-k}{k}\,\mathcal{C}_0 &= -\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\zeta},\end{aligned}\right.$$

qui représentent, dans la théorie de Poisson, les conditions fondamentales de l'équilibre magnétique.

6. Supposons qu'une substance magnétique, possédant un coefficient d'aimantation k de valeur connue, soit placée dans un champ magnétique déterminé, c'est-à-dire dans un espace où la fonction $\mathcal{W}$ est une fonction connue de ξ, η, ζ. Dans ces conditions, grâce aux équations (10), il suffira de connaître l'expression de $\mathcal{W}$ en fonction de ξ, η, ζ, pour connaître en chaque point du corps considéré la grandeur et la direction de l'aimantation. C'est donc à la détermination de la fonction $\mathcal{W}$ qu'est ramené le problème de l'aimantation par influence.

Nous avons vu que l'on pouvait écrire

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{W} = {} & \mathbf{S}\,\frac{1}{r}\,[\mathcal{A}\cos(N,x)+\mathcal{B}\cos(N,y)+\mathcal{C}\cos(N,z)]\,d\Sigma\\ & -\iiint\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.\end{aligned}\right.$$

De cette expression de la fonction $\mathcal{W}$, la théorie de la fonction potentielle permet de déduire plusieurs conséquences :

1° Si nous posons, suivant l'usage,

$$\Delta\mathcal{W} = \frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\mathcal{W}}{\partial\zeta^2},$$

en tout point extérieur au corps A, nous avons

$$(11)\qquad \Delta\mathcal{W} = 0.$$

2° Si en tout point du corps A, la quantité

$$\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}$$

est continue et admet des dérivées partielles du premier ordre par rapport à x,

y, z, $\mathfrak{W}$ admet en tout point du corps A des dérivées partielles du deuxième ordre par rapport à ξ, η, ζ, et l'on a

$$\Delta\mathfrak{W} = -4\pi\left(\frac{\partial\mathcal{A}_0}{\partial\xi} + \frac{\partial\mathcal{B}_0}{\partial\eta} + \frac{\partial\mathcal{C}_0}{\partial\zeta}\right).$$

Différentions la première des égalités (10) par rapport à ξ, la seconde par rapport à η, la troisième par rapport à ζ, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons que l'on a en tout point intérieur au corps A

$$\Delta(\mathcal{V} + \mathfrak{W}) = -\frac{4}{3}\pi\ \frac{1-k}{k}\left(\frac{\partial\mathcal{A}_0}{\partial\xi} + \frac{\partial\mathcal{B}_0}{\partial\eta} + \frac{\partial\mathcal{C}_0}{\partial\zeta}\right).$$

Si l'on observe maintenant qu'en tout point du corps A on a

$$\Delta\mathcal{V} = 0,$$

on voit aisément, par la comparaison des deux égalités précédentes, que l'on a aussi en tout point du corps A

$$\Delta\mathfrak{W} = 0. \tag{11 bis}$$

3° La fonction $\mathfrak{W}$ varie d'une manière continue lorsque le point M (ξ, η, ζ) traverse la surface Σ qui limite le corps A; mais ses dérivées partielles du premier ordre subissent une discontinuité, en sorte que l'on a, moyennant l'emploi d'une notation bien connue,

$$\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial N_i} + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial N_e} = -4\pi[\mathcal{A}_0\cos(N_e, x) + \mathcal{B}_0\cos(N_e, y) + \mathcal{C}_0\cos(N_e, z)],$$

ce qui, en remplaçant $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{C}_0$ par leurs valeurs déduites des équations (10), donne

$$\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial N_e} + \frac{1+2k}{1-k}\,\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial N_i} + \frac{3k}{1-k}\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_i} = 0, \tag{12}$$

relation dans laquelle $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_i}$ a des valeurs connues, d'après la connaissance que l'on a du champ magnétique et de la forme du corps soumis à l'aimantation.

Ainsi donc la fonction $\mathfrak{W}$ est finie, continue et uniforme dans tout l'espace; elle est égale à 0 à l'infini; ses dérivées partielles du premier ordre sont finies, continues et uniformes dans tout l'espace, sauf sur la surface Σ qui limite le corps soumis à l'aimantation : elles sont égales à 0 à l'infini; à la traversée de la surface Σ, elles vérifient la condition (12); dans tout l'espace, sauf sur la surface Σ, les dérivées partielles du second ordre de la fonction $\mathfrak{W}$ existent et vérifient l'équation de Laplace.

Telles sont les conditions obtenues par Poisson pour déterminer la fonction $\mathfrak{V}$ et, par conséquent, pour résoudre le problème de l'aimantation par influence.

L'établissement de ces conditions donne lieu à une nouvelle objection.

En effet, la déduction des égalités (11 *bis*) et (12) suppose l'emploi des égalités (10); d'autre part, les raisonnements employés par Poisson pour parvenir aux égalités (10) supposent qu'autour du point (ξ, η, ζ) on puisse tracer un volume v limité par une surface σ dont tous les points soient à une distance du point (ξ, η, ζ) très grande par rapport aux dimensions d'un élément magnétique et que, de plus, à l'intérieur de ce volume v, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ varient d'une manière continue. Cette condition n'est plus remplie lorsque le point $M(\xi, \eta, \zeta)$ est très voisin de la surface Σ, ainsi que Poisson le remarque expressément : « Mais la condition, dit-il (1, p. 274), relative à la distance de M aux points extrêmes de v ne sera pas remplie tout autour du point M, quand il sera situé à la surface de A ou extrêmement près de cette surface. L'action totale de ce corps sur les points très voisins de sa superficie dépendrait, en chaque point, de la disposition particulière des éléments magnétiques autour de ce point; c'est pourquoi nous ne chercherons pas à la déterminer; et il nous suffira de prévenir que tout ce qui va suivre n'est applicable qu'aux points de A, dont la distance à sa surface est très grande par rapport aux dimensions des éléments, ce qui aura lieu, du reste, dès que ces points seront situés à une profondeur appréciable. »

Il résulte de là que les égalités (10) ne sont point démontrées pour les points très voisins de la surface Σ; qu'il en est de même de l'égalité (11 *bis*); quant à l'égalité (12), comme pour l'établir on a fait usage des égalités (10) en les appliquant à des points infiniment voisins de la surface Σ, on doit la regarder comme entièrement douteuse.

7. Telle est la voie suivie par Poisson pour parvenir à mettre en équation le problème de l'aimantation par influence; cette voie, nous l'avons vue, est hérissée de difficultés analytiques qui suffiraient pour rendre extrêmement douteux les résultats obtenus. Mais, de plus, à ces critiques d'ordre analytique auxquelles prête la théorie de Poisson, viennent se joindre des objections fournies par l'expérience. C'est la détermination expérimentale de la valeur du coefficient k pour différentes substances qui conduit à des conséquences incompatibles avec la théorie de Poisson.

Imaginons que l'on ait intégré les équations du problème de l'aimantation par influence pour un corps homogène de forme déterminée placé dans un champ magnétique déterminé. Le résultat de cette intégration sera d'exprimer la fonction $\mathfrak{V}$ au moyen des coordonnées ξ, η, ζ et du coefficient k; ce résultat peut donc s'exprimer par l'égalité

$$\mathfrak{V} = f(\xi, \eta, \zeta, k).$$

f étant une fonction de forme connue. Dès lors, si, par une méthode expérimentale quelconque (il en existe un grand nombre que nous n'avons point l'intention d'étudier), on détermine la valeur de $\mathfrak{V}$ ou de l'une de ses dérivées partielles en un point déterminé de l'espace, on obtiendra une équation de laquelle on pourra tirer la valeur de k pour le corps mis en expérience.

Un grand nombre de déterminations de ce genre ont été effectuées; elles conduisent au résultat général suivant :

Le coefficient k, très petit pour les corps faiblement magnétiques, est très voisin de l'unité pour le fer doux et supérieur à l'unité pour les corps diamagnétiques, tels que le bismuth.

Ce résultat est-il compatible avec la théorie de Poisson?

Dans la théorie de Poisson, kv est le volume occupé par les éléments magnétiques sphériques que renferme un volume v du corps aimanté. Soient R le rayon des éléments magnétiques et $2a$ la distance de leurs centres. Le rapport k a alors pour valeur

$$k = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{8a^3} = \frac{\pi}{6}\left(\frac{R}{a}\right)^3;$$

R étant au plus égal à a, on voit que k doit être compris entre o et $\frac{\pi}{6}$, conséquence incompatible avec les résultats de l'expérience.

Il y a plus; lorsque, pour un même corps, on répète la détermination de k avec des champs magnétiques différents, on trouve pour k des valeurs différentes, tandis que, dans la manière de voir de Poisson, on devrait obtenir une valeur constante.

On voit, par conséquent, combien la théorie imaginée par Poisson pour soumettre au calcul le problème de l'aimantation par influence, tout en constituant une importante et remarquable tentative, est encore éloignée du degré de rigueur analytique et d'accord avec l'expérience qu'il est permis d'exiger en une question offrant un si grand intérêt au double point de vue de la Physique générale et de la pratique.

§ II. — Formation des équations d'équilibre. — Travaux des successeurs de Poisson.

8. Les difficultés et inexactitudes que présente la théorie de l'aimantation par influence, imaginée par Poisson, ont amené plusieurs physiciens à modifier et à transformer la voie suivie par l'illustre géomètre pour parvenir à l'établissement des équations de l'équilibre magnétique. Nous allons examiner rapidement les tentatives qui leur sont dues.

Parmi les travaux que nous aurons à mentionner, le dernier en date est celui de M. É. Mathieu (LXI); c'est cependant par l'analyse de ce travail que nous commencerons notre exposé, parce que les idées de M. É. Mathieu sont, de toutes celles qui ont été émises au sujet de l'aimantation par influence, les plus voisines de celles de Poisson.

M. É. Mathieu commence par exposer la théorie même de Poisson; mais, dans cet exposé, il évite les inexactitudes commises par Poisson. Si, dans les raisonnements donnés par Poisson pour parvenir aux équations (10), on suppose que le volume v ait non pas une forme arbitraire, mais la forme d'une sphère concentrique à l'élément magnétique, et si l'on suppose, de plus, le point $M(\xi, \eta, \zeta)$ placé au centre commun de l'élément magnétique et du volume v, toutes les objections que nous avons signalées disparaissent et les équations (10) se trouvent régulièrement déduites des hypothèses admises par Poisson.

Mais les équations (10) ainsi établies continuent à n'être valables que jusqu'à une distance de la surface du corps aimanté très petite par rapport aux dimensions de ce corps, mais très grande par rapport aux dimensions des éléments magnétiques, en sorte que la réduction du problème aux équations différentielles et l'établissement de la condition relative à la surface du corps aimanté donnent prise aux mêmes doutes que dans la théorie de Poisson.

D'autre part, l'exposé de M. É. Mathieu conduisant aux mêmes équations différentielles que la théorie de Poisson et donnant au coefficient k la même signification, les difficultés provenant de la valeur trouvée expérimentalement pour ce coefficient dans le cas du fer doux et des corps diamagnétiques continuent de subsister.

Ce sont ces dernières objections que M. É. Mathieu s'est proposé de faire disparaître en modifiant les hypothèses fondamentales sur lesquelles repose la théorie de Poisson.

Pour que le coefficient k pût devenir aussi voisin de l'unité que l'on voudrait, M. É. Mathieu a admis pour les éléments magnétiques d'un corps isotrope une forme différente de celle qu'avait imaginée Poisson. Il a supposé que les éléments magnétiques étaient des parallélépipèdes curvilignes rectangles, dont la hauteur, dirigée comme l'aimantation en un point de l'élément, était très faible par rapport aux deux autres dimensions du parallélépipède. Cette hypothèse une fois faite, on peut reprendre l'exposé de la théorie de Poisson, à la condition de supposer que le point $M(\xi, \eta, \zeta)$ est le centre de l'élément magnétique, et que le volume v a la forme d'un parallélépipède homothétique de l'élément magnétique par rapport au point M. En conservant toujours au coefficient k la signification qu'il a dans la théorie de Poisson, on obtient alors, non plus les équations (10), mais les équations de même forme

$$(13)\quad \begin{cases} 4\pi \dfrac{1-k}{k}\,\mathcal{A}_0 = \dfrac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{P})}{\partial\xi}, \\ 4\pi \dfrac{1-k}{k}\,\mathcal{B}_0 = \dfrac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{P})}{\partial\eta}, \\ 4\pi \dfrac{1-k}{k}\,\mathcal{C}_0 = \dfrac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{P})}{\partial\zeta}. \end{cases}$$

D'après la forme choisie pour les éléments magnétiques et pour le volume ν, le rapport k, sans surpasser l'unité, peut en être aussi voisin que l'on veut.

Cette modification apportée à la théorie de Poisson ne suffirait pas, toutefois, à rendre compte des propriétés des corps diamagnétiques. Pour expliquer ces propriétés, M. É. Mathieu admet une hypothèse imaginée tout d'abord par M. Ed. Becquerel et développée par M. Edlung. D'après cette hypothèse, les corps diamagnétiques sont simplement des corps magnétiques plongés dans un milieu plus fortement magnétique. Soumettant cette hypothèse au calcul, M. É. Mathieu trouve qu'un corps dont le coefficient d'aimantation est k_1, plongé dans un milieu dont le coefficient d'aimantation est k_2, se comporte comme un corps de même forme, plongé dans un milieu magnétique, mais pour lequel on aurait

$$k = \frac{k_1 - k_2}{1 - k_2}.$$

D'après M. É. Mathieu, le corps sera magnétique si l'on a $k_1 > k_2$ et diamagnétique au contraire si l'on a $k_2 > k_1$; on voit, en effet, que l'on a alors

$$\frac{1-k}{k} = \frac{1-k_1}{k_1 - k_2},$$

et, k_1 étant forcément compris entre o et 1, cette quantité a le signe de $k_1 - k_2$.

Tels sont les principes fondamentaux de la théorie de l'aimantation par influence développée par M. É. Mathieu; comme la théorie de Poisson, elle donne prise à la critique du géomètre dans la réduction du problème de l'aimantation aux équations différentielles et aux objections de l'expérimentateur en ce qu'elle laisse au coefficient k une valeur constante; mais elle fait disparaître quelques-unes des erreurs qui déparaient la théorie de Poisson.

9. En Angleterre, Green (IV) n'a donné que peu de développements à la théorie de l'aimantation par influence; il n'a guère fait qu'exposer la théorie de Poisson; Sir W. Thomson (XIX et XLVII) s'est à plusieurs reprises occupé de cette question; quant à Maxwell (LX, p. 51 et suiv.), il s'est contenté de re-

produire la théorie de Sir W. Thomson en l'abrégeant. C'est donc surtout l'étude des travaux de Sir W. Thomson qui importe pour la connaissance des idées des physiciens anglais sur cette question.

Sir W. Thomson repousse toute hypothèse sur les éléments magnétiques et sur les fluides magnétiques. Un aimant est alors défini simplement par la grandeur et la direction de l'aimantation en chaque point. Pour parvenir aux équations de l'aimantation par influence, Sir W. Thomson admet comme hypothèse fondamentale la proposition suivante, laquelle ne se présente dans la théorie de Poisson que comme une conséquence des hypothèses faites sur les éléments magnétiques :

En tout point (ξ, η, ζ) *d'un corps isotrope soumis à l'aimantation, les composantes* $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{C}_0$ *de l'aimantation sont proportionnelles respectivement aux composantes* X, Y, Z *de l'action magnétique exercée au point* (ξ, η, ζ) *par tous les aimants extérieurs à une sphère de rayon infiniment petit entourant le point* (ξ, η, ζ).

Cette proposition s'exprime par les égalités

$$\mathcal{A}_0 = pX, \qquad \mathcal{B}_0 = pY, \qquad \mathcal{C}_0 = pZ, \tag{14}$$

dans lesquelles p est une constante quelconque.

Les égalités, faciles à obtenir,

$$X = -h\frac{\partial(\mathcal{V} + \mathcal{W})}{\partial\xi} + \frac{4}{3}\pi h \mathcal{A}_0,$$

$$Y = -h\frac{\partial(\mathcal{V} + \mathcal{W})}{\partial\eta} + \frac{4}{3}\pi h \mathcal{B}_0,$$

$$Z = -h\frac{\partial(\mathcal{V} + \mathcal{W})}{\partial\zeta} + \frac{4}{3}\pi h \mathcal{C}_0,$$

donnent alors

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A}_0\left(1 - \frac{4}{3}\pi p h\right) &= -h\frac{\partial(\mathcal{V} + \mathcal{W})}{\partial\xi}, \\ \mathcal{B}_0\left(1 - \frac{4}{3}\pi p h\right) &= -h\frac{\partial(\mathcal{V} + \mathcal{W})}{\partial\eta}, \\ \mathcal{C}_0\left(1 - \frac{4}{3}\pi p h\right) &= -h\frac{\partial(\mathcal{V} + \mathcal{W})}{\partial\zeta}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Ces équations remplacent les équations (10) de la théorie de Poisson ; mais il est aisé de voir qu'elles évitent les principales objections auxquelles cette théorie pouvait donner lieu.

Tout d'abord, l'établissement de ces équations (15) n'est point sujet aux difficultés analytiques que soulevait, dans la théorie de Poisson, l'établissement des équations (10) ; en second lieu, ces équations (15) demeurent exactes dans la théorie de Sir W. Thomson, même pour les points infiniment voisins de la surface du corps aimanté, en sorte que la déduction des équations différentielles et de la condition relative à la surface du corps aimanté se font sans donner prise à aucune critique; enfin, grâce à la grande indétermination laissée à la constante p, les propriétés du fer doux ou des corps diamagnétiques ne sont plus en contradiction avec la théorie.

Une seule objection demeure: c'est celle qui provient de la variation que subit, d'après les résultats de l'expérience, la valeur du coefficient k ou, ce qui revient au même, de la quantité p, tandis que la constance de p est admise par Sir W. Thomson comme un principe, qu'il nomme *Superposition des inductions magnétiques* et qu'il énonce ainsi (XIX et LVIII, p. 389 et suiv.).

« Différents aimants placés simultanément au voisinage d'un corps susceptible d'être aimanté par influence (ferromagnétique ou diamagnétique) y déterminent une distribution magnétique identique à celle que l'on obtiendrait en composant les distributions magnétiques déterminées par chacun des aimants, placé au même endroit, les autres aimants étant enlevés. »

Au sujet de ce principe, Sir W. Thomson ajoute :

« .... La seconde proposition, celle qui énonce l'indépendance mutuelle des inductions magnétiques superposées, revient à énoncer ce principe, que, lorsqu'on fait varier dans un certain rapport l'action exercée en un certain point d'un champ magnétique, l'aimantation de la substance qui se trouve en ce point varie dans le même rapport. Ce n'est évidemment point un principe entièrement général. Il n'est applicable ni à l'acier, ni aux substances qui forment les aimants naturels, ni, plus généralement, aux substances qui possèdent à un degré quelconque le pouvoir de résister à l'aimantation et à la désaimantation, pouvoir nommé par Poisson *force coercitive,* pouvoir en vertu duquel ces substances sont susceptibles de retenir l'aimantation d'une manière permanente. Il n'est pas non plus applicable au fer doux, comme le démontrent les expériences de Joule et les expériences plus récentes de Gartenhauser et Müller, si ce n'est comme loi d'aimantation approchée, lorsque les forces qui produisent l'aimantation ne surpassent pas une certaine limite. Mais il est extrêmement probable que ce principe constitue une loi vraiment approximative, sinon rigoureuse, pour l'aimantation de toute substance homogène de faible capacité inductive et dénuée de force coercitive (ce qui paraît être le cas de toutes les substances ferromagnétiques ou diamagnétiques qui ne renferment point de fer ou de nickel, ou qui n'en renferment qu'une petite quantité à l'état de combinaison chimique). Pour fonder une théorie complète de l'induction magnétique, il serait nécessaire de faire l'étude expérimentale des lois auxquelles est soumise, dans les diverses substances, l'action de la force coercitive et des variations que subit, avec la valeur actuelle de l'aimantation, la capacité inductive du fer doux et peut-être des autres substances. »

Dans un cours sur la théorie du magnétisme professé en 1857 et publié depuis par son fils M. C. Neumann, M. F.-E. Neumann (LIII) s'exprime dans des termes analogues au sujet de la variation que, dans le fer doux, le coefficient p subit avec l'intensité de l'aimantation; mais, pas plus que Sir W. Thomson, M. F.-E. Neumann n'essaye d'ébaucher une théorie de l'aimantation qui tienne compte de cette variation.

10. C'est à G. Kirchhoff (XXVIII) que l'on doit d'avoir marqué la voie à une semblable théorie.

Dans une Note ajoutée à un Mémoire dont le but principal était d'intégrer pour un cylindre indéfini les équations de l'aimantation par influence données par Poisson, G. Kirchhoff a introduit l'hypothèse que les équations (14) devaient être remplacées par les suivantes

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= X f(\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}),\\ \mathcal{B}_0 &= Y f(\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}),\\ \mathcal{C}_0 &= Z f(\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}),\end{aligned}\right.$$

le symbole f désignant une fonction qui dépend de la nature de la substance soumise à l'aimantation.

De ces équations on déduit facilement la nouvelle équation

$$\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2=(X^2+Y^2+Z^2)f^2(\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}),$$

qui, résolue par rapport à $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, nous permet d'écrire

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=g(\sqrt{\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2}).$$

Si nous posons alors

$$\frac{1}{f[g(\zeta)]}=f_1(\zeta),$$

les égalités (16) deviendront

$$\begin{aligned} X &= \mathcal{A}_0 f_1(\sqrt{\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2}),\\ Y &= \mathcal{B}_0 f_1(\sqrt{\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2}),\\ Z &= \mathcal{C}_0 f_1(\sqrt{\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2}).\end{aligned}$$

Ces égalités nous donneront alors

$$(16\,bis)\quad \begin{cases} h\,\dfrac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial\xi} = -\mathcal{A}_0\left[f_1\left(\sqrt{\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2}\right)-\dfrac{4}{3}\pi h\right], \\ h\,\dfrac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial\eta} = -\mathcal{B}_0\left[f_1\left(\sqrt{\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2}\right)-\dfrac{4}{3}\pi h\right], \\ h\,\dfrac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial\zeta} = -\mathcal{C}_0\left[f_1\left(\sqrt{\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2}\right)-\dfrac{4}{3}\pi h\right]. \end{cases}$$

De ces équations on déduit

$$h^2\left\{\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial\xi}\right]^2+\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial\eta}\right]^2+\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial\zeta}\right]^2\right\}$$
$$=(\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2)\left[f_1\left(\sqrt{\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2}\right)-\frac{4}{3}\pi h\right]^2.$$

Cette dernière équation, résolue par rapport à $\sqrt{\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2}$, peut s'écrire

$$\sqrt{\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2}=g_1\left\{\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial\xi}\right]^2+\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial\eta}\right]^2+\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial\zeta}\right]^2\right\}.$$

Si l'on pose alors

$$\frac{h}{f_1\left[g_1(\zeta)-\dfrac{4}{3}\pi h\right]}=\mathrm{F}(\zeta),$$

les équations ($16\,bis$) deviendront

$$(17)\quad \begin{cases} \mathcal{A}_0=-\dfrac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial\xi}\,\mathrm{F}\left\{\sqrt{\left[\dfrac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial\xi}\right]^2+\left[\dfrac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial\eta}\right]^2+\left[\dfrac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial\zeta}\right]^2}\right\}, \\ \mathcal{B}_0=-\dfrac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial\eta}\,\mathrm{F}\left\{\sqrt{\left[\dfrac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial\xi}\right]^2+\left[\dfrac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial\eta}\right]^2+\left[\dfrac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial\zeta}\right]^2}\right\}, \\ \mathcal{C}_0=-\dfrac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial\zeta}\,\mathrm{F}\left\{\sqrt{\left[\dfrac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial\xi}\right]^2+\left[\dfrac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial\eta}\right]^2+\left[\dfrac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{V})}{\partial\zeta}\right]^2}\right\}. \end{cases}$$

Telles sont les équations qui, d'après la théorie de G. Kirchhoff, doivent être substituées aux équations (15), si l'on veut obtenir une théorie complète de l'aimantation des substances dénuées de force coercitive. La réduction de ces équations (17) en équations différentielles se fait de la même manière que la réduction en équations différentielles des conditions d'équilibre données par la théorie de Poisson; mais l'intégration de ces équations différentielles suppose la détermination expérimentale, pour chaque substance, de la forme de la fonction F. A cet égard, Kirchhoff observe que, si, partant de la théorie de Poisson et de Sir W. Thomson, on cherche à déterminer la valeur de p par l'étude des actions qu'exerce à l'extérieur un ellipsoïde placé dans un champ magnétique uniforme, on obtient pour

$$\frac{h}{1-\frac{4}{3}\pi p h}$$

une valeur variable qui représente précisément

$$F\left\{\sqrt{\left[\frac{\partial(\mathfrak{V}+\mathfrak{P})}{\partial\xi}\right]^2+\left[\frac{\partial(\mathfrak{V}+\mathfrak{P})}{\partial\eta}\right]^2+\left[\frac{\partial(\mathfrak{V}+\mathfrak{P})}{\partial\zeta}\right]^2}\right\}.$$

C'est là la seule conséquence que M. G. Kirchhoff ait déduite de la théorie nouvelle de l'aimantation dont il avait posé les premiers jalons. A. Beer (XL), en exposant la théorie de M. G. Kirchhoff, n'est pas allé plus loin que lui.

§ III. — Théorèmes généraux et cas particuliers d'équilibre.

10. Nous avons examiné avec grand détail la voie suivie par les divers physiciens qui ont traité de l'aimantation par influence pour parvenir aux conditions de l'équilibre magnétique. Il nous reste à indiquer brièvement les théorèmes généraux qui ont été déduits de ces conditions et les cas particuliers où l'on est parvenu à intégrer les équations différentielles auxquelles ces conditions peuvent se réduire.

Jusqu'ici, aucune conséquence n'a été déduite des équations générales données par M. G. Kirchhoff, si ce n'est la remarque que nous avons indiquée au sujet d'un ellipsoïde placé dans un champ magnétique uniforme. Toutes les recherches que nous allons mentionner se rapportent donc exclusivement aux équations déduites de la théorie de Poisson et de Sir W. Thomson; elles supposent toutes la constance du coefficient d'aimantation.

Tout le problème de l'aimantation par influence se ramène à déterminer la forme que prend la fonction $\mathfrak{P}$ lorsqu'un corps donné est placé dans un champ magnétique donné. M. F.-E. Neumann (LIII) a démontré que deux fonctions $\mathfrak{P}$ distinctes ne pouvaient satisfaire aux équations du problème, et que, par conséquent, le problème de l'aimantation par influence ne pouvait, dans chaque cas, admettre plus d'une solution. Sir W. Thomson (XLVII) a donné de ce théorème une démonstration un peu différente de celle de F.-E. Neumann. En même temps, Sir W. Thomson a démontré que les équations de l'induction magnétique déterminaient toujours une fonction $\mathfrak{P}$. Sa démonstration, imitée de celle qu'il avait imaginée pour le principe dit de Lejeune-Dirichlet, donne naturellement prise aux critiques adressées par M. Weierstrass à cette dernière. La démonstration de Sir W. Thomson s'applique également au problème de l'induction magnétique des cristaux.

Sir W. Thomson a également donné, mais sans démonstration complète, quelques propositions générales sur la stabilité de l'équilibre d'une masse magnétique placé en présence d'aimants permanents (XVIII) et sur les phénomènes thermiques qui accompagnent le déplacement d'une masse magnétique dans un champ magnétique (LVII, t. I, p. 712). Nous ne faisons qu'indiquer ici l'existence de ces propositions, que nous aurons à discuter en détail au cours d'un travail ultérieur.

12. C'est surtout sur l'intégration des équations de l'équilibre magnétique que les géomètres ont porté leurs efforts; nous nous contenterons d'indiquer très rapidement ici les cas particuliers qu'ils sont parvenus à traiter.

Dans son premier Mémoire sur la théorie du magnétisme (I), après avoir établi les équations de l'aimantation par influence, Poisson a intégré ces équations pour une masse comprise entre deux sphères concentriques, dans le cas où la force qui produit l'aimantation provient de masses extérieures à la sphère qui enveloppe le corps soumis à l'aimantation. Dans la partie creuse que renferme la couche sphérique, dans l'intérieur de cette couche et à l'extérieur, la fonction $\mathfrak{P}$ est exprimée soit par une série développée suivant les puissances croissantes du rayon vecteur, soit par la somme d'une semblable série et d'une série ordonnée suivant les inverses de la même quantité, soit par une série de cette dernière forme. Les coefficients de ces séries sont des fonctions de deux angles que l'on peut déterminer lorsqu'on sait développer d'une manière analogue le potentiel des forces qui produisent l'aimantation.

Cette méthode générale a été appliquée en particulier par Poisson au cas où la force qui produit l'aimantation est une force constante en grandeur et en direction comme la force magnétique terrestre.

Dans un Mémoire ultérieur (II), Poisson a déterminé la distribution du magnétisme sur un ellipsoïde à trois axes inégaux placé dans un champ magnétique constant; cette distribution possède l'importante propriété d'être *uniforme;* il a de plus fait usage des principes établis dans son premier Mémoire pour discuter la méthode que Barlow avait imaginée en vue de compenser les déviations produites sur le compas d'un navire par les masses de fer que le navire renferme. Beer (XXX), Plücker (XXVII) et Lipschitz (XXVII) ont donné une solution simplifiée du même problème.

Récemment, M. Greenhill (LIV) a étendu la méthode donnée par Poisson, pour résoudre le problème de l'aimantation d'un ellipsoïde plein, au problème de l'aimantation de la couche comprise entre deux ellipsoïdes concentriques et homothétiques.

F.-E. Neumann (LIII) a repris la solution donnée par Poisson de l'aimantation d'une sphère pleine ou creuse sous l'action d'aimants extérieurs quelconques. Après avoir régularisé la solution générale, il a traité en particulier le cas où la sphère est soumise à l'action d'un barreau d'acier uniformément aimanté et dirigé suivant un de ces rayons, et le cas où la sphère est soumise à l'action d'un courant circulaire ayant son centre sur l'un des rayons de la sphère et son plan perpendiculaire à ce rayon.

F.-E. Neumann a étendu (VIII) au cas d'un ellipsoïde de révolution la méthode donnée par Poisson et perfectionnée par lui pour résoudre le problème de l'aimantation d'une sphère soumise à l'action d'aimants extérieurs quelconques.

Si l'on fait croître indéfiniment le grand axe de l'ellipse méridienne en laissant fixe le centre et le petit axe, l'ellipsoïde de révolution se transforme en un cylindre indéfini; mais, en général, les formules de F.-E. Neumann perdent toute signification lorsque l'excentricité de l'ellipse méridienne croît au delà de toute limite; l'aimantation d'un cylindre de révolution indéfini est donc un problème qui doit être traité directement. C'est ce qu'a fait G. Kirchhoff (XXVIII) dans l'important Mémoire que nous avons déjà eu occasion de citer au n° 10 de la présente Introduction.

Dans un autre Mémoire, G. Kirchhoff (XLI) a résolu complètement et d'une manière très simple le problème de l'aimantation par influence pour un anneau de fer doux, limité par un tore obtenu en faisant tourner autour d'un axe une courbe fermée quelconque, dans le cas où cet anneau est entouré par une bobine formée de courants fermés, équidistants, placés sur les méridiens d'un autre anneau ayant même axe que le premier. Il en a déduit une méthode pour déterminer les coefficients d'induction, méthode pleine d'élégance et plusieurs fois employée par les expérimentateurs.

Enfin F.-E. Neumann (LIII) a montré que les composantes de l'aimantation en chaque point d'un ellipsoïde à trois axes inégaux aimanté par des forces quelconques peuvent toujours s'obtenir sous forme finie au moyen de formules où figurent des intégrales triples étendues au volume de l'ellipsoïde. Ces formules très simples sont les suivantes :

Soit r la distance du point (x, y, z) au point (ξ, η, ζ); supposons que les axes de coordonnées coïncident avec les axes de l'ellipsoïde; posons

$$-\frac{\partial}{\partial \xi}\int\int\int \frac{1}{r}\,dx\,dy\,dz = \xi\mathcal{M},$$

$$-\frac{\partial}{\partial \eta}\int\int\int \frac{1}{r}\,dx\,dy\,dz = \eta\mathcal{N},$$

$$-\frac{\partial}{\partial \zeta}\int\int\int \frac{1}{r}\,dx\,dy\,dz = \zeta\mathcal{P}.$$

et nous aurons

$$\mathcal{A}_0 = \frac{ph}{1 - p\left(\mathfrak{M} + \frac{4\pi}{3}\right)} \int\int\int \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \, dx \, dy \, dz,$$

$$\mathcal{B}_0 = \frac{ph}{1 - p\left(\mathfrak{N} + \frac{4\pi}{3}\right)} \int\int\int \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \, dx \, dy \, dz,$$

$$\mathcal{C}_0 = \frac{ph}{1 - p\left(\mathfrak{P} + \frac{4\pi}{3}\right)} \int\int\int \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \, dx \, dy \, dz.$$

Tels sont les principaux cas où les équations de l'aimantation par influence données par Poisson aient été intégrées par les géomètres. Leur petit nombre ne doit point surprendre si l'on observe que le problème à résoudre est beaucoup plus difficile que le problème de la distribution électrique sur les corps conducteurs, problème si difficile à aborder cependant dans la plupart des cas.

§ IV. — Induction magnétique des corps cristallisés.

13. Poisson avait donné les équations sur lesquelles repose la théorie, encore admise aujourd'hui, de l'induction magnétique des corps cristallisés vingt-trois ans avant qu'un expérimentateur songeât à découvrir le phénomène dont l'illustre géomètre avait d'avance indiqué les lois.

Dans les corps isotropes, il est naturel de supposer que les éléments magnétiques sont sphériques, ou du moins, s'ils ne sont pas sphériques, mais d'une forme moins régulière, qu'ils sont distribués indifféremment dans tous les sens. Il n'en est plus de même dans le cas des corps cristallisés.

« Le rapport entre la somme des éléments magnétiques et le volume entier dans chaque corps aimanté, dit Poisson (I, p. 238), n'est pas la seule donnée relative à ce corps, indépendamment de sa forme ou de ses dimensions d'où puisse dépendre l'intensité des actions magnétiques; la forme des éléments pourra ainsi influer sur cette intensité, et cette influence aura cela de particulier qu'elle ne sera pas la même en des sens différents. Supposons, par exemple, que les deux axes magnétiques sont des ellipsoïdes dont les axes ont la même direction dans toute l'étendue d'un même corps et que ce corps est une sphère aimantée par influence dans laquelle la force coercitive est nulle; les attractions ou répulsions qu'elle exercera au dehors seront différentes dans le sens des axes de ses éléments et dans tout autre sens; en sorte que, si l'on fait tourner cette sphère sur elle-même, son action sur un même point changera en général en grandeur et en direction; mais, si les éléments magnétiques sont des sphères de diamètres égaux ou inégaux, ou bien s'ils s'écartent de la forme sphérique, mais qu'ils soient disposés sans aucune régularité dans l'intérieur d'un corps aimanté par influence, leurs formes n'influeront plus sur les résultats qui dépendront seulement de la somme de leurs volumes, comparée au volume entier de ce corps, et qui seront alors les mêmes en tout sens. Ce dernier cas est celui du fer forgé, et sans doute aussi des autres corps non cristallisés dans lesquels on a observé le magnétisme : mais il serait curieux de chercher si le premier cas n'aurait pas lieu lorsque ces substances sont cristallisées; on pourrait s'en assurer par l'expérience, soit en approchant un cristal d'une aiguille aimantée librement suspendue, soit en faisant osciller de petites aiguilles taillées dans des cristaux en toute sorte de sens et soumises à l'action d'un très fort aimant. »

Le problème de l'induction magnétique d'un corps cristallisé se traitera donc de la même manière que le problème de l'induction magnétique d'un corps amorphe. Mais, tandis que pour ce dernier on pouvait supposer que les éléments magnétiques ont la forme sphérique, pour le premier problème on devra laisser quelconques la forme et l'orientation des éléments magnétiques, en supposant seulement que cette forme et cette orientation sont les mêmes pour tous les éléments.

Ce problème nouveau a été traité par Poisson en même temps que le premier. Dans l'un comme dans l'autre, on a les équations (3)

$$-h\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}+\alpha=0,$$

$$-h\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}+\beta=0,$$

$$-h\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}+\gamma=0;$$

mais, au lieu d'avoir, comme dans le cas des corps isotropes,

$$\alpha=-\frac{4\pi h}{3k}\mathcal{A}_0,\qquad \beta=-\frac{4\pi h}{3k}\mathcal{B}_0,\qquad \gamma=-\frac{4\pi h}{3k}\mathcal{C}_0,$$

il est très facile de voir, selon Poisson, que, dans le cas des corps cristallisés, on doit avoir des relations de la forme

$$\alpha=-\frac{h}{k}(\mathrm{P}\mathcal{A}_0+\mathrm{Q}\mathcal{B}_0+\mathrm{R}\mathcal{C}_0),$$

$$\beta=-\frac{h}{k}(\mathrm{P}'\mathcal{A}_0+\mathrm{Q}'\mathcal{B}_0+\mathrm{R}'\mathcal{C}_0),$$

$$\gamma=-\frac{h}{k}(\mathrm{P}''\mathcal{A}_0+\mathrm{Q}''\mathcal{B}_0+\mathrm{R}''\mathcal{C}_0),$$

P, Q, R, P', Q', R', P'', Q'', R'' étant neuf coefficients positifs dont la valeur, qui est la même en tous les points d'un corps homogène, dépend seulement de la forme des éléments magnétiques.

C'est seulement lorsqu'on introduit l'hypothèse que l'action d'une sphère aimantée ne doit point changer par une rotation autour de son centre que ces coefficients sont assujettis aux relations

$$\begin{aligned} P' &= 0, & P'' &= 0, \\ Q'' &= 0, & Q &= 0, \\ R &= 0, & R' &= 0, \end{aligned}$$
$$P = Q' = R'',$$

conforme à ce qui a été trouvé en supposant aux éléments la forme sphérique.

D'après cela, en suivant un raisonnement semblable à celui par lequel Poisson a établi les équations de l'aimantation des corps isotropes, on est conduit, pour les corps anisotropes, aux conditions d'équilibre suivantes

$$\begin{aligned} \frac{1-k}{k}(P\mathcal{A}_0 + Q\mathcal{B}_0 + R\mathcal{C}_0) &= -\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{W})}{\partial\xi}, \\ \frac{1-k}{k}(P'\mathcal{A}_0 + Q'\mathcal{B}_0 + R'\mathcal{C}_0) &= -\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{W})}{\partial\eta}, \\ \frac{1-k}{k}(P''\mathcal{A}_0 + Q''\mathcal{B}_0 + R''\mathcal{C}_0) &= -\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{W})}{\partial\zeta}, \end{aligned}$$

qui peuvent encore s'écrire ainsi

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1-k}{k}\mathcal{A}_0 &= -\left[p\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{W})}{\partial\xi} + q\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{W})}{\partial\eta} + r\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{W})}{\partial\zeta}\right], \\ \frac{1-k}{k}\mathcal{B}_0 &= -\left[p'\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{W})}{\partial\xi} + q'\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{W})}{\partial\eta} + r'\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{W})}{\partial\zeta}\right], \\ \frac{1-k}{k}\mathcal{C}_0 &= -\left[p''\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{W})}{\partial\xi} + q''\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{W})}{\partial\eta} + r''\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{W})}{\partial\zeta}\right]. \end{aligned} \right.$$

Les coefficients positifs p, q, r, p', q', r', p'', q'', r'' ont avec P, Q, R, P′, Q′, R′, P″, Q″, R″ des relations faciles à trouver.

Il suffira d'appliquer à ces équations des méthodes analogues à celles que Poisson a employées dans l'étude des corps isotropes pour obtenir la théorie, encore admise aujourd'hui, de l'induction magnétique des cristaux. Cette théorie offre les mêmes difficultés et est soumise aux mêmes objections que la théorie de l'induction magnétique des corps isotropes.

14. Poisson avait d'avance indiqué la voie par laquelle on parviendrait à découvrir les phénomènes d'induction magnétique des cristaux et les principes qui serviraient à expliquer ces phénomènes. Les expérimentateurs tardèrent vingt-trois années à reconnaître les phénomènes dont on leur avait signalé l'existence et, lorsqu'ils les eurent découverts, il leur fallut plus de deux ans pour les comprendre.

En 1847, Plücker (VII) ayant placé des cristaux diversement taillés entre les deux pôles d'un électro-aimant semblable à celui au moyen duquel Faraday avait découvert le diamagnétisme et la polarisation rotatoire magnétique, observa les positions que prenaient ces cristaux et crut pouvoir en conclure à une action exercée par le magnétisme sur les axes optiques, action différente du magnétisme et du diamagnétisme. Voici la loi expérimentale par laquelle il résumait ses recherches :

« Si l'on place un cristal uniaxe quelconque entre les deux pôles d'un aimant, l'axe est repoussé par chacun des deux pôles. Si le cristal est biaxe, chacun des deux axes optiques est repoussé avec la même force par chacun des deux pôles.

» La force qui produit cette répulsion est indépendante de la propriété magnétique ou diamagnétique de la masse du cristal; elle varie plus lentement avec la distance aux pôles de l'aimant que les forces magnétiques ou diamagnétiques provenant des mêmes pôles et agissant sur le cristal. »

Après un travail de Faraday (X), dans lequel l'illustre physicien parvenait à des résultats en désaccord avec la loi énoncée par Plücker, celui-ci publia deux Mémoires (XI, XII) dans lesquels, sans renoncer à son interprétation des phénomènes observés tout d'abord par lui, il modifiait légèrement l'énoncé de la loi qu'il avait cru démontrer dans son premier Mémoire, en admettant que l'action d'un pôle d'aimant sur un axe optique était répulsive ou attractive, selon que le cristal était négatif ou positif.

Ce n'est qu'après tous ces travaux, poursuivis dans une voie inexacte, que Plücker (XIII) d'une part, Knoblauch et Tyndall (XIV) d'autre part, arrivèrent à reconnaître la véritable cause des phénomènes observés et à attribuer ces phénomènes à une capacité d'aimantation des corps cristallisés variable suivant la direction.

« Tous ces phénomènes, que j'ai observés, dit Plücker, s'expliquent en supposant qu'une polarité magnétique ou diamagnétique (selon que la substance est magnétique ou diamagnétique) peut se développer par induction dans les cristaux et s'y développe plus ou moins aisément suivant les diverses directions, fait qui est lié aux variations de l'élasticité de l'éther. »

Knoblauch et Tyndall concluaient ainsi leur Mémoire :

« La loi de Plücker, qui attribue aux axes optiques la manière particulière dont se comportent les cristaux entre les pôles d'un aimant, ne peut être conservée sous sa forme primitive.

» Tous les phénomènes présentés par le spath d'Islande s'expliquent en supposant que les échantillons magnétiques sont plus faiblement magnétiques dans la direction du clivage et que les échantillons diamagnétiques sont plus faiblement diamagnétiques dans la même direction. »

Les travaux ultérieurs de Plücker et Beer (XV, XX, XXV), de Knoblauch et Tyndall (XVI, XXIII, XXIV), de Hankel (XXI) et de Faraday (XXIX) ne cessèrent de confirmer ces conclusions.

15. La théorie donnée par Poisson du magnétisme des cristaux avait été laissée dans l'oubli par les auteurs de ces recherches expérimentales. Sir W. Thomson (XIX) appela l'attention des physiciens sur cette théorie. Après avoir rappelé les idées de Poisson et transcrit les égalités (18) auquel l'illustre géomètre était parvenu, il ajoute :

« Tout le reste de la théorie de Poisson se borne à la considération du cas des substances non cristallisées ; dans ce cas, il est démontré que les coefficients p, q', r'' sont égaux entre eux et que les autres sont égaux à zéro. Mais cela n'indique rien sur la possibilité d'établir des relations générales entre les neuf coefficients, quelle que soit la nature de la substance. J'ai trouvé que les relations suivantes, par lesquelles ces neuf coefficients se réduisent à six, devaient être remplies quelle que soit la nature de la substance :

$$(19) \qquad \begin{cases} r' = q'', \\ p'' = r, \\ q = p'. \end{cases}$$

» La démonstration de ces relations est fondée non point sur une proposition incertaine ou sur une hypothèse spéciale, mais sur ce principe qu'une sphère d'une substance quelconque, placée dans un champ magnétique uniforme et capable de tourner autour d'un axe fixe perpendiculaire aux lignes de force, ne peut devenir une source inépuisable d'effet mécanique. »

Cette démonstration a été exposée plus tard par Sir W. Thomson (XLIII) et reproduite par J. Clerk Maxwell (LX, t. II, p. 69).

Cette remarque de Sir W. Thomson achevait de marquer les principes d'une théorie de l'induction magnétique des cristaux et d'en établir les équations différentielles. Aussi Sir W. Thomson put-il confondre dans une seule et même étude (XLVII) la théorie de l'aimantation par influence des substances amorphes ou cristallines et démontrer pour les unes comme pour les autres que le problème admettait une et une seule solution. Néanmoins Plücker se contentait encore, en 1858 (XXVIII), d'une théorie approchée qu'il avait ébauchée quelques années auparavant (XXV), théorie dans laquelle il calculait, en partant des résultats obtenus par Poisson pour les corps isotropes, l'action d'un pôle sur l'élément magnétique d'un cristal, élément qu'il assimilait à un ellipsoïde infiniment petit, et dans laquelle il négligeait la réaction de ces éléments les uns sur les autres.

Sir W. Thomson s'est contenté d'emprunter à Poisson les équations qui règlent l'aimantation par influence des cristaux, sans se préoccuper de l'établissement même de ces équations; c'est aussi en suivant la méthode de Poisson qu'August Beer (XL) a mis en équation le problème de l'induction cristalline. Il a intégré les équations différentielles de ce problème pour le cas d'une sphère cristalline placée dans un champ magnétique uniforme. Malheureusement, dans le développement de la théorie de l'induction cristalline, il a commis certaines inexactitudes analytiques, comme l'a fait remarquer M. E. Mathieu.

M. E. Mathieu (LXI, p. 165) est parvenu à des équations d'équilibre analogues à celles que l'on déduit de la théorie de Poisson, mais il y est parvenu par une voie particulière qu'il nous est impossible d'analyser brièvement ici. Remarquons seulement qu'elle est liée à une hypothèse sur la manière dont les actions magnétiques s'exercent au sein d'une substance cristallisée et qu'elle conduit à une théorie qui, de l'aveu même de son auteur, ne peut subsister si les aimants agissants et le milieu qui sépare ces aimants du cristal influencé ne sont pas formés de la même substance que le cristal.

Conclusion.

L'examen historique de la théorie de l'aimantation par influence nous semble amener à la conclusion suivante :

Poisson avait cherché à déduire les équations de l'équilibre magnétique d'hypothèses simples sur la nature des corps aimantés. Mais cette déduction a rencontré trois sortes d'objections :

1° Les hypothèses sur lesquelles elle reposait, acceptées volontiers par les physiciens contemporains de Poisson, semblent peu compatibles avec les idées actuellement en faveur auprès des physiciens.

2° La rigueur des démonstrations mathématiques données par Poisson laisse beaucoup à désirer.

3° Certaines conséquences de la théorie, telles que la constance du coefficient d'aimantation, ne sont pas conformes à l'expérience.

Ces objections, les théoriciens qui, après Poisson, se sont occupés de l'aimantation par influence ont cherché à les éliminer; mais ils n'y sont parvenus qu'en admettant d'emblée les équations de l'équilibre magnétique sans chercher à les relier à des hypothèses plus simples ou à une théorie plus générale. Il nous semble donc qu'il y a dans cette théorie un progrès à réaliser ; ce progrès consisterait à déduire la théorie de l'aimantation par influence d'un petit nombre de faits d'expérience simples, des lois de Coulomb par exemple, au moyen de principes généraux d'équilibre, tels que ceux que fournit la Thermodynamique.

LISTE DES PRINCIPAUX TRAVAUX

SUR LA

THÉORIE DE L'AIMANTATION PAR INFLUENCE.

1824. POISSON........ I. *Mémoire sur la Théorie du Magnétisme.* Lu à l'Académie royale des Sciences le 2 février 1824 (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, années 1821 et 1822, t. V, p. 247-338). — Extraits du même (*Annales de Chimie et de Physique*, t. XXIV, p. 113-137; 1824. *Bulletin de la Société Philomathique,* année 1824, p. 3-9).

1824. POISSON........ II. *Second Mémoire sur la Théorie du Magnétisme.* Lu à l'Académie royale des Sciences le 27 décembre 1824 (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* années 1821 et 1822, t. V, p. 488-553). — Extraits du même (*Annales de Chimie et de Physique,* t. XXVIII, p. 5-18; 1825. *Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. III, p. 429-440; 1825).

1826. POISSON........ III. *Mémoire sur la Théorie du Magnétisme en mouvement.* Lu à l'Académie des Sciences le 10 juillet 1826 (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* année 1823, t. VI, p. 441-570). — Extraits du même (*Annales de Chimie et de Physique*, t. XXXII, p. 225-240; 1826. *Nouveau Bulletin de la Société philomathique,* année 1826, p. 115-117 et 132-133).

1828. GEORGE GREEN .. IV. *An essay on the application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism.* Nottingham, 1828. — Traduction allemande du même (*Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik,* t. XXXIX, p. 73-89, 1850; t. XLIV, p. 356-374, 1852; t. XLVII, p. 161-221, 1854). Réimprimé dans (XLII).

1846. W. THOMSON.... V. *Note on induced Magnetism in a plate.* (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, Vol. I; 1846). Réimprimé dans (XLVIII) et dans (LVIII), art. IX.

1847. W. THOMSON.... VI. *On the forces experienced by small spheres under magnetic influence; and on some of the phenomena presented by diamagnetic substances* (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, Vol. II; 1847). Réimprimé dans (XLVIII) et dans (LVIII), art. XXXIII.

1847. J. PLÜCKER..... VII. *Ueber die Abstossung der optischen Axen der Krystalle durch die Pole der Magnete* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. LXXII, p. 315; 1847).

1848. F.-E. NEUMANN.. VIII. *Entwickelung der in elliptischen Coordinaten ausgedrückten reciproken Entfernung zweier Punkte in Reihen, welche nach den Laplace'schen* $Y^{(n)}$ *fortschreiten; und Anwendung dieser Reihen zur Bestimmung des magnetischen Zustandes eines Rotations-Ellipsoïdes, welches durch vertheilende Kräfte erregt ist* (*Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik*. Bd XXXVII, p. 21-50; 1848).

1848. W. THOMSON... IX. *On the equilibrium of magnetic or diamagnetic bodies of any form, under the influence of the terrestrial magnetic force* (*British Association. Report*. Part II; 1848.

1848. FARADAY........ X. *On the crystalline polarity of bismuth and other bodies, and on its relation to the magnetic form of force* (*Experimental researches on Electricity*, série XXII; 1848. *Philosophical Transactions*, p. 1-41; 1849. *Annales de Chimie et de Physique*, t. XXXVI, p. 247-254; 1852. *Bibliothèque universelle. Archives*, t. XII, p. 89-121; 1849. *Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. LXXVI, p. 144-149; 1849).

1849. J. PLÜCKER..... XI. *Ueber die neue Wirkung des Magnets auf einige Krystalle, die eine vorherrschende Spaltungsfläche besitzen. Einfluss des Magnetismus auf Krystall-Bildung* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. LXXVI, p. 576; 1849).

1849. J. PLÜCKER..... XII. *Ueber die magnetische Beziehung der positiven und negativen optischen Axen der Krystalle* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. LXXVII, p. 447; 1849).

1849. J. Plücker ..... XIII. *Ueber die Fessel'sche Wellenmaschine, den neueren Boutigny'schen Versuch und das Ergebniss fortgesetzter Beobachtungen in Betreff des Verhaltens krystallisirter Substanzen gegen den Magnetismus* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie,* t. LXXVIII, p. 421; 1849).

1850. Knoblauch et Tyndall ...... XIV. *Ueber das Verhalten krystallisirter Körper zwischen den Polen eines Magnetes* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie,* t. LXXIX, p. 233; 1850.)

1850. J. Plücker et A. Beer ..... XV. *Ueber die magnetischen Axen der Krystalle und ihre Beziehung zur Krystallform und zu den optischen Axen* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie,* t. LXXXI, p. 114; 1850).

1850. Knoblauch et Tyndall........ XVI. *Ueber das Verhalten krystallisirter Körper zwischen den Polen eines Magnetes.* Zweite Abhandlung (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie,* t. LXXXI, p. 481; 1850).

1855. W. Thomson.... XVII. *On the theory of magnetic induction in crystalline substances* (*British Association. Report,* Part II; 1850.) Réimprimé dans (XLVIII) et dans (LVIII), art. xxx.

1850. W. Thomson.... XVIII. *On the forces experienced by inductively magnetized ferromagnetic or diamagnetic non crystalline substances* (*Philosophical Magazine,* 3e série, t. XXXVII, p. 241-253; 1850. *Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie,* t. LXXXII, p. 245-262; 1851). Réimprimé dans (XLVIII) et dans (LVIII), art. xxxiv.

1851. W. Thomson.... XIX. *On the theory of magnetic induction in crystalline and non crystalline substances* (*Philosophical Magazine,* 4e série, t. I, p. 177-186; 1851). Réimprimé dans (XLVIII) et dans (LVIII), art. xxx.

1851. J. Plücker et A. Beer........ XX. *Ueber die magnetischen Axen der Krystalle und ihre Beziehung zur Krystallform und zu der optischen Axen-Fortsetzung* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie,* t. LXXXII, p. 42; 1851).

1851. Hankel......... XXI. *Messungen der Abstossungen des krystallisirten Wismuths durch die Pole eines Magnets mittelst der Drehwage* (*Mathematische und physikalische Berichte der kaiserlichen Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften,* p. 99-118; 1851).

1851. TYNDALL........ XXII. *On diamagnetism and magnecrystallic induction* (*Philosophical Magazine*, 4e série, t. II, p. 165-168; 1851. *Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. LXXXIII, p. 1-37; 1851. — *Annales de Chimie et de Physique*, t. XXXVII, p. 76-79; 1853).

1851. TYNDALL........ XXIII. *Ueber Diamagnetismus und magnecrystallinische Wirkung* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. LXXXIII, p. 384-416; 1851).

1852. TYNDALL........ XXIV. *On Poisson's theoretic anticipation of magnecrystallic action* (*British Association. Report*. Part II, p. 20; 1852).

1852. J. PLÜCKER..... XXV. *Ueber die Theorie des Diamagnetismus, die Erklärung des Ueberganges magnetischen Verhaltens in diamagnetisches und mathematische Begründung der bei Krystallen beobachteten Erscheinungen* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. LXXXVI, p. 1; 1852).

1852. W. THOMSON.... XXVI. *On the equilibrium of elongated masses of ferromagnetic substances in uniform and varied fields of force* (*British Association. Report*. Part II; 1852). Réimprimé dans (XLVIII) et dans (LVIII), art. XXV.

1853. LIPSCHITZ....... XXVII. *Determinatio status magnetici viribus inducentibus commoti in ellipsoïde* (*Dissertation*, Berlin; 1853).

1853. G. KIRCHHOFF... XXVIII. *Ueber den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen* (*Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. XLVIII, p. 348-376; 1853). Réimprimé dans (LV), p. 193.

1855. FARADAY........ XXIX. *Constancy of differential magnecrystallic force in different media* (*Experimental researches in Electricity*, série XXX; 1855. — *Philosophical Transactions*, p. 159-180; 1856. — *Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. C, p. 111-127; 1857).

1855. A. BEER....... XXX. *Vertheilung der Elektricität eines ellipsoïdischen Conductors durch den Einfluss einer entfernten elektrischen Masse* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. XCIV, p. 192-193; 1855).

1855. W. THOMSON ... XXXI. *Elementary demonstrations of propositions in the theory of magnetic force* (*Philosophical Magazine*, 4e série, t. IX, p. 241, 248; 1855). Réimprimé dans (XLVIII) et dans (LVIII), art. XXXVII.

1855. W. THOMSON ... XXXII. *Letter to Professor Tyndall on the « magnetic medium » and on the effects of compression* (*Philosophical Magazine*, 4e série, t. IX, p. 290-293; 1855). Réimprimé dans (XLVIII) et dans (LVIII), art. XXXVIII.

1855. TYNDALL........ XXXIII. *On the nature of forces by which bodies are repelled from the poles of a magnet; to which is prefixed an account of some experiments on moleculars influences* (*Philosophical Transactions*, p. 1-52; 1855. *Philosophical Magazine*, 4e série, t. X, p. 153-179 et 257-290; 1855).

1855. TYNDALL........ XXXIV. *Letter to Professor W. Thomson on reciprocal molecular induction* (*Philosophical Magazine*, 4e série, t. X, p. 422-423; 1855). Réimprimé dans (XLVIII) et dans (LXVIII), art. XXXVIII.

1856. W. THOMSON ... XXXV. *Letter to Professor J. Tyndall on the reciprocal action of diamagnetic particles* (*Philosophical Magazine*, 4e série, t. XI, p. 66-67; 1856). Réimprimé dans (XLVIII), art. XXXVIII.

1856. TYNDALL........ XXXVI. *On the relation of diamagnetic polarity to magnecrystallic induction* (*Philosophical Magazine*, 4e série, t. XI, p. 125-137; 1856).

1856. W. THOMSON ... XXXVII. *Sui fenomeni magnetocristallini* (*Nuovo Cimento*, t. IV, p. 192-198; 1856).

1858. J. PLÜCKER ..... XXXVIII. *On the magnetic induction of crystals* (*Philosophical Transactions*, t. II, p. 543-587; 1858).

1860-63. G. WIEDEMANN. XXXIX. *Die Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus*, Ire édition, Brunswick; 1860-1863.

1865. A. BEER .... XII. *Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik*. Publié, après la mort de l'auteur, par J. Plücker, Brunswick; 1865.

1870. G. KIRCHHOFF... XLI. *Zur Theorie des in einem Eisenkörper inducirten Magnetismus* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*. Ergänzungsband, Bd. V, p. 1-15; 1870). Réimprimé dans (LV), p. 223.

1871. G. GREEN...... XLII. *Mathematical Papers of the late George Green.* Londres; 1871.

1872. W. THOMSON ... XLIII. *Démonstration d'une proposition sur l'induction magnétique des cristaux.* Publié pour la première fois dans (XLVIII) et réimprimé dans (LVIII), p. 485.

1872. W. THOMSON ... XLIV. *Magnetic permeability and analogues in electrostatic induction, theory of heat, and fluid motion.* Publié pour la première fois dans (XLVIII) et réimprimé dans (LVIII), p. 487.

1872. W. THOMSON ... XLV. *Diagramms of lines of force; to illustrate magnetic permeability.* Publié pour la première fois dans (XLVIII) et réimprimé dans (LXVIII), p. 492.

1872. W. THOMSON ... XLVI. *Inductive susceptibility of a polar magnet.* Publié pour la première fois dans (XLVIII) et dans (LXVIII). art. XXXIX.

1872. W. THOMSON ... XLVII. *General problem of magnetic induction.* Publié pour la première fois dans (XLVIII) et dans (LVIII), art. XL.

1872. W. THOMSON ... XLVIII. *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism.* 1re édition (Londres, 1872).

1872-74. G. WIEDEMANNN. XLIX. *Die Lehre vom Galvanismus.* IIe édition (Brunswick, 1872-1874).

1873. J.-C. MAXWELL.. L. *Treatise of Electricity and Magnetism.* 1re édition (Londres, 1873).

1877. L. WEBER...... LI. *Zur Theorie der magnetischen Induction.* Kiel, 1877. Compte rendu dans les *Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie,* t. II, p. 230.

1881. J.-C. MAXWELL.. LII. *Treatise on Electricity and Magnetism.* 2e édition. Londres, 1881.

1881. F.-E. NEUMANN.. LIII. *Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, namentlich über die Theorie der magnetischen Induction.* Publié par C. Neumann. Leipzig; 1881.

1881. GREENHILL...... LIV. *Sur le magnétisme d'un ellipsoïde creux* (*Journal de Physique pure et appliquée,* t. X, 294; 1881).

1882. G. KIRCHHOFF... LV. *Gesammelte Abhandlungen* (Berlin, 1882).

1882-85. G. Wiedemann. LVI. *Die Lehre von der Electricität* (Brunswick, 1882-1885).

1885-86. Mascart et Joubert... LVII. *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme* (Paris, 1882-1883).

1884. W. Thomson ... LVIII. *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism* (2e édition, Londres, 1884).

1884. Resal.......... LIX. *Physique mathématique* (Paris, 1884).

1885. J.-C. Maxwell.. LX. *Traité d'Électricité et de Magnétisme* (traduit par G. Seligmann-Lui. Paris, 1885).

1886. É. Mathieu .... LXI. *Théorie du Potentiel et ses applications à l'Électrostatique et au Magnétisme*. IIe Partie. Applications (Paris, 1886).