Annales de la faculté des sciences de Toulouse

A. Legoux

Sur l'intégration de l'équation $ds^2 = \mathrm{E}du^2 + \mathrm{F}du\,dv + \mathrm{G}dv^2$

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 3 (1889), p. F1-F2
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1889_1_3__F1_0>

SUR

L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

PAR M. A. LEGOUX.

Bien des méthodes ont été données pour intégrer l'équation d'Euler. La suivante, fondée sur des considérations de Mécanique rationnelle, ne paraîtra peut-être pas dépourvue d'intérêt.

Considérons toutes les surfaces dont l'élément linéaire est représenté par la formule

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2.$$

Supposons que l'on cherche la figure d'équilibre d'un fil posé sur ces surfaces, et admettons que les forces qui sollicitent le fil en chacun de ses points soient telles qu'il existe une fonction potentielle U, cette fonction étant d'ailleurs une fonction quelconque de u et de v.

En appliquant la méthode de Jacobi, on trouve que la solution du problème dépend de la connaissance d'une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(1)\qquad \frac{\mathrm{G}\left(\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\right)^2 - 2\mathrm{F}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial u}\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial v} + \mathrm{E}\left(\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial v}\right)^2}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2} = (\mathrm{U} - h)^2,$$

h étant une constante arbitraire.

C'est une équation toute pareille à celle que l'on obtient en étudiant le mouvement d'un point sur une surface.

Soit V une intégrale complète contenant, outre la constante h, une nouvelle constante α. La figure d'équilibre du fil est donnée par les deux équations

$$(2)\qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \alpha} = \beta,$$

$$(3)\qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial h} - s = \gamma.$$

La première est l'équation de la courbe d'équilibre du fil, la seconde donne la longueur de l'arc.

Or on peut satisfaire à l'équation (2) d'une infinité de manières, en posant $u = f(\theta)$, θ étant un paramètre arbitraire et f une fonction quelconque. Il en résulte pour v une valeur correspondante $v = \varphi(\theta)$. En remplaçant u et v par ces valeurs dans l'équation (3), on aura s en fonction du même paramètre, et ces expressions s, u et v contiendront deux fonctions arbitraires, f et U des variables u et v.

L'équation (1) est l'équation aux dérivées partielles dont dépend la détermination d'une ligne quelconque tracée sur les surfaces. Si $U = 0$, c'est l'équation à laquelle Gauss a ramené la recherche des lignes géodésiques.

Intégration de l'équation $ds^2 = f^2\,du^2 + g^2\,dv^2 + k^2\,dw^2$. — On suppose que u, v, w sont les coordonnées curvilignes orthogonales d'un point de l'espace, ds représente la distance de deux points infiniment voisins.

Supposons que l'on cherche la figure d'équilibre d'un fil flexible et inextensible, dont chaque point est soumis à des forces telles qu'il existe une fonction potentielle U quelconque de u, v et w.

En appliquant la méthode de Jacobi, on trouve que la solution du problème dépend de la connaissance d'une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{1}{f^2}\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{g^2}\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial V}{\partial w}\right)^2 = (U - h)^2.$$

Soit V une intégrale complète contenant, outre la constante h, deux nouvelles constantes a et b, on a pour déterminer la figure d'équilibre du fil les équations

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \alpha, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = \beta, \qquad \frac{\partial V}{\partial h} - s = \gamma.$$

Si maintenant on pose $u = f(\theta) =$ fonction arbitraire d'un paramètre θ, les deux premières donnent v et w en fonction de θ; la troisième fournira la valeur de s.

On aura ainsi exprimé u, v, w, s en fonction d'un seul paramètre θ, et il entrera dans ces expressions deux fonctions arbitraires f et U.