V. ROUQUET

Étude d'un complexe du sixième ordre

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 3 (1889), p. I1-I20

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1889_1_3__I1_0>

ÉTUDE

D'UN

COMPLEXE DU SIXIÈME ORDRE,

PAR M. V. ROUQUET,

Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Toulouse.

I. — Propriétés caractéristiques des droites du complexe.

1. Le complexe considéré dans le présent travail est celui que forment les directrices des sections planes d'une quadrique donnée. Pour trouver l'équation de condition à laquelle satisfont les paramètres de toute directrice D, nous ferons usage de la notion du cercle représentatif d'un segment, introduite par Laguerre à l'occasion de son Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2[e] série, tome XI, pages 14 et suivantes).

Laguerre appelle *cercle représentatif* d'un segment réel ou imaginaire aa', le cercle d'intersection autre que le cercle de l'infini (*ombilicale*), des sphères de rayons nuls ayant pour centres les extrémités du segment considéré. Ce cercle a pour centre le milieu du segment aa'; son plan est perpendiculaire à la droite aa', et son rayon est égal au produit $l\sqrt{-1}$, l désignant la demi-longueur du segment. Il résulte de là que ce cercle est réel, seulement dans le cas où les points a et a' sont imaginaires conjugués.

Inversement, le cercle représentatif détermine les extrémités du segment correspondant. Il n'y a d'exception que dans le cas où la droite aa' est isotrope, ce qui a lieu quand son prolongement rencontre l'ombilicale. Alors, quels que soient les points a et a' pris sur cette droite isotrope, le cercle représentatif est cette droite comptée deux fois.

Ceci posé, la proposition fondamentale de cette étude est la suivante :

2. Théorème. — *Pour qu'une droite* D, *située à distance finie, non*

tangente à une quadrique et non isotrope, soit directrice d'une section plane de cette quadrique S, *il faut et il suffit que le cercle représentatif* (A) *du segment* aa' *que la droite* D *intercepte dans la surface rencontre la droite* Δ *polaire conjuguée de* D *par rapport à* S. *Si cette condition est remplie, le point de rencontre* F *de* (A) *avec* Δ *est le foyer correspondant à la directrice* D, *dans la section de la quadrique par le plan* (F, D) *que déterminent le point* F *et la droite* D.

Pour le démontrer, considérons d'abord la section faite dans S par un plan P. Soient F un foyer de la section et D la directrice correspondante. La polaire de F par rapport à la conique de section étant D, le plan polaire de ce point F relativement à S passe par D et, dès lors, F appartient à la polaire conjuguée Δ de D. D'autre part, les tangentes menées de F à la section et dont les points de contact sont situés sur D sont isotropes, ce qui montre que F est à des distances nulles des points a et a' où D rencontre la section, c'est-à-dire la quadrique S. Donc, le point F, déjà situé sur Δ, se trouve encore sur le cercle représentatif (A) du segment aa'.

Réciproquement, soit D une droite située à distance finie, non tangente à S et non isotrope. Supposons que le cercle représentatif (A) du segment aa', intercepté par D dans S, rencontre Δ en un point F. Considérons la section faite dans la quadrique par le plan (F, D). En vertu des restrictions précédentes, les points a et a' sont distincts ainsi que les droites Fa et Fa'; de plus, ces droites sont isotropes puisque les distances Fa et Fa' sont nulles, F étant sur (A) par hypothèse. Enfin ces droites sont tangentes à la section, car F appartient à la polaire conjuguée Δ de D. Il en résulte que D est un foyer de la section et que D est la directrice correspondante. C. Q. F. D.

3. *Remarques.* — I. La démonstration qui précède montre la nécessité des restrictions contenues dans l'énoncé. Nous nous proposons, avant d'aller plus loin, d'examiner successivement les cas qui échappent à la règle générale.

Mais auparavant nous ferons observer qu'une droite réelle D ne peut être directrice d'une section plane dont le plan est réel que si les points a et a' où elle perce la quadrique sont imaginaires. S'il en est ainsi, le point F, supposé unique, est réel ainsi que le plan (F, D) de la section. Toutefois, cela ne suffit pas encore pour la réalité de la section elle-même, car il peut arriver que le plan de la section soit réel et que la conique de section soit imaginaire.

Lorsque la droite D est rejetée à l'infini, on doit la regarder comme directrice de la section de la surface par le plan de l'infini. En effet, les tangentes aux points où D rencontre cette courbe sont elles-mêmes situées sur le plan de l'infini. Ces tangentes rencontrent donc l'ombilicale et, dès lors, la droite D possède la propriété caractéristique d'une directrice.

II. Considérons maintenant les autres cas d'exception.

En premier lieu, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite réelle ou imaginaire, tangente en un point a d'une quadrique S, mais non isotrope, soit directrice d'une section plane, est évidemment qu'elle soit directrice de la section par le plan tangent en a, c'est-à-dire qu'elle soit l'une des bissectrices des angles formés par les génératrices rectilignes de la surface qui se coupent en a, ou bien encore qu'elle soit normale en a à l'une des surfaces homofocales à la proposée qui passent par ce point.

Le cas où la droite D est isotrope, mais non tangente, exige plus d'attention.

Remarquons d'abord que, lorsqu'une conique, nécessairement imaginaire, admet pour directrice une droite isotrope, celle-ci est une direction asymptotique de la courbe, ainsi que le montre l'équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=k[(x-\alpha')+i(y-\beta')]^2,$$

qui, dans ce cas, représente la conique considérée rapportée à deux axes rectangulaires pris à volonté dans son plan.

Dès lors, si une droite isotrope D est directrice d'une section plane de S, cette droite sera parallèle à l'une des directions communes au cône directeur ou asymptotique de S et au cône isotrope de même sommet. Ces directions sont au nombre de quatre et correspondent aux points d'intersection de l'ombilicale avec la trace de la surface sur le plan de l'infini.

Réciproquement, toute droite D non tangente à S et passant par l'un des points ω d'intersection de l'ombilicale avec la surface est non seulement directrice, mais encore directrice de deux sections planes de S.

Cette droite rencontre en effet S, d'abord au point ω et en un second point a distinct du premier, puisqu'elle n'est pas tangente. Concevons le cône isotrope du sommet a. Ce cône est rencontré en deux points F et F′ par la droite Δ polaire conjuguée de D. La section de la surface par le plan (F, D) passe par les points ω et a, et les tangentes en ces points se coupent au point F, qui est sur Δ. Or ces droites Fa, $F\omega$ sont isotropes, puisque F est un point du cône isotrope de sommet a et que ω appartient à l'ombilicale. Donc, la droite D est la directrice de la section considérée, le foyer correspondant étant le point F. On verrait, de même, que la section de la surface par le plan (F', D) a D pour directrice et F' pour foyer correspondant.

La droite considérée D est donc la directrice de deux sections planes. Il n'existe pas d'ailleurs une troisième section dont D soit la directrice, car le foyer correspondant devant appartenir à Δ et au cône isotrope de sommet a ne peut être que l'un des points F ou F' déjà obtenus.

Il reste à considérer le cas où une droite D est à la fois tangente et isotrope.

Nous allons démontrer que toute droite D satisfaisant aux deux conditions précédentes doit être regardée comme directrice de la section faite dans la quadrique par le plan contenant cette droite et la tangente à l'ombilicale au point α où elle rencontre cette courbe.

Soit, en effet, a le point de contact de D avec S, ce point pouvant être distinct de α ou confondu avec lui. Tout plan passant par D coupe S suivant une conique touchant D en a. La droite D sera directrice de celle de ces sections pour lesquelles les tangentes issues de a, lesquelles se confondent avec D, seront les seules droites isotropes du plan de cette section. Or les plans tangents à l'ombilicale sont les seuls dont les droites isotropes se confondent. La droite D est, par suite, la directrice de la section faite par le plan contenant cette droite et la tangente à l'ombilicale au point α, le foyer correspondant à D étant le point a où elle touche S. De plus, cette section est la seule dont D soit la directrice.

En résumé, pour qu'une droite isotrope soit directrice d'une section plane de S, il faut et il suffit qu'elle soit parallèle à l'une des quatre génératrices communes au cône directeur de la surface et au cône isotrope de même sommet, ou bien qu'elle soit tangente à S. Dans le premier cas, la droite est directrice de deux sections planes dont les plans sont généralement distincts et ne se confondent que lorsque la droite est l'une des asymptotes de la quadrique.

III. On est conduit, d'après ce qui précède, à rechercher s'il n'existe pas, en dehors des directions isotropes asymptotiques, d'autres directrices *singulières ou doubles,* en entendant par là qu'elles sont directrices de deux sections planes.

Pour qu'une droite D non isotrope présente cette particularité, il est nécessaire et suffisant que le cercle représentatif (A) rencontre *en deux points* la droite Δ et, par suite, que cette droite soit contenue dans le plan de (A). Ceci a lieu seulement dans le cas où la droite D est perpendiculaire à l'un des plans principaux de la surface. Si cette condition est remplie, la droite Δ et le centre (A) sont contenus tous les deux dans ce plan principal et ont deux points communs F et F′. La droite D est la directrice des sections faites par les deux plans (F, D), (F′, D).

Donc, les seules directrices doubles sont les droites parallèles soit aux directions principales de la surface, soit aux quatre directions isotropes de son cône directeur. Il n'existe pas d'ailleurs de directrice qui puisse convenir à plus de deux sections planes.

IV. On déduit encore de ce qui précède qu'il existe sept points pour lesquels le cône du complexe est indéterminé, ce qui signifie que toute droite passant par l'un d'eux est directrice. Ces sept points, qui sont d'ailleurs les seuls, comme nous le verrons bientôt, possédant la propriété indiquée, sont tous situés à l'infini. Trois d'entre eux sont réels et appartiennent aux directions principales de la quadrique. Les quatre autres sont imaginaires et résultent de l'intersection de l'ombilicale avec la surface. On sait que les trois premiers sont les points d'intersection des couples de côtés opposés du quadrangle ayant les quatre autres points pour sommets. Toute droite passant par l'un de ces sept points, qu'on désigne sous le nom de *principaux ou d'indétermination*, est non seulement directrice, mais directrice *double ou singulière*. On peut remarquer encore que ces sept directions singulières sont celles des droites dont chacune est parallèle à deux plans cycliques de la quadrique proposée.

Il reste à faire voir qu'il n'existe pas d'autres points d'indétermination que les sept points dont on vient de parler.

Si l'on prend d'abord sur l'ombilicale un point α qui n'appartienne pas à la surface, ce point ne saurait être un point d'indétermination, car, en particulier, les droites non tangentes à la surface et passant par ce point ont des directions isotropes, mais non asymptotiques, et ne peuvent, par suite, être des directrices.

Si l'on prend maintenant un point A qui ne soit pas situé sur l'ombilicale et qui ne coïncide pas avec les points où les directions principales de S rencontrent le plan de l'infini, il est évident que les génératrices du cône de sommet A, circonscrit à S, ne seront pas toutes des bissectrices des angles formés par les droites suivant lesquelles les plans tangents correspondants coupent S. Dès lors ces tangentes, en particulier, ne seront pas des directrices et le point considéré n'est pas un point d'indétermination.

Nous nous proposons maintenant d'appliquer ces considérations générales au cas où la quadrique S possède un centre unique à distance finie.

II. — Cône du complexe.

4. Rapportons la quadrique S à ses plans principaux. Son équation sera

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}-1=0. \tag{1}$$

Il faut trouver la condition pour que la droite D, représentée par les équations

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=\lambda, \tag{2}$$

soit directrice d'une section plane de cette quadrique.

En désignant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du milieu m du segment aa' que D intercepte dans S, et par λ_1 la valeur commune des rapports (2) relatifs à ce point, on aura d'abord

$$\begin{cases} x_1=x_0+l\lambda_1, \\ y_1=y_0+m\lambda_1, \\ z_1=z_0+n\lambda_1, \end{cases} \tag{3}$$

et, en exprimant ensuite que le point m appartient au plan diamétral conjugué de D, lequel a pour équation

$$\frac{lx}{A}+\frac{my}{B}+\frac{nz}{C}=0,$$

on aura

$$\lambda_1=-\frac{\dfrac{lx_0}{A}+\dfrac{my_0}{B}+\dfrac{nz_0}{C}}{\dfrac{l^2}{A}+\dfrac{m^2}{B}+\dfrac{n^2}{C}}. \tag{4}$$

Si l'on écrit maintenant les équations de D sous la forme

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=\frac{\rho}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

où ρ désigne la distance du point (x, y, z) de D au point (x_1, y_1, z_1), et si l'on porte les valeurs ci-dessus de x, y, z dans l'équation de la surface, on trouve aisément, pour la demi-longueur du segment aa',

$$\rho^2=-\frac{S_1(l^2+m^2+n^2)}{\frac{l^2}{A}+\frac{m^2}{B}+\frac{n^2}{C}}, \tag{5}$$

après avoir posé

$$S_1=\frac{x_1^2}{A}+\frac{y_1^2}{B}+\frac{z_1^2}{C}-1. \tag{6}$$

Les équations du cercle représentatif (A) sont donc les suivantes :

$$(\mathrm{A})\quad\left\{\begin{array}{ll}(7) & l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0,\\ (8) & (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=-\rho^2=\dfrac{S_1(l^2+m^2+n^2)}{\frac{l^2}{A}+\frac{m^2}{B}+\frac{n^2}{C}},\end{array}\right.$$

dont la première représente le plan perpendiculaire au segment aa' en son milieu, et la seconde la sphère ayant le cercle cherché pour grand cercle.

Les équations de la droite Δ, polaire conjuguée de D, savoir

$$\frac{lx}{A}+\frac{my}{B}+\frac{nz}{C}=0,$$

$$\frac{xx_1}{A}+\frac{yy_1}{B}+\frac{zz_1}{C}=1,$$

peuvent s'écrire

$$(9)\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{l(x-x_1)}{A}+\dfrac{m(y-y_1)}{B}+\dfrac{n(z-z_1)}{C}=0,\\ \dfrac{x_1(x-x_1)}{A}+\dfrac{y_1(y-y_1)}{B}+\dfrac{z_1(z-z_1)}{C}=-S_1.\end{array}\right.$$

Il reste à exprimer que le point de rencontre des plans (7) et (9) appartient à la sphère (8). Si l'on désigne par x', y', z' les coordonnées du point d'intersection de la droite Δ avec le plan perpendiculaire à D en m, on trouve, par l'application de la règle de Cramer,

$$(10)\quad \begin{cases} x'-x_1=-\dfrac{AS_1mn(B-C)}{mnx_1(B-C)+nly_1(C-A)+lmz_1(A-B)}, \\ y'-y_1=-\dfrac{BS_1nl(C-A)}{mnx_1(B-C)+nly_1(C-A)+lmz_1(A-B)}, \\ z'-z_1=-\dfrac{CS_1lm(A-B)}{mnx_1(B-C)+nly_1(C-A)+lmz_1(A-B)}. \end{cases}$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (8) donnera la condition cherchée.

Remarquons d'abord que la quantité S_1 est en facteur. La suppression de ce facteur est légitime, car la solution $S_1=0$ correspond au cas où la droite D est une tangente quelconque et n'est pas, dès lors, directrice. On a donc simplement la condition

$$(11)\quad \begin{aligned} S_1\left(\frac{l^2}{A}+\frac{m^2}{B}+\frac{n^2}{C}\right)&[A^2m^2n^2(B-C)^2+B^2n^2l^2(C-A)^2+C^2l^2m^2(A-B)^2] \\ &=(l^2+m^2+n^2)[mnx_1(B-C)+nly_1(C-A)+lmz_1(A-B)]^2. \end{aligned}$$

Remplaçons maintenant x_1, y_1, z_1 par leurs valeurs (3) et (4) en fonction de x_0, y_0, z_0. Il vient d'abord

$$\begin{aligned} &mnx_1(B-C)+nly_1(C-A)+lmz_1(A-B) \\ &\quad=mnx_0(B-C)+nly_0(C-A)+lmz_0(A-B), \end{aligned}$$

$$S_1=\frac{S_0\left(\dfrac{l^2}{A}+\dfrac{m^2}{B}+\dfrac{n^2}{C}\right)-\left(\dfrac{lx_0}{A}+\dfrac{my_0}{B}+\dfrac{nz_0}{C}\right)^2}{\dfrac{l^2}{A}+\dfrac{m^2}{B}+\dfrac{n^2}{C}},$$

après avoir posé

$$(12)\quad S_0=\frac{x_0^2}{A}+\frac{y_0^2}{B}+\frac{z_0^2}{C}-1.$$

La condition pour que la droite D, représentée par les équations (2), soit directrice d'une section plane est donc

$$(13)\quad \begin{aligned} &\left[S_0\left(\frac{l^2}{A}+\frac{m^2}{B}+\frac{n^2}{C}\right)-\left(\frac{lx_0}{A}+\frac{my_0}{B}+\frac{nz_0}{C}\right)^2\right] \\ &\qquad\times[A^2m^2n^2(B-C)^2+B^2n^2l^2(C-A)^2+C^2l^2m^2(A-B)^2] \\ &\qquad=(l^2+m^2+n^2)[mnx_0(B-C)+nly_0(C-A)+lmz_0(A-B)]^2. \end{aligned}$$

La méthode précédente suppose, à la vérité, que la droite D n'est point tangente ou isotrope; mais on peut prévoir que la condition obtenue s'applique encore, par continuité, à ces cas exceptionnels. D'ailleurs nous vérifierons bientôt que la condition (13) est générale.

5. Pour trouver l'équation du cône du complexe ayant pour sommet un point G, *situé à distance finie,* et dont nous désignerons les coordonnées par x_0, y_0, z_0, il suffit de remplacer, dans l'équation (13), l, m, n par les différences $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$.

Afin d'abréger, nous transporterons les axes de coordonnées au sommet G du cône du complexe, et nous désignerons les nouvelles coordonnées par les mêmes lettres x, y, z; nous poserons ensuite

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} S_0\left(\dfrac{x^2}{A}+\dfrac{y^2}{B}+\dfrac{z^2}{C}\right)-\left(\dfrac{xx_0}{A}+\dfrac{yy_0}{B}+\dfrac{zz_0}{C}\right)^2=H,\\ A^2y^2z^2(B-C)^2+B^2z^2x^2(C-A)^2+C^2x^2y^2(A-B)^2=K,\\ x^2+y^2+z^2=I,\\ x_0(B-C)yz+y_0(C-A)zx+z_0(A-B)xy=L. \end{array}\right.$$

L'équation du cône du complexe sera, dans le nouveau système d'axes, parallèle aux axes primitifs

$$(15)\qquad H.K = I.L^2.$$

En ordonnant cette équation, on s'assure aisément qu'il n'existe, à distance finie, aucun point d'indétermination, ce que l'on savait déjà (*Remarque IV* du n° 3).

Donc le cône du complexe est du sixième ordre lorsque son sommet est à distance finie.

6. L'interprétation géométrique des expressions H, I, K, L fera non seulement connaître un certain nombre de droites remarquables situées sur le cône, mais permettra aussi de démontrer la généralité de la condition (13).

1° L'équation $H = 0$ représente le cône circonscrit à la quadrique et ayant pour sommet le point donné G; car cette équation, équivalente à la condition $S_1 = 0$, exprime que le milieu d'une droite D est sur la surface, c'est-à-dire que cette droite est tangente à la quadrique proposée.

2° L'équation $K = 0$ représente un cône du quatrième degré. Ce cône admet comme génératrices doubles les parallèles aux axes de la quadrique et n'a pas d'ailleurs d'autres génératrices réelles, ni doubles. Il contient aussi les parallèles menées par son sommet G aux droites isotropes du cône directeur de la quadrique, en sorte que les sept directions singulières du complexe lui appartiennent. De plus, les plans tangents suivant ces droites isotropes sont tangents à l'ombilicale. On vérifie aisément ces résultats au moyen des équations de ces quatre droites, savoir

$$\frac{x^2}{A(B-C)} = \frac{y^2}{B(C-A)} = \frac{z^2}{C(A-B)},$$

et de l'équation du plan tangent au cône (K), laquelle est, en général,

$$\frac{A^2(B-C)^2}{x^3} X + \frac{B^2(C-A)^2}{y^3} Y + \frac{C^2(A-B)^2}{z^3} Z = 0,$$

x, y, z désignant les coordonnées du point de contact et X, Y, Z les coordonnées courantes.

Le cône du quatrième degré (K) est complètement déterminé par la condition de contenir les directions singulières du complexe et d'admettre, suivant les directions isotropes, qui sont pour lui des génératrices simples, des plans tangents déterminés; car, les trois premières directions singulières étant des droites doubles du cône (K), le nombre total des conditions est égal à quatorze, nombre requis pour la détermination d'un cône biquadratique dont le sommet est donné. On indiquera plus loin une autre définition géométrique de ce cône.

3° L'équation $I = 0$ représente le cône isotrope ayant le point G pour sommet.

4° Enfin l'équation $L = 0$ est celle du cône de Chasles relatif au point G, c'est-à-dire du cône du second degré, lieu des normales menées du point G à toutes les quadriques homofocales à la proposée.

Ceci posé, la forme (15) de l'équation du cône du complexe montre que ce cône contient les droites suivantes :

1° *Les droites isotropes du cône circonscrit* (H). On sait, d'après la Remarque II du n° 3, que ces droites sont des directrices exceptionnelles.

2° *Les droites communes aux deux cônes* (H) *et* (L). A cause du facteur L^2, les plans tangents au cône du complexe suivant ces droites sont tangents à (H) et, par suite, à (S). Ces droites sont directrices des sections faites dans S par les plans tangents considérés, puisqu'elles sont normales aux surfaces homofocales à S passant par leurs points de contact avec S, comme appartenant au cône de Chasles.

3° *Les droites isotropes du cône directeur de* S *ayant* G *pour sommet.* Ces droites sont des directrices doubles dans le sens de la remarque III du n° 3 et sont, par suite, des *génératrices doubles* du cône du complexe. On le vérifie aisément en calculant les dérivées partielles du premier membre de (15) et en constatant que ces dérivées sont annulées par les valeurs, déjà données, de x, y, z, relatives à chacune des droites considérées.

4° *Les droites d'intersection des cônes* (K) et (L) qui sont : d'abord les parallèles aux axes de S, droites doubles du cône (K) et aussi du cône du complexe, et deux autres droites imaginaires suivant lesquelles ce dernier cône touche (K).

Il importe d'observer que les directrices exceptionnelles issues de G sont comprises dans cette énumération, ce qui justifie, ainsi que nous l'avions annoncé, la généralité de la condition (13).

7. Nous venons de constater que les directrices singulières issues du point G, au nombre de sept, sont des arêtes doubles du cône du complexe. Il n'existe pas d'ailleurs, en général, d'autres arêtes doubles en dehors de celles dont on vient de parler, puisqu'il n'y a pas d'autres directrices doubles.

D'après ce qui a été dit (*Remarque III* du n° 3) concernant les positions des directrices singulières, les arêtes doubles du cône du complexe sont situées, trois à trois, sur six plans parallèles aux plans cycliques réels ou imaginaires de la quadrique.

Ces conséquences ont lieu quelle que soit la position du point G, pourvu que ce point soit situé à distance finie et que l'une des expressions H, K, I, L ne s'annule pas identiquement pour les coordonnées de ce point. La dernière de ces expressions L peut seule présenter cette particularité, ce qui a lieu quand le point G est le centre de S. Dans ce cas le cône du complexe est formé de l'ensemble des cônes (H) et (K). Cette remarque fournit la seconde définition géométrique que nous avions annoncée pour le cône (K).

Pour toutes les positions à distance finie du point G, autres que le centre de S, le cône du complexe est indécomposable, sans quoi ce cône aurait un nombre d'arêtes doubles supérieur à trois dans un plan, ou bien un nombre total de ces arêtes supérieur à sept. Il n'existe donc pas, à distance finie, de surface des singularités pour le complexe étudié.

Enfin, d'après le nombre total de ses arêtes doubles, le cône du complexe est de la *seizième classe*.

8. Supposons maintenant que le point G s'éloigne à l'infini dans la direction définie par les équations

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}.$$

L'équation du cylindre auquel, dans ce cas, se réduit le cône du complexe, n'est autre que l'équation de condition (13) où l'on regardera x_0, y_0, z_0 comme des coordonnées courantes, et l, m, n comme des constantes.

Ce cylindre est du second degré, à moins que la direction donnée ne coïncide avec l'une des sept directions singulières, auquel cas l'équation (13) devient une identité, ce qui doit être (*Remarque III* du n° 3).

On a, dès lors, la proposition suivante :

Le lieu des droites parallèles à une direction donnée non singulière qui sont directrices de sections planes de S *est un cylindre du second degré qui touche, suivant deux droites, le cylindre parallèle circonscrit à* S.

Dans le système d'axes adopté, ces droites sont contenues dans le plan représenté par l'équation

$$mnx(B - C) + nly(C - A) + lmz(A - B) = 0.$$

On peut dire également que, lorsque le point G s'éloigne à l'infini, le cône du complexe se décompose en un cylindre du second degré et le plan de l'infini pris quatre fois.

9. Pour toute droite D appartenant au complexe, on sait construire le foyer correspondant F et le plan de la section (nos 2 et 3). Les équations qui déterminent le foyer sont les équations (10) où x', y', z' désignent les coordonnées de ce foyer et x_1, y_1, z_1 celles du milieu de la corde interceptée par D dans la quadrique. On remplacera x_1, y_1, z_1 par leurs valeurs déduites des formules (3) et (4).

Les équations (10) deviennent illusoires quand le dénominateur s'annule. Mais, dans ce cas, tous les numérateurs doivent être nuls pour que les équations (7) et (9) du cercle représentatif (A_0) et de la droite Δ soient compatibles. Alors, si S_1 est nul, la directrice D est une tangente à S. Si S_1 est différent de zéro, deux au moins des quantités l, m, n sont nulles et la direction D est parallèle à l'un des axes de S. Dans les deux cas, on sait trouver directement le foyer correspondant à D.

L'équation du plan (F, D) de la section s'obtient aussi sans difficulté. Nous nous bornerons à l'écrire

$$
\begin{aligned}
(16)\qquad & l(x-x_0)[Bn^2(C-A)+Cm^2(B-A)] \\
& +m(y-y_0)[Cl^2(A-B)+An^2(C-B)] \\
& +n(z-z_0)[Am^2(B-C)+Bl^2(A-C)]=0.
\end{aligned}
$$

Cette équation convient à tous les cas, sauf ceux dans lesquels la droite D est une directrice singulière. On traitera directement ces cas particuliers à l'aide des *Remarques II* et *III* du n° 3.

L'équation (16) montre que les plans des sections admettant pour directrices des droites parallèles sont aussi parallèles entre eux, ce qui pouvait être prévu.

10. Jusqu'à présent nous avons supposé que les axes de la quadrique S sont inégaux, c'est-à-dire qu'elle n'est pas de révolution.

Quand il en est ainsi, deux des quantités A, B, C sont égales. Soit, par exemple, $A=B$, auquel cas la surface est de révolution autour de l'axe des z. L'équation de condition (13) se décompose en deux. D'abord on a la solution $n^2=0$, qui donne deux fois toutes les droites perpendiculaires à l'axe de révolution, ce qui ne doit pas étonner, attendu que les directions de ces droites sont des directions principales de la quadrique. On obtient, en second lieu, la condition

$$
\begin{aligned}
A^2(l^2+m^2)\left[S_0\left(\frac{l^2+m^2}{A}+\frac{n^2}{C}\right)-\left(\frac{lx_0+my_0}{A}+\frac{nz_0}{C}\right)^2\right] \\
=(l^2+m^2+n^2)(lx_0-my_0)^2,
\end{aligned}
$$

qui fournit un cône du quatrième degré pour le cône du complexe.

Les formules et les résultats obtenus peuvent aussi s'appliquer, avec de légères modifications, au cas où la surface est un cône. Dans ce cas, l'équation de S peut s'écrire

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=0.$$

Le seul changement porte sur les valeurs de S_1 et S_0. Pour le cône, on a

$$S_0 = \frac{x_0^2}{A} + \frac{y_0^2}{B} + \frac{z_0^2}{C}.$$

Le cône du complexe est encore du sixième ordre quand S est un cône quelconque, et du quatrième pour le cas où S est un cône de révolution. Lorsque le point G est à l'infini, le cylindre du complexe devient alors l'ensemble de deux plans.

III. — Courbe du complexe.

11. La courbe du complexe relative à un plan P est, comme on sait, l'enveloppe Γ des droites du complexe situées dans le plan P. En général, la classe de cette courbe est égale au degré du cône du complexe.

Il en résulte que, dans le problème actuel, *la courbe* Γ *du complexe est de la sixième classe.*

Pour s'en rendre compte directement, il suffit de remarquer que les tangentes à la courbe Γ menées par un point G du plan P sont les directrices issues de G et contenues dans P. Ces droites sont donc les arêtes de section du plan P et du cône du complexe ayant G pour sommet. Ce cône étant du sixième ordre, les droites cherchées sont au nombre de six, ce qui établit la proposition.

La considération du cas où le cône dégénère en un cylindre montre encore que le nombre des tangentes menées à la courbe Γ, parallèlement à une direction donnée de ce plan, est égal à *deux*. Il faut, en outre, leur adjoindre la droite de l'infini qui est ainsi une tangente quadruple.

L'équation de condition (13) met en évidence une propriété fort remarquable de la courbe Γ. Nous allons effectivement démontrer la proposition suivante :

12. Théorème. — *La courbe* Γ *contenue dans un plan* P *est homofocale à la section de la quadrique proposée par ce plan, pourvu que le plan considéré ne soit parallèle à aucune des directions isotropes du cône directeur de* S.

Supposons donc que le plan P ne soit parallèle à aucune des droites isotropes du cône directeur de S, lesquelles sont situées, comme on sait, sur le cône (K). Cherchons les tangentes isotropes de Γ, c'est-à-dire les tangentes situées à distance finie, que l'on peut mener à cette courbe par les ombilics (points circulaires) du plan P. Pour ces droites, on a

$$l^2 + m^2 + n^2 = 0;$$

comme l'équation (13) doit être vérifiée, il s'ensuit que l'un des facteurs du premier membre s'annule. Or ce facteur ne peut être le second, puisque, s'il en était ainsi, les directrices isotropes D seraient parallèles à l'une des directions isotropes du cône directeur de S, et il en serait de même du plan qui les contient, ce qui est contraire à l'hypothèse. C'est donc le premier facteur qui s'annule. Il en résulte que les tangentes isotropes à Γ sont aussi tangentes à la surface et, par suite, à la section, qui est, dès lors, homofocale à Γ, comme nous l'avons annoncé.

13. Lorsque le plan P, supposé non cyclique, est parallèle à un seul des axes de la quadrique, il renferme un seul point d'indétermination, savoir le point situé à l'infini sur l'axe considéré. Toute droite passant par ce point étant directrice double, il en résulte que la courbe Γ se décompose en ce point, regardé comme double, et en une courbe de *quatrième classe* homofocale à la conique de section faite dans S par le plan P.

Supposons que le plan P soit parallèle à deux axes de S, ou, ce qui revient au même, à l'un des plans principaux de cette surface. Dans ce cas, le plan P contient deux points d'indétermination pris chacun deux fois et, dès lors, la courbe Γ se décompose en ces deux points et en une courbe de *deuxième classe* homofocale à la conique de section. Donc :

Les directrices des sections planes d'une quadrique qui sont contenues dans un plan parallèle à l'un des plans principaux de cette surface enveloppent une conique homofocale à la conique de section, si l'on excepte celles de ces droites qui sont parallèles aux axes de la section considérée.

La conique qui constitue, à proprement parler, l'enveloppe cherchée est évidemment tangente aux directrices de la section, ce qui achève de la déterminer.

L'équation (16) montre que les droites D situées dans un plan P parallèle à un plan principal de S sont les directrices de sections planes dont les plans sont perpendiculaires à P.

14. Supposons maintenant que le plan P soit parallèle à une seule des droites isotropes du cône directeur de S, auquel cas ce plan est imaginaire. Soit ω le point situé à l'infini dans la direction isotrope considérée. Ce point est, comme on sait, un point d'indétermination. Si l'on considère les six directrices issues d'un point quelconque G de ce plan, deux de ces droites se confondront toujours avec la directrice double $G\alpha$. Donc la courbe Γ se décompose en ce point ω pris deux fois, et en une courbe de *quatrième classe*.

Le second point circulaire du plan P est généralement distinct de ω et n'est pas un point d'indétermination. Les tangentes menées de ce point à la partie restante de la courbe Γ sont tangentes à la conique de section par le plan P. On le verrait aisément en répétant le raisonnement du nº 12.

Examinons enfin le cas où le plan P contient deux directions isotropes du cône directeur de S, ce qui revient à dire que ce plan est un des plans cycliques réels ou imaginaires de la surface. Un pareil plan étant aussi parallèle à l'un des axes de S renferme trois points d'indétermination. Par suite, quel que soit le point G pris sur le plan P, les six droites D, contenues dans P et issues de G, sont celles qui joignent ce point G aux points d'indétermination dont on vient de parler, chacune d'elles étant prise deux fois.

Donc, les seules directrices situées dans un plan cyclique de la quadrique proposée sont les directrices singulières qui lui sont parallèles.

15. Il paraît difficile de déduire de la condition (13) les degrés des courbes relatives soit au cas général, soit aux cas particuliers que nous avons examinés. C'est par cette recherche que nous terminerons cette étude et, à cet effet, nous procéderons comme il suit.

Supposons que le plan P soit réel, et prenons ce plan pour plan des xy dans un système d'axes rectangulaires, tels que les axes des x et des y coïncident avec les axes de la section faite dans la quadrique par le plan P. L'équation de cette quadrique S sera

$$A z^2 + 2z(Bx + Cy + D) + \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} - 1 = 0. \tag{17}$$

Nous nous proposons de trouver la condition pour qu'une droite D située dans le plan des xy (P) soit directrice d'une section plane de S.

Les équations de D sont

$$\left\{ \begin{aligned} & z = 0, \\ & ux + vy + w = 0, \end{aligned} \right. \tag{18}$$

et il s'agit de trouver la relation qui doit exister entre u, v, w pour que cette droite possède la propriété énoncée. Les calculs sont analogues à ceux du n° 4, et nous nous bornerons à écrire les résultats.

Les coordonnées du milieu de la corde interceptée par D étant

$$x_1 = -\frac{\alpha u w}{\alpha u^2+\beta v^2},$$

$$y_1 = -\frac{\beta v w}{\alpha u^2+\beta v^2},$$

$$z_1 = 0,$$

le cercle représentatif (A) a pour équations

$$(20) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x-x_1}{u} = \frac{y-y_1}{v},\\ &(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z^2 = \frac{\alpha\beta(w^2-\alpha u^2-\beta v^2)(u^2+v^2)}{(\alpha u^2+\beta v^2)^2}, \end{aligned}\right.$$

et les coordonnées x', y', z' du point où le plan perpendiculaire au milieu du segment aa' rencontre la droite Δ, polaire conjuguée de D, sont fournies par les formules

$$(20) \qquad \left\{\begin{aligned} x'-x_1 &= -\frac{\alpha\beta u(w^2-\alpha u^2-\beta v^2)(\mathrm{B}v-\mathrm{C}u)}{(\alpha u^2+\beta v^2)[\mathrm{B}\alpha v w-\mathrm{C}\beta u w-\mathrm{D}(\alpha-\beta)uv]},\\ y'-y_1 &= -\frac{\alpha\beta v[w^2-\alpha u^2-\beta v^2](\mathrm{B}v-\mathrm{C}u)}{(\alpha u^2+\beta v^2)[\mathrm{B}\alpha v w-\mathrm{C}\beta u w-\mathrm{D}(\alpha-\beta)uv]},\\ z' &= -\frac{uv(\alpha-\beta)(w^2-\alpha u^2-\beta v^2)}{(\alpha u^2+\beta v^2)[\mathrm{B}\alpha v w-\mathrm{C}\beta u w-\mathrm{D}(\alpha-\beta)uv]}. \end{aligned}\right.$$

En exprimant que ces coordonnées vérifient la seconde des équations (20), on trouve la condition demandée, laquelle, après la suppression du facteur étranger $w^2-\alpha u^2-\beta v^2$ et quelques réductions faciles, prend la forme

$$(22) \qquad \begin{aligned} &(w^2-\alpha u^2-\beta v^2)[\alpha^2\beta^2(\mathrm{B}v-\mathrm{C}u)^2(u^2+v^2)+u^2v^2(\alpha-\beta)^2]\\ &\quad = \alpha\beta(u^2+v^2)[\mathrm{B}\alpha v w-\mathrm{C}\beta u w-\mathrm{D}(\alpha-\beta)uv]^2. \end{aligned}$$

Si la condition (22) est satisfaite, la droite D est directrice d'une section plane, telle que le foyer correspondant ait pour coordonnées les valeurs de x', y', z', déduites des formules (21), l'équation du plan (F, D) de la section étant

$$(23) \qquad (\alpha-\beta)uv(ux+vy+w)-\alpha\beta(u^2+v^2)(Bv-Cu)z=0.$$

L'équation (22) est l'équation tangentielle de la courbe Γ contenue dans le plan P. On en déduit immédiatement que la courbe du complexe appartient, dans tous les cas, à la sixième classe.

On voit, de plus, que la droite de l'infini est une tangente quadruple, puisque l'équation (22) est seulement du second degré par rapport à w.

L'équation (22) met en évidence la propriété d'homofocalité constatée au n° 12. Cette même équation fournit aussi, par la comparaison des facteurs des deux membres, un nombre de tangentes plus que suffisant, en tenant compte des directrices de la section elle-même, pour déterminer la courbe du complexe contenue dans le plan donné.

A ces résultats connus, nous ajouterons que l'équation (22) et les formules (21) sont indépendantes du coefficient A de z^2 dans l'équation de S. Donc *les directrices contenues dans le plan* P *et les foyers correspondants sont les mêmes pour toutes les quadriques touchant la proposée suivant la section faite par ce plan.*

17. Nous évaluerons d'abord le degré de la courbe Γ dans le cas général où, les coefficients B et C étant différents de zéro avec $\alpha \gtrless \beta$, le plan P ne contient aucun point d'indétermination. Dans ce cas, la courbe Γ ne donne point lieu à des courbes partielles se réduisant à des points fixes.

Si elle n'admettait pas de tangentes multiples, son degré serait égal au produit $6\times 5=30$. L'existence d'une tangente quadruple, savoir la droite de l'infini, diminue ce dernier nombre de 12 unités. Cherchons les tangentes doubles. L'équation (22), ordonnée par rapport à w, est de la forme

$$(24) \qquad w^2\varphi_4(u,v)+2w\varphi_5(u,v)+\varphi_6(u,v)=0,$$

φ_4, φ_5, φ_6 étant des fonctions homogènes de u et de v, dont les degrés sont égaux aux indices. S'il existe une tangente double à distance finie, elle correspond à une valeur du rapport $\frac{u}{v}$, pour laquelle l'équation précédente acquiert une racine double en w. Cette valeur de $\frac{u}{v}$ sera donc fournie par l'équation du dixième degré

$$(25) \qquad \overline{\varphi_5(u,v)}^2-\varphi_4(u,v)\varphi_6(u,v)=0.$$

Cependant les solutions de l'équation (25) correspondent non seulement aux tangentes doubles, mais encore aux points où la droite de l'infini coupe la courbe Γ; car, pour ces points, on a, outre la droite de l'infini qui compte pour quatre, deux nouvelles tangentes confondues. Si n est le degré inconnu de Γ, la droite de l'infini qui touche cette courbe en 4 points ne la coupe qu'en $n-8$ autres points, ce qui fait en tout $n-4$ points différents, donnant un nombre égal de solutions étrangères pour les tangentes doubles que nous cherchons. Le nombre exact de ces tangentes doubles est donc égal à $10-(n-4)=14-n$. Chacune d'elles diminuant le degré de deux unités, on a l'équation

$$30-12-2(14-n)=n;$$

d'où l'on tire

$$n=10.$$

Ainsi, dans le cas général, la courbe du complexe est une courbe du dixième degré, admettant la droite de l'infini pour tangente quadruple et quatre tangentes doubles.

18. Supposons maintenant que le plan P, sans être un plan cyclique, soit parallèle à l'un des axes de S. Alors $\alpha \gtrless \beta$ et l'un des coefficients B ou C est nul. Soit, par exemple, $C=0$, auquel cas le plan des xz est le plan de symétrie de la quadrique donnée auquel le plan P est perpendiculaire.

Dans ce cas, *qui est aussi le cas général relatif aux quadriques de révolution,* l'équation (22) se décompose en deux, savoir $v^2=0$ et

$$\begin{aligned}(w^2-\alpha u^2-\beta v^2)[\alpha^2\beta^2 B^2(u^2+v^2)+u^2(\alpha-\beta)^2]\\ =\alpha\beta(u^2+v^2)[B\alpha w-D(\alpha-\beta)u]^2.\end{aligned} \tag{26}$$

La courbe Γ est l'ensemble de deux autres, savoir le point à l'infini dans la direction de l'axe des y pris deux fois, et la courbe de quatrième classe et de degré inconnu n, représentée par l'équation (26). Pour cette courbe, la droite de l'infini est une tangente double. Afin d'obtenir les autres tangentes doubles, nous ordonnerons l'équation (26) par rapport à w, ce qui donne

$$w^2\varphi_2(u,v)+2w\varphi_3(u,v)+\varphi_4(u,v)=0, \tag{27}$$

φ_2, φ_3, φ_4 étant des fonctions homogènes de u et de v, dont les degrés sont égaux aux indices. Comme précédemment, les valeurs du rapport $\frac{u}{v}$, relatives aux tangentes doubles, sont des solutions de l'équation du sixième degré

$$\overline{\varphi_3(u, v)}^2 - \varphi_2(u, v)\varphi_4(u, v) = 0. \tag{28}$$

Le nombre des solutions étrangères est égal au nombre des points distincts où la droite de l'infini rencontre la courbe, savoir $n - 2$. Par suite, le nombre exact des tangentes doubles situées à distance finie est $6 - (n - 2) = 8 - n$, et le nombre total de ces tangentes est $9 - n$. Le degré $4 \times 3 = 12$ de la courbe générale de quatrième classe est donc diminué d'un nombre d'unités égal à $2(9 - n)$, ce qui donne l'équation

$$12 - 2(9 - n) = n;$$

d'où l'on déduit

$$n = 6.$$

Ainsi, dans le cas particulier où le plan P *est perpendiculaire à un plan principal de la quadrique* S, *la partie restante de la courbe* Γ *est du sixième degré et admet trois tangentes doubles, dont deux seulement sont à distance finie.*

19. Lorsque le plan P est parallèle à deux axes de la quadrique, B et C sont nuls. La courbe Γ se décompose en deux points doubles, pris à l'infini sur les axes des x et des y, et une courbe de deuxième classe représentée par l'équation

$$(w^2 - \alpha u^2 - \beta v^2) = \alpha\beta D^2(u^2 + v^2).$$

Dans le cas où le plan P est un plan cyclique, $\alpha = \beta$, et l'on a les solutions

$$u^2 v^2 = 0, \qquad (u^2 + v^2)^2 = 0,$$

ce qui donne les résultats obtenus précédemment (n° 14).

En terminant, nous ferons observer que la méthode exposée met en évidence deux autres complexes : l'un, formé des droites Δ polaires conjuguées des directrices D, est le corrélatif du complexe étudié et peut être regardé comme connu dans ses éléments principaux; le second est constitué par les cercles représentatifs des directrices D. Pour le moment, nous nous bornerons à le signaler.