ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

CH. BIOCHE

Sur les systèmes de courbes qui divisent homographiquement les génératrices d'une surface réglée

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 3 (1889), p. N1-N41

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1889_1_3__N1_0>

SUR

LES SYSTÈMES DE COURBES

QUI DIVISENT HOMOGRAPHIQUEMENT

LES GÉNÉRATRICES D'UNE SURFACE RÉGLÉE;

PAR M. CH. BIOCHE.

INTRODUCTION.

On sait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de courbes divise homographiquement les génératrices d'une surface réglée est que ce système vérifie une équation de Riccati, comme cela a lieu, par exemple, pour les lignes asymptotiques des surfaces gauches. Si l'on détermine un point sur la surface considérée : 1° par la longueur r du segment compté sur la génératrice qui passe par ce point, à partir d'une courbe *directrice;* 2° par l'arc s de cette courbe qui a pour extrémité le point où elle est rencontrée par la génératrice en question, une équation de Riccati comme celles dont il s'agit peut s'écrire

$$\frac{dr}{ds} = \mathrm{A}r^2 + \mathrm{B}r + \mathrm{C},$$

A, B, C étant des fonctions quelconques de s. Si $\mathrm{A} = 0$, la division des génératrices se fait en segments proportionnels; si $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{B} = 0$, les segments sont égaux. Si $\mathrm{A} \neq 0$, les segments n'étant ni égaux ni proportionnels, je dirai que la division est du *type général.*

Les fonctions A, B, C étant quelconques, on peut former une infinité de systèmes qui divisent homographiquement les génératrices; pour abréger, j'appellerai de pareils systèmes de courbes *systèmes homographiques.* Par suite, on peut se proposer de déterminer et d'étudier ceux des systèmes de cette nature qui sont assujettis à des conditions particulières; c'est ce qui fait le sujet de ce Mémoire. Les surfaces gauches offrent, comme on le verra, un champ d'études bien plus important que les surfaces développables, quoique celles-ci présentent parfois quelque intérêt.

Voici maintenant quelques indications sur le contenu de ce Mémoire :

Dans la première Partie, je résume les formules et théorèmes généraux utiles pour l'étude que je me propose. Je puis ainsi préciser les notations dont je me sers et abréger les démonstrations qui figurent dans les Parties suivantes, en supprimant dans ces démonstrations les détails qui ne se rapportent pas uniquement aux théorèmes à démontrer. Il est difficile d'affirmer la nouveauté de certains résultats ; mais, sauf ceux qui sont absolument classiques et pour lesquels, d'ailleurs, j'ai presque toujours cité des noms d'auteurs, je n'ai trouvé nulle part une partie de ceux que je donne, et je crois que quelques-unes des formules de ce Mémoire sont d'une utilité très générale pour la théorie des surfaces réglées, en particulier pour l'étude des surfaces passant par une courbe donnée ou pour celle de la déformation des surfaces.

Les théorèmes contenus dans les deuxième, troisième et quatrième Parties sont pour la plupart énoncés dans une Note que M. Darboux a bien voulu faire insérer au *Bulletin des Sciences mathématiques* (décembre 1888). Il n'est donc guère nécessaire de les résumer de nouveau.

Je me sers constamment, pour définir les courbes à étudier, de coordonnées *à la surface;* de cette façon j'ai facilement des propriétés géométriques des courbes et des surfaces sur lesquelles elles sont tracées, sans faire intervenir des éléments étrangers comme des systèmes d'axes n'ayant pas de relation nécessaire avec la figure à étudier. D'ailleurs, un grand nombre des propriétés que j'étudie subsistent lorsqu'on déforme les surfaces, ce qui n'altère pas les coordonnées dont je me sers, tandis que ces propriétés ne subsisteraient pas dans une transformation homographique qui altérerait les angles et les longueurs.

PREMIÈRE PARTIE.

REPRÉSENTATION ANALYTIQUE D'UNE SURFACE RÉGLÉE.

---

1. Une surface réglée peut être définie comme engendrée par une droite qui s'appuie sur une *directrice* et se meut d'après une loi déterminée. Soient x, y, z les coordonnées d'un point de la directrice, a, b, c les cosinus des angles que la génératrice fait avec les trois axes des coordonnées, que je suppose rectangulaires, les équations d'une génératrice peuvent s'écrire

$$\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}=\frac{Z-z}{c}=r,$$

X, Y, Z étant les coordonnées constantes et r un paramètre variable. Si x, y, z, a, b, c sont fonctions d'une variable indépendante, par exemple de l'arc s de la *directrice*, lorsque cette variable prend toutes les valeurs possibles, la droite engendre une surface, et toute relation entre r et s définit une courbe sur cette surface.

Lorsque la directrice est une courbe, pour définir la position de la génératrice, indépendamment des axes de coordonnées dont j'ai parlé, et qui n'ont en général aucune relation essentielle avec la surface, je rapporterai la génératrice au trièdre formé par la tangente, la normale principale et la binormale. J'appelle λ, μ, ν les cosinus directeurs de la génératrice par rapport aux arêtes de ce trièdre, les directions de ces arêtes étant définies par rapport aux axes primitifs par les cosinus que donne le Tableau suivant :

	OX.	OY.	OZ.
Tangente......................	α	β	γ
Normale......................	α'	β'	γ'
Binormale....................	α''	β''	γ''

Les cosinus a, b, c sont alors donnés par les équations

$$a=\lambda\alpha+\mu\alpha'+\nu\alpha'', \qquad b=\lambda\beta+\mu\beta'+\nu\beta'', \qquad c=\lambda\gamma+\mu\gamma'+\nu\gamma''.$$

On a en outre, entre les différents groupes de cosinus, les relations bien connues qui existent entre les cosinus de trois directions rectangulaires.

2. Si l'on appelle ω et π les courbures de la directrice, les dérivées des cosinus a, b, c, prises par rapport à l'axe, sont données par des expressions telles que

$$\frac{da}{ds} = \left(\frac{d\lambda}{ds} - \mu\omega\right)\alpha + \left(\lambda\omega + \nu\pi + \frac{d\mu}{ds}\right)\alpha' + \left(\frac{d\nu}{ds} - \mu\pi\right)\alpha'',$$

lorsqu'on tient compte des formules classiques de M. Frenet. Je poserai, pour abréger,

$$\frac{d\lambda}{ds} - \mu\omega = \mathrm{L}, \qquad \frac{d\mu}{ds} + \lambda\omega + \nu\pi = \mathrm{M}, \qquad \frac{d\nu}{ds} - \mu\pi = \mathrm{N}.$$

Les quantités L, M, N sont liées par l'identité

$$\mathrm{L}\lambda + \mathrm{M}\mu + \mathrm{N}\nu = 0.$$

L'emploi des cosinus λ, μ, ν donne souvent de la symétrie aux calculs; mais, pour réduire à son minimum le nombre des paramètres nécessaires, je me servirai également d'angles θ et φ, tels que

$$\lambda = \cos\theta, \qquad \mu = \sin\theta\cos\varphi, \qquad \nu = \sin\theta\sin\varphi;$$

θ est alors l'angle de la génératrice avec la directrice et φ l'angle du plan osculateur à la directrice avec le plan tangent à la surface. On calcule facilement les expressions de L, M, N au moyen de θ et φ.

Si la directrice était une droite, j'emploierais des angles θ et φ, le premier conservant la signification qu'il a dans le cas général, le second étant l'angle que le plan passant par la directrice et la génératrice fait avec un plan fixe mené par la directrice. D'ailleurs, la plupart des calculs relatifs au cas général s'appliquent sans difficulté au cas d'une directrice rectiligne.

3. Je prendrai, en général, pour directrice la *ligne de striction*, parce que cette ligne est unique sur une surface gauche et que les formules se simplifient ordinairement dans ce cas. Pour une surface développable, la directrice sera l'arête de rebroussement; les génératrices sont tangentes à cette courbe, donc $\theta = 0$.

La condition pour que la directrice d'une surface gauche soit ligne de striction s'obtient en écrivant que le plan tangent au point situé sur la directrice (*point central*) est perpendiculaire au plan tangent à l'infini. On trouve ainsi, comme condition nécessaire et suffisante, $\theta =$ const. si la directrice est rectiligne, et

$$L = -\sin\theta\left(\frac{d\theta}{ds} + \omega\cos\varphi\right) = 0$$

si la directrice est une courbe. On déduit de cette dernière relation des théorèmes importants : *Si la ligne de striction coupe la génératrice sous un angle constant, elle est ligne géodésique, et réciproquement;* et, de plus, *Si une ligne géodésique coupe les génératrices sous un angle constant, elle est ligne de striction,* thèorèmes dus à M. O. Bonnet.

Paramètre de distribution.

4. Si l'on appelle ψ l'angle qu'un plan tangent à une surface gauche fait avec le *plan central,* on a, r étant la distance du point de contact au point central,

$$\operatorname{tang}\psi = Kr.$$

K est une fonction de s seulement, c'est le *paramètre de distribution des plans tangents.* Cette quantité est la limite du quotient de l'angle de deux génératrices infiniment voisines par leur plus courte distance. On a donc, *en supposant que la directrice soit ligne de striction,*

$$K^2 = \frac{da^2 + db^2 + dc^2}{ds^2\sin^2\theta} = \frac{L^2 + M^2 + N^2}{\sin^2\theta}$$

si l'on remarque que $L = 0$ et que l'on a identiquement

$$(M^2 + N^2)(\mu^2 + \nu^2) = (M\mu + N\nu)^2 + (M\nu - N\mu)^2;$$

la première parenthèse étant nulle en vertu d'une identité donnée plus haut, on obtient facilement

$$K = \frac{M}{\nu} = \frac{-N}{\mu} = \pi - \frac{d\varphi}{ds} + \cot\theta\sin\varphi,$$

les signes étant pris dans l'extraction des racines de façon que, pour une surface de binormales, on trouve $K = \pi$.

On déduit des formules précédentes les expressions de M et de N au moyen de K, de sorte que l'on obtient les expressions suivantes, utiles pour beaucoup de calculs,

$$\frac{da}{ds} = \mathrm{K}(\alpha'\nu - \alpha''\mu) = \mathrm{K}\sin\theta(\alpha'\sin\varphi - \alpha''\cos\varphi),$$

$$\frac{db}{ds} = \mathrm{K}(\beta'\nu - \beta''\mu) = \mathrm{K}\sin\theta(\beta'\sin\varphi - \beta''\cos\varphi),$$

$$\frac{dc}{ds} = \mathrm{K}(\gamma'\nu - \gamma''\mu) = \mathrm{K}\sin\theta(\gamma'\sin\varphi - \gamma''\cos\varphi);$$

si la ligne de striction est une droite, on a, en prenant cette droite pour axe des z,

$$a = \sin\theta\cos\varphi, \qquad b = \sin\theta\sin\varphi, \qquad c = \cos\theta;$$

θ étant constant, on en déduit

$$\mathrm{K}^2\sin^2\theta = \frac{da^2}{ds^2} + \frac{db^2}{ds^2} + \frac{dc^2}{ds^2} = \sin^2\theta\frac{d\varphi^2}{ds^2},$$

d'où

$$\mathrm{K} = \pm\frac{d\varphi}{ds}.$$

Expression de l'arc d'une courbe tracée sur une surface réglée.

5. Si l'on différentie les coordonnées X, Y, Z des points d'une courbe tracée sur une surface réglée, on obtient des expressions de la forme

$$\frac{d\mathrm{X}}{ds} = \alpha + r\frac{da}{ds} + a\frac{dr}{ds},$$

de sorte que si l'on appelle Σ l'arc de la courbe considérée, on a

$$\frac{d\Sigma^2}{ds^2} = \frac{dr^2}{ds^2} + 2\frac{dr}{ds}\cos\theta + (\mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2)r^2 + 2\mathrm{L}r + 1;$$

cette expression peut s'écrire sous une forme particulière qui conduit à des résultats intéressants. En groupant dans un carré les termes en $\frac{dr}{ds}$, on a

$$\frac{d\Sigma^2}{ds^2} = \left(\frac{dr}{ds} + \cos\theta\right)^2 + (\mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2)r^2 + 2\mathrm{L}r + \sin^2\theta.$$

Si la directrice est ligne de striction, et seulement dans ce cas, le terme en r

disparaît du trinôme indépendant de $\frac{dr}{ds}$, qui devient alors

$$\sin^2\theta(1 + K^2 r^2).$$

Or, ce trinôme pouvant toujours s'écrire

$$(L^2 + M^2 + N^2)\left(r + \frac{L}{L^2 + M^2 + N^2}\right)^2 + \frac{(L^2 + M^2 + N^2)\sin^2\theta - L^2}{L^2 + M^2 + N^2},$$

on voit que l'équation de la ligne de striction, lorsque la directrice est quelconque, est de la forme

$$r = -\frac{L}{L^2 + M^2 + N^2}.$$

En outre, lorsque la directrice est ligne de striction, le quotient du coefficient de r^2 par le terme indépendant est égal à K^2; de sorte qu'on a, comme expression générale de ce paramètre,

$$K^2 = \frac{(L^2 + M^2 + N^2)^2}{(L^2 + M^2 + N^2)\sin^2\theta - L^2},$$

et si l'on tient compte de l'identité

$$L\lambda + M\mu + N\nu = 0,$$

cette expression se réduit à

$$K = \frac{L^2 + M^2 + N^2}{M\nu - N\mu}.$$

Par exemple, pour une surface formée par les normales principales d'une courbe, on a, en prenant cette courbe pour directrice,

$$r = \frac{\omega}{\omega^2 + \pi^2},$$

$$K = \frac{\omega^2 + \pi^2}{\pi}.$$

Si la directrice est une droite, on trouve sans difficulté pour l'équation de la ligne de striction

$$r = \frac{\sin\theta \frac{d\theta}{ds}}{\frac{d\varphi^2}{ds^2}\sin^2\theta + \frac{d\theta^2}{ds^2}},$$

et pour l'expression du paramètre de distribution

$$K = \pm \frac{\frac{d\varphi}{ds}\sin^2\theta}{\frac{d\varphi^2}{ds^2}\sin^2\theta + \frac{d\theta^2}{ds^2}}.$$

6. Les formules générales, relatives au cas où la directrice est une courbe, sont applicables à l'hypothèse où la surface réglée deviendrait développable, il suffit de faire K infini; la condition que l'on obtient alors est

$$\sin^2\theta\left(\pi + \omega\cot\theta\sin\varphi - \frac{d\varphi}{ds}\right) = 0,$$

et la distance d'un point de la directrice au point correspondant de l'arête de rebroussement est donnée par

$$r = \frac{\sin\theta}{\frac{d\theta}{ds} + \omega\cos\varphi}.$$

Ces formules donnent très simplement toute la théorie des surfaces développables qui passent par une courbe donnée.

7. L'expression de $d\Sigma$ prend une forme particulière qui sera utile lorsqu'on y introduit l'angle i de la courbe avec les génératrices. Si l'on prend pour directrice la ligne de striction, l'angle i est donné par

$$\operatorname{tang}^2 i = \frac{\sin^2\theta(1 + K^2 r^2)}{\left(\frac{dr}{ds} + \cos\theta\right)^2};$$

on peut donc écrire

$$\frac{d\Sigma^2}{ds^2} = (1 + K^2 r^2)\sin^2\theta(1 + \cot^2 i) = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2 i}(1 + K^2 r^2),$$

et, comme on sait que

$$K r = \operatorname{tang}\psi,$$

on a finalement

$$\frac{d\Sigma}{ds} = \frac{\sin\theta}{\sin i \cos\psi}.$$

Lignes asymptotiques.

8. Les lignes asymptotiques jouent un rôle important dans diverses questions relatives aux systèmes de courbes homographiques, dont elles offrent d'ailleurs un premier exemple. Je vais donc chercher l'équation de ces lignes et les expressions des coefficients de cette équation au moyen des quantités qui servent à déterminer complètement une surface gauche.

Les lignes asymptotiques ayant pour propriété essentielle d'avoir en chaque point leur plan osculateur tangent à la surface sur laquelle elles sont tracées, pour avoir leur équation, il suffit d'écrire que le plan osculateur à une ligne contient la génératrice. Le plan osculateur en un point X, Y, Z étant, lorsque les coordonnées courantes sont ξ, η, ζ,

$$\begin{vmatrix} \xi - X & \eta - Y & \zeta - Z \\ \dfrac{dX}{ds} & \dfrac{dY}{ds} & \dfrac{dZ}{ds} \\ \dfrac{d^2X}{ds^2} & \dfrac{d^2Y}{ds^2} & \dfrac{d^2Z}{ds^2} \end{vmatrix} = 0,$$

l'équation des lignes asymptotiques peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha + r\dfrac{da}{ds} & \beta + r\dfrac{db}{ds} & \gamma + r\dfrac{dc}{ds} \\ \omega\alpha' + r\dfrac{d^2a}{ds^2} + 2\dfrac{dr}{ds}\dfrac{da}{ds} & \omega\beta' + r\dfrac{d^2b}{ds^2} + 2\dfrac{dr}{ds}\dfrac{db}{ds} & \omega\gamma' + r\dfrac{d^2c}{ds^2} + 2\dfrac{dr}{ds}\dfrac{dc}{ds} \end{vmatrix} = 0;$$

elle est de la forme

$$2A_0\frac{dr}{ds} + A_1 r^2 + A_2 r + A_3 = 0.$$

9. Le coefficient de r^2 étant toujours

$$A_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \dfrac{da}{ds} & \dfrac{db}{ds} & \dfrac{dc}{ds} \\ \dfrac{d^2a}{ds^2} & \dfrac{d^2b}{ds^2} & \dfrac{d^2c}{ds^2} \end{vmatrix},$$

l'équation $A_1 = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour que a, b, c soient liés par une équation linéaire, autrement dit pour que la surface soit à plan directeur. Pour calculer les expressions des coefficients au moyen de ω, π, λ, μ, ν, il suffit d'employer l'identité suivante, qui est fréquemment utile,

$$\begin{vmatrix} l\alpha + m\alpha' + n\alpha'' & l\beta + m\beta' + n\beta'' & l\gamma + m\gamma' + n\gamma'' \\ l_1\alpha + m_1\alpha' + n_1\alpha'' & l_1\beta + m_1\beta' + n_1\beta'' & l_1\gamma + m_1\gamma' + n_1\gamma'' \\ l_2\alpha + m_2\alpha' + n_2\alpha'' & l_2\beta + m_2\beta' + n_2\beta'' & l_2\gamma + m_2\gamma' + n_2\gamma'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}.$$

Cette identité se démontre en multipliant le premier membre par

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

qui est égal à l'unité, et en tenant compte des équations de perpendicularité Si l'on suppose que la directrice est ligne de striction, on a, en se servant des expressions de $\frac{da}{ds}$, $\frac{db}{ds}$, $\frac{dc}{ds}$ au moyen du paramètre de distribution,

$$\begin{aligned} A_0 &= K(\mu^2 + \nu^2) = K \sin^2\theta, \\ A_1 &= K^2[\omega\nu - \lambda K(\mu^2 + \nu^2)] = K^2 \sin\theta(\omega \sin\varphi - K\cos\theta\sin\theta), \\ A_2 &= (\mu^2 + \nu^2)\frac{dK}{ds} = \sin^2\theta\frac{dK}{ds}, \\ A_3 &= \omega\nu = \omega\sin\theta\sin\varphi; \end{aligned}$$

de sorte que si l'on pose, pour abréger,

$$\omega \sin\varphi = \Omega,$$

on peut écrire l'équation des asymptotiques

$$2K\sin\theta\frac{dr}{ds} + K^2(\Omega - K\cos\theta\sin\theta)\,r^2 + \frac{dK}{ds}\sin\theta.r + \Omega = 0.$$

La quantité Ω est, d'après le théorème de Meusnier, la courbure de la section normale dont le plan contient la tangente à la ligne de striction.

Il résulte de la forme de l'équation des asymptotiques que les génératrices sont divisées homographiquement sur les surfaces qui ne sont pas à plan directeur; la division se faisant en segments proportionnels pour les surfaces à plan directeur, et en segments égaux pour celles de ces surfaces dont le paramètre de distribution est constant.

Courbure et déformation des surfaces réglées.

10. Gauss a montré que, lorsqu'on déformait une surface, le produit des rayons de courbure principaux restait invariable; l'inverse de ce produit est la *courbure totale* de la surface au point considéré. Pour une surface gauche on trouve, en appelant R, R' les rayons de courbure principaux,

$$\frac{1}{RR'} = -\frac{K^2}{(1+K^2r^2)^2}.$$

M. O. Bonnet a démontré que, si deux surfaces réglées étaient applicables l'une sur l'autre, les génératrices d'une de ces surfaces étaient les transformées des génératrices de l'autre ([1]). Les lignes de striction se correspondent de la même façon, car sur chaque génératrice le point central est le point de courbure totale maxima, et la courbure n'a pas changé; comme en outre on a, en ce point central,

$$\frac{1}{RR'} = -K^2,$$

on voit que K n'est pas non plus modifié. L'angle θ que chaque génératrice fait avec la ligne de striction ne l'étant pas non plus, comme la valeur de cet angle suffit à fixer complètement la direction de la génératrice par rapport à la ligne de striction, on voit que *la condition nécessaire et suffisante pour que deux surfaces gauches soient applicables l'une sur l'autre est que le système des fonctions* K *et* θ *de l'arc* s *soit le même pour les deux surfaces.* Théorème fondamental et classique.

11. Une surface gauche dépend de trois fonctions arbitraires : on peut prendre pour ces fonctions K, θ et la fonction Ω mise en évidence dans l'équation des lignes asymptotiques. Les surfaces applicables les unes sur les autres diffèrent par la fonction Ω. Par exemple, pour les surfaces applicables sur l'hyperboloïde de révolution, on a

$$K = \text{const.}, \qquad \theta = \text{const.} \neq 90^\circ.$$

Pour l'hyperboloïde, on a en outre $\Omega = K \operatorname{tg}\theta$.

([1]) *Journal de l'École Polytechnique,* XLII^e Cahier, p. 44, et *Comptes rendus,* 1863, t. LVII, p. 805.

La considération de ces fonctions K, θ, Ω donne facilement des théorèmes sur la déformation des surfaces. J'aurai à me servir des suivants :

Parmi toutes les surfaces gauches applicables les unes sur les autres, il y en a une à plan directeur (Bour). C'est celle pour laquelle la fonction Ω est donnée par

$$\Omega = \mathrm{K} \sin\theta \cos\theta.$$

Je montrerai tout à l'heure comment, connaissant K et θ, on peut avoir son équation en coordonnées cartésiennes.

On peut toujours déformer une surface de façon que la ligne de striction devienne ligne de courbure, si cette ligne n'est pas trajectoire orthogonale des génératrices. En effet, l'équation des lignes de courbure, qui peut s'obtenir dès à présent en considérant ces lignes comme bissectrices des angles des asymptotiques et des génératrices, peut s'écrire

$$\mathrm{K} \sin\theta \frac{dr^2}{ds^2} + \left[\mathrm{K}^2(\Omega - \mathrm{K}\sin\theta\cos\theta) r^2 + \frac{d\mathrm{K}}{ds}\sin\theta\, r + \Omega\right]\frac{dr}{ds}$$
$$+ (1 + \mathrm{K}^2 r^2)(\Omega\cos\theta - \mathrm{K}\sin\theta) + \cos\theta\sin\theta\frac{d\mathrm{K}}{ds} r = 0;$$

la condition pour que la ligne de striction soit ligne de courbure est

$$\Omega\cos\theta - \mathrm{K}\sin\theta = 0.$$

Cette équation détermine Ω toutes les fois que $\theta \neq 90^\circ$. Si θ est constant, la ligne de striction étant géodésique, si elle devient ligne de courbure, elle sera plane.

On pourrait de même établir plusieurs autres théorèmes; je me borne à ceux qui me seront utiles par la suite.

12. Si l'on déforme une surface développable, l'arête de rebroussement reste toujours arête de rebroussement, et sa courbure, étant égale à sa courbure géodésique, n'est pas changée, de sorte que toutes les surfaces pour lesquelles la courbure de l'arête de rebroussement est une fonction donnée de l'arc sont applicables les unes sur les autres. Et, lorsqu'on applique ces surfaces sur un plan, les génératrices deviennent tangentes à une courbe dont la courbure est toujours donnée par la fonction considérée.

Représentation analytique d'une surface à plan directeur.

13. Une surface à plan directeur peut se représenter par les équations

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = \mathrm{F}(\alpha), \qquad z = \varphi(\alpha).$$

La première donne la projection de la génératrice sur le plan directeur; l'enveloppe de cette projection est la projection de la ligne de striction. Le paramètre de distribution est donné par

$$\frac{1}{\mathrm{K}} = \frac{dz}{d\alpha} = \varphi'(\alpha).$$

Une surface à plan directeur est déterminée lorsqu'on donne la projection de la ligne de striction sur le plan directeur et le paramètre de distribution. Si la projection de la ligne de striction a pour équation tangentielle

$$f(u, v, w) = 0,$$

la surface à plan directeur est donnée par

$$f(-\sin\alpha, \cos\alpha, x\sin\alpha - y\cos\alpha) = 0, \qquad z = \varphi(\alpha).$$

La dépendance entre la projection de la ligne de striction, le paramètre de distribution et la surface peut s'exprimer sous une forme plus géométrique. La tangente à la ligne de striction fait avec la génératrice et, par suite, avec le plan directeur un angle θ; on a

$$\cos\theta = -\frac{\mathrm{F}(\alpha) + \mathrm{F}''(\alpha)}{\sqrt{[\mathrm{F}(\alpha) + \mathrm{F}''(\alpha)]^2 + \varphi'^2(\alpha)}}, \qquad \sin\theta = \frac{\varphi'(\alpha)}{\sqrt{[\mathrm{F}(\alpha) + \mathrm{F}''(\alpha)]^2 + \varphi'^2(\alpha)}}.$$

Or, le rayon de courbure de la projection de la ligne de striction étant

$$\mathrm{R} = -[\mathrm{F}(\alpha) + \mathrm{F}''(\alpha)],$$

on obtient la relation

$$\mathrm{KR} = \cot\theta;$$

de sorte que, si K et θ sont donnés en fonction de s, on peut obtenir la projection de la ligne de striction de la surface à plan directeur qui correspond à ce système de fonctions K et θ, cette projection étant déterminée par son rayon de courbure. J'aurai bientôt occasion de me servir de cette remarque.

DEUXIÈME PARTIE.

SYSTÈMES HOMOGRAPHIQUES COMPOSÉS DE TRAJECTOIRES.

Cas où les trajectoires coupent les génératrices sous un même angle.

1. L'angle i qu'une courbe tracée sur une surface gauche fait avec une génératrice est donné par

$$\tang^2 i = \frac{\sin^2\theta(1+K^2r^2)}{\left(\frac{dr}{ds}+\cos\theta\right)^2}.$$

Si $\frac{dr}{ds}$ est une fonction entière du second degré en r, $\tang^2 i$ s'exprime par une fraction dont le dénominateur est un carré parfait et dont le numérateur est toujours une somme de deux carrés; car $\sin\theta$ et K sont différents de zéro pour les génératrices non singulières; par suite, le numérateur ne sera jamais divisible par le dénominateur, et $\tang^2 i$ ne peut avoir une valeur indépendante de r que si l'un des termes est identiquement nul. Comme cela ne peut avoir lieu, d'après ce que je viens de dire, pour le numérateur, l'angle i ne peut être constant que si l'on a toujours

$$\frac{dr}{ds}+\cos\theta = 0,$$

c'est-à-dire s'il est droit. Donc les trajectoires orthogonales sont les seules lignes qui, coupant, *toutes sous un même angle,* les génératrices d'une surface gauche, déterminent sur ces génératrices des divisions homographiques.

2. Pour les surfaces développables, l'angle d'une courbe avec les génératrices étant donné par

$$\tang i = \frac{\omega r}{\frac{dr}{ds}+1},$$

on voit que les trajectoires sous un angle constant divisent toujours les génératrices en segments proportionnels. Ceci s'applique aux trajectoires des tangentes à une courbe plane.

Cas où l'angle varie d'une trajectoire à l'autre.

3. *Mise en équation du problème.* — On peut obtenir des systèmes de trajectoires pour lesquels l'angle *constant pour chaque courbe varierait de l'une à l'autre.* Les parallèles d'un hyperboloïde de révolution en donnent un exemple.

Pour obtenir ces systèmes, il suffit d'écrire que

$$\frac{d}{ds}(\operatorname{tang}^2 i) = 0$$

lorsqu'on y remplace $\frac{dr}{ds}$ par une fonction entière du second degré en r. En écrivant que l'équation ainsi fournie est vérifiée, quel que soit r, on a les équations de condition du problème.

Pour simplifier les calculs, je supposerai que l'équation de Riccati, qui définit le système homographique considéré, est prise sous la forme

$$\frac{dr}{ds} + \cos\theta = (\mathrm{A}r^2 + \mathrm{B}r + \mathrm{C})\sin\theta,$$

ce qui est évidemment possible; on a alors

$$\operatorname{tang}^2 i = \frac{1 + \mathrm{K}^2 r^2}{(\mathrm{A}r^2 + \mathrm{B}r + \mathrm{C})^2}.$$

L'équation résultant de l'élimination de $\frac{dr}{ds}$, entre l'équation de Riccati précédente et l'équation $\frac{d}{ds}(\operatorname{tang}^2 i) = 0$, est du cinquième degré en r. Le coefficient de r^5 est $\mathrm{A}^2\mathrm{K}^2\sin\theta$; on en conclut que $\mathrm{A} = 0$. Si l'on tient compte de ce résultat, on voit que le terme du quatrième degré disparaît, et l'on a les équations de condition suivantes en égalant à zéro les quatre autres coefficients

$$\mathrm{K}\frac{d\mathrm{B}}{ds} - \mathrm{B}\frac{d\mathrm{K}}{ds} = 0, \tag{1}$$

$$\mathrm{K}\frac{d\mathrm{C}}{ds} - \mathrm{C}\frac{d\mathrm{K}}{ds} - \mathrm{BCK}\sin\theta = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d\mathrm{B}}{ds} + \mathrm{B}^2\sin\theta - \mathrm{CK}^2(\mathrm{C}\sin\theta - \cos\theta) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{d\mathrm{C}}{ds} + \mathrm{B}(\mathrm{C}\sin\theta - \cos\theta) = 0. \tag{4}$$

4. *Intégration des équations.* — La première équation donne

$$B = \mu K,$$

μ étant une constante d'intégration. Si, après avoir remplacé B par μK dans les équations suivantes, on multiplie celles-ci respectivement par $\mu^2 K$, μCK, $C^2 K^2$ on trouve, en les ajoutant,

$$K^2(\mu^2 + C^2)\frac{dC}{ds} = 0,$$

ce qui donne $C = \text{const.}$ L'équation (2) donne alors

$$\frac{1}{K} = \mu \sin\theta . s + \mu',$$

μ' étant une nouvelle constante d'intégration, et l'équation (3) donne

$$\cot\theta = C = \text{const.}$$

Dans ce qui précède, j'ai écarté la solution $B = 0$, $C = 0$ qui vérifie toutes les équations quels que soient K et θ; cette solution donnant sur toutes les surfaces gauches les trajectoires orthogonales, cas déjà considéré.

Les surfaces sur lesquelles existent des systèmes homographiques de trajectoires, à angle variable d'une courbe à l'autre, satisfont donc aux deux conditions

$$\theta = \text{const.}, \qquad \frac{1}{K} = \mu \sin\theta s + \mu'.$$

5. *Interprétation des solutions.* — Les surfaces qui correspondent à un même système de valeurs des constantes sont évidemment applicables les unes sur les autres. Toute surface gauche pouvant être appliquée sur une surface à plan directeur, on peut définir celles que j'obtiens ici comme déformées de celles d'entre elles qui sont à plan directeur. Ces dernières sont des conoïdes ou des hélicoïdes.

Si $\mu \neq 0$, on peut choisir l'origine des arcs s de façon à faire $\mu' = 0$. Si $\theta = 90°$, on obtient des conoïdes

$$z = Ce^{\mu \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}},$$

C étant une constante arbitraire. Si $\theta \neq 90°$, on a des hélicoïdes. Pour les déterminer, je remarque que si R est le rayon de courbure de la projection de la ligne de striction d'une surface à plan directeur sur ce plan, on a toujours

$$KR = \cot\theta.$$

On en déduit immédiatement que, dans le cas actuel, si l'arc de la projection est σ, on a

$$R = \mu\sigma,$$

équation qui caractérise une spirale logarithmique. La ligne de striction de l'hélicoïde considéré appartient donc à la catégorie d'hélices que M. Tissot a étudiées et qu'il a appelées *hélices cylindroconiques*. Je désignerai, pour abréger, par *conoïdes* et *hélicoïdes logarithmiques* les surfaces que je viens de rencontrer, et par *surfaces logarithmiques* les surfaces gauches applicables sur celles-ci.

6. Si $\mu = 0$, on ne peut plus faire $\mu' = 0$. Si $\theta = 90°$, on a les hélicoïdes minima, et les surfaces de binormales de courbes à torsion constante. Si $\theta \neq 90°$, on a comme surface à plan directeur un hélicoïde dont la ligne de striction est une hélice circulaire, et qui peut être considéré comme un cas particulier des hélicoïdes logarithmiques. Cet hélicoïde est applicable sur un hyperboloïde de révolution, de sorte que lorsque $\mu = 0$, $\theta \neq 90°$, on obtient les surfaces applicables sur des hyperboloïdes de révolution.

On peut remarquer que le rayon du cylindre sur lequel est tracée la ligne de striction de cet hélicoïde est égal au rayon du cercle de gorge de l'hyperboloïde sur lequel il est applicable. Plus généralement, une surface à plan directeur, ayant pour ligne de striction une hélice, est applicable sur la surface que l'on obtient en menant par les points de la projection de l'hélice des parallèles aux tangentes à cette hélice. En effet, le paramètre de distribution de l'hélicoïde s'exprimant par

$$K = \omega \cot\theta + \pi,$$

si l'on déforme la surface de façon que la ligne de striction devienne plane, on trouve que le rayon de courbure de cette courbe est donné par

$$KR = \cot\theta,$$

comme celui de la projection de l'hélice.

Propriétés des systèmes de trajectoires homographiques.

7. L'équation du système homographique de trajectoires se réduit pour les surfaces applicables sur l'hyperboloïde ou l'hélicoïde minimum à

$$\frac{dr}{ds} = 0,$$

qui donne pour les hyperboloïdes les parallèles, et pour les hélicoïdes les trajectoires orthogonales. Pour les hélicoïdes et conoïdes logarithmiques, on a

$$\frac{dr}{ds} = \frac{r}{s}$$

et, par suite, en choisissant l'origine des arcs convenablement,

$$r = \lambda s,$$

λ étant une constante d'intégration. Ces trajectoires possèdent sur les diverses surfaces en question des propriétés simples que je vais indiquer.

Les trajectoires homographiques sont telles qu'en chaque point le plan tangent fait un angle constant avec le plan central correspondant.

En effet, si l'on appelle ψ l'angle de ces deux plans, on a toujours

$$\operatorname{tang}\psi = \mathrm{K}r.$$

Pour les surfaces applicables sur l'hyperboloïde de révolution, K et r sont tous deux constants. Pour les surfaces logarithmiques, on a

$$\operatorname{tang}\psi = \mathrm{K}r = \frac{\lambda}{\mu \sin\theta};$$

λ, μ, θ sont constants.

On en déduit que *les trajectoires, qui divisent les génératrices en segments proportionnels, sont elles-mêmes divisées en arcs proportionnels par les génératrices;* car, si l'on appelle Σ l'arc d'une de ces courbes, on trouve que

$$\frac{d\Sigma}{ds} = \frac{\sin\theta}{\sin i \cos\psi},$$

i étant l'angle sous lequel la courbe considérée coupe les génératrices; or les trois angles qui figurent dans le second membre sont constants.

Pour les surfaces logarithmiques, l'angle d'une des trajectoires du système homographique étant donné par

$$\operatorname{tang}^2 i = \frac{\lambda^2 + \mu^2 \sin^2\theta}{\mu^2(\lambda + \cos\theta)^2},$$

on voit qu'il y a toujours une de ces trajectoires, celle qui correspond à $\lambda = -\cos\theta$, qui est orthogonale aux génératrices.

8. *Sur les hélicoïdes et conoïdes logarithmiques les trajectoires homographiques sont des hélices cylindroconiques.* En effet, pour une courbe tracée sur l'une de ces surfaces, le cosinus de l'angle que la tangente fait avec la perpendiculaire au plan directeur est

$$\frac{dZ}{d\Sigma} = \frac{dz}{d\Sigma} = \frac{dz}{ds}\frac{ds}{d\Sigma} = \sin i \cos\psi,$$

et, pour les trajectoires en question, i et ψ sont constants; donc ces courbes sont des hélices. Il est facile de reconnaître, d'après les propriétés bien connues de la spirale logarithmique, qu'en faisant tourner autour du pôle la spirale, qui est la projection de la ligne de striction, on obtient les projections des trajectoires homographiques. Ces hélices sont donc cylindroconiques.

Sur les surfaces logarithmiques quelconques, les trajectoires homographiques ont leur rayon de courbure géodésique proportionnel à l'arc, propriété analogue à une propriété de la spirale logarithmique que j'ai eu à citer. En effet, on a, pour une trajectoire sous l'angle i, R_g désignant le rayon de courbure géodésique

$$\frac{1}{R_g} = K \sin\psi \cos\psi \sin i,$$

et, dans le cas actuellement considéré, cette expression devient

$$R_g = \frac{\mu}{\sin\psi}\Sigma.$$

J'aurai occasion de reparler des hélicoïdes et conoïdes logarithmiques, un peu plus loin, à propos des systèmes conjugués.

Remarque concernant les lignes asymptotiques.

9. Ce qui précède permet de montrer que l'hélicoïde minimum est la seule surface sur laquelle les lignes asymptotiques constituent un système de trajectoires. En effet, les systèmes de trajectoires que nous avons obtenus donnant des divisions en segments proportionnels ou égaux, et les lignes asymptotiques ne donnant de divisions de cette sorte que si la surface sur laquelle elles sont tracées est à plan directeur, on ne peut chercher de lignes asymptotiques trajectoires que sur les surfaces à plan directeur qui contiennent des systèmes homographiques de trajectoires. Ces surfaces sont les hélicoïdes minima, les hélicoïdes circulaires, les conoïdes et hélicoïdes logarithmiques; or, sur ces surfaces, les lignes asymptotiques et les trajectoires homographiques ont des équations données par le Tableau suivant :

	Lignes asymptotiques.	Trajectoires homographiques.
Hélicoïdes minima.........	$r = \text{const.}$	$r = \text{const.}$
Hélicoïdes circulaires......	$2r + \cos\theta s = \text{const.}$	$r = \text{const.}$
Conoïdes logarithmiques ...	$r^2 = Cs$	$r = \lambda s$
Hélicoïdes logarithmiques..	$(r + \cos\theta s)^2 = Cs$	$r = \lambda s$

La lecture de ce Tableau établit la proposition donnée plus haut. En outre, elle montre que sur les hélicoïdes logarithmiques la trajectoire orthogonale

$$r + \cos\theta s = 0,$$

qui appartient au système homographique, est une asymptotique. Elle correspond à la valeur o de la constante C. Les génératrices d'un hélicoïde logarithmique sont donc les normales principales d'une hélice logarithmique.

Surfaces développables.

10. J'ai déjà fait remarquer que, sur toute surface développable, les trajectoires, sous un même angle constant, diviseraient les génératrices en segments proportionnels. On obtient également des systèmes homographiques de trajectoires dont l'angle varie d'une courbe à l'autre, par un calcul semblable à celui que j'ai fait pour les surfaces gauches.

Un système homographique étant donné par

$$\frac{dr}{ds} + 1 = Ar^2 + Br + C,$$

on a à écrire que

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\omega r}{Ar + Br + C}\right) = 0,$$

et à éliminer $\frac{dr}{ds}$ entre ces deux équations; on obtient une équation du quatrième degré en r. Le coefficient du quatrième degré étant $2A^2\omega$, on voit que $A = 0$; le terme du troisième degré ayant A en facteur devient nul, et l'on a les équations de condition

$$B\frac{d\omega}{ds} - \omega\frac{dB}{ds} = 0,$$

$$\omega\frac{dC}{ds} - C\frac{d\omega}{ds} - \omega BC = 0,$$

$$\omega C(C-1) = 0.$$

La première équation donne $B = \mu\omega$. La dernière donne soit $C = 0$, soit $C = 1$. Pour $C = 0$, on trouve les trajectoires sur un même angle, quel que soit ω. Pour $C = 1$, ω vérifie l'équation

$$\frac{d\omega}{ds} + \mu\omega^2 = 0,$$

qui s'intègre et donne

$$\frac{1}{\omega} = \mu s + \mu^2;$$

si $\mu \neq 0$, on peut prendre l'origine des arcs s de façon que $\mu' = 0$.

On a donc les solutions suivantes :

1° $\omega =$ const.; les courbes $r =$ const. sont trajectoires.

2° $\omega s =$ const.; les lignes $r = \lambda s$ sont des trajectoires.

Le développement de ces surfaces sur un plan transforme l'arête de rebroussement en une spirale logarithmique; il en est de même des trajectoires. Pour les surfaces de la première solution, on a des cercles au lieu de spirales.

Il me semble inutile d'insister sur les analogies entre ces résultats et ceux trouvés pour les surfaces gauches.

TROISIÈME PARTIE.

SYSTÈMES CONJUGUÉS. — THÉORÈME GÉNÉRAL.

1. Si l'on appelle V l'angle que l'asymptotique passant par un point fait avec la génératrice qui contient ce point; V', V'' les angles que font avec cette génératrice en ce point deux courbes C', C''; la considération de l'hyperbole indicatrice montre que la condition nécessaire et suffisante pour que les courbes C' et C'' soient conjuguées est que

$$(\operatorname{tang} V' + \operatorname{tang} V'') \operatorname{tang} V = 2 \operatorname{tang} V' \operatorname{tang} V''.$$

En exprimant les tangentes des angles qui entrent dans cette équation, au moyen de r, s et des dérivées de r par rapport à s, on a

$$\frac{dr'}{ds} + \frac{dr''}{ds} = 2\frac{dr}{ds},$$

les accents correspondant aux courbes considérées. Comme $\frac{dr}{ds}$ est donné par une fonction entière du second degré en r, on voit qu'il en sera de même de l'une des dérivées qui sont dans le premier membre, si l'autre est donnée par une fonction entière du second degré au plus. Autrement dit :

Si un système de courbes divise homographiquement les génératrices d'une surface gauche, le système conjugué les divise aussi homographiquement (¹).

2. Pour les surfaces qui ne sont pas à plan directeur, $\frac{dr}{ds}$ est donné par une fonction du second degré, dans laquelle le coefficient de r^2 est différent de zéro. Il en résulte que, de deux systèmes homographiques conjugués, l'un au moins donne une division homographique du type le plus général. Pour les surfaces à plan directeur, $\frac{dr}{ds}$ étant une fonction du premier degré,

(¹) M. Desmartres a donné sur les surfaces cerclées un théorème analogue (*Comptes rendus*, janvier 1888).

si la division homographique est du type le plus général pour l'un des systèmes, elle est du même type pour l'autre; sinon on a des divisions en segments proportionnels ou égaux. Si une surface à plan directeur est à paramètre de distribution constant, les divisions peuvent être soit toutes deux du type général, soit toutes deux des divisions en segments proportionnels, soit enfin toutes deux des divisions en segments égaux.

Théorème sur les lignes d'ombre.

3. On sait que les sections d'une surface par des plans ayant une droite commune et les courbes de contact des cônes ayant leurs sommets sur cette droite forment deux systèmes conjugués. Pour une surface réglée, le premier système donne évidemment une division homographique des génératrices; il en est de même du second, à cause du théorème précédent. Donc :

Les génératrices d'une surface gauche sont divisées homographiquement par les courbes de contact des cônes dont les sommets sont en ligne droite.

Ce théorème comprend comme cas particulier le théorème suivant, soupçonné par M. Paul Serret : Sur une surface gauche quelconque, quatre lignes d'ombre, issues d'un même point et relatives à des rayons incidents parallèles, coupent une génératrice rectiligne quelconque en quatre points dont le rapport anharmonique est constant; car ces lignes sont conjuguées des sections parallèles au plan tangent, qui a pour point de contact le point commun aux lignes d'ombre, d'après le théorème que j'ai rappelé plus haut. Si la surface considérée est à plan directeur, les lignes d'ombre divisent les génératrices en segments proportionnels; cela résulte de la remarque faite à la suite du théorème général sur les systèmes conjugués.

4. Le théorème que j'ai énoncé tout à l'heure montre comment on peut grouper les lignes d'ombre en systèmes homographiques. Ce procédé de groupement est le seul. En effet, soient A, B, C, D quatre points d'où émanent des rayons; soient α, β, γ, δ les lignes d'ombre correspondant sur une surface S. Deux de ces lignes, α et β par exemple, ont des points communs réels ou imaginaires, à savoir les points de contact de la surface S avec les plans tangents menés par la droite AB. Or, si l'on a des systèmes

de quatre points de rapport anharmonique constant, la coïncidence de deux de ces points entraîne la coïncidence des autres avec les premiers. Les lignes α, β, γ, δ ont donc des points de concours.

Soient M, M' deux de ces points, les points d'où émanent les rayons étant à la fois dans le plan tangent en M et dans le plan tangent en M' sont en ligne droite. Donc, *si un système de lignes d'ombre divise homographiquement les génératrices d'une surface réglée, les rayons émanent de points en ligne droite.*

Systèmes conjugués qui divisent les génératrices en segments égaux.

5. Il résulte de la remarque faite à la suite du théorème général sur les systèmes conjugués que l'on peut obtenir sur les surfaces à plan directeur et à paramètre constant des systèmes conjugués divisant les génératrices en segments égaux. On peut former l'équation générale de ces systèmes en coordonnées cartésiennnes. L'équation générale des surfaces considérées peut s'écrire, si l'on fait, pour abréger, $K = 1$,

$$y \cos z - x \sin z = F(z);$$

l'équation des lignes asymptotiques se réduit, pour ces surfaces, à

$$2 \frac{dr}{ds} + \cos\theta = 0.$$

Si l'on remarque que $dz = ds \sin\theta$ et que $\cot\theta = KR$, R étant le rayon de courbure de la projection de la ligne de striction, l'équation qui exprime que deux systèmes sont conjugués devient

$$\frac{dr'}{dz} + \frac{dr''}{dz} + KR = 0.$$

Or les équations d'une génératrice sont, si l'on met en évidence la ligne de striction,

$$\frac{x + F(z)\sin z + F'(z)\cos z}{\cos z} = \frac{y - F(z)\cos z + F'(z)\sin z}{\sin z} = r,$$

et l'on a facilement, d'autre part,

$$R = -[F(z) + F''(z)],$$

de sorte que si un système de courbes divisant les génératrices en segments égaux est donné par

$$\frac{x + F(z)\sin z}{\cos z} = \frac{y - F(z)\cos z}{\sin z} = \psi(z) + C,$$

$\psi(z)$ étant une fonction arbitraire et C une constante dont la valeur change d'une courbe à l'autre, le système conjugué sera donné par les équations

$$\frac{x + F(z)\sin z}{\cos z} = \frac{y - F(z)\cos z}{\sin z} = \int_0^z F(z)\,dz - F'(z) - \psi(z) + C'.$$

Les asymptotiques sont, sur ces surfaces, les lieux des milieux des segments de génératrices compris entre deux courbes conjuguées des systèmes que je viens de considérer; elles ont pour équations

$$\frac{x + F(z)\sin z}{\cos z} = \frac{y - F(z)\cos z}{\sin z} = \frac{1}{2}\int_0^z F(z) - \tfrac{1}{2}F'(z) + \text{const.}$$

On peut obtenir ces équations en écrivant que les asymptotiques sont leurs propres conjuguées.

Système conjugué des trajectoires orthogonales des génératrices.

6. L'équation du système conjugué des trajectoires orthogonales peut s'écrire

$$\sin\theta\frac{d(Kr)}{ds} + (\Omega - K\sin\theta\cos\theta)(1 + K^2r^2) = 0;$$

elle a pour intégrale

$$\operatorname{arctang} Kr + \int_0^s \frac{\Omega - K\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}\,ds = \text{const.}$$

Pour une surface à plan directeur, la différentielle sous le signe de quadrature est identiquement nulle, de sorte qu'on a simplement

$$Kr = \text{const.}$$

Le système obtenu est donc composé de courbes telles que, en tous leurs points, le plan tangent à la surface fait un angle constant avec le plan central correspondant. En particulier, en chaque point de la ligne de striction, la direction conjuguée est perpendiculaire aux génératrices.

Sur les hélicoïdes et conoïdes logarithmiques, le système homographique de trajectoires a pour conjugué le système des trajectoires orthogonales; car les premières courbes satisfont à la relation $\mathrm{K}r = \text{const.}$ On voit ainsi que celle de ces courbes qui est trajectoire orthogonale des génératrices est une asymptotique, puisqu'en chaque point sa direction coïncide avec la direction conjuguée.

Si une surface à plan directeur est représentée par les équations

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = \mathrm{F}(\alpha), \qquad z = \varphi(\alpha),$$

on trouve, pour le système des trajectoires orthogonales,

$$\frac{x + \mathrm{F}(\alpha)\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y - \mathrm{F}(\alpha)\cos\alpha}{\sin\alpha} = \int_0^\alpha \mathrm{F}(\alpha)\,d\alpha + \text{const.}$$

et, pour le système conjugué,

$$\frac{x + \mathrm{F}(\alpha)\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y - \mathrm{F}(\alpha)\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{C}\,\varphi'(\alpha) - \mathrm{F}'(\alpha).$$

Pour les hélicoïdes et conoïdes logarithmiques, F et φ seraient des exponentielles; les projections des deux systèmes de lignes sur le plan directeur sont des systèmes de spirales logarithmiques; mais le système conjugué des trajectoires orthogonales est seul composé d'hélices, ayant pour axe OZ. Car, sur une surface ayant pour plan directeur $\mathrm{Z} = 0$, si une trajectoire orthogonale est une hélice ayant pour axe OZ, les génératrices de la surface sont les normales principales de l'hélice considérée. Or il n'y a qu'une courbe dans ces conditions sur un hélicoïde logarithmique; il n'y en a point sur un conoïde.

Systèmes orthogonaux sur les surfaces gauches.

7. La condition de perpendicularité de deux courbes C′, C″ tracées sur une surface gauche est

$$\frac{d\mathrm{X}'}{ds}\,\frac{d\mathrm{X}''}{ds} + \frac{d\mathrm{Y}'}{ds}\,\frac{d\mathrm{Y}''}{ds} + \frac{d\mathrm{Z}'}{ds}\,\frac{d\mathrm{Z}''}{ds} = 0,$$

les accents indiquant le long de quelle courbe on doit se déplacer pour prendre des dérivées. Si la directrice est ligne de striction, cette équation devient, lorsqu'on remplace les coordonnées cartésiennes au moyen de r et s,

$$\left(\frac{dr'}{ds}+\cos\theta\right)\left(\frac{dr''}{ds}+\cos\theta\right)+\sin^2\theta(1+\mathrm{K}^2r^2)=0.$$

On voit que si $\frac{dr''}{ds}$ est fonction de s seulement, c'est-à-dire si un système de courbes C″ divise les génératrices en segments égaux, le système orthogonal, composé de courbes C′, dépendra d'une équation de Riccati, et par suite donnera une division homographique. Celle-ci ne se réduira jamais à une division en segments proportionnels ou égaux, le coefficient du terme en r^2 ne pouvant être nul.

Si $\frac{dr''}{ds}$ était une fonction linéaire de r, comme K^2r^2+1 n'admet pas de diviseurs réels du premier degré, $\frac{dr'}{ds}$ serait donné par une fraction. Il en serait de même si $\frac{dr''}{ds}$ était une fonction du second degré, à moins que cette fonction ne fût précisément K^2r^2+1, à un facteur près; mais alors $\frac{dr''}{ds}$ s'exprimerait en fonction de s seulement.

Il résulte de cette discussion que, *si un système de courbes divise en segments égaux les génératrices d'une surface gauche, le système orthogonal les divise homographiquement*, cette dernière division étant du type général. Et réciproquement, *si deux systèmes orthogonaux divisent simultanément les génératrices d'une surface gauche en segments homographiques, ce ne peut être que dans le cas précédent*, c'est-à-dire lorsque l'une des divisions se réduit à une division en segments égaux.

Systèmes orthogonaux sur les surfaces développables.

8. La condition d'orthogonalité de deux courbes tracées sur une surface développable est

$$\left(\frac{dr'}{ds}+1\right)\left(\frac{dr''}{ds}+1\right)+\omega^2r^2=0,$$

ω étant la courbure de l'arête de rebroussement, de sorte que, comme dans le cas des surfaces gauches, si un système de courbes divise les génératrices en segments égaux, le système orthogonal donne une division homographique du type général. Mais ce cas n'est plus le seul; car la partie indépendante des parenthèses, dans l'équation que je viens d'écrire, est décomposable en deux facteurs du premier degré en r, de sorte qu'on pourra avoir des systèmes orthogonaux donnant tous deux des divisions en segments proportionnels; ces systèmes sont donnés par des équations de la forme

$$\frac{dr'}{ds} + 1 = \mathrm{M}r, \qquad \frac{dr''}{ds} + 1 + \frac{\omega^2}{\mathrm{M}} r = 0,$$

M étant une fonction de s. Comme l'angle d'une courbe avec une génératrice est donné par

$$\operatorname{tang} i = \frac{\omega r}{\dfrac{dr}{ds} + 1},$$

les équations précédentes expriment que toutes les courbes d'un système sont coupées sous un même angle par chaque génératrice, l'angle variant en général d'une génératrice à l'autre. Ou, autrement dit, les tangentes aux différentes courbes d'un même système, aux points où elles sont rencontrées par une même génératrice sont parallèles.

Les propriétés précédentes n'étant pas modifiées par la déformation de la surface considérée, les propositions énoncées s'appliquent au système des tangentes à une courbe plane.

En particulier, on peut obtenir des systèmes orthogonaux composés de lignes géodésiques. Chacun de ces systèmes donne, lorsqu'on développe la surface sur un plan, un système de droites parallèles.

Lignes de courbure.

9. Les lignes de courbure constituent des systèmes à la fois orthogonaux et conjugués; les théorèmes précédents montrent que, si un système de lignes de courbure divise homographiquement les génératrices d'une surface gauche :

1° L'autre système les divise aussi homographiquement (théorème sur les systèmes conjugués);

2° Pour l'un des systèmes, la division se fait en segments égaux (théorème sur les systèmes orthogonaux).

Cette dernière condition étant nécessaire et suffisante, la recherche des surfaces sur lesquelles les lignes de courbure divisent homographiquement les génératrices se ramène à ce problème plus restreint : recherche des surfaces sur lesquelles un système de lignes de courbure divise les génératrices en segments égaux.

L'équation des lignes de courbure, qui peut s'obtenir en écrivant que ces lignes sont orthogonales et conjuguées, est

$$K\sin\theta\frac{dr^2}{ds^2}+\left[K^2(\Omega-K\sin\theta\cos\theta)r^2+\sin\theta\frac{dK}{ds}r+\Omega\right]\frac{dr}{ds}$$
$$+(\Omega\cos\theta-K\sin\theta)(1+K^2r^2)+\sin\theta\cos\theta\frac{dK}{ds}r=0.$$

10. Cherchons dans quels cas des solutions de cette équation ne diffèrent que d'une constante. Le premier membre de cette équation est un trinôme du second degré en r dont les coefficients, étant fonctions de s et de $\frac{dr}{ds}$, ne changent pas lorsque l'on augmente r d'une constante. Pour que l'équation, étant vérifiée par une certaine solution $r=r'$, le soit aussi par $r=r'+c$, quelle que soit la valeur de c, il faut et il suffit que les coefficients du trinôme en r^2 soient tous nuls, ce qui donne

$$(\Omega-K\sin\theta\cos\theta)\frac{dr}{ds}+(\Omega\cos\theta-K\sin\theta)=0, \tag{1}$$

$$\frac{dK}{ds}\sin\theta\left(\frac{dr}{ds}+\cos\theta\right)=0, \tag{2}$$

$$K\sin\theta\frac{dr^2}{ds^2}+\Omega\frac{dr}{ds}+(\Omega\cos\theta-K\sin\theta)=0. \tag{3}$$

Pour une surface gauche $\sin\theta\neq 0$, et les lignes de courbure ne pouvant être des trajectoires orthogonales des génératrices, on a également $\frac{dr}{ds}+\cos\theta\neq 0$, de sorte que l'équation (2) ne peut être vérifiée que si $K=\text{const.}$ En combinant par soustraction les équations (1) et (3), on obtient

$$K\sin\theta\left(\frac{dr}{ds}+\cos\theta\right)\frac{dr}{ds}=0,$$

d'où l'on déduit, les trois premiers facteurs étant différents de zéro dans les conditions du problème, que les équations considérées ne peuvent être vérifiées simultanément si $\frac{dr}{ds} \neq 0$. Si l'on suppose $\frac{dr}{ds}$ nul, on a les conditions

$$K = \text{const.}, \qquad \Omega\cos\theta - K\sin\theta = 0,$$

qui sont évidemment suffisantes. Donc :

Les seules surfaces dont les génératrices soient divisées homographiquement par les lignes de courbure sont les surfaces à paramètre de distribution constant dont la ligne de striction est ligne de courbure.

Les deux systèmes de lignes de courbure sont donnés par les équations

$$\frac{dr}{ds} = 0, \qquad \cos\theta\frac{dr}{ds} + K^2 r^2 \sin^2\theta + 1 = 0.$$

11. On a vu plus haut que, si la ligne de striction d'une surface gauche n'est pas trajectoire orthogonale des génératrices, on peut déformer cette surface de façon que la ligne de striction devienne ligne de courbure. Comme cas particulier, *une surface gauche dont le paramètre de distribution est constant peut être appliquée sur une autre dont les génératrices sont divisées homographiquement par les lignes de courbure, pourvu que la ligne de striction ne soit pas trajectoire orthogonale des génératrices,* c'est-à-dire pourvu que la surface donnée ne soit pas une surface de binormales de courbe à torsion constante, ou un hélicoïde minimum.

Si la ligne de striction est trajectoire des génératrices, la surface à lignes de courbure homographiques est la surface gauche de révolution.

Détermination de surfaces à lignes de courbure homographiques.

12. Lorsque la ligne de striction d'une surface gauche est ligne de courbure, on a entre les cinq quantités ω, π, φ, θ et K les relations

$$\frac{d\theta}{ds} + \omega\cos\varphi = 0, \qquad \pi = \frac{d\varphi}{ds}, \qquad K = \omega\cot\theta\sin\varphi,$$

la première exprimant que la directrice est ligne de striction, la deuxième qu'elle est ligne de courbure; la troisième équation donnant l'expression du paramètre de distribution lorsqu'on tient compte de l'équation précédente.

Si la surface a ses lignes de courbure homographiques, K est constant, de sorte qu'il reste quatre fonctions liées par trois équations. On peut donc, en général, se donner arbitrairement l'une d'elles, ou chercher parmi les surfaces considérées celles qui possèdent une propriété donnée.

Parmi ces surfaces il n'y en a pas qui soient à plan directeur, car il n'y a pas de surfaces à plan directeur dont la ligne de striction soit ligne de courbure. On peut le voir en remarquant que les normales à une surface à plan directeur, le long de la ligne de striction, étant parallèles au plan directeur, ne peuvent former une surface développable.

13. La ligne de striction peut être géodésique; alors $\varphi = 90°$, $\theta = \text{const.}$, $\omega = \text{const.}$; la surface est un hyperboloïde de révolution.

Ce cas n'est pas le seul pour lequel la ligne de striction soit plane. En effet, pour que la ligne de striction soit plane, il suffit que $\varphi = \text{const.}$; si l'on élimine ω entre les équations

$$\frac{d\theta}{ds} + \omega \cos\varphi = 0, \qquad K = \omega \cot\theta \sin\varphi,$$

on obtient l'équation

$$\cot\theta \, d\theta + K \cot\varphi \, ds = 0; \tag{1}$$

d'où l'on déduit, en intégrant et en posant $K \cot\varphi = \frac{1}{p}$,

$$\sin\theta = \sin\theta_0 \, e^{-\frac{s}{p}}.$$

Le rayon de courbure de la ligne de striction est alors donné par

$$\frac{\cos\varphi}{R} + \frac{d\theta}{ds} = 0. \tag{2}$$

On peut obtenir les coordonnées des points de cette ligne au moyen de quadratures. Si l'on appelle ε l'angle que la tangente à la ligne de striction fait avec un axe fixe de son plan, l'équation (2) peut s'écrire

$$\cos\varphi \, d\varepsilon + d\theta = 0,$$

ce qui donne, en posant $\cos\varphi = \frac{1}{m}$,

$$\theta + \frac{\varepsilon}{m} = \text{const.}$$

Je prendrai la direction de l'axe de telle façon que la constante soit égale à $\frac{\pi}{2}$; on peut alors écrire l'équation (1)

$$ds = -p\, d\log\sin\theta = -p\, d\log\cos\frac{\varepsilon}{m} = \frac{p}{m}\operatorname{tang}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)d\varepsilon.$$

Le rayon de courbure de la ligne de striction étant alors donné au moyen de ε par

$$R = \frac{p}{m}\operatorname{tang}\left(\frac{\varepsilon}{m}\right),$$

les coordonnées des points de cette ligne sont données par

$$dx = \frac{p}{m}\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{m}\cos\varepsilon\, d\varepsilon,$$

$$dy = \frac{p}{m}\operatorname{tang}\frac{\varepsilon}{m}\sin\varepsilon\, d\varepsilon.$$

Cette ligne est définie par des équations qui rappellent celles qu'on obtient pour la tractrice ou courbe aux tangentes égales, car il suffirait de faire $m = 1$ pour obtenir la tractrice. Mais il faut remarquer que cette hypothèse $m = 1$ ne peut se réaliser; car

$$m = \frac{1}{\cos\varphi},$$

φ étant l'angle du plan tangent avec le plan de la ligne de striction, on a, nécessairement, $\varphi \neq 0$ et, par suite, $\cos\varphi \neq 1$. La détermination de x et y, en termes finis, s'effectue complètement si m est un nombre commensurable. Je ne crois pas nécessaire d'insister sur des cas aussi particuliers d'un problème déjà très particulier.

Surface de normales principales dont les lignes de courbure divisent homographiquement les génératrices.

14. Si l'on prend pour directrice la courbe dont les normales principales sont les génératrices de la surface considérée, l'équation qui exprime que deux systèmes de courbes sont conjugués est

$$\pi\left(\frac{dr'}{ds} + \frac{dr''}{ds}\right) + \left(\pi\frac{d\omega}{ds} - \omega\frac{d\pi}{ds}\right)r^2 + \frac{d\pi}{ds}r = 0;$$

la condition d'orthogonalité est

$$\frac{dr'}{ds}\frac{dr''}{ds} + (\omega^2 + \pi^2) r^2 - 2\omega r + 1 = 0;$$

par suite, l'équation des lignes de courbure est

$$\pi\frac{dr^2}{ds^2} + \left[\left(\pi\frac{d\omega}{ds} - \omega\frac{d\pi}{ds}\right) r^2 + \frac{d\pi}{ds} r\right]\frac{dr}{ds} - \pi\,[(\omega^2 + \pi^2) r^2 - 2\omega r + 1] = 0.$$

Pour que les lignes de courbure soient homographiques, il faut et il suffit que le paramètre de distribution soit constant et que la ligne de striction soit ligne de courbure; si l'on pose

$$\frac{\omega}{\pi} = u,$$

on peut exprimer les deux courbures de la directrice par

$$\pi = \frac{K}{1 + u^2}, \qquad \omega = \frac{K u}{1 + u^2}.$$

L'équation des lignes de courbure peut alors s'écrire, K étant constant,

$$(1 + u^2)\frac{dr^2}{ds^2} + \left(K\frac{du}{ds} r^2 - 2u\frac{du}{ds} r\right)\frac{dr}{ds} - [K^2 r^2 - 2 K u r + u^2 + 1] = 0;$$

l'équation de la ligne de striction est

$$r = \frac{\omega}{\omega^2 + \pi^2} = \frac{u}{K};$$

en écrivant que la ligne de striction est ligne de courbure, on trouve

$$\frac{du^2}{ds^2} - K^2 = 0,$$

ce qui donne, si l'on choisit l'origine des arcs de façon à faire nulle une constante d'intégration,

$$u = \frac{\omega}{\pi} = K s.$$

Les deux courbures de la directrice sont alors

$$\pi = \frac{K}{1 + K^2 s^2}, \qquad \omega = \frac{K^2 s}{1 + K^2 s^2}.$$

L'équation de la ligne de striction étant $r = s$, celle du système de lignes de courbure auquel elle appartient est

$$r = s + \text{const.}$$

QUATRIÈME PARTIE.

LIGNES GÉODÉSIQUES.

---

1. Je me propose de chercher dans quels cas on peut trouver, sur une surface gauche, un système de lignes géodésiques qui divise homographiquement les génératrices. Le problème a des solutions évidentes; car, si l'on déforme une surface du second degré en laissant rectilignes les génératrices d'un système, celles du second système auront pour transformées des lignes géodésiques de la surface obtenue, et ces lignes satisferont à la condition énoncée. Si la surface du second degré est un hyperboloïde de révolution, il y aura sur la surface obtenue par déformation, outre le système correspondant aux génératrices qu'on n'a pas laissées rectilignes, un second système composé des transformées des méridiens. Je crois qu'il n'est pas sans intérêt de montrer que ces cas, reconnaissables *a priori*, sont les seuls qui puissent se présenter, au moins pour les surfaces réglées réelles.

2. Pour qu'une courbe c tracée sur une surface gauche soit géodésique, il faut et il suffit que la normale principale de cette courbe soit perpendiculaire à la génératrice qui passe par son pied, car cette normale est déjà perpendiculaire à la tangente à la courbe c, qui est essentiellement distincte de la génératrice. Si l'on appelle Σ l'arc de la courbe c, les coefficients directeurs de la normale principale de cette courbe sont

$$\frac{d^2X}{ds^2}\frac{d\Sigma}{ds}-\frac{dX}{ds}\frac{d^2\Sigma}{ds^2},\qquad \frac{d^2Y}{ds^2}\frac{d\Sigma}{ds}-\frac{dY}{ds}\frac{d^2\Sigma}{ds^2},\qquad \frac{d^2Z}{ds^2}\frac{d\Sigma}{ds}-\frac{dZ}{ds}\frac{d^2\Sigma}{ds^2};$$

la condition de perpendicularité de cette droite et de la génératrice est

$$\left(a\frac{d^2X}{ds^2}+b\frac{d^2X}{ds^2}+c\frac{d^2Z}{ds^2}\right)\frac{d\Sigma}{ds}-\left(a\frac{dX}{ds}+b\frac{dY}{ds}+c\frac{dZ}{ds}\right)\frac{d^2\Sigma}{ds^2}=0.$$

Si l'on prend pour directrice la ligne de striction, qui conserve sa propriété pendant la déformation de la surface, on trouve, en remplaçant les dérivées des coordonnées cartésiennes par leurs expressions au moyen des coordonnées r et s, une équation différentielle du second ordre. Si l'on remarque que, le long de la ligne de striction, on a

$$\frac{d\cos\theta}{ds} = \mu\omega = \sin\theta\cos\varphi.\omega;$$

si l'on pose

$$H^2 = \frac{da^2}{ds^2} + \frac{db^2}{ds^2} + \frac{dc^2}{ds^2},$$

et si l'on remarque que, comme on a

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

on a aussi, en différentiant,

$$a\frac{da}{ds} + b\frac{db}{ds} + c\frac{dc}{ds} = 0$$

et, par suite, en différentiant une seconde fois,

$$a\frac{d^2 a}{ds^2} + b\frac{d^2 b}{ds^2} + c\frac{d^2 c}{ds^2} = -\left(\frac{da^2}{ds^2} + \frac{db^2}{ds^2} + \frac{dc^2}{ds^2}\right) = -H^2,$$

l'équation différentielle des géodésiques peut s'écrire

$$\text{(I)} \qquad (H^2 r^2 + \sin^2\theta)\left(\frac{d^2 r}{ds^2} - H^2 r + \frac{d\cos\theta}{ds}\right)$$
$$= \left(\frac{dr}{ds} + \cos\theta\right)\left(2H^2 r\frac{dr}{ds} + H\frac{dH}{ds}r^2 + H^2\cos\theta\, r - \cos\theta\frac{d\cos\theta}{ds}\right).$$

3. *Méthode de discussion.* — Pour déterminer les systèmes *homographiques* de géodésiques, j'ai à chercher dans quels cas l'équation (I) est vérifiée par des fonctions de s vérifiant une équation de la forme

$$\text{(II)} \qquad \frac{dr}{ds} = A r^2 + B r + C.$$

On peut remplacer, dans l'équation (I), $\frac{dr}{ds}$ et $\frac{d^2 r}{ds^2}$ par leurs expressions au moyen de r, déduites de l'équation (II). On a ainsi des expressions du second et du troisième degré pour ces dérivées. L'équation (I) donne, lorsque la substitution est effectuée, une équation que j'appellerai (III), dont les deux membres sont entiers et du cinquième degré en r; les coefficients des termes en r^5 y sont identiquement égaux. En écrivant que les autres coefficients sont égaux, deux à deux, on a cinq équations pour déterminer les cinq fonctions A, B, C, H, θ; les deux dernières caractérisant une catégorie de surfaces applicables les unes sur les autres.

Les équations de condition qu'on obtient en suivant la marche que je viens d'indiquer, et qui semble la plus naturelle, sont des équations différentielles simultanées. On peut éviter la considération d'un pareil système en se servant de la remarque suivante.

Les deux membres de l'équation (III), si l'on y conserve les parenthèses qui figurent dans l'équation (I), sont décomposés en un produit de deux facteurs. La parenthèse $(H^2r^2 + \sin^2\theta)$ doit, si la seconde parenthèse du premier membre n'est pas nulle, diviser le second membre, et, comme les facteurs du second membre sont supposés avoir leurs coefficients réels, $(H^2r^2 + \sin^2\theta)$ doit diviser l'un de ces deux facteurs. Les équations de condition obtenues ne contiennent pas les dérivées des fonctions A, B, C, et l'on verra qu'elles suffisent à donner la solution du problème.

Il peut arriver que la parenthèse $\left(\frac{d^2r}{ds^2} - H^2r + \frac{d\cos\theta}{ds}\right)$ s'annule en même temps que le second membre. Ce cas est d'ailleurs facile à discuter.

Je vais considérer successivement les trois cas qui, d'après le raisonnement précédent, peuvent se présenter.

4. *Premier cas.* — Supposons que $H^2r^2 + \sin^2\theta$ divise la première parenthèse qui est

$$Ar^2 + Br + C + \cos\theta,$$

on doit avoir

$$B = 0,$$

$$\frac{A}{H^2} = \frac{C + \cos\theta}{\sin^2\theta} = m,$$

m étant une fonction de s seulement. L'équation (II) devient alors

$$\frac{dr}{ds} = m(H^2r^2 + \sin^2\theta) - \cos\theta.$$

En substituant l'expression de $\frac{dr}{ds}$ et $\frac{d^2r}{ds^2}$ dans l'équation (I) et en supprimant le facteur $(H^2r^2 + \sin^2\theta)$ commun aux deux membres, on trouve, toutes réductions faites,

$$m = -\frac{1}{\cos\theta}, \qquad \cos\theta = \text{const.}, \qquad H = \text{const.}$$

Les surfaces correspondant à ce cas sont les surfaces à paramètre constant, dont la ligne de striction coupe les génératrices sous un angle constant, et par suite est ligne géodésique. Ce sont donc l'hyperboloïde de révolution et les surfaçes applicables sur cet hyperboloïde. Si l'angle θ avait pu être droit, on aurait eu également l'hélicoïde minimum et les surfaces de binormales des courbes à torsion constante; mais, m devant être fini, $\theta \neq 90°$.

L'équation (II) se réduit, dans le cas actuel, à

$$\cos\theta \frac{dr}{ds} + H^2 r^2 + 1 = 0;$$

si l'on appelle a le rayon du cercle de gorge de l'hyperboloïde, en remarquant que l'on a pour cette surface

$$H = \frac{\cos\theta}{a},$$

on obtient, comme intégrale de l'équation précédente,

$$r\cos\theta + a\,\mathrm{tang}\frac{s - s_0}{a} = 0.$$

Il est facile de vérifier que cette équation correspond aux méridiens de l'hyperboloïde.

5. *Deuxième cas.* — Supposons maintenant que $H^2 r^2 + \sin^2\theta$ divise la seconde parenthèse, qui est

$$2AH^2 r^3 + \left(2BH^2 + H\frac{dH}{ds}\right) r^2 + (2C + \cos\theta) H^2 r - \cos\theta \frac{d\cos\theta}{ds},$$

on trouve tout de suite, comme équations de condition,

$$2AH^2 \sin^2\theta - H^4(2C + \cos\theta) = 0,$$

$$\left(2BH^2 + H\frac{dH}{ds}\right)\sin^2\theta + H^2\cos\theta\frac{d\cos\theta}{ds} = 0.$$

On en tire

$$A = \frac{H^2(2C + \cos\theta)}{2\sin^2\theta} = \frac{K^2(2C + \cos\theta)}{2},$$

$$B = -\frac{\frac{dH}{ds}\sin^2\theta + H\cos\theta\frac{d\cos\theta}{ds}}{2H\sin^2\theta} = -\frac{\frac{dK}{ds}}{K}.$$

Je remarque que l'expression obtenue pour B est exactement celle du coefficient de r dans l'équation différentielle des asymptotiques, lorsque cette équation est résolue par rapport à $\frac{dr}{ds}$, car on peut l'écrire (en appelant Ω la courbure de la section normale tangente à la ligne de striction),

$$2\mathrm{K}\sin\theta\frac{dr}{ds}+\mathrm{K}^2(\Omega-\mathrm{K}\sin\theta\cos\theta)r^2+\frac{d\mathrm{K}}{ds}\sin\theta\, r+\Omega=0.$$

Si l'on pose

$$\mathrm{C}=-\frac{\mathrm{M}}{2\mathrm{K}\sin\theta},$$

M étant une fonction de s, on trouve

$$\mathrm{A}=-\frac{\mathrm{K}^2(\mathrm{M}-\mathrm{K}\sin\theta\cos\theta)}{2\mathrm{K}\sin\theta}.$$

L'équation qui définit un système homographique de géodésiques doit donc être, si elle existe, de la forme

$$2\mathrm{K}\sin\theta\frac{dr}{ds}+\mathrm{K}^2(\mathrm{M}-\mathrm{K}\sin\theta\cos\theta)r^2+\frac{d\mathrm{K}}{ds}\sin\theta\, r+\mathrm{M}=0.$$

On voit alors qu'en déformant la surface sur laquelle on suppose qu'existe ce système, de façon que la courbure de la section normale tangente à la ligne de striction s'exprime par la fonction M, le système homographique de géodésiques coïnciderait avec le système des asymptotiques, ce qui ne peut arriver si ces lignes sont droites. Autrement dit, les surfaces qu'on pourrait obtenir dans l'hypothèse actuelle doivent être applicables sur des surfaces du second degré et, comme l'on sait *a priori* que ces surfaces satisfont aux conditions de l'énoncé, il est inutile de poursuivre la discussion analytique du cas considéré.

6. *Troisième cas.* — Supposons, enfin, que la parenthèse qui multiplie $\mathrm{H}^2r^2+\sin^2\theta$ s'annule en même temps que l'une des parenthèses du second membre. Je remarque d'abord que ce n'est pas $\frac{dr}{ds}+\cos\theta$ qui peut devenir nulle, car cette expression ne devient nulle que pour les trajectoires orthogonales, et l'on sait qu'il ne peut y avoir plus d'une géodésique trajectoire des génératrices, puisque, si une ligne est à la fois géodésique et trajectoire, elle est ligne de striction. D'ailleurs, on voit directement que, si

l'on avait à la fois

$$\frac{d^2 r}{ds^2} - \mathrm{H}^2 r + \frac{d\cos\theta}{ds} = 0,$$

$$\frac{dr}{ds} + \cos\theta = 0,$$

on aurait

$$r = 0.$$

On a donc seulement à considérer le cas où l'on aurait à la fois

$$\frac{d^2 r}{ds^2} - \mathrm{H}^2 r + \frac{d\cos\theta}{ds} = 0,$$

$$2\mathrm{H}^2 r \frac{dr}{ds} + \mathrm{H}\frac{d\mathrm{H}}{ds} r^2 + \mathrm{H}^2 \cos\theta\, r - \cos\theta \frac{d\cos\theta}{ds} = 0,$$

$$\frac{dr}{ds} = \mathrm{A} r^2 + \mathrm{B} r + \mathrm{C}.$$

En éliminant $\frac{dr}{ds}$ entre les deux dernières équations, on trouve

$$\mathrm{A} = 0, \qquad \theta = \text{const.}, \qquad \mathrm{B} = -\frac{\frac{d\mathrm{K}}{ds}}{2\mathrm{K}}, \qquad 2\mathrm{C} + \cos\theta = 0.$$

En remplaçant $\frac{d^2 r}{ds^2}$ dans la première équation, on a les équations

$$\mathrm{BC} = 0, \qquad \mathrm{B}^2 + \frac{d\mathrm{B}}{ds} - \mathrm{H}^2 = 0;$$

on ne peut pas avoir $\mathrm{B} = 0$, car H^2 est différent de 0; donc

$$\cos\theta = -2\mathrm{C} = 0.$$

Les surfaces qu'on peut obtenir sont des surfaces de binormales ou des conoïdes droits; K vérifie l'équation

$$2\mathrm{K}\frac{d^2\mathrm{K}}{ds^2} - 3\frac{d\mathrm{K}^2}{ds^2} + 4\mathrm{K}^4 = 0,$$

équation qui se ramène facilement au premier ordre. L'intégration donne, en appelant m une constante et en choisissant l'origine de l'arc s de façon que l'autre constante d'intégration soit nulle,

$$\mathrm{K} = \frac{m}{m^2 + s^2};$$

c'est l'expression qu'on trouve pour le paraboloïde équilatère

$$z = m\frac{y}{x},$$

s étant remplacé par z. Les surfaces qu'on obtiendrait dans ce cas sont donc applicables sur un paraboloïde équilatère.

On peut arriver à ce résultat sans intégration, en remarquant que, pour un conoïde droit, l'équation des asymptotiques est

$$2K\frac{dr}{ds} + r\frac{dK}{ds} = 0,$$

c'est-à-dire précisément l'équation qu'on obtient ici pour le système homographique de géodésiques. Le conoïde en question ayant des lignes à la fois géodésiques et asymptotiques est du second degré ; c'est le paraboloïde équilatère.

7. *Résumé de la discussion.* — Cette discussion relative aux lignes géodésiques peut se résumer de la façon suivante :

S'il existe sur une surface gauche un système de lignes géodésiques divisant homographiquement les génératrices, cette surface peut s'obtenir par la déformation d'une surface du second degré.

Il n'existe en général qu'un de ces systèmes, composé des transformées de celles des génératrices qu'on n'a pas laissées rectilignes. Sur les surfaces applicables sur un hyperboloïde de révolution, il existe un second système constitué par les transformées des méridiens.

Les surfaces applicables sur des paraboloïdes se distinguent de celles qui sont applicables sur des hyperboloïdes, en ce que, pour ces dernières, la division homographique produite par les géodésiques est du type général, tandis que, pour les premières, la division se fait en segments proportionnels. Il n'y a jamais de divisions en segments égaux.

8. *Surfaces développables.* — On obtient *a priori* le groupement des lignes géodésiques des surfaces développables en systèmes homographiques. Il suffit de remarquer que si l'on applique la surface sur un plan, les géodésiques deviennent des droites. Or, on voit facilement que si quatre droites déterminent sur une infinité de droites des segments de rapport anhar-

monique constant, ces quatre droites sont concourantes (ou parallèles). Donc toutes les géodésiques partant d'un même point constituent un système homographique, de même que celles dont les tangentes aux points situés sur une même génératrice sont parallèles; ces dernières divisent les génératrices en segments proportionnels. A un système de lignes géodésiques divisant les génératrices en segments proportionnels, correspond un système orthogonal également composé de géodésiques et divisant les génératrices de la même façon.

On a vu que les systèmes orthogonaux qui divisent ces génératrices en segments proportionnels étaient donnés par des équations de la forme

$$\frac{dr}{ds} + 1 = \mathrm{M}\, r, \qquad \frac{dr}{ds} + 1 = \frac{\omega^2}{\mathrm{M}}\, r.$$

Si l'on détermine M de façon que les systèmes soient composés de géodésiques, ce qui se fait en éliminant les dérivées de l'équation des géodésiques, qui est, dans ce cas,

$$\omega r \left[\frac{d^2 r}{ds^2} - \omega r\right] = \left(\frac{dr}{ds} + 1\right)\left[2\omega \frac{dr}{ds} + \frac{d\omega}{ds} r + \omega\right],$$

on trouve sans difficulté que, si l'on appelle $d\sigma$ l'arc de contingence de l'arête de rebroussement, les systèmes cherchés sont donnés par

$$\frac{dr}{ds} + 1 = \omega \operatorname{tang}(\sigma - \sigma_0) \times r, \qquad \frac{dr}{ds} + 1 = \omega \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} + \sigma - \sigma_0\right) \times r.$$