ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

T.-J. STIELTJES

Sur les racines de la fonction sphérique de seconde espèce

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 4, nº 2 (1890), p. J1-J10
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1890_1_4_2_J1_0>

SUR LES RACINES

DE LA

FONCTION SPHÉRIQUE DE SECONDE ESPÈCE,

PAR M. T.-J. STIELTJES.

Nous nous proposons de développer ici quelques Remarques, qui nous ont été suggérées par l'étude du Mémoire de M. Hermite sur le sujet indiqué ci-dessus (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. IV).

Soient donc, en adoptant les notations de M. Hermite, $X_n = F(x)$ le polynôme de Legendre du degré n, $R(x)$ la partie entière du produit

$$F(x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \cdots\right),$$

ensuite

$$Q^n(x) = \frac{1}{2}F(x)\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - R(x) \tag{1}$$

la fonction sphérique de seconde espèce.

M. Hermite a étudié l'équation $Q^n(x) = 0$, et pour cela il pose

$$\log\frac{x+1}{x-1} = z, \qquad x = \frac{e^z+1}{e^z-1},$$

$$f(z) = (e^z-1)^n\, Q^n\left(\frac{e^z+1}{e^z-1}\right).$$

Il obtient ensuite la distribution des racines de l'équation $f(z) = 0$ sur le plan des z. Nous nous sommes demandé simplement ce que deviennent ces résultats si l'on revient à la variable originale x, afin de connaître ainsi la distribution des racines de l'équation $Q^n(x) = 0$ sur le plan des x.

1. La fonction analytique $Q^n(x)$ est non uniforme et elle admet une infinité de déterminations. Ces déterminations proviennent de ce que, dans

l'expression (1), le logarithme a une infinité de valeurs différant l'une de l'autre par des multiples quelconques de $2\pi i$; les déterminations de $Q^n(x)$ diffèrent donc par des multiples de $\pi i F(x)$. Pour une valeur quelconque de x, il y a en général une détermination du logarithme et une seule, telle que la partie purement imaginaire se trouve comprise entre $\pm\pi i$. Il n'y a exception que dans le cas où cette partie imaginaire serait exactement $=\pm\pi i$, ce qui n'a lieu que lorsque x est réel et compris dans l'intervalle $(-1, +1)$.

Si l'on pose

$$\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = z = a + ib,$$

b a une signification géométrique très simple. Soient, sur le plan des x, P, A, B les points qui représentent des quantités x, $+1$, -1 respectivement; alors b est égal à l'angle $\widehat{\mathrm{APB}}$, cet angle étant pris avec le signe $+$ lorsque P est au-dessous de l'axe des abscisses, avec le signe $-$ lorsque P est au-dessus de cet axe. Pour avoir les autres déterminations de $Q^n(x)$, il faudrait ajouter à l'angle ainsi déterminé, et qui est compris entre $\pm\pi$, des multiples quelconques de 2π.

Mais appliquons une coupure le long de l'axe des abscisses de -1 à $+1$, et supposons que x ne soit pas sur la coupure. En adoptant alors pour le logarithme la valeur dont la partie purement imaginaire tombe entre $\pm\pi i$, on a une branche parfaitement déterminée de la fonction analytique que nous considérons, et c'est cette branche particulière que nous désignerons par $Q^n(x)$. C'est cette fonction $Q^n(x)$ qui, lorsque $\operatorname{mod} x > 1$, donne un développement convergent de la forme

$$Q^n(x) = \frac{c_0}{x^{n+1}} + \frac{c_1}{x^{n+3}} + \frac{c_2}{x^{n+5}} + \dots, \tag{2}$$

car on sait que, dans le produit

$$F(x)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots\right),$$

les termes avec x^{-1}, x^{-2}, ..., x^{-n} manquent.

Il est clair, d'après ce qui précède, que l'on a

$$Q^n(x+\varepsilon i) - Q^n(x-\varepsilon i) = -\pi i F(x),$$

x étant sur la coupure et ε positif infiniment petit. Car pour $x + \varepsilon i$ la partie imaginaire du logarithme est $-\pi i$, pour $x - \varepsilon i$ elle est $+\pi i$.

Par conséquent, si l'on traverse la coupure en allant de la moitié inférieure du plan dans la moitié supérieure, la fonction analytique $Q^n(x)$ prendra une série continue de valeurs, mais on passe ainsi de la branche $Q^n(x)$ à la branche $Q^n(x) + \pi i F(x)$. Tant qu'on ne franchit pas de nouveau la coupure, on a là encore une fonction continue et uniforme, et qui répond à une détermination du logarithme dans laquelle la partie purement imaginaire est comprise entre $+\pi i$ et $+3\pi i$.

Si l'on revient à la variable

$$z = \log \frac{x+1}{x-1}$$

introduite par M. Hermite, on voit que, dans le plan des z, la bande comprise entre les deux droites $y = \pm \pi$ correspond à la branche $Q^n(x)$ telle que nous venons de la définir. La bande comprise entre $y = +\pi i$ et $y = +3\pi i$ correspond à la branche $Q^n(x) + \pi i F(x)$, ...

Lorsque x est réel, mais non sur la coupure, la partie imaginaire du logarithme est zéro ou plus généralement $= 2k\pi$. Pour la branche $Q^n(x)$ elle est nulle, ce qui répond aussi sur le plan des z à l'axe des abscisses. Dès lors on voit facilement que, pour la fonction $Q^n(x)$, la moitié supérieure du plan des x correspond sur le plan des z à la bande comprise entre les deux droites

$$y = 0 \quad \text{et} \quad y = -\pi.$$

Au contraire, la bande entre $y = 0$ et $y = +\pi$ (sur le plan des z) correspond à la moitié inférieure du plan des x.

De même, pour la fonction $Q^n(x) + \pi i F(x)$, la moitié supérieure du plan correspond à la bande comprise entre les droites

$$y = \pi \quad \text{et} \quad y = 2\pi$$

sur le plan des z, et la moitié inférieure du plan des x à la bande comprise entre

$$y = 2\pi \quad \text{et} \quad y = 3\pi, \quad \ldots.$$

Si l'on imagine dans le plan des x un cercle tel que le rapport des distances d'un de ces points aux points A et B soit constant, et qu'on parcoure ce cercle constamment dans le même sens, la partie réelle de

$$z = \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

restera constante, mais sa partie purement imaginaire variera toujours dans le même sens entre $-\infty i$ et $+\infty i$.

2. On peut passer maintenant directement des résultats obtenus par M. Hermite, et qui se rapportent au plan des z, aux propositions équivalentes se rapportant au plan des x.

Considérons d'abord, sur le plan des z, la bande comprise entre les droites $y = \pm\pi$ et qui correspond à la branche $Q^n(x)$. La fonction

$$f(z) = (e^z - 1)^n\, Q^n\left(\frac{e^z+1}{e^z-1}\right)$$

admet exactement $2n+1$ zéros dans cette bande, mais il faut remarquer que toutes ces racines sont nulles. En effet, d'après la formule (2),

$$Q^n\left(\frac{e^z+1}{e^z-1}\right) = c_0\left(\frac{e^z-1}{e^z+1}\right)^{n+1} + \ldots$$

a déjà un zéro d'ordre de multiplicité $n+1$, $z=0$; donc $f(z)=0$ a la même racine avec l'ordre de multiplicité $2n+1$. Abstraction faite de cette racine multiple $z=0$, l'équation $f(z)=0$ n'admet donc aucune autre racine dans la bande que nous considérons; et, puisque $z=0$ correspond à $x=\infty$, il en résulte que l'équation

$$Q^n(x) = 0$$

n'admet *aucune* racine (finie).

La bande comprise entre les droites

$$y = \pi \quad \text{et} \quad y = 2\pi$$

sur le plan des z ne renferme aucune racine de $f(z)$, et dans la bande comprise entre

$$y = 2\pi \quad \text{et} \quad y = 3\pi$$

se trouvent n racines. On en conclut : l'équation

$$Q^n(x) + \pi i\, F(x) = 0$$

n'admet aucune racine dans la partie supérieure du plan, mais elle en a précisément n au-dessous de l'axe des abscisses.

Généralement l'équation

$$Q^n(x) + k\pi i\, F(x) = 0,$$

où k est entier (non nul), a toujours exactement n racines qui se trouvent au-dessous de l'axe des abscisses lorsque k est positif, au-dessus lorsque k est négatif.

On remarquera que les zéros $\pm 2\pi i$, $\pm 4\pi i$, ... de la fonction

$$(e^z - 1)^n$$

n'introduisent point des zéros dans $f(z)$, mais contrebalancent seulement les pôles de $Q^n\left(\frac{e^z+1}{e^z-1}\right)$; car, tandis que $z = 0$ est un zéro de $Q^n\left(\frac{e^z+1}{e^z-1}\right)$, les valeurs $z = \pm 2\pi i$, $\pm 4\pi i$, ... sont des pôles pour cette fonction.

3. On peut retrouver ces résultats par la méthode suivante. Considérons la fonction $Q^n(x)$ dans l'espace annulaire compris entre les courbes C

Fig. 1.

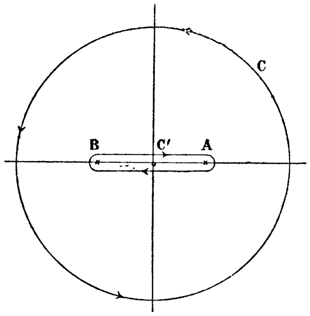
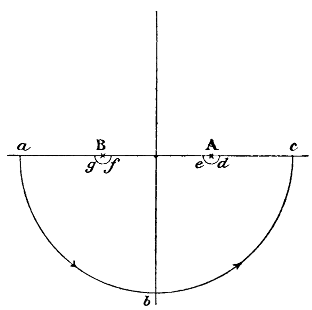


Fig. 2.



et C', C étant un cercle de rayon très grand, C' enveloppant étroitement la coupure (*fig.* 1). Dans ce domaine $Q^n(x)$ est partout uniforme et régulier, c'est-à-dire développable par la série de Taylor. D'après un théorème de Cauchy, le nombre des racines de $Q^n(x) = 0$ dans ce domaine peut donc s'obtenir en divisant par 2π l'accroissement total de l'argument de $Q(x)$, lorsque x parcourt successivement les contours C et C' dans le sens indiqué (*fig.* 1). Or, sur le cercle C on a

$$Q^n(x) = \frac{c_0}{x^{n+1}}(1 + \varepsilon)$$

le module de ε restant aussi petit qu'on voudra. La variation totale de l'argument de $1+\varepsilon$ est donc nulle sur le contour C et l'accroissement de l'argument de $Q^n(x)$ sur ce contour est

$$-2\pi\times(n+1).$$

Pour avoir la variation de l'argument sur C', nous réduirons ce contour à la double droite de $-1+\varepsilon$ à $+1-\varepsilon$, et de deux cercles infiniment petits entourant les points A et B et tels que le rapport des distances aux points A et B est constant pour un point sur chacun de ces cercles. Sur le cercle enveloppant le point A, la partie réelle de

$$\log\frac{x+1}{x-1}$$

est alors constante, positive et très grande, tandis que la partie imaginaire est toujours comprise entre $\pm\pi i$. Ensuite, on a sensiblement sur ce cercle $F(x)=1$ et $R(x)$ égale à une quantité réelle.

On voit donc que la partie réelle de $Q(x)$ est constamment positive très grande, tandis que la partie purement imaginaire est très petite par rapport à la partie réelle. La variation de l'argument de $Q^n(x)$ est donc insensible, et il en est de même pour le cercle enveloppant le point B. Puisqu'on sait d'avance que la variation totale de l'argument sur C' doit être un multiple exact de 2π, nous pouvons donc nous borner à calculer la variation de l'argument sur la droite double de $-1+\varepsilon$ à $+1-\varepsilon$.

En allant de $-1+\varepsilon$ à $+1-\varepsilon$, on doit prendre

$$\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\pi i,$$

et en allant de $+1-\varepsilon$ à $-1+\varepsilon$

$$\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\pi i.$$

Mais on voit facilement (parce que la fonction $Q^n(x)$ est soit paire, soit impaire) que la variation de l'argument est la même dans les deux cas. Il suffira donc de calculer la variation de l'argument de

$$\frac{1}{2}F(x)\left[\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\pi i\right]-R(x)=X+Yi,$$

x diminuant de $+1-\varepsilon$ à $-1+\varepsilon$ et de doubler le résultat. Or, on a

$$X = \frac{1}{2}F(x)\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - R(x),$$

$$Y = \frac{1}{2}\pi F(x),$$

et l'on reconnaît facilement que l'équation $X=0$ admet $n+1$ racines

$$1 > y_1 > y_2 > y_3 > \ldots > y_{n+1} > -1.$$

Dans les intervalles de ces racines se trouvent les n racines de $Y=0$, x_1, x_2, ..., x_n,

$$y_1 > x_1 > y_2 > x_2 \ldots x_n > y_{n+1}.$$

Il importe de remarquer que l'équation $X=0$ ne saurait avoir d'autres racines réelles dans l'intervalle $(-1, +1)$, car, d'après un théorème de Sturm, on en conclurait pour l'équation $Y=0$ plus de n racines, ce qui est absurde. Or on reconnaît maintenant sans difficulté les variations de signes de X et Y lorsque x décroît de $1-\varepsilon$ à $-1+\varepsilon$, et qu'on peut déduire du Tableau suivant

x.	Signe de X.	Signe de Y.
$+1-\varepsilon$	$+$	$+$
y_1	0	$+$
x_1	$-$	0
y_2	0	$-$
x_2	$+$	0
y_3	0	$+$
..	.	..
x_n	$(-1)^n$	0
y_{n+1}	0	$(-1)^n$
$-1+\varepsilon$	$(-1)^{n+1}$	$(-1)^n$

Pour $x=+1-\varepsilon$, X est positif très grand, Y positif fini, l'argument positif très petit. Pour $x=y_1$ l'argument est $+\frac{\pi}{2}$; donc l'accroissement de l'argument est, pour l'intervalle $(+1-\varepsilon$ à $y_1)$,

$$+\frac{\pi}{2}.$$

Il est clair ensuite qu'on a pour les intervalles indiqués les accroissements de l'argument suivants

$$\begin{array}{llll}
(y_1 & \text{à} & y_2), & +\pi, \\
(y_2 & \text{à} & y_3), & +\pi, \\
\multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,} \\
(y_n & \text{à} & y_{n+1}), & +\pi, \\
(y_{n+1} & \text{à} & -1+\varepsilon), & +\frac{\pi}{2}.
\end{array}$$

En faisant la somme et doublant, la variation totale de l'argument sur le contour C', est

$$+2\pi \times (n+1),$$

et pour le contour C on avait un accroissement

$$-2\pi \times (n+1);$$

donc l'équation $Q^n(x) = 0$ n'admet aucune racine.

4. La même méthode s'applique à l'équation

$$Q^n(x) + \pi i F(x) = 0.$$

Dans ce cas on a sur le cercle C

$$Q^n(x) + \pi i F(x) = Cx^n(1+\varepsilon);$$

donc la variation de l'argument sur C est

$$+2\pi \times n.$$

Mais il faudra prendre maintenant, en allant de $-1+\varepsilon$ à $+1-\varepsilon$,

$$X = \frac{1}{2} F(x) \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - R(x),$$

$$Y = +\frac{1}{2}\pi F(x),$$

et en allant de $+1-\varepsilon$ à $-1+\varepsilon$

$$X = \frac{1}{2} F(x) \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - R(x),$$

$$Y = +\frac{3}{2}\pi F(x).$$

La variation totale de l'argument sur C' devient nulle, les deux parties se détruisant; donc l'équation

$$Q^n(x) + \pi i F(x) = 0$$

admet n racines. D'après le théorème de M. Hermite, ces n racines se trouvent au-dessous de l'axe des abscisses; on peut retrouver ce résultat en évaluant la variation de l'argument sur le contour $abcdefga$ (*fig.* 2). La variation est

$$\begin{array}{ll} \text{Sur } abc, & +\pi \times n, \\ \text{Sur } cd, & -\frac{\pi}{2}, \\ \text{Sur } ef, & +\pi \times (n+1), \\ \text{Sur } ga, & -\frac{\pi}{2}, \end{array}$$

en sorte qu'on trouve n racines à l'intérieur du contour. Les mêmes considérations s'appliquent évidemment aux autres branches de la fonction, et l'on pourrait même déterminer le nombre des racines de

$$Q^n(x) + k\pi i F(x) = 0$$

pour une valeur non entière ou même imaginaire de k.

5. La fonction $Q^n(x)$ peut s'exprimer par l'intégrale de M. Neumann

$$Q^n(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{F(u)\,du}{x-u},$$

et l'on peut conclure de là, très simplement, que l'équation $Q^n(x) = 0$ n'a point de racine. Supposons, en effet (x n'étant pas naturellement sur la coupure),

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(u)\,du}{x-u} = 0, \tag{3}$$

on aurait aussi

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(u)^2\,du}{x-u} = 0, \tag{4}$$

car

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(u)^2\,du}{x-u} = \int_{-1}^{+1} F(u)\frac{F(u)-F(x)}{x-u}\,du + F(x)\int_{-1}^{+1}\frac{F(u)\,du}{x-u}$$

et dans le second membre la première intégrale s'annule en vertu des propriétés de $F(u)$, la seconde en vertu de (3). Or, je dis que la relation (4) est impossible; soit, en effet,

$$x = a + bi,$$

on devrait avoir

$$\int_{-1}^{+1} \frac{F(u)^2}{(a-u)^2 + b^2}(a - u - bi)\,du = 0.$$

La partie purement imaginaire ne peut être nulle, à moins qu'on n'ait $b = 0$; mais x serait réel et, n'étant pas sur la coupure, $x - u$ ne changerait pas de signe, et la relation (4) est encore impossible.