

E. GOURSAT

**Sur un théorème de M. Weingarten, et sur la théorie
de surfaces applicables**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1^{re} série, tome 5, n° 3 (1891), p. E1-E34

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1891_1_5_3_E1_0

© Université Paul Sabatier, 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN

THÉORÈME DE M. WEINGARTEN,

ET SUR

LA THÉORIE DE SURFACES APPLICABLES,

PAR M. E. GOURSAT,

Maître de Conférences à l'École Normale supérieure.

M. Weingarten a publié récemment ⁽¹⁾ un remarquable théorème, permettant de ramener la détermination des surfaces applicables sur une surface donnée à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre d'une forme très simple. Quoique les deux problèmes que l'on ramène ainsi l'un à l'autre présentent des difficultés d'un même ordre, cette proposition n'en offre pas moins par elle-même un très grand intérêt. En outre, elle a permis à M. Weingarten de retrouver très simplement les résultats qu'il avait fait connaître depuis longtemps relativement aux développées des surfaces minima et aux surfaces applicables sur le parabolôïde de révolution, et d'en ajouter quelques-uns de nouveaux. En comparant la Note de M. Weingarten à un travail ⁽²⁾ que j'avais publié il y a quelque temps sur un sujet en apparence tout différent, j'ai reconnu immédiatement qu'on pouvait déterminer par des quadratures toutes les surfaces admettant un élément linéaire donné, dans une *infinité* de cas nouveaux ⁽³⁾. Le peu d'exemples que l'on possède où l'on ait pu résoudre *effectivement* le problème donne, il me semble, quelque intérêt à ce résultat.

La première Partie de ce travail est consacrée à la démonstration du théorème de M. Weingarten. J'en fais ensuite l'application aux surfaces dont le

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, 23 mars et 6 avril 1891.

⁽²⁾ *American Journal of Mathematics*, t. X.

⁽³⁾ *Comptes rendus*, 6 avril 1891.

carré de l'élément linéaire possède la forme

$$ds^2 = du^2 + 2[u + \Phi(v)]dv^2,$$

et plus spécialement dans le cas où $\Phi(v)$ se réduit à αv^2 . J'emploie constamment les notations et les résultats que l'on trouve dans l'Ouvrage de M. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*.

I.

1. Considérons une surface Σ dont le carré de l'élément linéaire possède la forme

$$(1) \quad ds^2 = du^2 + dv dv,$$

du , dv , $d\omega$ désignant trois différentielles exactes. Si l'on prend u et v pour variables indépendantes, ω devient une certaine fonction $2\psi(u, v)$ et, en posant

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = p, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = q,$$

la formule (1) peut s'écrire

$$(1)' \quad ds^2 = du^2 + 2p du dv + 2q dv^2,$$

p et q satisfaisant à la condition

$$(2) \quad \frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial u}.$$

Soient ξ , η , ζ les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface; on aura les relations

$$(3) \quad \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} \right)^2 = 1, \quad \sum \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} = p, \quad \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} \right)^2 = 2q.$$

Différentions ces trois équations par rapport à u et v successivement; il vient, en tenant compte de la condition (2),

$$(4) \quad \begin{cases} \sum \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = 0, & \sum \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} = 0, & \sum \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial q}{\partial u}, \\ \sum \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = \frac{\partial q}{\partial v}, & \sum \frac{\partial \xi}{\partial v} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = \frac{\partial p}{\partial u}, & \sum \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} = 0. \end{cases}$$

Posons

$$\begin{aligned} x &= \frac{\partial \xi}{\partial v}, & y &= \frac{\partial \eta}{\partial v}, & z &= \frac{\partial \zeta}{\partial v}, \\ c &= \frac{\partial \xi}{\partial u}, & c' &= \frac{\partial \eta}{\partial u}, & c'' &= \frac{\partial \zeta}{\partial u}; \end{aligned}$$

les relations (3) et (4) nous donnent

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \quad c dx + c' dy + c'' dz = 0.$$

Si donc on regarde x, y, z comme les coordonnées rectangulaires d'un point d'une surface S , c, c', c'' seront les cosinus directeurs de la normale à cette surface. Les coordonnées d'un point de Σ s'exprimeront à leur tour au moyen des coordonnées d'un point de S par les quadratures

$$(5) \quad \begin{cases} \xi = \int x dv + c du, \\ \eta = \int y dv + c' du, \\ \zeta = \int z dv + c'' du. \end{cases}$$

Remarquons que les quantités p et q ont, pour la nouvelle surface S , une signification géométrique très simple; on a, en effet,

$$p = cx + c'y + c''z, \quad q = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2};$$

p représente donc la distance de l'origine au plan tangent, et q la moitié du carré de la distance d'un point de S à l'origine.

2. La construction précédente, appliquée à toutes les surfaces Σ dont le carré de l'élément linéaire possède la forme (1)', donne une famille de surfaces S . *Toutes ces surfaces S vérifient une même équation aux dérivées partielles du second ordre.*

Pour le démontrer, formons l'équation aux rayons de courbure principaux de cette surface S . Si l'on se déplace sur une ligne de courbure, on a, d'après les formules d'Olinde Rodrigues,

$$dx + \rho dc = 0, \quad dy + \rho dc' = 0, \quad dz + \rho dc'' = 0,$$

ρ désignant le rayon de courbure principal correspondant.

Remplaçons x, y, z, c, c', c'' par leurs valeurs; on tire de ces trois équations

$$-\frac{du}{dv} = \frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} + \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} + \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}} = \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2} + \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v} + \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2}} = \frac{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} + \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}}.$$

On forme un rapport égal aux précédents en multipliant les deux termes du premier par $\frac{\partial \xi}{\partial v}$, ceux du second par $\frac{\partial \eta}{\partial v}$, ceux du troisième par $\frac{\partial \zeta}{\partial v}$, et les combinant par addition, ce qui nous donne

$$-\frac{du}{dv} = \frac{\frac{\partial q}{\partial v} + \rho \frac{\partial q}{\partial u}}{\frac{\partial q}{\partial u} + \rho \frac{\partial p}{\partial u}}.$$

En égalant ce rapport à l'un quelconque des précédents, on aura, pour déterminer ρ , une équation de la forme

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial v} + \rho \frac{\partial q}{\partial u}}{\frac{\partial q}{\partial u} + \rho \frac{\partial p}{\partial u}} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}\rho}{\mathbf{B} + \mathbf{C}\rho}$$

ou, en développant,

$$\rho^2 \left(\mathbf{C} \frac{\partial q}{\partial u} - \mathbf{B} \frac{\partial p}{\partial u} \right) + \rho \left(\mathbf{C} \frac{\partial q}{\partial v} - \mathbf{A} \frac{\partial p}{\partial u} \right) + \mathbf{B} \frac{\partial q}{\partial v} - \mathbf{A} \frac{\partial q}{\partial u} = 0.$$

Soient ρ' et ρ'' les deux rayons de courbure principaux; on aura

$$\rho' + \rho'' = \frac{\mathbf{A} \frac{\partial p}{\partial u} - \mathbf{C} \frac{\partial q}{\partial v}}{\mathbf{C} \frac{\partial q}{\partial u} - \mathbf{B} \frac{\partial p}{\partial u}}, \quad \rho' \rho'' = \frac{\mathbf{B} \frac{\partial q}{\partial v} - \mathbf{A} \frac{\partial q}{\partial u}}{\mathbf{C} \frac{\partial q}{\partial u} - \mathbf{B} \frac{\partial p}{\partial u}},$$

et l'on en déduit

$$\rho' \rho'' \frac{\partial p}{\partial u} + (\rho' + \rho'') \frac{\partial q}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial v} = 0$$

ou bien

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \rho' \rho'' + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} (\rho' + \rho'') + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = 0.$$

D'un autre côté, les formules

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = p, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = q$$

permettent d'exprimer u et v en fonction de p et de q , de sorte que la relation (6) ne contient en réalité que ρ' , ρ'' , p , q . C'est donc une relation entre les rayons de courbure principaux d'un point de S , la distance de ce point à l'origine et la distance de l'origine au plan tangent, et nous voyons que cette relation ne dépend que de la fonction $\psi(u, v)$. Elle est donc la même pour toutes les surfaces S , que l'on déduit des surfaces Σ admettant l'élément linéaire (1)'.

Pour ramener l'équation (6) à la forme de M. Weingarten, il suffit de faire un changement de variables qui est équivalent, au fond, à la transformation de Legendre. Au lieu de prendre pour variables indépendantes u et v , prenons p et q , et supposons u et v exprimées au moyen de p et de q .

Posons ensuite

$$\varphi(p, q) = pu + qv - \psi;$$

de la relation

$$d\psi = p du + q dv,$$

on tire

$$d(pu + qv - \psi) = d\varphi = u dp + v dq,$$

de sorte qu'on aura

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial p}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial q}.$$

Calculons encore les dérivées secondes de φ ; on a

$$d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} dp + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} dq$$

ou bien

$$du = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} dv \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} du + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} dv \right).$$

En égalant les coefficients de du et de dv , on en tire

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} = \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \right)^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} = \frac{-\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \right)^2},$$

et l'on aura de la même manière

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \right)^2}.$$

L'équation (6) devient alors

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} - (\rho' + \rho'') \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} + \rho' \rho'' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0.$$

Elle ne diffère qu'en apparence de l'équation (2) de M. Weingarten (*Comptes rendus*, t. CXII, p. 607); il suffirait, pour les rendre identiques, de changer le signe de ρ'' et de ρ' ou, ce qui revient au même, le sens de la direction positive sur la normale à la surface.

Quant à l'élément linéaire de la surface Σ , il prend la forme

$$(8) \quad ds^2 = \left(d \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right)^2 + 2\rho d \frac{\partial \varphi}{\partial p} d \frac{\partial \varphi}{\partial q} + 2q \left(d \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right)^2;$$

les équations (7) et (8) ne renferment plus que p , q et les dérivées partielles de la fonction $\varphi(p, q)$, qui n'est soumise à aucune restriction.

3. Réciproquement, de toute surface satisfaisant à l'équation (7) on déduira, par des quadratures, une surface dont l'élément linéaire peut être ramené à la forme (8).

Étant donnée une surface quelconque S , choisissons sur la normale un sens positif et désignons par c , c' , c'' les cosinus directeurs de cette direction positive, et posons, comme plus haut,

$$p = cx + c'y + c''z, \quad q = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2};$$

si l'on imagine qu'on ait pris p et q pour variables indépendantes, les formules d'Olinde Rodrigues nous donnent, pour un déplacement sur une ligne de courbure,

$$-\frac{\partial q}{\partial p} = \frac{\frac{\partial x}{\partial p} + \rho \frac{\partial c}{\partial p}}{\frac{\partial x}{\partial q} + \rho \frac{\partial c}{\partial q}} = \frac{\frac{\partial y}{\partial p} + \rho \frac{\partial c'}{\partial p}}{\frac{\partial y}{\partial q} + \rho \frac{\partial c'}{\partial q}} = \frac{\frac{\partial z}{\partial p} + \rho \frac{\partial c''}{\partial p}}{\frac{\partial z}{\partial q} + \rho \frac{\partial c''}{\partial q}}.$$

En multipliant les deux termes de ces trois rapports respectivement par x , y , z et en tenant compte des valeurs de p et de q , on trouve un nouveau rapport égal aux précédents

$$-\frac{\partial q}{\partial p} = \rho.$$

L'équation aux rayons de courbure principaux s'obtiendra en égalant à ρ

un quelconque des rapports précédents; en prenant par exemple le premier rapport, il vient, pour l'équation cherchée,

$$\rho^2 \frac{\partial c}{\partial q} + \rho \left(\frac{\partial x}{\partial q} - \frac{\partial c}{\partial p} \right) - \frac{\partial x}{\partial p} = 0.$$

On aura donc, ρ' et ρ'' étant les rayons de courbure principaux (1)

$$(9) \quad \frac{\partial c}{\partial q} \rho' \rho'' = - \frac{\partial x}{\partial p}, \quad (\rho' + \rho'') \frac{\partial c}{\partial q} = \frac{\partial c}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial q},$$

et l'on trouverait de même

$$\begin{aligned} \frac{\partial c'}{\partial q} \rho' \rho'' &= - \frac{\partial y}{\partial p}, & (\rho' + \rho'') \frac{\partial c'}{\partial q} &= \frac{\partial c'}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial q}, \\ \frac{\partial c''}{\partial q} \rho' \rho'' &= - \frac{\partial z}{\partial p}, & (\rho' + \rho'') \frac{\partial c''}{\partial q} &= \frac{\partial c''}{\partial p} - \frac{\partial z}{\partial q}. \end{aligned}$$

Cela posé, supposons que la surface considérée S soit une intégrale de l'équation (7); les expressions

$$\begin{aligned} x d \frac{\partial \varphi}{\partial q} + c d \frac{\partial \varphi}{\partial p}, \\ y d \frac{\partial \varphi}{\partial q} + c' d \frac{\partial \varphi}{\partial p}, \\ z d \frac{\partial \varphi}{\partial q} + c'' d \frac{\partial \varphi}{\partial p} \end{aligned}$$

sont des différentielles exactes. Vérifions-le pour la première; la condition d'intégrabilité développée s'écrit

$$\frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} + \frac{\partial c}{\partial q} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} - \frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} - \frac{\partial c}{\partial p} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} = 0,$$

et, en remplaçant $\frac{\partial x}{\partial p}$ et $\frac{\partial x}{\partial q} - \frac{\partial c}{\partial p}$ par les valeurs tirées des formules (9),

$$\frac{\partial c}{\partial q} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} - (\rho' + \rho'') \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} + \rho' \rho'' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} \right] = 0,$$

(1) WEINGARTEN, *loc cit.*, formules (1).

relation qui est vérifiée puisque, par hypothèse, S est une intégrale de l'équation (7). On peut donc poser

$$(10) \quad \begin{cases} \xi = \int x d \frac{\partial \varphi}{\partial q} + c d \frac{\partial \varphi}{\partial p}, \\ \eta = \int y d \frac{\partial \varphi}{\partial q} + c' d \frac{\partial \varphi}{\partial p}, \\ \zeta = \int z d \frac{\partial \varphi}{\partial q} + c'' d \frac{\partial \varphi}{\partial p}; \end{cases}$$

le point de coordonnées ξ, η, ζ décrit une surface Σ dont le carré de l'élément linéaire est bien donné par la formule (8).

4. La détermination des surfaces admettant l'élément linéaire (8) ou l'intégration de l'équation (7) constituent donc deux problèmes équivalents. Arrêtons-nous un moment sur la correspondance entre ces deux questions. Étant donnée une courbe C et une surface développable D contenant cette courbe, on peut se proposer de déterminer une surface intégrale de l'équation (7) passant par la courbe C et tangente à la développable D tout le long de C . En un point de C , $x, y, z, c, c', c'', p, q$ et par suite $\frac{\partial \varphi}{\partial p}, \frac{\partial \varphi}{\partial q}$ seront des fonctions parfaitement déterminées d'un paramètre variable t . A cette courbe C les formules (10) font correspondre une courbe C_1 , qui est également déterminée, si l'on fait abstraction, comme il est naturel, d'une translation quelconque. Supposons, pour fixer les idées, que l'on connaisse déjà une surface Σ_0 admettant l'élément linéaire (8); la relation qui lie les variables p et q le long de C ou de C_1 détermine sur Σ_0 une certaine courbe C_0 , de sorte que le problème de déterminer une surface S tangente à la développable D le long de C revient à déterminer une surface Σ , applicable sur Σ_0 , de telle façon que la courbe C_0 vienne s'appliquer sur C_1 .

Inversement, si l'on se donne les courbes C_0 et C_1 , la courbe C et la développable D sont déterminées, pourvu qu'on ait choisi, en outre, le point de C_1 qui correspond à un point donné de C_0 . Prenons l'élément linéaire sous la forme (1); tout le long de C_0 , u et v sont des fonctions données du paramètre variable t . La correspondance établie entre les points des deux courbes C_0 et C_1 nous fait connaître de même les coordonnées ξ, η, ζ d'un point de C_1 en fonction de t . On aura donc, la lettre d désignant les diffé-

rentielles relatives à un déplacement sur C_1 ,

$$d\tilde{\xi} = \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial u} du + \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial v} dv,$$

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial u} du + \frac{\partial \eta}{\partial v} dv,$$

$$d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial u} du + \frac{\partial \zeta}{\partial v} dv;$$

ces trois équations, jointes aux équations (3), feront connaître les valeurs des six dérivées $\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial u}$, $\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial v}$, $\frac{\partial \eta}{\partial u}$, $\frac{\partial \eta}{\partial v}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial u}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial v}$, le long de C_1 . On connaîtra donc x , y , z , c , c' , c'' et, par conséquent, la courbe C et la développable D .

Si l'assemblage formé par la courbe C et la développable D est une *caractéristique* de l'équation (7), la surface intégrale S tangente à C le long de D n'est plus déterminée, et c'est le seul cas où cette circonstance se présente. De même, quand on se propose de déformer une surface Σ_0 de façon qu'une courbe C_0 de cette surface vienne coïncider avec une courbe donnée C_1 , le problème n'est impossible ou indéterminé (1) que si la condition posée entraîne cette conséquence que C_1 serait une ligne asymptotique de la surface après la déformation. En rapprochant ces deux propriétés, on en conclut la proposition suivante :

Étant données une surface intégrale (S) de l'équation (7) et la surface Σ correspondante, les caractéristiques de la surface S correspondent aux lignes asymptotiques de Σ .

Nous allons vérifier cette conclusion dans un cas particulier. Prenons, dans l'élément linéaire (1'),

$$\psi(u, v) = uv + V,$$

V étant une fonction quelconque de v . On aura ici

$$p = \frac{\partial \psi}{\partial u} = v, \quad q = \frac{\partial \psi}{\partial v} = u + V',$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 1, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = V'',$$

(1) DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. III, p. 279.

et l'équation (6) devient

$$\rho' + \rho'' + \varepsilon V'' = 0.$$

Elle exprime que la somme des rayons de courbure principaux est une certaine fonction de la distance de l'origine au plan tangent. En coordonnées cartésiennes, cette équation s'écrit

$$\sqrt{1+p^2+q^2}[(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs] + V''(rt - s^2) = 0,$$

p, q, r, s, t désignant maintenant les dérivées premières et secondes de z par rapport à x et à y , et V'' une fonction de $\frac{px + qy - z}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$. Les caractéristiques seront déterminées par les deux relations ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} V''(dp dx + dq dy) + \sqrt{1+p^2+q^2}[(1+p^2)dx^2 + (1+q^2)dy^2 + 2pq dx dy] &= 0, \\ V'' dp dq + \sqrt{1+p^2+q^2}[(1+q^2)dp dy + (1+p^2)dq dx] &= 0. \end{aligned}$$

Or

$$p = -\frac{c}{c''}, \quad q = -\frac{c'}{c''}, \quad dp = \frac{c dc'' - c'' dc}{c''^2}, \quad dq = \frac{c' dc'' - c'' dc'}{c''^2};$$

en remplaçant p et q par ces valeurs dans la première équation, il reste

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = V'' \Sigma dc dx.$$

En éliminant V'' entre les deux équations des caractéristiques, on trouve de même

$$dp^2 + dq^2 + (q dp - p dq)^2$$

ou

$$dc^2 + dc'^2 + dc''^2 = 0,$$

ce qui montre que les caractéristiques correspondent aux lignes de longueur nulle de la sphère.

D'un autre côté, l'équation différentielle des lignes asymptotiques de Σ peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} c & x & dc du + dx dv \\ c' & y & dc' du + dy dv \\ c'' & z & dc'' du + dz dv \end{vmatrix} = 0,$$

(1) DARBOUX, *loc. cit.*, p. 264.

ou, après quelques transformations faciles de lignes et de colonnes,

$$\begin{vmatrix} 1 & v & 0 \\ 0 & dv & dv \Sigma dc dx \\ 0 & du + V'' dv & dv \Sigma dx^2 + du \Sigma dc dx \end{vmatrix} = 0.$$

En développant il reste

$$dv^2(\Sigma dx^2 - V'' \Sigma dc dx) = 0,$$

équation qui est vérifiée pour les caractéristiques.

Les caractéristiques de la surface S , ayant pour images sphériques les génératrices rectilignes de la sphère, sont nécessairement imaginaires. Il en sera de même des lignes asymptotiques des surfaces Σ , dont la courbure totale devra, par conséquent, être positive. C'est ce que l'on vérifie aisément. Si la fonction $\psi(u, v)$ est de la forme $uv + V$, la fonction $\varphi(p, q)$ obtenue par la transformation de Legendre sera de la forme

$$\varphi(p, q) = pq + \Phi(p),$$

et l'expression du carré de l'élément linéaire ds^2 devient

$$\begin{aligned} ds^2 &= 2q dp^2 + 2p dp[dq + \Phi''(p) dp] + [dq + \Phi''(p) dp]^2 \\ &= (2q - p^2) dp^2 + [p dp + dq + \Phi''(p) dp]^2. \end{aligned}$$

En posant

$$q = t - \frac{p^2}{2} - \Phi'(p)$$

il vient

$$ds^2 = dt + 2[t - p^2 - \Phi'(p)] dp^2.$$

L'expression de la courbe totale est ici

$$\frac{1}{RR'} = \frac{1}{[2t - 2p^2 - 2\Phi'(p)]^2}$$

quantité essentiellement positive (1).

(1) Ceci suppose toutefois que les points réels de la surface correspondent à des valeurs réelles de t et de p . Des calculs du texte on déduit encore une autre conséquence : étant donnée une surface dont le carré de l'élément linéaire a la forme $du^2 + 2[u + \Phi(v)]dv^2$, faisons correspondre à chaque point de la surface le point de la sphère situé sur le rayon parallèle à la tangente à la géodésique de paramètre v qui passe par ce point; on obtient

5. Étant donnée une forme quadratique de différentielles

$$(11) \quad E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

où E, F, G sont des fonctions quelconques de u, v , on peut toujours la ramener à la forme

$$du'^2 + dv'^2 + dw'^2$$

ou, ce qui revient au même, à la forme (1)

$$du'^2 + dv' dw';$$

il suffit, pour effectuer la transformation, de connaître déjà une surface admettant l'élément linéaire (11). La recherche des surfaces applicables sur une surface donnée quelconque peut donc toujours se ramener à l'intégration d'une équation de la forme (7). Mais il faut remarquer que la correspondance entre les deux problèmes n'est pas univoque; tout élément linéaire pouvant être mis d'une infinité de manières sous la forme (1), il lui correspond une infinité d'équations de la forme (7), qui s'intégreront toutes dès que l'on saura intégrer l'une d'elles. On est donc conduit à cette conséquence curieuse que, si l'on sait intégrer une équation aux dérivées partielles de la forme (7), on peut en déduire l'intégrale générale d'une infinité d'équations de même forme. En effet, si l'on a intégré l'équation (7), on obtient par des quadratures toutes les surfaces Σ qui sont applicables sur une certaine surface. Or trouver toutes les surfaces applicables sur une surface donnée, cela revient à mettre de toutes les manières possibles le carré de l'élément linéaire de cette surface sous la forme

$$du^2 + dv dw;$$

à chacune de ces formes particulières correspondra une équation de la forme (7) que l'on saura intégrer, puisque l'on connaît précisément toutes les surfaces dont l'élément linéaire possède la forme précédente.

II.

6. Après ces généralités, je vais appliquer le théorème de M. Weingarten à la détermination d'une classe particulière de surfaces. Je prends les nota-

ainsi une représentation sphérique de la surface, dans laquelle les asymptotiques correspondent aux génératrices rectilignes de la sphère, résultat facile à établir au moyen des formules de Codazzi. Les lignes asymptotiques s'obtiennent, par suite, sans aucune intégration.

tions employées par M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. I, p. 244). Les coordonnées d'un point de la sphère de rayon 1 s'expriment au moyen des paramètres α , β des génératrices rectilignes de la sphère par les formules

$$c = \frac{1 - \alpha\beta}{\alpha - \beta}, \quad c' = i \frac{1 + \alpha\beta}{\alpha - \beta}, \quad c'' = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta};$$

l'équation du plan tangent à une surface étant écrite sous la forme

$$(1 - \alpha\beta)x + i(1 + \alpha\beta)y + (\alpha + \beta)z + \xi = 0,$$

on aura, pour les coordonnées du point de contact,

$$\begin{aligned} x - iy &= \frac{\frac{\partial \xi}{\partial \beta} - \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}}{\alpha - \beta}, \\ x + iy &= \frac{\alpha^2 \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} - \beta^2 \frac{\partial \xi}{\partial \beta}}{\alpha - \beta} - \xi, \\ z &= \frac{\beta \frac{\partial \xi}{\partial \beta} - \alpha \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}}{\alpha - \beta}. \end{aligned}$$

Pour la suite des calculs, nous introduirons la distance p de l'origine au plan tangent en posant

$$\xi = (\alpha - \beta)p;$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} &= p + (\alpha - \beta) \frac{\partial p}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial \beta} &= -p + (\alpha - \beta) \frac{\partial p}{\partial \beta}. \end{aligned}$$

Les formules qui donnent x , y , z deviennent

$$\begin{aligned} x - iy &= -\frac{2p}{\alpha - \beta} + \frac{\partial p}{\partial \beta} - \frac{\partial p}{\partial \alpha}, \\ x + iy &= \frac{2\alpha\beta p}{\alpha - \beta} + \alpha^2 \frac{\partial p}{\partial \alpha} - \beta^2 \frac{\partial p}{\partial \beta}, \\ z &= \beta \frac{\partial p}{\partial \beta} - \alpha \frac{\partial p}{\partial \alpha} - \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} p. \end{aligned}$$

Désignons toujours par q la moitié du carré de la distance du point (x, y, z) à l'origine; il vient

$$q = \frac{(x - iy)(x + iy) + z^2}{2} = \frac{p^2 + (\alpha - \beta)^2 \frac{\partial p}{\partial \alpha} \frac{\partial p}{\partial \beta}}{2}.$$

Considérons une famille de surfaces définies par une relation entre la somme des rayons de courbure principaux et la distance de l'origine au plan tangent, relation que nous écrirons sous la forme suivante

$$\rho' + \rho'' = 2p + \psi'(p),$$

$\psi'(p)$ étant la dérivée d'une fonction connue de p . En remplaçant $\rho' + \rho''$ par sa valeur, on voit que p doit vérifier l'équation aux dérivées partielles suivante

$$(12) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\psi'(p)}{(\alpha - \beta)^2}.$$

Soit p une intégrale quelconque de cette équation; d'après le théorème général de M. Weingarten ⁽¹⁾, les trois expressions

$$\begin{aligned} x dp \pm c [dq - 2p dp - \psi'(p) dp], \\ y dp \pm c' [dq - 2p dp - \psi'(p) dp], \\ z dp \pm c'' [dq - 2p dp - \psi'(p) dp] \end{aligned}$$

doivent être des différentielles exactes, du moins avec un signe convenable pour c, c', c'' . La suite des calculs prouve qu'il faut prendre le signe $-$; nous allons reproduire ces calculs pour la coordonnée ζ . En remplaçant z, c'', q par leurs valeurs, il vient

$$\begin{aligned} d\zeta = & \left(\beta \frac{\partial p}{\partial \beta} - \alpha \frac{\partial p}{\partial \alpha} - \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} p \right) dp \\ & - \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \left\{ p dp + \frac{1}{2} d \left[(\alpha - \beta)^2 \frac{\partial p}{\partial \alpha} \frac{\partial p}{\partial \beta} \right] - 2p dp - \psi'(p) dp \right\}, \end{aligned}$$

ou, en réduisant,

$$d\zeta = \left(\beta \frac{\partial p}{\partial \beta} - \alpha \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right) dp - \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} d \left[\frac{(\alpha - \beta)^2}{2} \frac{\partial p}{\partial \alpha} \frac{\partial p}{\partial \beta} - \psi(p) \right];$$

(1) Il suffit de prendre pour la fonction $\varphi(p, q)$ de M. Weingarten

$$\varphi = pq - \frac{p^3}{3} - \int \psi(p) dp.$$

la seconde partie peut s'écrire

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} d \left[\frac{(\alpha - \beta)^2}{2} \frac{\partial p}{\partial \alpha} \frac{\partial p}{\partial \beta} - \psi(p) \right] = d \left[\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} \frac{\partial p}{\partial \alpha} \frac{\partial p}{\partial \beta} - \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \psi(p) \right] \\ - \left[\frac{(\alpha - \beta)^2}{2} \frac{\partial p}{\partial \alpha} \frac{\partial p}{\partial \beta} - \psi(p) \right] d \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right).$$

En portant dans la valeur de $d\zeta$ et réduisant les termes semblables, il reste

$$d\zeta = -\alpha \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} \right)^2 d\alpha + \beta \left(\frac{\partial p}{\partial \beta} \right)^2 d\beta - \frac{2\psi(p)}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha d\beta - \beta d\alpha) \\ - d \left[\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} \frac{\partial p}{\partial \alpha} \frac{\partial p}{\partial \beta} - \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \psi(p) \right];$$

la condition d'intégrabilité, qui est ici

$$-2\alpha \frac{\partial p}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{2\psi'(p)\beta}{(\alpha - \beta)^2} \frac{\partial p}{\partial \beta} + \frac{2(\alpha + \beta)}{(\alpha - \beta)^3} \psi(p) \\ = 2\beta \frac{\partial p}{\partial \beta} \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{2\psi'(p)\alpha}{(\alpha - \beta)^2} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{2(\alpha + \beta)}{(\alpha - \beta)^3} \psi(p),$$

est bien vérifiée, en tenant compte de l'équation (12). On en déduit, en changeant le signe de ζ

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \zeta &= \int \left[\alpha \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} \right)^2 d\alpha - \beta \left(\frac{\partial p}{\partial \beta} \right)^2 d\beta + \frac{2\psi(p)}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha d\beta - \beta d\alpha) \right] \\ &+ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2} \frac{\partial p}{\partial \alpha} \frac{\partial p}{\partial \beta} - \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \psi(p). \end{aligned} \right.$$

On obtient, par un calcul tout pareil qu'il est inutile de reproduire ici, les valeurs suivantes des autres coordonnées ξ, η

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} \int \left\{ (1 - \alpha^2) \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} \right)^2 d\alpha + (\beta^2 - 1) \left(\frac{\partial p}{\partial \beta} \right)^2 d\beta \right. \\ &+ \frac{2\psi(p)}{(\alpha - \beta)^2} [(\beta^2 - 1) d\alpha + (1 - \alpha^2) d\beta] \left. \right\} \\ &+ \frac{\alpha\beta - 1}{2} (\beta - \alpha) \frac{\partial p}{\partial \alpha} \frac{\partial p}{\partial \beta} - \frac{\alpha\beta - 1}{\beta - \alpha} \psi(p); \end{aligned} \right.$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta &= \frac{i}{2} \int \left\{ (1 + \alpha^2) \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} \right)^2 d\alpha - (1 + \beta^2) \left(\frac{\partial p}{\partial \beta} \right)^2 d\beta \right. \\ &- \frac{2\psi(p)}{(\alpha - \beta)^2} [(1 + \alpha^2) d\beta - (1 + \beta^2) d\alpha] \left. \right\} \\ &+ \frac{i(1 + \alpha\beta)}{2} (\alpha - \beta) \frac{\partial p}{\partial \alpha} \frac{\partial p}{\partial \beta} + \frac{i(1 + \alpha\beta)}{\beta - \alpha} \psi(p). \end{aligned} \right.$$

7. Les formules (13), (14), (15) représentent les coordonnées ξ, η, ζ d'un point d'une surface Σ , et toutes les surfaces obtenues en prenant pour p une intégrale quelconque de l'équation (12) doivent être applicables les unes sur les autres. Il est aisé de le vérifier; le carré de l'élément linéaire de Σ aura pour expression

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= 2q dp^2 + 2p dp[dq - 2p dp - \psi'(p) dp] + [dq - 2p dp - \psi'(p) dp]^2 \\ &= (2q - p^2) dp^2 + [dq - p dp - \psi'(p) dp]^2. \end{aligned}$$

Posons

$$q = \frac{p^2}{2} + \psi(p) + u, \quad p = v,$$

la formule précédente devient

$$(16) \quad d\sigma^2 = du^2 + 2[u + \psi(v)] dv^2.$$

On en conclut que *toutes les surfaces dont le carré de l'élément linéaire peut être ramené à la forme (16) sont représentées par les formules (13), (14), (15), où p est une intégrale de l'équation (12),*

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\psi'(p)}{(\alpha - \beta)^2}.$$

Les formules (13), (14), (15) présentent l'inconvénient d'être compliquées d'imaginaires, et l'on ne voit pas immédiatement comment il faut choisir la fonction p pour que la surface correspondante Σ soit réelle. Pour faire disparaître cet inconvénient, il suffit de faire le changement de variables suivant

$$s = \alpha, \quad s_0 = -\frac{1}{\beta};$$

u étant une fonction quelconque de α, β , on a

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{\partial u}{\partial s_0} s_0^2, \quad d\alpha = ds, \quad d\beta = \frac{ds_0}{s_0^2}.$$

L'équation (12) devient

$$(17) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial s \partial s_0} = \frac{\psi'(p)}{(1 + ss_0)^2},$$

et les valeurs de ξ , η , ζ sont données par les formules suivantes :

$$(18) \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} \int \left\{ (1-s^2) \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)^2 ds + (1-s_0^2) \left(\frac{\partial p}{\partial s_0} \right)^2 ds_0 + \frac{2\psi(p)}{(1+ss_0)^2} [(1-s^2) ds_0 + (1-s_0^2) ds] \right\} \\ &\quad + \frac{s+s_0}{2} (1+ss_0) \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial p}{\partial s_0} - \frac{s+s_0}{1+ss_0} \psi(p), \\ \eta &= \frac{i}{2} \int \left\{ (1+s^2) \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)^2 ds - (1+s_0^2) \left(\frac{\partial p}{\partial s_0} \right)^2 ds_0 + \frac{2\psi(p)}{(1+ss_0)^2} [(1+s^2) ds_0 - (1+s_0^2) ds] \right\} \\ &\quad + \frac{i(s_0-s)}{2} (1+ss_0) \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial p}{\partial s_0} - \frac{i(s_0-s)}{1+ss_0} \psi(p), \\ \zeta &= \int \left[s \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)^2 ds + s_0 \left(\frac{\partial p}{\partial s_0} \right)^2 ds_0 + \frac{2\psi(p)}{(1+ss_0)^2} (s ds_0 + s_0 ds) \right] \\ &\quad + \frac{s^2 s_0^2 - 1}{2} \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial p}{\partial s_0} + \frac{1-ss_0}{1+ss_0} \psi(p). \end{aligned} \right.$$

A tout point réel d'une surface Σ réelle doivent correspondre pour s , s_0 des valeurs imaginaires conjuguées et pour p une valeur réelle. Inversement, si la fonction p prend des valeurs réelles pour des valeurs imaginaires conjuguées de s , s_0 , il est visible que les formules (18) donneront des valeurs réelles pour les coordonnées ξ , η , ζ . Il suffira donc de prendre pour p une intégrale de l'équation (17) qui soit réelle, lorsque s et s_0 sont imaginaires conjuguées; il existe toujours une infinité d'intégrales satisfaisant à cette condition en supposant, bien entendu, que la fonction $\psi(p)$ soit réelle. En effet, si l'on pose

$$s = \mu + \nu i, \quad s_0 = \mu - \nu i,$$

l'équation (17) devient

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \nu^2} = \frac{4\psi(p)}{(1+\mu^2+\nu^2)^2}.$$

Il existe évidemment une infinité d'intégrales de cette équation qui prennent des valeurs réelles en même temps que les variables indépendantes μ et ν .

Si, par exemple, $\psi(p) = mp$, m étant un coefficient constant (cas que nous étudierons plus loin), l'équation (17) est linéaire; si elle admet l'intégrale $f(s, s_0)$, elle admettra aussi l'intégrale $f_0(s_0, s)$, f_0 étant la fonction conjuguée de f , et la somme de ces deux fonctions $p = f(s, s_0) + f_0(s_0, s)$ fournira une surface Σ réelle.

8. L'élément linéaire d'une surface Σ étant de la forme

$$d\sigma^2 = du^2 + 2[u + \psi(v)] dv^2,$$

les courbes de paramètre ν forment un système de géodésiques; les tangentes à ces géodésiques sont normales à une famille de surfaces parallèles Σ_1 , dont les équations se déduisent immédiatement de ce qui précède. Posons, en effet,

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \frac{1}{2} \int \left\{ (1-s^2) \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)^2 ds + (1-s_0^2) \left(\frac{\partial p}{\partial s_0} \right)^2 ds_0 + \frac{2\psi(p)}{(1+ss_0)^2} [(1-s^2) ds_0 + (1-s_0^2) ds] \right\}, \\ \eta_1 = \frac{i}{2} \int \left\{ (1+s^2) \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)^2 ds - (1+s_0^2) \left(\frac{\partial p}{\partial s_0} \right)^2 ds_0 + \frac{2\psi(p)}{(1+ss_0)^2} [(1+s^2) ds_0 - (1+s_0^2) ds] \right\}, \\ \zeta_1 = \int \left[s \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)^2 ds + s_0 \left(\frac{\partial p}{\partial s_0} \right)^2 ds_0 + \frac{2\psi(p)}{(1+ss_0)^2} (s ds_0 + s_0 ds) \right], \\ \lambda = \frac{(1+ss_0)^2}{2} \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial p}{\partial s_0} - \psi(p), \quad c = \frac{s+s_0}{1+ss_0}, \quad c' = i \frac{s_0-s}{1+ss_0}, \quad c'' = \frac{ss_0-1}{1+ss_0}. \end{array} \right.$$

Les formules (18) peuvent s'écrire

$$(20) \quad \xi = \xi_1 + \lambda c, \quad \eta = \eta_1 + \lambda c', \quad \zeta = \zeta_1 + \lambda c''.$$

D'un autre côté, on tire des relations (19)

$$c d\xi_1 + c' d\eta_1 + c'' d\zeta_1 = 0,$$

de sorte que c, c', c'' sont les cosinus directeurs de la normale à la surface Σ_1 , décrite par le point (ξ_1, η_1, ζ_1) ; la surface Σ s'obtient donc en portant sur les normales à la surface Σ_1 une longueur égale à λ . Je dis que ces normales sont tangentes à la surface Σ ; en effet, faisons $dp = 0$ dans les équations qui donnent $d\xi, d\eta, d\zeta$ sous leur première forme; elles deviennent

$$d\xi = -c dq, \quad d\eta = -c' dq, \quad d\zeta = -c'' dq,$$

ce qui montre que le point (ξ, η, ζ) décrit une courbe tangente à la droite de coefficients angulaires c, c', c'' . Par conséquent, *la surface Σ , représentée par les équations (18), est une des nappes de la développée de la surface Σ_1 , représentée par les équations (19).*

Des formules (19) on tire sans difficulté

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} s \frac{\partial \xi_1}{\partial s} + \frac{\partial \xi_1}{\partial s} + i \frac{\partial \eta_1}{\partial s} = \frac{2\psi(p)}{1+ss_0}, \\ s_0 \frac{\partial \xi_1}{\partial s} + \frac{\partial \xi_1}{\partial s} - i \frac{\partial \eta_1}{\partial s} = (1+ss_0) \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)^2, \\ s \frac{\partial \xi_1}{\partial s_0} + \frac{\partial \xi_1}{\partial s_0} + i \frac{\partial \eta_1}{\partial s_0} = (1+ss_0) \left(\frac{\partial p}{\partial s_0} \right)^2. \end{array} \right.$$

Écrivons l'équation du plan tangent à la surface Σ , sous la forme

$$\xi_1(s + s_0) + i\eta_1(s_0 - s) + \zeta_1(ss_0 - 1) - \omega = 0;$$

on aura les coordonnées du point de contact en joignant à la précédente les deux équations

$$(22) \quad \begin{cases} \xi_1 - i\eta_1 + \zeta_1 s_0 = \frac{\partial \omega}{\partial s}, \\ \xi_1 + i\eta_1 + \zeta_1 s = \frac{\partial \omega}{\partial s_0}, \end{cases}$$

d'où l'on tire, en particulier,

$$(23) \quad \zeta_1 = \frac{s \frac{\partial \omega}{\partial s} + s_0 \frac{\partial \omega}{\partial s_0} - \omega}{1 + ss_0}.$$

En différentiant les équations (22) par rapport à s et s_0 successivement et en tenant compte de la relation (23), il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1}{\partial s} - i \frac{\partial \eta_1}{\partial s} + s_0 \frac{\partial \zeta_1}{\partial s} &= \frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial s_0} + i \frac{\partial \eta_1}{\partial s_0} + s \frac{\partial \zeta_1}{\partial s_0} &= \frac{\partial^2 \omega}{\partial s_0^2}, \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial s} + i \frac{\partial \eta_1}{\partial s} + s \frac{\partial \zeta_1}{\partial s} &= \frac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial s_0} - \zeta_1 = \frac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial s_0} - \frac{s \frac{\partial \omega}{\partial s} + s_0 \frac{\partial \omega}{\partial s_0} - \omega}{1 + ss_0}. \end{aligned}$$

Portons ces valeurs dans les formules (21), nous trouvons les équations suivantes, qui déterminent ω en fonction de s, s_0 ,

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} = (1 + ss_0) \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)^2, \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial s_0^2} = (1 + ss_0) \left(\frac{\partial \rho}{\partial s_0} \right)^2, \end{cases}$$

$$(25) \quad (1 + ss_0) \frac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial s_0} - s \frac{\partial \omega}{\partial s} - s_0 \frac{\partial \omega}{\partial s_0} + \omega = 2\psi(\rho).$$

Soit

$$\Omega = (1 + ss_0) \frac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial s_0} - s \frac{\partial \omega}{\partial s} - s_0 \frac{\partial \omega}{\partial s_0} + \omega - 2\psi(\rho);$$

imaginons qu'on ait remplacé dans Ω la fonction ω par une intégrale quelconque des équations (24); on vérifie aisément, en tenant compte de l'équation (17), que l'on aura

$$\frac{\partial \Omega}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial s_0} = 0,$$

de sorte que Ω se réduira à une constante Λ ; $\omega - \Lambda$ sera alors une intégrale commune des équations (24) et (25), et l'intégrale générale de ces trois équations sera

$$\omega - \Lambda + \alpha(ss_0 - 1) + \beta s + \gamma s_0,$$

α, β, γ désignant trois constantes arbitraires. Les surfaces Σ_1 correspondantes ne sont pas distinctes; elles se déduisent toutes de l'une d'elles par une translation arbitraire.

On peut même ne pas tenir compte de l'équation (25); en effet, si ω' est l'intégrale générale des équations (24) et (25), l'intégrale générale des équations (24) peut s'écrire

$$\omega = \omega' + \mathbf{H}(1 + ss_0).$$

Cette transformation revient à remplacer une surface Σ_1 par une surface parallèle, ce qui ne change pas la développée. Tout revient donc à trouver une intégrale commune des équations (24); ces équations sont compatibles, d'après la relation (17), et l'intégration n'exige évidemment que des quadratures.

Les lignes de courbure de la surface Σ_1 sont données par l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} ds^2 = \frac{\partial^2 \omega}{\partial s_0^2} ds_0^2,$$

qui devient ici

$$\frac{\partial p}{\partial s} ds \pm \frac{\partial p}{\partial s_0} ds_0 = 0;$$

un des systèmes a pour équation $p = \text{const.}$ C'est précisément le système qui correspond aux lignes géodésiques de paramètre ν de la surface Σ .

En résumant tout ce qui précède, on peut donc énoncer la règle suivante :

Soit p une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 p}{\partial s \partial s_0} = \frac{\psi'(p)}{(1 + ss_0)^2};$$

déterminons une intégrale commune ω des deux équations compatibles

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} = (1 + ss_0) \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)^2, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial s_0^2} = (1 + ss_0) \left(\frac{\partial p}{\partial s_0} \right)^2;$$

le plan qui a pour équation

$$\mathbf{X}(s + s_0) + i\mathbf{Y}(s_0 - s) + \mathbf{Z}(ss_0 - 1) - \omega = 0$$

enveloppe une surface Σ_1 , dont un des systèmes de lignes de courbure est donné par l'équation $p = \text{const.}$ La développée de la surface Σ_1 , formée par les développées des lignes de courbure de ce système, est une surface Σ , dont le carré de l'élément linéaire peut être ramené à la forme

$$du^2 + 2[u + \psi(v)]dv^2;$$

les lignes géodésiques de paramètre v sont les développées des lignes de courbures de Σ_1 .

On obtient ainsi toutes les surfaces Σ , dont l'élément linéaire a la forme précédente.

9. Les rayons de courbure principaux de Σ_1 ont pour expression

$$\psi(p) \pm \frac{(1 + ss_0)^2}{2} \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial p}{\partial s_0};$$

on voit que la somme $R + R'$ conserve une valeur constante quand on se déplace sur une ligne de courbure du système $p = \text{const.}$ Cette propriété est caractéristique; si une surface est telle que la somme des rayons de courbure principaux conserve une valeur constante le long d'une ligne de courbure de l'un des systèmes en variant suivant une loi quelconque quand on passe d'une ligne de courbure à une autre du même système, le carré de l'élément linéaire de l'une des nappes de la développée (celle qui correspond à ce système de ligne de courbure) aura la forme

$$du^2 + 2[u + \psi(v)]dv^2.$$

Soit, en effet, $du^2 + C^2 dv^2$ le carré de cet élément linéaire quand on prend pour lignes coordonnées les géodésiques qui sont les développées des lignes de courbure et leurs trajectoires orthogonales. Si en chaque point (u, v) on porte sur la tangente à la géodésique de paramètre v qui passe par ce point une longueur égale à u , l'extrémité de cette longueur décrit une surface normale à toutes ces tangentes, dont les rayons de courbure principaux auront pour valeur

$$R = u, \quad R' = u - \frac{C}{\frac{\partial C}{\partial u}};$$

la somme $R + R'$ devant rester constante quand on se déplace sur une géo-

désique (v), il faudra que l'on ait

$$2u - \frac{C}{\frac{\partial C}{\partial u}} = -2\psi(v)$$

ou

$$\frac{\frac{\partial C}{\partial u}}{C} = \frac{1}{2[u + \psi(v)]};$$

on en tire

$$C = \psi_1(v)\sqrt{u + \psi(v)},$$

et il suffit de remplacer la variable v par une fonction convenable de v pour avoir la forme précédente.

Toutes les surfaces Σ_1 , jouissant de la propriété précédente, satisfont à une même équation aux dérivées partielles du troisième ordre que l'on peut former comme il suit : Imaginons que l'on ait pris x et y pour variables indépendantes et soient p, q, r, s, t, \dots les dérivées partielles de z . De l'expression bien connue de $R + R'$ au moyen de p, q, r, s, t , on déduit

$$d(R + R') = P_1 dx + Q_1 dy = 0,$$

P_1 et Q_1 contenant les dérivées partielles de z jusqu'au troisième ordre. En portant la valeur de $\frac{dv}{dx} = -\frac{P_1}{Q_1}$ dans l'équation différentielle du second degré qui détermine les lignes de courbure, on obtient l'équation du troisième ordre cherchée.

Ces remarques se généralisent sans difficulté. Considérons une surface applicable sur une surface réglée; en prenant pour lignes coordonnées les géodésiques qui correspondent aux génératrices de la surface réglée et leurs trajectoires orthogonales, le carré de l'élément linéaire aura la forme

$$d\sigma^2 = du^2 + (\alpha u^2 + 2\beta u + \gamma)dv^2,$$

α, β, γ étant des fonctions quelconques de v . La même construction que plus haut donnera une surface dont les normales seront les tangentes aux géodésiques (v) et dont les rayons de courbure principaux seront

$$R = u, \quad R' = u - \frac{\alpha u^2 + 2\beta u + \gamma}{\alpha u + \beta} = \frac{-(\beta u + \gamma)}{\alpha u + \beta};$$

l'élimination de u conduit à la relation

$$\alpha RR' + \beta(R + R') + \gamma = 0.$$

On voit que, le long d'une ligne de courbure, les rayons de courbure principaux vérifient une relation d'involution dont les coefficients varient quand on passe d'une ligne de courbure à une autre du même système. Réciproquement, si une surface jouit de cette propriété, une des nappes de la développée est applicable sur une surface réglée. La démonstration se fait comme plus haut; on a à déterminer C par l'équation différentielle

$$\alpha u \left(u - \frac{C}{\frac{\partial C}{\partial u}} \right) + \beta \left(2u - \frac{C}{\frac{\partial C}{\partial u}} \right) + \gamma = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$C = \varphi_1(v) \sqrt{\alpha u^2 + 2\beta u + \gamma}.$$

On a donc la proposition suivante : *Si une surface est telle que, le long d'une ligne de courbure de l'un des systèmes, les rayons de courbure principaux sont liés par une relation d'involution, dont les coefficients varient suivant une loi quelconque quand on passe d'une ligne de courbure à une autre du même système, la nappe de la développée qui correspond à ce système de lignes de courbure est applicable sur une surface réglée, de telle façon que les développées des lignes de courbure précédentes correspondent aux génératrices de la surface réglée.*

Cette construction donne toutes les surfaces applicables sur les surfaces réglées. On verrait, comme tout à l'heure, que les surfaces dont les lignes de courbure satisfont à la condition précédente vérifient une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre. Je ne m'arrêterai pas davantage sur ces généralités, qu'il serait encore facile d'étendre.

10. Si la fonction $\psi(p)$ est quelconque, on ne sait pas intégrer l'équation du second ordre

$$\frac{\partial^2 p}{\partial s \partial s_0} = \frac{\psi(p)}{(1 + s s_0)^2};$$

on connaît cependant quelques cas où l'intégration est possible. Si $\psi(p) = 0$,

on a pour l'intégrale générale

$$p = f(s) + f_0(s_0),$$

$f(s)$, $f_0(s_0)$ étant deux fonctions arbitraires. Les surfaces Σ_i sont des surfaces minima; la somme $R + R'$ étant constante, les deux nappes de la développée sont applicables l'une sur l'autre. Si $\psi(p) = p$, l'équation aux dérivées partielles devient

$$\frac{\partial^2 p}{\partial s \partial s_0} = \frac{1}{(1 + ss_0)^2};$$

l'intégrale générale est

$$p = L(1 + ss_0) + f(s) + f_0(s_0).$$

Les surfaces Σ correspondantes sont applicables sur le paraboloidé de révolution. Ces deux exemples étaient connus depuis longtemps. M. Weingarten en a signalé un autre, qui est très remarquable, celui où

$$\psi(p) = ap + be^{\frac{2p}{a}};$$

l'équation (17) devient

$$\frac{\partial^2 p}{\partial s \partial s_0} = \frac{a + \frac{2b}{a} e^{\frac{2p}{a}}}{(1 + ss_0)^2}.$$

En posant

$$p = aL(1 + ss_0) + w,$$

il reste

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial s_0} = \frac{2b}{a} e^{\frac{2w}{a}},$$

équation qui se ramène immédiatement à l'équation de Liouville. L'élément linéaire des surfaces Σ prend la forme

$$d\sigma^2 = du^2 + 2\left(u + av + be^{\frac{2v}{a}}\right) dv^2,$$

que l'on peut ramener à la forme de Liouville

$$d\sigma^2 = (\alpha - \beta) \left(\frac{\alpha - 2}{\alpha^2} d\alpha^2 - \frac{\beta - 2}{\beta^2} d\beta^2 \right).$$

On peut donc déterminer par des quadratures toutes les surfaces dont l'élément linéaire est réductible à cette forme. Je n'insiste pas davantage sur cet exemple, qui sera sans doute étudié en détail par M. Weingarten.

Dans la Note déjà citée des *Comptes rendus* (t. CXII, p. 708), j'ai indiqué rapidement un nombre *illimité* de cas où l'on peut obtenir explicitement l'intégrale générale de l'équation (12) ou, ce qui revient au même, de l'équation (17). Supposons que $\psi(p)$ soit de la forme

$$\psi(p) = -(k+1)p^2;$$

les équations (12) et (17) deviennent

$$(26) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{(2k+2)p}{(\alpha-\beta)^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial s \partial s_0} + \frac{(2k+2)p}{(1+ss_0)^2} = 0.$$

On reconnaît là une des formes de l'équation $E(\beta, \beta)$, étudiée en détail par M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. II, p. 54). Si l'on pose

$$2k+2 = m(m-1),$$

l'équation (26) peut s'écrire

$$(26') \quad \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{m(1-m)p}{(\alpha-\beta)^2};$$

l'intégrale générale s'obtiendra sous forme explicite par l'application de la méthode de Laplace, toutes les fois que m est un nombre entier. Si m est quelconque, l'intégrale générale s'exprime au moyen de deux quadratures partielles. Avec cette valeur de $\psi(p)$, l'élément linéaire prend la forme

$$du^2 + 2[u - (k+1)v^2]dv^2;$$

en posant $v = \sqrt{2t}$, on obtient la forme équivalente

$$d\sigma^2 = du^2 + \left[\frac{u}{t} - m(m-1) \right] dt^2,$$

qui, d'après un théorème général de M. Maurice Levy, convient à des surfaces spirales. Ainsi, *on peut obtenir, par des quadratures, toutes les surfaces pour lesquelles le carré de l'élément linéaire possède la forme*

$$(27) \quad d\sigma^2 = du^2 + \left[\frac{u}{t} - m(m-1) \right] dt^2,$$

toutes les fois que m est un nombre entier.

Si $m = 0$, l'intégrale générale de l'équation (26) est $p = f(s) + f_0(s_0)$; on retrouve, comme nous l'avons déjà remarqué, les développées des surfaces minima. Si $m = 2$, l'intégrale générale de (26) est, avec les variables s, s_0 (¹),

$$p = f'(s) + f'_0(s_0) - 2 \frac{s_0 f(s) + s f_0(s_0)}{1 + s s_0};$$

les surfaces Σ correspondantes ont déjà été obtenues par M. Weingarten (²). Si $m = 3$, l'intégrale générale est (³)

$$p = f''(s) + f''_0(s_0) - 6 \frac{s f'_0(s_0) + s_0 f'(s)}{1 + s s_0} + 12 \frac{s^2 f_0(s_0) + s_0^2 f(s)}{(1 + s s_0)^2};$$

les surfaces Σ correspondantes, ainsi que celles que l'on obtient pour des valeurs de m supérieures à 3, ne paraissent pas avoir été étudiées jusqu'à présent.

Lorsque m est un nombre entier, et qu'on a obtenu sous forme explicite l'intégrale générale de l'équation (26), il ne paraît pas possible de faire disparaître les quadratures qui figurent dans les expressions des coordonnées ξ, η, ζ ; mais on peut toujours choisir les fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale générale de façon à pouvoir effectuer ces quadratures; il suffira, par exemple, de choisir pour $f(s)$ une fonction rationnelle et pour $f_0(s_0)$ la fonction conjuguée.

Remarquons aussi que, lorsque m est quelconque, on peut toujours trouver, sans aucun signe de quadrature partielle, une infinité d'intégrales de l'équation (26).

11. La forme (27) de l'élément linéaire convenant à des surfaces spirales, on sait, d'après un résultat général de M. Sophus Lie, que la recherche des lignes géodésiques se ramène à l'intégration d'une équation du premier ordre. Si l'on développe les calculs, on est conduit à un cas particulier de l'équation de la série hypergéométrique.

Prenons l'élément linéaire sous la forme

$$d\sigma^2 = du^2 + 2[u - (k + 1)v^2]dv^2;$$

(¹) *American Journal of Mathematics*, t. X, p. 197.

(²) *Nachrichten de Göttingue*; 1887.

(³) *American Journal*, t. X, p. 197.

on aura

$$\Delta\theta = \frac{2[u - (k+1)v^2] \left(\frac{\partial\theta}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial v} \right)^2}{2u - 2(k+1)v^2}.$$

Cherchons les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles $\Delta\theta = 1$, c'est-à-dire

$$(28) \quad 2[u - (k+1)v^2] \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial u} \right)^2 - 1 \right] + \left(\frac{\partial\theta}{\partial v} \right)^2 = 0;$$

les équations différentielles de ces caractéristiques sont

$$(29) \quad \frac{du}{4t[u - (k+1)v^2]} = \frac{dv}{2w} = \frac{-dt}{2(t^2-1)} = \frac{dw}{4(k+1)v(t^2-1)},$$

en posant, pour abrégier,

$$t = \frac{\partial\theta}{\partial u}, \quad w = \frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

Des trois derniers rapports on tire

$$\frac{dw}{dt} = -2(k+1)v, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{w}{1-t^2},$$

et, en éliminant v , on est conduit à l'équation linéaire

$$(1-t^2) \frac{d^2w}{dt^2} + 2(k+1)w = 0;$$

si l'on pose $t = 1 - 2z$, cette dernière équation se ramène à l'équation de la série hypergéométrique

$$(30) \quad z(1-z) \frac{d^2\varphi}{dz^2} + 2(k+1)\varphi = 0.$$

Soit $w = \varphi(z)$ l'intégrale générale de (30). On aura

$$-2(k+1)v = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{2} \varphi'(z),$$

et par suite

$$v = \frac{1}{4(k+1)} \varphi'(z);$$

quant à la valeur de u , on la déduit de l'équation $\Delta\theta = 1$, c'est-à-dire

$$2[u - (k+1)v^2](t^2 - 1) + w^2 = 0.$$

Les lignes géodésiques de l'élément linéaire

$$du^2 + 2[u - (k+1)v^2]dv^2$$

sont donc représentées par les formules

$$v = \frac{1}{4(k+1)}\varphi'(z), \quad u = \frac{1}{16(k+1)}\varphi'^2(z) + \frac{\varphi^2(z)}{8z(1-z)},$$

z désignant une variable auxiliaire et $\varphi(z)$ l'intégrale générale de l'équation (30).

Remarque. — En prenant t pour variable indépendante dans les équations différentielles (29), nous avons supprimé la solution $t = 1$, $w = 0$; $v = \text{const.}$

Si l'on remplace $2k + 2$ par $m(m - 1)$ dans l'équation (30), on a l'équation de la série hypergéométrique pour laquelle

$$\gamma = 0, \quad \alpha = -m, \quad \beta = m - 1;$$

elle admet l'intégrale

$$\varphi_1 = z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} \mathbf{F}(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, z),$$

qui se réduit ici à

$$\varphi_1 = z(1-z) \mathbf{F}(m+1, 2-m, 2, z).$$

Pour avoir l'intégrale générale, remarquons que l'équation (30) admet l'intégrale première

$$(31) \quad \varphi_1 \frac{d\varphi}{dz} - \varphi \frac{d\varphi_1}{dz} = C_1,$$

d'où l'on déduit

$$\varphi = C_1 \varphi_1 \int \frac{dz}{\varphi_1^2} + C_2 \varphi_1.$$

Si m est un nombre entier ≥ 2 , φ_1 se réduit à un polynôme de degré m , et l'intégrale générale s'exprime en termes finis. Dans ce cas, si l'on remplace, dans l'équation (31), z , φ , $\frac{d\varphi}{dz}$ par leurs valeurs en fonction de v , $\frac{\partial\theta}{\partial u}$, $\frac{\partial\theta}{\partial v}$, on voit que l'équation des lignes géodésiques admet une intégrale de degré m

en $\frac{\partial \theta}{\partial u}, \frac{\partial \theta}{\partial v}$. Si, en particulier, $m = 2$, il y a une intégrale du second degré; ce qui est bien d'accord avec le résultat de M. Weingarten, l'élément linéaire correspondant pouvant être ramené à la forme de Liouville.

12. Il nous reste à montrer comment on peut obtenir les surfaces spirales qui admettent l'élément linéaire précédent. Toute surface spirale ayant Oz pour axe est caractérisée, comme on sait, par cette propriété : si l'on fait tourner cette surface d'un angle quelconque autour de Oz , la nouvelle surface est homothétique à sa position primitive par rapport à un point de l'axe des z , que nous prendrons pour origine des coordonnées. Soient, comme plus haut, α et β les variables qui fixent la position d'un point sur la sphère de rayon 1, p la distance de l'origine au plan tangent d'une surface S . Toute rotation autour de Oz s'obtient en multipliant α et β par un même coefficient h ; pour que la surface S soit une surface spirale, il faut et il suffit que la distance p soit en même temps multipliée par un facteur constant, ne dépendant que de h . Soit $p = f(\alpha, \beta)$; la fonction $f(\alpha, \beta)$ devra satisfaire à une équation de la forme

$$f(h\alpha, h\beta) = \varphi(h)f(\alpha, \beta).$$

On déduit de là que la fonction $\varphi(h)$ doit vérifier l'équation fonctionnelle

$$\varphi(hh_1) = \varphi(h)\varphi(h_1),$$

ce qui exige qu'elle soit de la forme

$$\varphi(h) = h^r;$$

la fonction $f(\alpha, \beta)$ sera une fonction homogène de degré r de α, β . On obtient, par conséquent, toutes les surfaces spirales, considérées comme enveloppes du plan mobile

$$(1 - \alpha\beta)x + i(1 + \alpha\beta)y + (\alpha + \beta)z + (\alpha - \beta)p = 0,$$

en prenant pour p une *fonction homogène quelconque* de α, β . Si le degré d'homogénéité est zéro, on a une surface de révolution. Appliquons ceci aux surfaces S , définies par des valeurs de p satisfaisant à l'équation (26)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{(2k+2)p}{(\alpha-\beta)^2} = 0,$$

c'est-à-dire pour lesquelles la somme des rayons de courbure principaux est proportionnelle à la distance de l'origine au plan tangent. Il faut chercher les solutions homogènes de cette équation ; posons pour cela

$$\frac{\beta}{\alpha} = t, \quad p = \alpha^r \varphi(t),$$

on est conduit, pour déterminer $\varphi(t)$, à l'équation linéaire du second ordre

$$(32) \quad t(1-t)^2 \varphi''(t) - (r-1)(1-t)^2 \varphi'(t) - (2k+2) \varphi(t) = 0,$$

qui n'est encore qu'un cas particulier de l'équation de Gauss. Avec les variables s, s_0 , une solution homogène sera de la forme

$$p = s^r \psi(u), \quad u = ss_0,$$

et la fonction ψ devra être une intégrale de l'équation

$$(33) \quad u(1+u) \psi''(u) + (r+1)(1+u) \psi'(u) + (2k+2) \psi(u) = 0.$$

Supposons que l'on ait obtenu pour p une solution homogène de degré r en α, β ; je dis que les équations (24) déterminent une fonction ω , homogène et de degré $2r$ en α, β ou de la forme

$$\omega = s^{2r} \mathbf{F}(ss_0),$$

et que cette solution ω peut être obtenue *sans aucune quadrature*. Posons

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \omega}{\partial s}, \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial \omega}{\partial s_0}, \quad \mathbf{S} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial s_0};$$

des équations (24) on tire

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial s} &= -\frac{4(k+1)}{1+ss_0} p \frac{\partial p}{\partial s} + s \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)^2, \\ \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial s_0} &= -\frac{4(k+1)}{1+ss_0} p \frac{\partial p}{\partial s_0} + s_0 \left(\frac{\partial p}{\partial s_0} \right)^2, \end{aligned}$$

ou, avec les variables α, β ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \alpha} &= \frac{-4(k+1)\beta}{\beta-\alpha} p \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \alpha \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} \right)^2, \\ \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \beta} &= \frac{-4(k+1)\beta}{\beta-\alpha} p \frac{\partial p}{\partial \beta} - \beta \left(\frac{\partial p}{\partial \beta} \right)^2. \end{aligned}$$

Nous avons dans le second membre des fonctions homogènes en α, β , de degré $2r - 1$. Or, lorsqu'on a une différentielle

$$f(\alpha, \beta) d\alpha + \varphi(\alpha, \beta) d\beta,$$

où f et φ sont des fonctions homogènes de degré q , ($q + 1 \geq 0$), on a immédiatement, d'après le théorème des fonctions homogènes, une fonction admettant cette différentielle totale,

$$\frac{\alpha f(\alpha, \beta) + \beta \varphi(\alpha, \beta)}{q + 1}.$$

Appliquons ceci à notre exemple particulier; nous en déduirons pour S une fonction homogène en α, β de degré $2r$. On aura ensuite

$$\frac{\partial P}{\partial s} = (1 + ss_0) \left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)^2, \quad \frac{\partial P}{\partial s_0} = S,$$

ou, avec les variables α, β ,

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha} \right)^2, \quad \frac{\partial P}{\partial \beta} = \frac{S}{\beta^2},$$

d'où l'on tirera pour P une fonction homogène en α, β de degré $2r - 1$. Les équations

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = S, \quad \frac{\partial Q}{\partial s_0} = (1 + ss_0) \left(\frac{\partial Q}{\partial s_0} \right)^2,$$

ou

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = S, \quad \frac{\partial Q}{\partial \beta} = \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \left(\frac{\partial Q}{\partial \beta} \right)^2 \beta^2,$$

donneront de même pour Q une fonction homogène de degré $2r - 1$. Enfin les équations

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = P, \quad \frac{\partial \omega}{\partial s_0} = Q,$$

ou

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = P, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = \frac{Q}{\beta^2},$$

fourniront pour ω une fonction homogène en α, β de degré $2r$. Pour les mêmes raisons que plus haut, le plan représenté par l'équation

$$X(s + s_0) + iY(s_0 - s) + Z(ss_0 + 1) - \omega = 0$$

enveloppe une surface spirale Σ_1 , dont la développée Σ sera également une surface spirale. Il semble que ces surfaces dépendent de trois constantes arbitraires, r et les deux constantes qui entrent dans l'intégrale générale de l'équation linéaire (32). Mais il est à remarquer que toute solution homogène est de la forme

$$\alpha^n (C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2).$$

Cette intégrale ne change pas quand on multiplie C_1 et C_2 par un même coefficient, pourvu que l'on multiplie en même temps α et β par un autre coefficient convenable, ce qui revient à faire tourner la surface autour de $O z$. Les surfaces obtenues ne dépendent donc en réalité que de deux constantes arbitraires, ce qui est bien d'accord avec le théorème de M. Maurice Levy.

Pour obtenir des surfaces spirales réelles, il faut trouver des intégrales homogènes de l'équation (26) qui prennent des valeurs réelles lorsque α et $-\frac{1}{\beta}$ sont imaginaires conjuguées. On voit sans peine qu'il faut prendre pour r une expression de la forme hi , h étant une quantité réelle. Soit alors

$$p = s^{hi} \varphi(ss_0)$$

une intégrale de l'équation (26); $p = s_0^{-hi} \varphi_0(ss_0)$ sera aussi une intégrale et la somme

$$p = s^{hi} \varphi(ss_0) + s_0^{-hi} \varphi_0(ss_0) = s^{hi} [\varphi(ss_0) + (ss_0)^{-hi} \varphi_0(ss_0)]$$

donnera des surfaces spirales réelles.

Dans l'équation (32), faisons le changement de variables

$$\varphi(t) = (t-1)^m z,$$

en supposant $2k + 2 = m(m-1)$; il vient

$$(34) \quad t(1-t)z'' + [1-r - (2m-r+1)t]z' - m(m-r)z = 0.$$

C'est l'équation de la série hypergéométrique pour laquelle

$$\alpha = m, \quad \beta = m-r, \quad \gamma = 1-r.$$

Une des intégrales peut s'écrire

$$(1-t)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta, \gamma, \frac{t}{t-1}\right);$$

elle devient ici

$$z_1 = (1-t)^{-m} \mathbf{F}\left(m, 1-m, 1-r, \frac{t}{t-1}\right),$$

et se réduit à une fraction rationnelle toutes les fois que m est un nombre entier, quel que soit r . *On peut donc obtenir, sous forme finie, les équations d'une infinité simple de surfaces spirales admettant l'élément linéaire*

$$d\sigma^2 = du^2 + \left[\frac{u}{t} - m(m-1)\right] dt^2,$$

toutes les fois que m est un nombre entier.

L'équation (34) admet l'intégrale première

$$z_1 z' - z'_1 z = C \frac{t^{r-1}}{(t-1)^{2m}},$$

et l'intégrale générale sera

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_1 \int \frac{t^{r-1} dt}{\left[\mathbf{F}\left(m, 1-m, 1-r, \frac{t}{t-1}\right)\right]^2}.$$

13. Dans les équations (24) faisons le changement de variables

$$s = \alpha, \quad s_0 = -\frac{1}{\beta}, \quad \omega = \frac{\pi}{\beta};$$

elles deviennent

$$(24') \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \alpha^2} = \frac{(\alpha - \beta)^2}{\beta} \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha}\right)^2, \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial \beta^2} = \frac{(\alpha - \beta)^2}{\beta} \left(\frac{\partial p}{\partial \beta}\right)^2, \end{cases}$$

tandis que l'équation du plan tangent à la surface Σ_1 devient

$$\mathbf{X}(1 - \alpha\beta) + i\mathbf{Y}(1 + \alpha\beta) + \mathbf{Z}(\alpha + \beta) + \pi = 0.$$

Si la fonction p est homogène, les équations (24') donnent très simplement pour π une intégrale homogène. On en tire en effet, en posant

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha - \beta)^2}{\beta} \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha}\right)^2 &= \mathbf{H}, & \frac{(\alpha - \beta)^2}{\beta} \left(\frac{\partial p}{\partial \beta}\right)^2 &= \mathbf{H}, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial \alpha \partial \beta}\right) &= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \beta}, & \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial \alpha \partial \beta}\right) &= \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial \alpha}; \end{aligned}$$

si r est le degré d'homogénéité de p , H et H_1 seront de degré $2r - 1$; on en déduira

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\alpha \frac{\partial H}{\partial \beta} + \beta \frac{\partial H_1}{\partial \alpha}}{2r - 1}.$$

En remontant ensuite de proche en proche, on en tire successivement

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial \alpha} &= \frac{\alpha H}{2r} + \frac{\beta \left(\alpha \frac{\partial H}{\partial \beta} + \beta \frac{\partial H_1}{\partial \alpha} \right)}{2r(2r - 1)}, \\ \frac{\partial \pi}{\partial \beta} &= \frac{\alpha \left(\alpha \frac{\partial H}{\partial \beta} + \beta \frac{\partial H_1}{\partial \alpha} \right)}{2r(2r - 1)} + \frac{\beta H_1}{2r}; \\ \pi &= \frac{\alpha \frac{\partial \pi}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial \pi}{\partial \beta}}{2r + 1} = \frac{\alpha^2 H + \beta^2 H_1}{2r(2r + 1)} + \frac{2\alpha\beta \left(\alpha \frac{\partial H}{\partial \beta} + \beta \frac{\partial H_1}{\partial \alpha} \right)}{2r(2r - 1)(2r + 1)}. \end{aligned}$$

Ce résultat est illusoire si r est nul ou égal à $\pm \frac{1}{2}$; mais ces valeurs de r , on l'a déjà remarqué, ne conviennent pas à des surfaces réelles.

