

A. LAFAY

Note sur la série $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s}$

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1^{re} série, tome 6, n° 3 (1892), p. I1-I6

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1892_1_6_3_I1_0

© Université Paul Sabatier, 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LA SÉRIE $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s}$,

PAR M. A. LAFAY,

Lieutenant d'Artillerie au 11^e bataillon de forteresse, à Lyon.



1. Dans cette Note, nous allons étudier la série $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s}$ à l'aide des formules générales suivantes qui peuvent être utilisées dans bien des cas analogues.

De la relation évidente

$$(0) \quad 0 = \int_r^q f(x) dx - \sum_r^{q-1} \int_0^1 f(n+1-u) du,$$

on déduit, en intégrant par parties l'intégrale placée sous le signe \sum et en utilisant les propriétés bien connues des polynômes bernoulliens, $\varphi_{\alpha}(u)$,

$$(1) \quad \sum_r^{q-1} f(n) = \int_r^q f(x) dx - \sum_r^{q-1} \int_0^1 f'(n+1-u) du,$$

$$(2) \quad \sum_r^{q-1} f(n) = \left[\int f(x) dx - \frac{1}{1.2} f(x) \right]_r^q - \sum_r^{q-1} \int_0^1 f''(n+1-u) \varphi_1(u) du,$$

.....

$$(2p) \quad \sum_r^{q-1} f(n) = \left[\int f(x) dx - \frac{1}{1.2} f(x) + \frac{1}{2} B_1 f'(x) + \dots \right. \\ \left. + (-1)^{p-2} \frac{B_{p-1}}{1.2 \dots (2p-2)} f^{2p-3}(x) \right]_r^q \\ - \sum_r^{q-1} \int_0^1 f^{2p}(n+1-u) \varphi_{2p-1}(u) du.$$

Ces formules s'obtiennent également de la manière suivante : Dans la

formule d'Euler

$$\begin{aligned} \int_a^{a+h} f(x) dx &= \frac{h}{1,2} \Delta f(a) + h f(a) - \frac{1}{2} B_1 h^2 \Delta f'(a) + \dots \\ &+ (-1)^{p-1} \frac{B_{p-1} h^{2p-2}}{1,2 \dots (2p-2)} \Delta f^{2p-3}(a) \\ &+ h^{2p} \int_0^h f^{2p}(a+h-u) \varphi_{2p-1}\left(\frac{u}{h}\right) du, \end{aligned}$$

faisons $a = n$, $h = 1$; puis effectuons sur l'équation ainsi obtenue l'opération \sum_r^{q-1} par rapport à n , en isolant dans le premier membre le terme $\sum_r^{q-1} f(n)$, nous aurons la formule (2p).

2. L'application de ces formules nécessite l'étude des conditions d'absolue convergence des séries

$$R_\alpha = \sum_r^{q-1} \int_0^1 f^\alpha(n+1-u) \varphi_{\alpha-1}(u) du \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 2p),$$

lorsque q devient infini; pour cela nous nous servons de la transformation suivante qui simplifie le travail, mais donne naturellement des conditions moins larges.

On a, en désignant par M le maximum de $|\varphi_{\alpha-1}(u)|$ entre 0 et 1 et en appliquant la relation (o),

$$\begin{aligned} |R_\alpha| &< \sum_r^{q-1} \left| \int_0^1 f^\alpha(n+1-u) \varphi_{\alpha-1}(u) du \right| \\ &< M \sum_r^{q-1} \int_0^1 |f^\alpha(n+1-u)| du < M \int_r^q |f^\alpha(x)| dx, \end{aligned}$$

relations qui permettent d'écrire

$$(A) \quad R_\alpha = e^{\omega\sqrt{-1}} \varphi_{\alpha-1}(\theta) \int_0^q |f^\alpha(x)| dx \quad \text{avec} \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

NOTE SUR LA SÉRIE $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

et montrent qu'il suffit pour que R_α soit absolument convergente que l'intégrale $\int_r^{r^\eta = \infty} |f^\alpha(x)| dx$ soit finie et déterminée.

3. Considérons maintenant la série $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s}$ dans laquelle $s = a + bi$; il vient en appliquant (1),

$$(1') \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} - R_1.$$

Supposons $a > 0$, la relation (A) montre que la série complémentaire R_1 est absolument convergente; car, $\left| \left(\frac{1}{x^s} \right)' \right| = \left| \frac{-h}{x^{1+s}} \right| = \frac{+\sqrt{a^2 + b^2}}{x^{1+a}}$ reste fini dans le champ d'intégration (1 à ∞) et est infiniment petit d'ordre supérieur à 1 pour $x = \infty$.

L'étude de $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s}$ est ainsi ramenée à celle de l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s}$, c'est-à-dire de

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left[\frac{q^{1-s}}{1-s} = \frac{1}{1-s} \right],$$

et l'on trouve alors facilement que la série considérée est

- 1° Absolument convergente si $a > 1$;
- 2° Finie, mais indéterminée comme l'expression $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{b} (\sin b \varrho x + i \cos b \varrho x)$, si $a = 1$ avec $b \geq 0$;
- 3° Divergente si $a = 1$ avec $b = 0$, ou $a < 1$ avec b quelconque,

et cette dernière conséquence subsiste pour $a \leq 0$, car dans cette hypothèse (1') montre que $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s}$ est la somme algébrique de deux quantités dont les ordres d'infinitude diffèrent et ne peuvent mutuellement se réduire.

4. D'après ce qui précède, $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s}$, considérée comme fonction de s , n'est analytiquement bien définie que pour des valeurs de s dont l'affixe se trouve

dans la région du plan déterminée par la condition $\alpha > 1$; mais l'équation

$$\sum_1^{q-1} \frac{1}{n^s} = \left(\frac{q^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s} \right) - R_1$$

nous fournit directement, par la considération de $\lim_{q=\infty} \left[\sum_1^{q-1} \frac{1}{n^s} - \frac{q^{1-s}}{1-s} \right]$,

une fonction de s qui, absolument confondue avec $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s}$ dans la région ($\alpha > 1$), conserve des propriétés analytiques bien définies dans la région plus étendue ($\alpha > 0$), car dans toute cette région la série R_1 reste absolument convergente.

Enfin l'application de la formule (2p) nous conduit à la fonction

$$\zeta(s) = \lim_{q=\infty} \left\{ \sum_1^{q-1} \frac{1}{n^s} - \left[\frac{q^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2} q^{-s} - \frac{1}{2} B_1 s q^{-s-1} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^{p-1} \frac{B_{p-1}}{1.2\dots(2p-2)} s(s+1)\dots(s+2p-4) q^{-s-2p+3} \right] \right\},$$

dont le domaine analytique s'étend indéfiniment pour des valeurs de p , de plus en plus grandes.

Cette fonction $\zeta(s)$ qui se trouve ainsi mise sous la forme

$$(2p') \quad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} B_1 s - \frac{B_2}{1.2.3.4} s(s+1)(s+2) + \dots \\ + (-1)^{p-2} \frac{B_{p-1}}{1.2\dots(2p-2)} s(s+1)\dots(s+2p-4) \\ - s(s+1)\dots(s+2p-1) \sum_1^{\infty} \int_0^1 \frac{\varphi_{2p-1}(u)}{(n+1-u)^{s+2p}}$$

n'est autre chose que la fonction considérée par Riemann.

5. De la formule (2p') se déduisent facilement quelques propriétés de $\zeta(s)$,

$$1^\circ \quad \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \quad \text{ou} \quad (s-1)\zeta(s) \quad \text{sont des fonctions holomorphes;}$$

$$2^\circ \quad \zeta(-2n) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{RIEMANN}),$$

car

$$\zeta(-2n) = -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2} - \frac{B_1}{1 \cdot 2} 2n + \dots$$

$$+ (-1)^i \frac{B_i}{1 \cdot 2 \dots i} 2n(2n-1) \dots (2n-2i+2) + \dots + (-1)^n B_n,$$

et le second membre est égal à

$$-(2n!) \varphi_{2n}(x) = -[1^{2n} + 2^{2n} + \dots + (x-1)^{2n}] \quad \text{pour } x=1;$$

$$3^\circ \quad \zeta(-2n+1) = (-1)^n \frac{B_n}{2n} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (\text{M. STIELTJES}),$$

car, comme plus haut, on a

$$\zeta(-2n+1) = -(2n-1)! \varphi_{2n-1}(1) + (-1)^n \frac{B_n}{2n}.$$

4° Enfin, de la formule particulière

$$(1^n) \quad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + s \sum_1^{\infty} \int_0^1 (n+1-u)^{-s-1} u \, du$$

déduite de (1), nous tirons, en remplaçant l'intégrale qui y figure par le développement

$$\int_0^1 (n+1-u)^{-s-1} u \, du = \int_0^1 \frac{u \, du}{(n+1-u)^2} + \frac{1-s}{1} \int_0^1 \frac{\xi(n+1-u) u \, du}{(n+1-u)^2} + \dots$$

$$+ \frac{(1-s)^i}{1 \cdot 2 \dots i} \int_0^1 \frac{\xi^i(n+1-u) u \, du}{(n+1-u)^2} + \dots$$

et en ordonnant suivant les puissances de $(s-1)$,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + M_0 + M_1(s-1) + \dots + M_i(s-1)^i + \dots,$$

dans laquelle

$$M_i = \frac{(-1)^i}{1 \cdot 2 \dots i} \sum_1^{\infty} \int_0^1 \frac{\xi^i(n+1-u) - i \xi^{i-1}(n+1-u)}{(n+1-u)^2} u \, du,$$

et l'application de cette même formule (1), dans laquelle on fait $f(x) = \frac{\xi^i x}{x}$,

donne pour M_i l'expression indiquée par M. Jensen (*Comptes rendus*, t. CIV)

$$\begin{aligned}
 M_i &= \frac{(-1)^i}{1 \cdot 2 \dots i} \lim_{q \rightarrow \infty} \left[\sum_1^{q-1} \left(\frac{1}{n} \varrho^i n \right) - \frac{1}{i+1} \varrho^{i+1} q \right] \\
 &= \frac{(-1)^i}{1 \cdot 2 \dots i} \sum_1^{\infty} \int_0^1 \frac{\varrho^i (n+1-u) - i \varrho^{i-1} (n+1-u)}{(n+1-u)^2} u \, du.
 \end{aligned}$$

