ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

E. COSSERAT

Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 7, nº 1 (1893), p. N1-N62
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1893_1_7_1_N1_0>

SUR LES

CONGRUENCES DE DROITES

ET SUR LA THÉORIE DES SURFACES,

PAR M. E. COSSERAT,

Chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences de Toulouse.

INTRODUCTION.

Les résultats acquis sur la théorie des surfaces semblent mettre en évidence l'importance qu'il y aurait à la considérer comme une application de la théorie des systèmes d'éléments. Le premier de ces systèmes d'éléments, la congruence de droites, est celui qui a été employé jusqu'ici de la façon la plus étendue. Des théories bien connues, telles que celle de la courbure des surfaces, ne sont que le résultat de l'étude de la congruence formée par les normales d'une surface. Les différentes équations dont on a fait dépendre le problème de la déformation d'une surface, comme aussi celles relatives à la déformation infinitésimale, ne sont autres que les équations qui permettent de déterminer certaines congruences dérivées de la surface.

Le but principal de l'étude présente est de poser les bases de nombreuses applications de la théorie des congruences de droites et de développer en partie une de ces applications : celle des systèmes conjugués. Nous nous bornons, dans ce premier Mémoire, à exposer les résultats qui nous ont paru les plus essentiels et parmi lesquels nous signalerons ceux qui suivent.

On trouvera, dans la première Partie, deux systèmes de formules (C) et (D), résultant de l'introduction des symboles de M. Christoffel relatifs à une forme différentielle quadratique, et qui constituent un complément indispensable aux formules (A) et (B) des *Leçons* de M. Darboux; une première application de ces formules est faite dans la deuxième Partie à l'établissement des conditions satisfaites par l'élément linéaire d'une surface rapportée à ses asymptotiques et à la démonstration du théorème de M. Dini sur la représentation sphérique des asymptotiques d'une surface.

Dans la troisième Partie, on aborde l'étude des congruences de droites, basée sur l'introduction de la *représentation sphérique de leurs développables* (¹). En menant par le centre d'une sphère de rayon 1 la parallèle à une droite de la congruence, on obtient sur la sphère un point qui est dit la *représentation sphérique de la droite*. Aux développables de la congruence correspondent ainsi sur la sphère des courbes qui en constituent la représentation sphérique. En particulier, si l'on considère une congruence formée de normales à une surface S, la représentation sphérique des développables de cette congruence sera identique à la représentation sphérique des lignes de courbure de S. M. Guichard a montré que la représentation sphérique des développables d'une congruence peut former un système de courbes quelconque, et que, quand ce système est donné, la détermination des congruences correspondantes se fait à l'aide de l'équation

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} + \beta \frac{\partial \rho}{\partial u} + \beta_1 \frac{\partial \rho}{\partial v} + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} + \frac{\partial \beta_1}{\partial v} + f\right)\rho = 0,$$

à laquelle satisfait la demi-distance ρ entre les points focaux d'une droite de la congruence, les coefficients de cette équation ne dépendant que de la représentation sphérique donnée. Après avoir retrouvé les résultats de M. Guichard, nous donnons une solution nouvelle de ce problème traité par M. Darboux au Tome II de ses *Leçons : Déterminer toutes les surfaces sur lesquelles les développables d'une congruence donnée interceptent un réseau conjugué*. Nous ramenons la question à l'intégration de l'équation adjointe à l'équation en ρ; d'où résulte la généralisation suivante d'un

(¹) A. Ribaucour, *Étude des Élassoïdes*, § 188. — C. Guichard, *Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. VI).

théorème bien connu relatif aux congruences formées de normales à une surface :

Le problème de la détermination des surfaces découpées suivant un réseau conjugué par les développables d'une congruence donnée équivaut à celui de la recherche des congruences admettant même représentation sphérique de leurs développables que cette congruence.

Le problème de déterminer toutes les enveloppes de sphères, telles que leurs cordes de contact forment une congruence qui soit la congruence donnée, se ramène également, conformément à un théorème de M. Darboux, à l'intégration de l'équation adjointe à l'équation en ρ.

La quatrième Partie traite des réseaux conjugués et constitue, en partie, le développement de deux Notes insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* en octobre 1891; on y établit que les différentes équations dont on a fait dépendre le problème de la déformation d'une surface comme aussi celles relatives à la déformation infinitésimale ne sont autres que les équations qui permettent de déterminer certains réseaux conjugués tracés sur la surface.

I. — Formules générales. Les symboles $\left\{ \begin{matrix} r & s \\ & k \end{matrix} \right\}$ de M. Christoffel.

1. *Rappel des systèmes de formules* (A) *et* (B) *de M. Darboux; définition des symboles de M. Christoffel.* — Considérons deux surfaces (M) et (N) se correspondant point par point, N de (N) correspondant à M de (M). Cette correspondance peut se définir de la façon suivante : nous ferons correspondre à chaque système de valeurs u, v des paramètres qui fixent la position du point M sur (M) un trièdre trirectangle (T) dont l'axe des z soit la normale en M à (M), et nous nous donnerons les coordonnées x, y, z du point N par rapport à ce trièdre. Si l'on donne à u, v les accroissements du, dv, le point N vient occuper une position infiniment voisine de la première et les projections δx, δy, δz du déplacement de ce point sur les axes du trièdre mobile (T) sont données par les formules

$$(\mathrm{B})\quad \left\{ \begin{aligned} \delta x &= dx + \xi\,du + \xi_1\,dv + (q\,du + q_1\,dv)z - (r\,du + r_1\,dv)y, \\ \delta y &= dy + \eta\,du + \eta_1\,dv + (r\,du + r_1\,dv)x - (p\,du + p_1\,dv)z, \\ \delta z &= dz \qquad\qquad\qquad\quad + (p\,du + p_1\,dv)y - (q\,du + q_1\,dv\ x, \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles les fonctions $p, \ldots, \xi, \ldots$ satisfont au système

$$
(\mathrm{A}) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} = q r_1 - r q_1, &\qquad& \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} = \eta r_1 - r \eta_1, \\
&\frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial q_1}{\partial u} = r p_1 - p r_1, && \frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = r \xi_1 - \xi r_1, \\
&\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = p q_1 - q p_1, && p \eta_1 - \eta p_1 + \xi q_1 - q \xi_1 = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces fonctions $p, \ldots, \xi, \ldots$ sont déterminées dès que l'on connaît la surface (M) et la façon dont le trièdre (T) lui est lié et inversement; à tout système de telles fonctions, satisfaisant aux équations (A), correspond une seule surface (M).

Nous allons adjoindre aux formules (A), (B) de nouveaux systèmes fondés sur l'emploi des symboles de M. Christoffel.

Étant donnée une forme différentielle quadratique

$$\sum\sum \omega_{rs}\, dx_r\, dx_s \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n;\ \omega_{rs} = \omega_{sr}).$$

M. Christoffel a introduit les notations suivantes (¹)

$$\begin{bmatrix} r\ s \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\ r \\ i \end{bmatrix} = \frac{\partial \omega_{ir}}{\partial x_s} + \frac{\partial \omega_{is}}{\partial x_r} - \frac{\partial \omega_{rs}}{\partial x_i},$$

$$\begin{Bmatrix} r\ s \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s\ r \\ k \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Omega_{ik}}{\Omega} \begin{bmatrix} r\ s \\ i \end{bmatrix},$$

où Ω est le discriminant de la forme quadratique, savoir

$$\Omega = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \ldots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & \ldots & \ldots & \omega_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{n1} & \ldots & \ldots & \omega_{nn} \end{vmatrix},$$

et où Ω_{ik} est le coefficient de ω_{ik} dans ce déterminant.

2. *Introduction des symboles de M. Christoffel dérivés de l'élément linéaire d'une surface.* — Considérons, en particulier, le cas où la forme

---

(¹) E.-B. Christoffel, *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades* (*Journal de Crelle,* t. 70, p. 46-70).

différentielle quadratique est le carré de l'élément linéaire d'une surface

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

c'est-à-dire le cas où l'on a

$$n = 2, \qquad x_1 = u, \qquad x_2 = v,$$
$$\omega_{11} = E, \qquad \omega_{12} = F, \qquad \omega_{22} = G,$$

et calculons les différents symboles. On aura

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u}\right),$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v}\right), \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}.$$

Les symboles $\begin{Bmatrix} r & s \\ & k \end{Bmatrix}$, pour lesquels nous emploierons également la notation adoptée par M. Voss dans un Mémoire [1] sur lequel nous aurons l'occasion de revenir, sont définis par les formules

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{G\frac{\partial E}{\partial u} + F\frac{\partial E}{\partial v} - 2F\frac{\partial F}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, \qquad A_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{-E\frac{\partial E}{\partial v} + 2E\frac{\partial F}{\partial u} - F\frac{\partial E}{\partial u}}{2(EG - F^2)},$$

$$B = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{G\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, \qquad B_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{E\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)},$$

$$C = \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{2G\frac{\partial F}{\partial v} - G\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial G}{\partial v}}{2(EG - F^2)}, \qquad C_1 = \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{E\frac{\partial G}{\partial v} + F\frac{\partial G}{\partial u} - 2F\frac{\partial F}{\partial v}}{2(EG - F^2)}$$

ou encore par le système

$$FA + GA_1 = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \qquad EA + FA_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u},$$
$$FB + GB_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \qquad EB + FB_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v},$$
$$FC + GC_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}, \qquad EC + FC_1 = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}.$$

---

(1) A. Voss, *Zur Theorie der Krümmung der Flächen* (*Mathematische Annalen*, t. 39).

Ces définitions posées, on établit sans difficulté le système suivant dont nous ferons constamment usage

$$(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\xi}{\partial u} - \eta r = \mathrm{A}\xi + \mathrm{A}_1\xi_1,\\
&\frac{\partial\eta}{\partial u} + \xi r = \mathrm{A}\eta + \mathrm{A}_1\eta_1,\\
&\frac{\partial\xi_1}{\partial u} - \eta_1 r = \frac{\partial\xi}{\partial v} - \eta r_1 = \mathrm{B}\xi + \mathrm{B}_1\xi_1,\\
&\frac{\partial\eta_1}{\partial u} + \xi_1 r = \frac{\partial\eta}{\partial v} + \xi r_1 = \mathrm{B}\eta + \mathrm{B}_1\eta_1,\\
&\frac{\partial\xi_1}{\partial v} - \eta_1 r_1 = \mathrm{C}\xi + \mathrm{C}_1\xi_1,\\
&\frac{\partial\eta_1}{\partial v} + \xi_1 r_1 = \mathrm{C}\eta + \mathrm{C}_1\eta_1.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose

$$\mathrm{H} = \xi\eta_1 - \eta\xi_1,$$

on en déduit les relations suivantes

$$\frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial u} = \mathrm{B}_1 + \mathrm{A}, \qquad \frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial v} = \mathrm{B} + \mathrm{C}_1.$$

Les formules qui déterminent les rayons de courbure géodésique des lignes coordonnées s'écrivent

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\mathrm{E}}}{\rho_{gu}} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{E}}\mathrm{A}_1,\\
&\frac{\sqrt{\mathrm{G}}}{\rho_{gv}} = -\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{G}}\mathrm{C}.
\end{aligned}\right.$$

Enfin on peut encore adjoindre les résultats suivants.

Posons

$$\begin{aligned}
\mathrm{D} &= \mathrm{H}(p\eta - q\xi),\\
\mathrm{D}' &= \mathrm{H}(p_1\eta_1 - q_1\xi_1),\\
\mathrm{D}'' &= \mathrm{H}(p\eta_1 - q\xi_1) = \mathrm{H}(p_1\eta - q_1\xi).
\end{aligned}$$

Les coordonnées rectangulaires X, Y, Z du point M de la surface satisfont aux équations (1)

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} &= \frac{D}{H}c + A\frac{\partial X}{\partial u} + A_1\frac{\partial X}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} &= \frac{D'}{H}c + B\frac{\partial X}{\partial u} + B_1\frac{\partial X}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} &= \frac{D''}{H}c + C\frac{\partial X}{\partial u} + C_1\frac{\partial X}{\partial v} \end{aligned}\right.$$

et aux analogues qu'on obtient en remplaçant X et c par Y et c' ou par Z et c''. Dans ces formules, c, c', c'' sont les cosinus directeurs de la normale à la surface.

3. *Introduction des symboles de M. Christoffel dérivés de l'élément linéaire de la représentation sphérique.* — Considérons la représentation sphérique de la surface que nous définissons en menant par un point fixe de l'espace trois axes coordonnés parallèles aux axes de (T) et de même sens et en considérant le point m dont les coordonnées par rapport à ce nouveau trièdre (t) sont 0, 0, 1; soit

$$d\sigma^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

le carré de l'élément linéaire de la sphère décrite par le point m et rapportée au système (u, v). On aura

$$e = p^2 + q^2, \qquad f = pp_1 + qq_1, \qquad g = p_1^2 + q_1^2.$$

Construisons avec la forme différentielle quadratique $d\sigma^2$ les symboles de M. Christoffel et posons

$$\alpha = \left\{\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix}\right\} = \frac{g\dfrac{\partial e}{\partial u} + f\dfrac{\partial e}{\partial v} - 2f\dfrac{\partial f}{\partial u}}{2(eg - f^2)}, \qquad \alpha_1 = \left\{\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix}\right\} = \frac{-e\dfrac{\partial e}{\partial v} + 2e\dfrac{\partial f}{\partial u} - f\dfrac{\partial e}{\partial u}}{2(eg - f^2)},$$

$$\beta = \left\{\begin{matrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{matrix}\right\} = \frac{g\dfrac{\partial e}{\partial v} - f\dfrac{\partial g}{\partial u}}{2(eg - f^2)}, \qquad \beta_1 = \left\{\begin{matrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{matrix}\right\} = \frac{e\dfrac{\partial g}{\partial u} - f\dfrac{\partial e}{\partial v}}{2(eg - f^2)},$$

$$\gamma = \left\{\begin{matrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{matrix}\right\} = \frac{2g\dfrac{\partial f}{\partial v} - g\dfrac{\partial g}{\partial u} - f\dfrac{\partial g}{\partial v}}{2(eg - f^2)}, \qquad \gamma_1 = \left\{\begin{matrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{matrix}\right\} = \frac{e\dfrac{\partial g}{\partial v} + f\dfrac{\partial g}{\partial u} - 2f\dfrac{\partial f}{\partial v}}{2(eg - f^2)}$$

(1) DARBOUX, *Leçons*, t. III, p. 251, éq. 35 et 36.

ou encore

$$f\alpha+g\alpha_1=\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v},\qquad e\alpha+f\alpha_1=\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial u},$$
$$f\beta+g\beta_1=\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u},\qquad e\beta+f\beta_1=\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v},$$
$$f\gamma+g\gamma_1=\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial v},\qquad e\gamma+f\gamma_1=\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u}.$$

Ceci posé, on établit aisément le système suivant

$$(\mathrm{D})\quad\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial u}-qr=p\alpha+p_1\alpha_1,\\[2mm] \dfrac{\partial q}{\partial u}+pr=q\alpha+q_1\alpha_1,\\[2mm] \dfrac{\partial p_1}{\partial u}-q_1r=\dfrac{\partial p}{\partial v}-qr_1=p\beta+p_1\beta_1,\\[2mm] \dfrac{\partial q_1}{\partial u}+p_1r=\dfrac{\partial q}{\partial v}+pr_1=q\beta+q_1\beta_1,\\[2mm] \dfrac{\partial p_1}{\partial v}-q_1r_1=p\gamma+p_1\gamma_1,\\[2mm] \dfrac{\partial q_1}{\partial v}+p_1r_1=q\gamma+q_1\gamma_1.\end{cases}$$

Si l'on pose

$$h=pq_1-qp_1,$$

on aura

$$\frac{\partial\log h}{\partial u}=\beta_1+\alpha,\qquad\frac{\partial\log h}{\partial v}=\beta+\gamma_1.$$

Appliquons les formules (2) au cas présent; les coordonnées d'un point de la sphère par rapport à trois axes rectangulaires fixes dont l'origine est au centre de cette sphère sont $X=c$, $Y=c'$, $Z=c''$, et il vient les équations (¹)

$$(3)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2 c}{\partial u^2}=\alpha\dfrac{\partial c}{\partial u}+\alpha_1\dfrac{\partial c}{\partial v}-ec,\\[2mm] \dfrac{\partial^2 c}{\partial u\,\partial v}=\beta\dfrac{\partial c}{\partial u}+\beta_1\dfrac{\partial c}{\partial v}-fc,\\[2mm] \dfrac{\partial^2 c}{\partial v^2}=\gamma\dfrac{\partial c}{\partial u}+\gamma_1\dfrac{\partial c}{\partial v}-gc,\end{cases}$$

et les analogues obtenues en remplaçant c soit par c', soit par c''.

(¹) C. Guichard, *Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences*

Si l'on appelle toujours X, Y, Z les coordonnées cartésiennes rectangulaires du point M de la surface (M) par rapport aux trois axes fixes, on aura

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = -\dfrac{p_1\xi + q_1\eta}{h}\dfrac{\partial c}{\partial u} + \dfrac{p\xi + q\eta}{h}\dfrac{\partial c}{\partial v}, \\[2ex] \dfrac{\partial X}{\partial v} = -\dfrac{p_1\xi_1 + q_1\eta_1}{h}\dfrac{\partial c}{\partial u} + \dfrac{p\xi_1 + q\eta_1}{h}\dfrac{\partial c}{\partial v}, \end{cases}$$

et les analogues obtenues en remplaçant X et c par Y et c' ou par Z et c''.

II. — Surfaces rapportées a leurs asymptotiques.

4. *Élément linéaire correspondant aux asymptotiques* [1]. — L'élément linéaire d'une surface non développable étant donné sous la forme

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

cherchons si les lignes coordonnées peuvent être les asymptotiques de l'une des surfaces résultant de la déformation de la proposée.

Pour une telle surface, on devra avoir

$$p\eta - q\xi = 0, \qquad p_1\eta_1 - q_1\xi_1 = 0.$$

Ces conditions permettent de poser

$$p = \lambda\xi, \qquad q = \lambda\eta, \qquad p_1 = \mu\xi_1, \qquad q_1 = \mu\eta_1.$$

Si l'on porte ces valeurs dans les deux relations de la troisième ligne du système (A), on trouve

$$\lambda + \mu = 0, \qquad \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = \lambda\mu(\xi\eta_1 - \eta\xi_1).$$

Si l'on pose

$$k = \sqrt{\frac{\dfrac{\partial r_1}{\partial u} - \dfrac{\partial r}{\partial v}}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1}} = \sqrt{-\frac{1}{\mathrm{RR}'}},$$

---

rapportées à leurs développables (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. VI, p. 336). — L. Bianchi, *Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, série II, t. XVIII, p. 305).

[1] G. Darboux, *Leçons*, t. III, p. 283. — A. Ribaucour, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes*, § 19 et suiv.

on a

$$\lambda = -\mu = k:$$

λ, μ sont donc complètement définis au moyen de E, F, G.

Les deux premières équations de droite de (A) donneront r, r_1; il reste à exprimer que les deux premières équations de gauche sont satisfaites, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{\partial(k\xi)}{\partial v} + \frac{\partial(k\xi_1)}{\partial u} = k(\eta r_1 + r\eta_1),$$

$$\frac{\partial(k\eta)}{\partial v} + \frac{\partial(k\eta_1)}{\partial u} = -k(r\xi_1 + \xi r_1)$$

ou, en tenant compte des formules (C),

$$\xi_1\left(\frac{\partial \log k}{\partial u} + 2\mathrm{B}_1\right) + \xi\left(\frac{\partial \log k}{\partial v} + 2\mathrm{B}\right) = 0,$$

$$\eta_1\left(\frac{\partial \log k}{\partial u} + 2\mathrm{B}_1\right) + \eta\left(\frac{\partial \log k}{\partial v} + 2\mathrm{B}\right) = 0$$

ou, enfin,

$$\frac{\partial \log k}{\partial u} = -2\mathrm{B}_1, \qquad \frac{\partial \log k}{\partial v} = -2\mathrm{B}.$$

Telles sont les deux équations de condition entre E, F, G pour que le problème proposé soit possible.

5. *La représentation sphérique des asymptotiques d'une surface.* — Soit

$$d\sigma^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

la formule qui donne l'élément linéaire d'une sphère de rayon 1 rapportée au système (u, v) qui est la représentation sphérique des asymptotiques d'une surface.

Supposons que l'on connaisse p, q, p_1, q_1; les deux premières formules de gauche de (A) donneront r, r_1; la troisième sera satisfaite et exprimera que l'élément linéaire $d\sigma$ convient à une surface à courbure totale égale à 1; ξ, ξ_1, η, η_1 seront déterminés par les formules

$$\xi = \frac{p}{k}, \qquad \xi_1 = -\frac{p_1}{k}, \qquad \eta = \frac{q}{r}, \qquad \eta_1 = -\frac{q_1}{k},$$

où k est une inconnue auxiliaire définie par le système que l'on obtient en exprimant que les deux premières équations de droite de (A) sont satisfaites, savoir

$$\frac{\partial \frac{p}{k}}{\partial v} + \frac{\partial \frac{p_1}{k}}{\partial u} = \frac{1}{k}(qr_1 + rq_1),$$

$$\frac{\partial \frac{q}{k}}{\partial v} + \frac{\partial \frac{q_1}{k}}{\partial v} = -\frac{1}{k}(rp_1 + pr_1).$$

Ce système se déduit de celui considéré au numéro précédent en remplaçant respectivement

$$\xi, \quad \xi_1, \quad k$$

par

$$p, \quad p_1, \quad \frac{1}{k},$$

et, par conséquent, il se transforme, en vertu des formules (D), dans le suivant

$$(5) \qquad \frac{\partial \log k}{\partial u} = 2\beta_1, \qquad \frac{\partial \log k}{\partial v} = 2\beta.$$

On a donc ce théorème, dû à M. Dini [1] :

Pour qu'un système de courbes tracées sur la sphère soit la représentation sphérique des asymptotiques d'une surface, il faut et il suffit que ce système soit tel que l'on ait

$$\frac{\partial \beta}{\partial u} = \frac{\partial \beta_1}{\partial v}.$$

Si cette condition est vérifiée, les formules (5) déterminent k, à un facteur constant près; toutes les surfaces correspondantes sont identiques à l'une d'elles, à l'homothétie près.

Toutefois il y a deux cas distincts à considérer.

Si le système (u, v) tracé sur la sphère est entièrement connu, c'est-

(1) U. Dini, *Sopra alcune formole generali della teoria delle superficie, e loro applicazioni* (*Annali di Matematica*, série II, t. IV, p. 183).

à-dire si l'on a les expressions des cosinus directeurs c, c', c'' de la normale à la surface cherchée en fonction de u et de v, le problème sera ramené aux quadratures.

Mais, si les expressions de p, q, p_1, q_1 sont seules connues, la détermination de c, c', c'' exigera encore l'intégration d'une équation de Riccati.

Il est facile, dans le premier cas, de donner les formules déterminant les coordonnées cartésiennes rectangulaires X, Y, Y d'un point de la surface : les équations (4) deviennent en effet, dans le cas actuel,

$$\frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{f}{kh}\frac{\partial c}{\partial u} + \frac{e}{kh}\frac{\partial c}{\partial v},$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{g}{kh}\frac{\partial c}{\partial u} - \frac{f}{kh}\frac{\partial c}{\partial v}.$$

On a des formules analogues pour Y et Z.

III. — Les congruences de droites rapportées a leurs développables et la représentation sphérique.

6. *Formules générales.* — Définissons une congruence de droites, de la façon suivante [1] :

Soit (T) ou $Mxyz$ un trièdre trirectangle dont la position dépend de deux paramètres u et v et dont le sommet M décrit une surface (M) normale à l'axe des z; x, y étant deux fonctions de u et v, faisons correspondre à chaque position du trièdre (T) une droite parallèle à l'axe des z de ce trièdre, les coordonnées du pied de cette droite sur le plan des xy étant les valeurs des fonctions x, y. L'ensemble des droites ainsi obtenues constituera la congruence la plus générale.

Supposons que les paramètres u et v soient choisis de façon que la congruence soit rapportée à ses développables, c'est-à-dire de façon que, lorsque l'on donne à u ou à v des valeurs constantes, les surfaces réglées correspondantes de la congruence soient développables. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait, en désignant par z_1 et z_2 les cotes des points

(1) A. Ribaucour, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes;* Chapitre IV.

focaux F_1 et F_2, les équations

$$\xi + \frac{\partial x}{\partial u} + q z_1 - r y = 0, \qquad \xi_1 + \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z_2 - r_1 y = 0,$$
$$\eta + \frac{\partial y}{\partial u} + r x - p z_1 = 0, \qquad \eta_1 + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z_2 = 0,$$

qui expriment que les déplacements de F_1 et de F_2, correspondant respectivement à $v =$ constante et à $u =$ constante, s'effectuent suivant la droite.

Posons

$$z_2 + z_1 = 2 z_m, \qquad z_2 - z_1 = 2\rho,$$
$$\xi' = \xi - q\rho, \qquad \xi'_1 = \xi_1 + q_1\rho,$$
$$\eta' = \eta + p\rho, \qquad \eta'_1 = \eta_1 - p_1\rho.$$

En vertu d'un calcul bien connu, qui consiste à écrire que les deux valeurs de $\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}$ déduites du système précédent sont égales, ainsi que les deux valeurs de $\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v}$, les inconnues x, y, z_m sont déterminées par le système

$$(6)\quad \begin{cases} \xi' + \dfrac{\partial x}{\partial u} + q z_m - r y = 0, & \xi'_1 + \dfrac{\partial x}{\partial v} + q_1 z_m - r_1 y = 0, \\ \eta' + \dfrac{\partial y}{\partial u} + r x - p z_m = 0, & \eta'_1 + \dfrac{\partial y}{\partial v} + r_1 x_m - p_1 z_m = 0, \\ \zeta' + \dfrac{\partial z_m}{\partial u} + p y - q x = 0, & \zeta'_1 + \dfrac{\partial z_m}{\partial v} + p_1 y - q_1 x = 0, \end{cases}$$

auquel il faut adjoindre les relations (¹)

$$\frac{\partial \xi'}{\partial v} - \frac{\partial \xi'_1}{\partial u} = q\zeta'_1 - q_1\zeta' - r\eta'_1 + r_1\eta',$$
$$\frac{\partial \eta'}{\partial v} - \frac{\partial \eta'_1}{\partial u} = r\xi'_1 - r_1\xi' - p\zeta'_1 + p_1\zeta',$$
$$\frac{\partial \zeta'}{\partial v} - \frac{\partial \zeta'_1}{\partial u} = p\eta'_1 - p_1\eta' - q\xi'_1 + q_1\xi',$$

qui déterminent ζ', ζ'_1 et l'inconnue auxiliaire ρ.

Ces relations conduisent immédiatement, en vertu des formules (A) et

(¹) DARBOUX, *Leçons*, t. I, p. 66.

(D), aux suivantes

$$\zeta' = \frac{\partial\rho}{\partial u} + 2\beta_1\rho, \qquad \zeta'_1 = -\left(\frac{\partial\rho}{\partial v} + 2\beta\rho\right),$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} + \beta\frac{\partial\rho}{\partial u} + \beta_1\frac{\partial\rho}{\partial v} + \left(\frac{\partial\beta}{\partial u} + \frac{\partial\beta_1}{\partial v} + f\right)\rho = 0. \tag{7}$$

7. *Congruences qui admettent une représentation sphérique donnée de leurs développables.* — Particularisons ce qui précède en supposant que le trièdre (T) soit confondu avec le trièdre (t) dont le sommet est fixe; le point m, dont les coordonnées sont 0, 0, 1, décrit des courbes (u), (v) qui constituent la représentation sphérique des développables de la convergence. Donc :

On peut se donner arbitrairement la représentation sphérique des développables d'une congruence; pour déterminer la congruence correspondante, on construira un trièdre trirectangle mobile (t) à sommet fixe pour lequel les six rotations soient p, q, r, p_1, q_1, r_1; ceci fait, on intégrera l'équation (7) qui fera connaître ρ et l'on aura ensuite x, y, z_m au moyen du système

$$(8)\left\{\begin{aligned}
&-q\rho + \frac{\partial x}{\partial u} + qz_m - ry = 0, && q_1\rho + \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z_m - r_1 y = 0,\\
&p\rho + \frac{\partial y}{\partial u} + rx - pz_m = 0, && -p_1\rho + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z_m = 0,\\
&\frac{\partial\rho}{\partial u} + 2\beta_1\rho + \frac{\partial z_m}{\partial u} + py - qx = 0, && -\left(\frac{\partial\rho}{\partial v} + 2\beta\rho\right) + \frac{\partial z_m}{\partial v} + p_1 y - q_1 x = 0.
\end{aligned}\right.$$

La détermination de x, y, z_m n'est autre que celle d'un point fixe par rapport à un trièdre mobile dont les rotations sont les mêmes que celles de (t) et dont les translations sont connues en même temps que ρ; donc :

Si l'on a construit le trièdre mobile (t) et si l'on connaît ρ, la détermination de x, y, z_m n'exige que des quadratures.

M. Guichard est parvenu à des résultats équivalents aux précédents et que nous rappellerons rapidement.

Soient X_m, Y_m, Z_m les coordonnées par rapport à trois axes rectangulaires du point N milieu du segment F_1F_2 déterminé par les points focaux sur une droite D de la congruence; conservant les notations précédentes, les coordonnées du point F_1 seront

$$X_m - \rho c, \quad Y_m - \rho c', \quad Z_m - \rho c''$$

et celles du point F_2

$$X_m + \rho c, \quad Y_m + \rho c', \quad Z_m + \rho c''.$$

Les équations qui expriment que les surfaces réglées (u), (v) sont les développables de la congruence sont, par suite,

$$\frac{\partial(X_m - \rho c)}{\partial u} = -2\rho_{-1} c,$$

$$\frac{\partial(X_m + \rho c)}{\partial v} = 2\rho_1 c$$

et les analogues obtenues en remplaçant X_m, c par Y_m, c' ou par Z_m, c''.

Égalons les deux valeurs de $\frac{\partial^2 X_m}{\partial u \partial v}$ déduites de ces équations; il vient, en vertu des équations (3), les relations

$$\rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial v} + \rho\beta,$$

$$\rho_{-1} = \frac{\partial \rho}{\partial u} + \rho\beta_1,$$

$$\frac{\partial \rho_{-1}}{\partial v} + \frac{\partial \rho_1}{\partial u} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} - 2\rho f,$$

qui déterminent ρ_1, ρ_{-1} et ρ.

Éliminant ρ_1, ρ_{-1}, on voit que ρ est déterminé par l'équation (7); on a ensuite X_m, Y_m, Z_m par les formules

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial X_m}{\partial u} &= -\left(\frac{\partial \rho}{\partial u} + 2\rho\beta_1\right) c + \rho \frac{\partial c}{\partial u}, \\ \frac{\partial X_m}{\partial v} &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial v} + 2\rho\beta\right) c - \rho \frac{\partial c}{\partial v} \end{aligned} \right.$$

et par les analogues relatives à Y_m, Z_m.

8. *Autre solution du même problème.* — Les inconnues auxiliaires, au lieu d'être basées sur l'introduction des points focaux, peuvent être déduites de la considération des plans focaux. Les équations qui déterminent x et y

sont, d'après le § 6,

$$p\left(\xi + \frac{\partial x}{\partial u} - r\,y\right) + q\left(\eta + \frac{\partial y}{\partial u} + r\,x\right) = 0,$$

$$p_1\left(\xi_1 + \frac{\partial x}{\partial v} - r_1 y\right) + q_1\left(\eta_1 + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x\right) = 0.$$

Substituons à x, y les inconnues

$$\zeta = p\,x + q\,y,$$
$$\zeta_1 = p_1 x + q_1 y.$$

Ces nouvelles inconnues sont définies, en vertu des formules (D), par les équations

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u} - \alpha\zeta - \alpha_1\zeta_1 + p\,\xi + q\,\eta = 0,$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial v} - \gamma\zeta - \gamma_1\zeta_1 + p_1\xi_1 + q_1\eta_1 = 0.$$

Si l'on suppose, comme au numéro précédent, que le trièdre (T) ait son sommet fixe, on voit que ζ, ζ_1 seront définis par le système bien simple

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u} - \alpha\zeta - \alpha_1\zeta_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial v} - \gamma\zeta - \gamma_1\zeta_1 = 0.$$

9. *Propriété caractéristique de l'équation adjointe à l'équation en* ρ. *Congruences dérivées de M. Darboux.* — L'équation (7) qui détermine ρ n'est pas une équation linéaire quelconque; car les fonctions e, f, g qui entrent dans la formation de ses coefficients sont liées par une relation. Il est bien facile de donner la propriété caractéristique de cette équation ou plutôt de son adjointe.

Cette dernière est en effet

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v} - \beta\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \beta_1\frac{\partial \varphi}{\partial v} + f\varphi = 0, \tag{10}$$

et, d'après les équations (3), elle admet comme solutions c, c', c''.

On peut alors énoncer cette proposition :

L'équation (10) *adjointe à l'équation en* ρ *est caractérisée par cette* *propriété d'admettre trois solutions linéairement distinctes dont la somme des carrés est égale à l'unité.*

Car les trois solutions considérées seront les cosinus directeurs d'une droite que l'on pourra prendre pour axe des z d'un trièdre mobile (t).

Revenons à l'équation (7); il est facile de voir que l'application à cette équation de la méthode de Laplace correspond encore aux congruences dérivées introduites par M. Darboux au Tome II de ses *Leçons*.

Supposons que les invariants

$$H = \beta\beta_1 - \frac{\partial\beta_1}{\partial v} - f,$$

$$K = \beta\beta_1 - \frac{\partial\beta}{\partial u} - f$$

ne soient pas nuls.

Les tangentes D^1 menées aux courbes (v) tracées sur la surface (F_2), lieu de F_2, forment une congruence dont les développables sont (u), (v); la demi-distance focale $\rho^{(1)}$ relative à une droite D^1 satisfait à une équation de la forme (7), savoir :

$$\frac{\partial^2\rho^{(1)}}{\partial u\,\partial v} + \beta^1\frac{\partial\rho^{(1)}}{\partial u} + \beta_1^1\frac{\partial\rho^{(1)}}{\partial v} + \left(\frac{\partial\beta^1}{\partial u} + \frac{\partial\beta_1^1}{\partial v} + f^1\right)\rho = 0.$$

Or on a

$$\rho^{(1)} = \frac{\sqrt{e+\beta_1^2}}{H}\left(\frac{\partial\rho}{\partial v} + \rho\beta\right).$$

On retrouve donc la transformation de Laplace.

Un calcul facile donne

$$(11)\quad \begin{cases} \beta^1 = \beta^1 - \dfrac{\partial \log H}{\partial v} + \dfrac{\partial \log \dfrac{H}{\sqrt{e+\beta_1^2}}}{\partial v} = \beta - \dfrac{\partial \log\sqrt{e+\beta_1^2}}{\partial v}, \\ \beta_1^1 = \beta_1 + \dfrac{\partial \log \dfrac{H}{\sqrt{e+\beta_1^2}}}{\partial u}. \end{cases}$$

De même les tangentes D^{-1} menées aux courbes (u) tracées sur la surface (F_1), lieu de F_1, forment une congruence dont les développables sont (u), (v); la demi-distance focale $\rho^{(-1)}$ relative à une droite D^{-1} est donnée par la formule

$$\rho^{(-1)} = \frac{\sqrt{g+\beta^2}}{\mathrm{K}}\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + \rho\beta_1\right).$$

Elle satisfait à une équation de la forme (7), pour laquelle les premiers coefficients sont donnés par les formules

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \beta^{(-1)} &= \beta + \frac{\partial \log \dfrac{\mathrm{K}}{\sqrt{g+\beta^2}}}{\partial v}, \\ \beta_1^{(-1)} &= \beta_1 - \frac{\partial \log \mathrm{K}}{\partial u} + \frac{\partial \log \dfrac{\mathrm{K}}{\sqrt{g+\beta^2}}}{\partial u} = \beta_1 - \frac{\partial \log \sqrt{g+\beta^2}}{\partial u}. \end{aligned}\right.$$

Nous avons supposé que H et K ne sont pas nuls.

Si $\mathrm{H} = 0$, *parmi les congruences admettant la représentation sphérique donnée, il y en a pour lesquelles la nappe* (F_2) *de la surface focale se réduit à une courbe; pour les autres congruences, le second point focal de* D^1 *est à l'infini.*

La valeur de ρ, correspondant aux congruences pour lesquelles (F_2) se réduit à une courbe, est définie par l'équation

$$\frac{\partial\rho}{\partial v} + \rho\beta = 0.$$

De même :

Si $\mathrm{K} = 0$, *parmi les congruences admettant la représentation sphérique donnée, il y en a pour lesquelles la nappe* (F_1) *se réduit à une courbe; pour les autres congruences, le second point focal de* D^{-1} *est à l'infini.*

La valeur de ρ, correspondant aux congruences pour lesquelles (F_1) se réduit à une courbe, est définie par l'équation

$$\frac{\partial\rho}{\partial u} + \rho\beta_1 = 0.$$

Si l'on a simultanément $\mathrm{H} = 0$, $\mathrm{K} = 0$, *parmi les congruences admettant la représentation sphérique donnée, il y en a pour lesquelles les deux nappes* (F_1) *et* (F_2) *se réduisent à des courbes.*

La demi-distance focale correspondant à de telles congruences est définie par le système

$$\frac{\partial\rho}{du} + \rho\beta_1 = 0, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial v} + \rho\beta = 0,$$

qui est compatible, en vertu des hypothèses, et donne pour ρ une valeur unique, à un facteur constant près. Toutes les congruences correspondantes sont donc identiques à l'une d'elles, à l'homothétie près.

10. *Formules relatives aux deux nappes* (F_1) *et* (F_2) *de la surface focale.* — Soit d'abord la nappe (F_1).

Supposons qu'on donne à u et v deux systèmes d'accroissements du, dv et δu, δv, et cherchons la condition pour que les courbes qui leur correspondent sur (F_1) soient conjuguées. Les projections δx, δy, δz_1 du déplacement de (F_1), correspondant aux accroissements du, dv, sont données par les formules

$$\begin{aligned}
\delta x &= -2q_1\rho\,dv,\\
\delta y &= 2p_1\rho\,dv,\\
\delta z_1 &= -2\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + \rho\beta_1\right)du + 2\rho\beta\,dv.
\end{aligned}$$

Le plan tangent à (F_1) en F_1 a pour équation

$$p_1(X - x) + q_1(Y - y) = 0.$$

La direction de son intersection avec le plan infiniment voisin, correspondant aux accroissements du, dv, est donc définie par les équations

$$p_1 X + q_1 Y = 0,$$

$$\begin{aligned}
&p_1[(qZ - rY)\,du + (q_1 Z - r_1 Y)\,dv]\\
&\quad + q_1[(rX - pZ)\,du + (r_1 X - p_1 Z)\,dv] - X\,dp_1 - Y\,dq_1 = 0.
\end{aligned}$$

Exprimons que cette direction est parallèle au déplacement de F_1, correspondant aux accroissements δu, δv; il vient, par un calcul facile, fondé sur l'emploi des formules (D),

$$\left(\beta_1 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)du\,\delta u + \gamma\,dv\,\delta v = 0.$$

Telle est la relation qui définit deux directions conjuguées sur (F_1). On en déduit, pour l'équation des asymptotiques,

$$\left(\beta_1 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u}\right) du^2 + \gamma\, dv^2 = 0.$$

En exprimant que deux directions sont conjuguées et rectangulaires, on trouve facilement l'équation des lignes de courbure de (F_1)

$$\beta\left(\beta_1 + \frac{\partial \log\rho}{du}\right) du^2 + \left[\gamma\left(\beta_1 + \frac{\partial \log\rho}{\partial u}\right) - (g+\beta^2)\right] du\, dv - \beta\gamma\, dv^2 = 0.$$

On peut trouver cette dernière équation et déterminer également les rayons de courbure principaux de (F_1) en F_1 par le calcul suivant :

La normale en F_1 à (F_1) est définie par les équations

$$X = x + p_1 t, \qquad Y = y + q_1 t, \qquad Z = z_1,$$

où t est un paramètre variable.

Les valeurs de t correspondant aux centres de courbure principaux et les lignes de courbure sont définies par les équations

$$\frac{\delta X}{p_1} = \frac{\delta Y}{q_1}, \qquad \delta Z = 0,$$

qui s'écrivent, en vertu des formules (D),

$$\frac{p\beta t\, du + (p\gamma t - 2q_1\rho)\, dv}{p_1} = \frac{q\beta t\, du + (q\gamma t + 2p_1\rho)\, dv}{q_1},$$

$$\left[-2\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + \rho\beta_1\right) + (pq_1 - qp_1)t\right] du + 2\rho\beta\, dv = 0.$$

Si l'on élimine t entre ces équations, on retrouve l'équation des lignes de courbure.

Si l'on élimine du, dv, on trouve une équation du second degré en t qui détermine les centres de courbure principaux; les rayons de courbure principaux sont ainsi définis par l'équation

$$(pq_1 - qp_1)^2\gamma\frac{R_1^2}{g} - 2(pq_1 - qp_1)\rho\left[(g+\beta^2) + \gamma\left(\beta_1 + \frac{\partial \log\rho}{\partial u}\right)\right]\frac{R_1}{\sqrt{g}}$$
$$+ 4\rho g\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + \rho\beta_1\right) = 0.$$

On remarquera que, si $\beta = 0$, les deux racines de cette équation sont

$$R_1 = \frac{2\rho g \sqrt{g}}{(pq_1 - qp_1)\gamma}, \qquad R'_1 = \frac{2\sqrt{g}\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + \rho\beta_1\right)}{pq_1 - qp_1}.$$

Enfin l'élément linéaire ds_1 de la surface (F_1) est défini par la formule

$$\frac{1}{4}\,ds_1^2 = g\rho^2 dv^2 + \left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + \rho\beta_1\right) du - \rho\beta\, dv\right]^2.$$

Soit maintenant la nappe (F_2).

Par des calculs identiques aux précédents, on parviendra aux résultats suivants :

La relation entre deux directions conjuguées est

$$\alpha_1 du\, \delta u + \left(\beta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial v}\right) dv\, \delta v = 0.$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est

$$\alpha_1 du^2 + \left(\beta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial v}\right) dv^2 = 0.$$

Celle des lignes de courbure est

$$-\alpha_1\beta_1 du^2 + \left[\alpha_1\left(\beta + \frac{\partial \log\rho}{\partial v}\right) - (e + \beta_1^2)\right] du\, dv + \beta_1\left(\beta + \frac{\partial\log\rho}{\partial v}\right) dv^2 = 0.$$

L'équation définissant les rayons de courbure principaux est

$$(pq_1 - qp_1)^2\alpha_1 \frac{R_2^2}{e} - 2(pq_1 - qp_1)\rho\left[(e + \beta_1^2) + \alpha_1\left(\beta + \frac{\partial\log\rho}{\partial v}\right)\right]\frac{R_2}{\sqrt{e}}$$
$$+ 4\rho e\left(\frac{\partial\rho}{\partial v} + \rho\beta\right) = 0.$$

Si $\beta_1 = 0$, les deux racines de cette équation sont

$$R_2 = \frac{2\rho e\sqrt{e}}{(pq_1 - qp_1)\alpha_1}, \qquad R'_2 = \frac{2\sqrt{e}\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial v} + \rho\beta\right)}{pq_1 - qp_1}.$$

L'élément linéaire ds_2 de la surface (F_2) est défini par la formule

$$\frac{1}{4}\,ds_2^2 = e\rho^2 du^2 + \left[-\rho\beta_1\, du + \left(\frac{\partial\rho}{\partial v} + \rho\beta\right) dv\right]^2.$$

11. *Détermination de toutes les surfaces sur lesquelles les développables d'une congruence donnée interceptent un réseau conjugué* [1]. — On sait que, si les développables d'une congruence interceptent sur une surface (P_1) un réseau conjugué, cette congruence peut se construire en joignant les points P_1 de (P_1) aux points correspondants P_2 d'une surface (P_2), la correspondance étant établie par plans tangents parallèles.

Ceci rappelé, prenons sur chaque droite D de la congruence un point P_1 qui engendre une surface (P_1); cette surface (P_1) sera découpée par les développables de la congruence suivant un réseau conjugué s'il existe sur chaque droite D un point P_2 tel que les plans tangents en P_1 et P_2 aux surfaces (P_1) et (P_2) soient parallèles. Dans le cas actuel, le système (u, v) étant celui des développables de la congruence, il suffit d'écrire que les déplacements de P_1 et P_2 sont parallèles si l'on considère successivement $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$

Supposons que la congruence soit définie de la façon la plus générale, comme au n° 6, au moyen d'un trièdre mobile (T) dont l'axe des z est normal à l'origine à une surface; si l'on connaît simplement la représentation sphérique des développables, il suffira de supposer, comme au n° 7, que le trièdre mobile (T) a son sommet fixe, c'est-à-dire qu'il est confondu avec le trièdre (t); cela reviendra à faire dans les formules

$$\xi = \xi_1 = \eta = \eta_1 = 0.$$

Soient $z_m + \rho\theta_1$ et $z_m + \rho\theta_2$ les cotes de P_1 et de P_2; les projections du déplacement de P_1 correspondant aux accroissements du, dv ont, en vertu des formules (B) et des équations (6), les valeurs suivantes

$$\delta x = q\rho(\theta_1 + 1)\,du + q_1\rho(\theta_1 - 1)\,dv,$$

$$\delta y = -p\rho(\theta_1 + 1)\,du - p_1\rho(\theta_1 - 1)\,dv,$$

$$\delta z = \left[\frac{\partial(\rho\theta_1)}{\partial u} - \left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + 2\beta_1\rho\right)\right] du + \left[\frac{\partial(\rho\theta_1)}{\partial v} + \frac{\partial\rho}{\partial v} + 2\beta\rho\right] dv.$$

Les projections du déplacement de P_2, correspondant aux mêmes accroissements, se déduisent des précédentes en remplaçant θ_1 par θ_2.

Les équations du problème définissant les inconnues θ_1, θ_2 sont, par

(1) DARBOUX, *Leçons*, t. II, p. 219 et suivantes.

suite,

$$\frac{q\rho(\theta_1+1)}{q\rho(\theta_2+1)} = \frac{-p\rho(\theta_1+1)}{-p\rho(\theta_2+1)} = \frac{\dfrac{\partial(\rho\theta_1)}{\partial u} - \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + 2\beta_1\rho\right)}{\dfrac{\partial(\rho\theta_2)}{\partial u} - \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + 2\beta_1\rho\right)},$$

$$\frac{q_1\rho(\theta_1-1)}{q_1\rho(\theta_2-1)} = \frac{-p_1\rho(\theta_1-1)}{-p_1\rho(\theta_2-1)} = \frac{\dfrac{\partial(\rho\theta_1)}{\partial v} + \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial v} + 2\beta\rho\right)}{\dfrac{\partial(\rho\theta_2)}{\partial v} + \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial v} + 2\beta\rho\right)}.$$

Elles s'écrivent

$$\frac{\dfrac{\partial(\rho\theta_1)}{\partial u} - \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + 2\beta_1\rho\right)}{\rho(\theta_1+1)} = \frac{\dfrac{\partial(\rho\theta_2)}{\partial u} - \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + 2\beta_1\rho\right)}{\rho(\theta_2+1)},$$

$$\frac{\dfrac{\partial(\rho\theta_1)}{\partial v} + \dfrac{\partial\rho}{\partial v} + 2\beta\rho}{\rho(\theta_1-1)} = \frac{\dfrac{\partial(\rho\theta_2)}{\partial v} + \dfrac{\partial\rho}{\partial v} + 2\beta\rho}{\rho(\theta_2-1)}.$$

Les deux premiers rapports égaux sont égaux à celui qui a pour numérateur la différence des numérateurs et pour dénominateur la différence des dénominateurs, c'est-à-dire à

$$\frac{\partial \log\rho(\theta_1-\theta_2)}{\partial u}.$$

Les deux derniers rapports égaux sont égaux de même à

$$\frac{\partial \log\rho(\theta_1-\theta_2)}{\partial v}.$$

Substituons aux inconnues θ_1, θ_2 les nouvelles inconnues

$$\varphi = \frac{1}{\rho(\theta_1-\theta_2)}; \qquad \psi = \rho\theta_1\varphi.$$

Ces dernières seront définies par le système

$$(13) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial u} = \varphi\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + 2\beta_1\rho\right) - \rho\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial v} = -\varphi\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial v} + 2\beta\rho\right) + \rho\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}. \end{cases}$$

Égalons les deux valeurs de $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}$ qu'on obtient en différentiant; il vient, en tenant compte de l'équation (7), à laquelle satisfait ρ,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} - \beta \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \beta_1 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + f\varphi = 0.$$

Telle est l'équation qui détermine φ; c'est l'équation (10) adjointe à l'équation en ρ.

Dès que φ est connu, on obtient ψ par des quadratures; si l'on se rappelle cette proposition ([1]) : *Étant données une équation linéaire et son adjointe, l'intégration par un procédé quelconque de l'une des deux équations entraîne comme conséquence celle de l'autre équation,* on a la généralisation suivante d'un théorème bien connu sur les congruences formées de normales à des surfaces :

Le problème de la recherche des congruences admettant même représentation sphérique de leurs développables qu'une congruence donnée équivaut à celui de la détermination des surfaces découpées suivant un réseau conjugué par les développables de cette congruence.

L'équation en φ est la même pour toutes les congruences admettant même représentation sphérique de leurs développables; soit ρ la demi-distance focale d'une de ces congruences : à toute solution φ de l'équation (10) correspondent des valeurs de ψ, déterminées par les équations (13), qui ne diffèrent que par une constante; le plan tangent à l'une quelconque des surfaces obtenues est parallèle aux directions dont les coefficients directeurs sont

$$q, \quad -p, \quad -\frac{\partial \log \varphi}{\partial u}$$

et

$$q_1, \quad -p_1, \quad -\frac{\partial \log \varphi}{\partial v}.$$

Ces deux directions étant indépendantes de ρ et de ψ, on voit qu'on peut énoncer la proposition suivante :

Considérons les congruences admettant une représentation sphérique donnée de leurs développables; à toute solution de l'équation adjointe à l'équation en ρ correspondent pour chacune de ces congruences une in-

---

([1]) DARBOUX, *Leçons,* t. II, p. 98.

finité de surfaces découpées par les développables de cette congruence suivant un réseau conjugué; deux quelconques de ces surfaces appartenant, soit à une même congruence, soit à deux congruences différentes, ont, aux points correspondants, leurs plans tangents parallèles.

On peut remarquer que l'on connaît trois solutions particulières c, c', c'' de l'équation en φ et plus généralement les solutions définies par l'expression

$$\varphi_1 = lc + mc' + nc'',$$

où l, m, n sont des constantes; or, si l'on appelle X, Y, Z les coordonnées du point P par rapport à trois axes rectangulaires, on a en général

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}_m + \frac{\psi}{\varphi} c, \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{Y}_m + \frac{\psi}{\varphi} c', \qquad \mathrm{Z} = \mathrm{Z}_m + \frac{\psi}{\varphi} c''.$$

Dans le cas actuel où $\varphi = \varphi_1$, il vient

$$l\mathrm{X} + m\mathrm{Y} + n\mathrm{Z} = l\mathrm{X}_m + m\mathrm{Y}_m + n\mathrm{Z}_m + \psi_1,$$

ψ_1 étant défini par le système (13) dans lequel on remplace φ par φ_1.

Les deux dérivées partielles de la fonction $l\mathrm{X} + m\mathrm{Y} + n\mathrm{Z}$ sont nulles en vertu des formules (9); donc :

Les surfaces correspondant aux solutions φ_1 sont des plans.

12. *Congruences de Ribaucour.* — On peut se poser à l'égard de l'équation en ρ des questions analogues à celles traitées par M. Darboux au Tome II de ses *Leçons* pour l'équation linéaire plus générale du second ordre.

Les congruences particulières qui se présentent tout d'abord sont celles pour lesquelles l'équation en ρ a ses invariants égaux; elles sont définies par la condition suivante

$$\frac{\partial \beta}{\partial u} = \frac{\partial \beta_1}{\partial v}.$$

Donc :

La représentation sphérique de leurs développables est identique à la représentation sphérique des asymptotiques d'une surface.

M. Ribaucour [1] les a rencontrées le premier dans le problème de la

[1] A. Ribaucour, *Étude des Élassoïdes*, § 188.

correspondance par orthogonalité des éléments sur lequel nous reviendrons plus loin. On les retrouve dans un grand nombre de questions; nous leur donnerons, d'après M. Bianchi, le nom de *congruences de Ribaucour*.

M. Guichard a indiqué une propriété caractéristique de ces congruences qui est la suivante :

Les développables d'une congruence de Ribaucour interceptent sur sa surface moyenne un réseau conjugué.

Cette propriété résulte immédiatement de ce que le système (13) admet dans le cas actuel une solution φ telle que la valeur correspondante de ψ soit nulle; cette solution φ est définie par le système compatible

$$\frac{\partial \log \frac{\varphi}{\rho}}{\partial u} = 2\beta_1, \qquad \frac{\partial \log \frac{\varphi}{\rho}}{\partial v} = 2\beta.$$

On rencontre les congruences de Ribaucour dans un grand nombre de questions relatives aux congruences; prenons, par exemple, la suivante :

Étant donnée une congruence, existe-t-il sur chaque droite deux points P_1 *et* P_2 *équidistants du milieu des points focaux et tels que les plans tangents en* P_1 *et* P_2 *aux surfaces* (P_1) *et* (P_2) *soient parallèles?*

Il suffit de faire $\theta_1 = -\theta_2$ au numéro précédent, et les surfaces (P_1), (P_2), si elles existent, seront définies par le système

$$\frac{\frac{\partial(\rho\theta_1)}{\partial u} - \left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + 2\beta_1\rho\right)}{\theta_1 + 1} = \frac{-\frac{\partial(\rho\theta_1)}{\partial u} - \left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + 2\beta_1\rho\right)}{-\theta_1 + 1},$$

$$\frac{\frac{\partial(\rho\theta_1)}{\partial v} + \frac{\partial\rho}{\partial v} + \beta\rho}{\theta_1 - 1} = \frac{-\frac{\partial(\rho\theta_1)}{\partial v} + \frac{\partial\rho}{\partial v} + 2\beta\rho}{-\theta_1 - 1}.$$

Effectuant les calculs, il vient, pour définir θ_1, les équations

$$\frac{\partial \log(\rho^2\theta_1)}{\partial u} = -2\beta_1,$$

$$\frac{\partial \log(\rho^2\theta)}{\partial v} = -2\beta.$$

On voit que le problème posé n'admet de solution que pour les congruences de Ribaucour; pour de telles congruences, le problème a une infinité de solutions; toutes les surfaces correspondantes ont leurs plans tangents parallèles à celui de la surface moyenne.

Nous n'insisterons pas, pour le moment, sur les applications du numéro précédent qui conduisent aux congruences de Ribaucour.

Le réseau (u, v) étant la représentation sphérique des asymptotiques d'une surface, on peut poser

$$\beta = \frac{\partial \log\sqrt{k}}{\partial v}, \qquad \beta_1 = \frac{\partial \log\sqrt{k}}{\partial u},$$

en désignant par $-k^2$ la courbure totale d'une pareille surface.

L'équation en ρ devient

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial\log\sqrt{k}}{\partial v}\frac{\partial\rho}{\partial u} + \frac{\partial\log\sqrt{k}}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial v} + \rho\left(f + 2\frac{\partial^2\log\sqrt{k}}{\partial u\,\partial v}\right) = 0.$$

Si l'on pose

$$\rho = \frac{\lambda}{\sqrt{k}},$$

il vient, pour l'équation en λ,

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{H}\lambda,$$

en désignant par H la valeur commune des invariants de l'équation en ρ, savoir :

$$\mathrm{H} = \sqrt{k}\,\frac{\partial^2\sqrt{\frac{1}{k}}}{\partial u\,\partial v} - f.$$

On peut remarquer que la fonction $k\rho$ est définie par l'équation adjointe à l'équation en ρ; nous connaissons donc, dans le cas actuel, trois solutions particulières, $\frac{c}{k}, \frac{c'}{k}, \frac{c''}{k}$, de l'équation en ρ, et, plus généralement, toutes les solutions données par l'expression

$$\frac{lc + mc' + nc''}{k},$$

où l, m, n sont des constantes.

Il résulte immédiatement des formules (9) que les dérivées de la fonction $l\mathrm{X}_m + m\mathrm{Y}_m + n\mathrm{Z}_m$ sont alors nulles, c'est-à-dire que la surface moyenne est un plan.

Réciproquement, si la surface moyenne d'une congruence est un plan, c'est une congruence de Ribaucour pour laquelle la valeur de ρ est donnée par l'expression précédente.

Ainsi :

Étant donné un réseau sphérique qui est l'image des asymptotiques d'une surface, il existe une infinité de congruences dont la surface moyenne est un plan, et qui admettent le réseau considéré pour représentation sphérique de leurs développables.

13. *Détermination des sphères dont les cordes de contact avec leur enveloppe forment une congruence donnée.* — Remarquons tout d'abord que, si l'on considère la surface lieu des centres des sphères, le problème considéré équivaut, d'après un théorème de M. Ribaucour, au suivant :

Déterminer les surfaces qui admettent une représentation sphérique donnée d'un réseau conjugué, d'ailleurs inconnu, tracé sur elles.

Soient $z_m = \rho\theta_1$ et $z_m + \rho\theta_2$ les cotes des deux points de contact de la sphère avec son enveloppe, points situés sur la droite (x, y); les équations du problème sont les suivantes :

$$\frac{\dfrac{\partial(\rho\theta_1)}{\partial u} - \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + 2\beta_1\rho\right)}{\theta_1 + 1} = -\frac{\dfrac{\partial(\rho\theta_2)}{\partial u} - \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + 2\beta_1\rho\right)}{\theta_2 + 1},$$

$$\frac{\dfrac{\partial(\rho\theta_1)}{\partial v} + \dfrac{\partial\rho}{\partial v} + 2\beta\rho}{\theta_1 - 1} = -\frac{\dfrac{\partial(\rho\theta_2)}{\partial v} + \dfrac{\partial\rho}{\partial v} + 2\beta\rho}{\theta_2 - 1}.$$

Substituons à θ_1, θ_2 deux nouvelles inconnues R, θ, définies par les relations

$$\rho(\theta_2 - \theta_1) = 2i\mathrm{R},$$
$$\theta_2 + \theta_1 = 2\theta.$$

Ces nouvelles inconnues seront définies par le système

$$(14)\quad \begin{cases} \mathrm{R}\dfrac{\partial\mathrm{R}}{\partial u} = -\rho(\theta+1)\left[\dfrac{\partial(\rho\theta)}{\partial u} - \left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u} + 2\beta_1\rho\right)\right], \\ \mathrm{R}\dfrac{\partial\mathrm{R}}{\partial v} = -\rho(\theta-1)\left[\dfrac{\partial(\rho\theta)}{\partial v} + \dfrac{\partial\rho}{\partial v} + 2\beta\rho\right]. \end{cases}$$

Égalons les deux valeurs qu'on obtient en différentiant la première de ces équations par rapport à v et la seconde par rapport à u; il vient, en tenant compte de l'équation à laquelle satisfait ρ,

$$(15)\qquad \frac{\partial^2(\rho\theta)}{\partial u\,\partial v} - \beta\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial u} - \beta_1\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial v} + f\rho\theta + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\beta\rho^2)}{\partial u} - \frac{\partial(\beta_1\rho^2)}{\partial v}\right] = 0.$$

Cette équation détermine θ; on a ensuite R^2 par des quadratures. On remarquera que l'équation (15), considérée comme déterminant $\rho\theta$, se ramène à l'équation (10), adjointe à l'équation en ρ, dès qu'on en connaît une solution particulière; or une solution particulière du problème est donnée par un point fixe de l'espace. On retrouve donc ce théorème de M. Darboux :

La distance d'un point fixe de l'espace au plan tangent d'une surface qui admet le réseau (u, v) pour représentation sphérique d'un réseau conjugué tracé sur elle, est solution de l'équation (10).

Un cas particulier remarquable est celui où l'on a

$$\frac{\partial(\beta\rho^2)}{\partial u} - \frac{\partial(\beta_1\rho^2)}{\partial v} = 0.$$

Dans ce cas, l'équation (15) est identique à l'équation (10), dans laquelle on aurait remplacé φ par $\rho\theta$.

Il est facile de donner une définition géométrique des congruences qui satisfont à la condition précédente :

Ce sont les congruences dont les développables correspondent à un réseau conjugué sur l'enveloppée moyenne.

En effet, les congruences considérées sont caractérisées par cette propriété que l'équation (15) admet la solution $\theta = 0$; or cette solution correspond aux sphères dont les centres sont sur l'*enveloppée moyenne,* c'est-à-dire sur la surface enveloppe du plan moyen, mené perpendiculairement à chaque droite de la congruence au point milieu du segment déterminé par les points focaux.

On peut donner une autre définition des congruences précédentes; reportons-nous au n° 7, c'est-à-dire supposons que la congruence soit définie au moyen d'un trièdre mobile (T) dont le sommet soit fixe; égalons les deux valeurs de $\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v}$ obtenues en différentiant les équations de la troisième ligne du système (8), il vient, en tenant compte des autres équations,

$$\frac{\partial^2 z_m}{\partial u\,\partial v} - \beta\frac{\partial z_m}{\partial u} - \beta_1\frac{\partial z_m}{\partial v} + f z_m - \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\beta\rho^2)}{\partial u} - \frac{\partial(\beta_1\rho^2)}{\partial v}\right] = 0.$$

Donc :

Les congruences précédentes sont caractérisées par cette propriété que la distance d'un point fixe de l'espace au plan moyen satisfait à l'équation (10).

Cette proposition résulte d'ailleurs du théorème de M. Darboux et de la remarque faite précédemment.

14. *Congruences de Ribaucour dont les développables correspondent à un réseau conjugué sur l'enveloppée moyenne* (¹). — Introduisons la fonction k définie par les équations

$$\beta = \frac{\partial \log\sqrt{k}}{\partial v}, \qquad \beta_1 = \frac{\partial \log\sqrt{k}}{\partial u}.$$

La condition du problème est

$$\frac{\partial \log\sqrt{k}}{\partial v}\frac{\partial \rho}{\partial u} - \frac{\partial \log\sqrt{k}}{\partial v}\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0.$$

Posons, comme au n° 12,

$$\rho = \frac{\lambda}{\sqrt{k}}, \qquad H = \sqrt{k}\,\frac{\partial^2 \sqrt{\frac{1}{k}}}{\partial u\,\partial v} - f.$$

Les congruences cherchées seront telles que λ satisfera aux équations

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\,\partial v} = H\lambda,$$

$$\frac{\partial \log\sqrt{k}}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial \log\sqrt{k}}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0.$$

M. Guichard a signalé des congruences particulières qui satisfont à la question.

1° Supposons que la fonction H, qui est la valeur commune des invariants de l'équation en ρ, soit nulle. Parmi les congruences qui admettent la même représentation sphérique de leurs développables, il y en a alors une telle que les deux nappes (F_1) et (F_2) se réduisent à des courbes; on l'obtient (n° 9) en prenant ρ solution de

$$\frac{\partial \log\rho}{\partial u} + \beta_1 = 0, \qquad \frac{\partial \log\rho}{\partial v} + \beta = 0,$$

(¹) C. GUICHARD, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 22 juin 1891.

c'est-à-dire solution de

$$\frac{\partial \log \rho\sqrt{k}}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial \log \rho\sqrt{k}}{\partial v} = 0,$$

ou encore en prenant

$$\lambda = \text{const.}$$

Cette congruence satisfait à la question; donc :

Pour toute congruence formée de droites rencontrant deux courbes, les développables correspondent à un réseau conjugué sur l'enveloppée moyenne.

Considérons en particulier la congruence formée des normales à la cyclide de Dupin; on a alors le théorème suivant, dû à M. Ribaucour [1] :

La cyclide de Dupin et sa développée moyenne ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure.

2° Supposons que $k =$ constante, c'est-à-dire que le système (u, v) soit la représentation sphérique des asymptotiques d'une surface à courbure totale constante; l'équation de condition étant satisfaite identiquement, on voit que toutes les congruences qui admettent cette représentation sphérique de leurs développables satisfont à la question. Ces congruences sont définies par les conditions

$$\beta = 0, \qquad \beta_1 = 0.$$

Nous les retrouverons plus loin; leurs développables interceptent sur les deux nappes de la surface focale les lignes de courbure; les courbes conjuguées qui leur correspondent sur l'enveloppée moyenne sont des géodésiques.

3° Cherchons s'il y a des congruences formées de normales à une surface, c'est-à-dire considérons le cas où $f = 0$.

Les deux équations en λ ont alors la solution commune

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

---

[1] A. RIBAUCOUR, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes*, n° 63.

La valeur de ρ correspondante est

$$\rho = \frac{1}{k}.$$

Elle satisfait aux deux équations

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial u} + 2\beta_1 = 0, \qquad \frac{\partial \log \rho}{\partial v} + 2\beta = 0.$$

On a donc pour une congruence correspondante

$$\frac{\partial z_m}{\partial u} + py - qx = 0, \qquad \frac{\partial z_m}{\partial v} + p_1 y - q_1 x = 0.$$

Par suite, la surface moyenne et l'enveloppée moyenne sont confondues; la surface commune est minima et la congruence est formée des normales à cette surface.

15. *Congruences cycliques.* — Nous appellerons, avec M. Bianchi [1], *congruence cyclique* toute congruence formée par les axes des cercles constituant un système cyclique.

Supposons toujours la congruence rapportée à ses développables et définie au moyen d'un trièdre mobile (T) dont l'origine décrit une surface normale à l'axe des z.

Considérons des cercles dont les axes sont les droites D de la congruence; en d'autres termes, considérons un cercle défini par rapport aux axes du trièdre (T) par les équations

$$\begin{aligned} X &= x + R\cos t, \\ Y &= y + R\sin t, \\ Z &= z_m + \rho\theta, \end{aligned}$$

où R et θ sont deux fonctions de u, v et où l'on suppose que x, y, z_m satisfont aux équations (6) du n° 6.

Cherchons à déterminer une fonction t de u, v telle que le point du cercle correspondant décrive une surface trajectoire orthogonale des différentes positions du cercle; cette fonction, si elle existe, sera définie par

---

(1) L. Bianchi, *Annali di Matematica*, 2e série, t. XVIII et XIX.

l'équation

$$\delta X \sin t - \delta Y \cos t = 0.$$

Or on a, en vertu des formules (B) et des équations (6),

$$\delta X = dR \cos t - R \sin t\, dt + (\quad q\rho + q\rho\theta - rR\sin t)\, du + (-q_1\rho + q_1\rho\theta - r_1 R \sin t)\, dv,$$
$$\delta Y = dR \sin t + R\cos t\, dt + (-p\rho - p\rho\theta + rR\cos t)\, du + (\quad p_1\rho - p_1\rho\theta + r_1 R\cos t)\, dv.$$

L'équation qui détermine t est, par suite,

$$R\, dt + M\, du + M_1\, dv = 0,$$

en posant

$$M = -q\,\rho(\theta+1)\sin t - p\,\rho(\theta+1)\cos t + r\,R,$$
$$M_1 = -q_1\rho(\theta-1)\sin t - p_1\rho(\theta-1)\cos t + r_1 R.$$

Écrivons la condition d'intégrabilité de cette équation, savoir

$$R\left(\frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial M_1}{\partial u}\right) + M\left(\frac{\partial M_1}{\partial t} - \frac{\partial R}{\partial v}\right) + M_1\left(\frac{\partial R}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial t}\right) = 0.$$

En appliquant les formules (D) et posant

$$a = R\left[-q\,\frac{\partial\rho(\theta+1)}{\partial v} + q_1\,\frac{\partial\rho(\theta-1)}{\partial u} - 2(q\beta + q_1\beta_1)\rho\right] + q\rho(\theta+1)\,\frac{\partial R}{\partial v} - q_1\rho(\theta-1)\,\frac{\partial R}{\partial u},$$
$$b = R\left[-p\,\frac{\partial\rho(\theta+1)}{\partial v} + p_1\,\frac{\partial\rho(\theta-1)}{\partial u} - 2(p\beta + p_1\beta_1)\rho\right] + p\rho(\theta+1)\,\frac{\partial R}{\partial v} - p_1\rho(\theta-1)\,\frac{\partial R}{\partial u}.$$
$$c = (pq_1 - qp_1)(R^2 + \rho^2\theta^2 - \rho^2),$$

on trouve l'équation

$$a \sin t + b\cos t + c = 0.$$

Cette équation, considérée comme devant déterminer t, ne peut admettre plus de deux solutions sans être identiquement vérifiée; d'où résulte le théorème bien connu de M. Ribaucour :

Pour qu'il y ait une infinité de surfaces normales à tous les cercles, il faut que l'on ait les trois relations

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad c = 0.$$

Résolvons-les par rapport aux dérivées de R; nous obtenons le système

$$\frac{\partial \log R}{\partial u} = \frac{\dfrac{\partial \rho(\theta - 1)}{\partial u} - 2\beta_1 \rho}{\rho(\theta - 1)},$$

$$\frac{\partial \log R}{\partial v} = \frac{\dfrac{\partial \rho(\theta + 1)}{\partial v} + 2\beta \rho}{\rho(\theta + 1)},$$

$$R^2 = \rho^2(1 - \theta^2),$$

que l'on peut remplacer par le système équivalent

$$R\frac{\partial R}{\partial u} = -\rho(\theta + 1)\left[\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial u} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial u} + 2\beta_1\rho\right)\right],$$

$$R\frac{\partial R}{\partial u} = -\rho(\theta - 1)\left[\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial v} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial v} + 2\beta\rho\right)\right],$$

$$R^2 = \rho^2(1 - \theta^2).$$

La troisième de ces équations exprime que les foyers du cercle sont conjugués harmoniques par rapport aux points focaux F_1 et F_2, ou encore que les sphères dont les centres sont en F_1 et F_2 et qui passent par le cercle sont orthogonales (1).

Si l'on remarque que les deux premières équations sont identiques aux équations (14) du n° 13, on voit que l'on peut énoncer le théorème suivant, dû à M. Ribaucour (2) :

Une congruence cyclique est formée par les cordes de contact, avec leur enveloppe, de sphères telles que les points focaux de chaque corde de contact soient conjugués harmoniques par rapport aux points de contact.

Remplaçons R^2 par sa valeur tirée de la troisième des équations dans les deux premières; on obtient, pour déterminer θ et R, le système

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial u} = 2\beta_1(\theta + 1), \\[2ex] \dfrac{\partial \theta}{\partial v} = 2\beta\ (\theta - 1), \\[2ex] R^2 = \rho^2(1 - \theta^2). \end{cases}$$

(1) G. Darboux, *Leçons*, t. II, p. 329.

(2) A. Ribaucour, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes*, n° 129.

Égalons les deux valeurs de $\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}$ qu'on obtient en différentiant; il vient

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial u}-\frac{\partial\beta_1}{\partial v}\right)\theta=\frac{\partial\beta}{\partial u}+\frac{\partial\beta_1}{\partial v}-4\beta\beta_1.$$

1° Supposons que l'expression $\frac{\partial\beta}{\partial u}-\frac{\partial\beta_1}{\partial v}$ ne soit pas nulle; de cette dernière équation on tire θ; en portant dans les deux premières équations (16), on obtient deux conditions entre les éléments du réseau (u, v), image sphérique des développables d'une congruence cyclique.

2° Supposons que $\frac{\partial\beta}{\partial u}-\frac{\partial\beta_1}{\partial v}=0$, c'est-à-dire que la congruence donnée soit de Ribaucour; pour qu'elle soit cyclique, il faudra que l'on ait

$$\frac{\partial\beta}{\partial u}=\frac{\partial\beta_1}{\partial v}=2\beta\beta_1.$$

Si ces conditions sont remplies, la congruence est, d'une infinité de manières, formée par les axes des cercles d'un système cyclique.

Le système (16) qui détermine θ admet, en effet, dans ce cas une solution dépendant d'une constante arbitraire. Si l'on remarque que, dans le cas actuel, $\frac{1}{k}$ est de la forme

$$\frac{1}{k}=\mathrm{U}+\mathrm{V},$$

en désignant par U et V des fonctions qui ne dépendent respectivement que de u et que de v, on a, pour θ, l'expression suivante

$$\theta=\frac{\mathrm{V}-\mathrm{U}+a}{\mathrm{V}+\mathrm{U}},$$

où a désigne une constante arbitraire.

Considérons les plans des cercles des systèmes cycliques dérivés de la même congruence; le plan d'un de ces cercles touche son enveloppe en un point dont les coordonnées X, Y, $\mathrm{Z}=z_m+\rho\theta$ s'obtiennent en adjoignant les équations

$$\frac{\partial\mathrm{Z}}{\partial u}+p\mathrm{Y}-q\mathrm{X}=0,$$

$$\frac{\partial\mathrm{Z}}{\partial v}+p_1\mathrm{Y}-q_1\mathrm{X}=0.$$

Le lieu de ce point, lorsque a varie, est une droite. D'ailleurs, aux développables de la congruence correspond, sur chacune des surfaces enveloppes des plans des cercles, un réseau conjugué, d'après un théorème de M. Ribaucour [1]. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si une congruence de Ribaucour (D) *est formée par les axes des cercles d'un système cyclique, elle l'est d'une infinité de manières. Les points de contact des plans des cercles avec leur enveloppe sont en ligne droite; les développables de la congruence formée par cette droite correspondent aux développables de la congruence* (D), *et découpent les surfaces enveloppes des plans des cercles suivant des réseaux conjugués dont la représentation sphérique est la même que celle des développables de* (D).

Il est aisé de former une équation aux dérivées partielles de l'intégration de laquelle dépend la recherche des courbes tracées sur une sphère de rayon 1 et qui constituent la représentation sphérique des développables d'une congruence cyclique et de Ribaucour.

Supposons d'abord qu'aucune des fonctions U, V qui entrent dans l'expression de k ne se réduise à une constante; en particularisant u et v, on peut faire en sorte que

$$k = \frac{1}{u+v},$$

on aura

$$\beta = \beta_1 = -\frac{1}{2(u+v)},$$

puis

$$f = -\frac{\partial[g(u+v)]}{\partial u} = -\frac{\partial[e(u+v)]}{\partial v}.$$

On peut donc exprimer e, f, g au moyen d'une fonction auxiliaire z par les formules

$$e = \frac{1}{u+v}\frac{\partial z}{\partial u}, \qquad g = \frac{1}{u+v}\frac{\partial z}{\partial v}, \qquad f = -\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}.$$

Substituant dans l'équation qui exprime que e, f, g sont les coefficients d'un élément linéaire à courbure totale égale à 1, on a l'équation aux dérivées partielles qui détermine z.

---

[1] A. RIBAUCOUR, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes*, n° 38.

Supposons maintenant qu'une seule des fonctions U, V soit constante, par exemple U; le réseau sphérique considéré sera caractérisé par les conditions

$$\frac{\partial \beta}{\partial u} = 0, \qquad \beta_1 = 0.$$

On pourra toujours, en particularisant la variable v, faire en sorte que

$$k = \frac{1}{v},$$

et l'on aura

$$\beta = -\frac{1}{2v}, \qquad \beta_1 = 0;$$

d'où résulte

$$f = -v\frac{\partial g}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \log(ev)}{\partial v} = 0.$$

En écartant le cas où e est nul et particularisant la variable u, il vient

$$f = -v\frac{\partial g}{\partial u}, \qquad e = \frac{u}{v}.$$

Substituant dans l'équation qui lie e, f, g, on a une équation aux dérivées partielles qui détermine g.

Enfin, dans le cas où U et V se réduisent à des constantes, la représentation sphérique est celle des asymptotiques d'une surface à courbure totale constante.

16. *Congruences cycliques formées de normales à une surface.* — Le problème de déterminer les surfaces dont les normales forment une congruence cyclique est identique à une question dont O. Bonnet a donné la solution, ainsi que nous le montrerons au n° 23.

Dans le cas actuel, on a

$$f = 0, \qquad 2\beta = \frac{\partial \log e}{\partial v}, \qquad 2\beta_1 = \frac{\partial \log g}{\partial u}.$$

Il faut chercher si l'on peut trouver une fonction θ satisfaisant au système

$$\frac{\partial \log \frac{1+\theta}{2}}{\partial u} = \frac{\partial \log g}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \log \frac{1-\theta}{2}}{dv} = \frac{\partial \log e}{\partial v},$$

e, g étant deux fonctions liées par la relation qui exprime que l'élément linéaire donné par la formule

$$d\sigma^2 = e\,du^2 + g\,dv^2$$

convient à une surface dont la courbure totale est égale à 1.

Les deux fonctions e, g devront être de la forme

$$g = \frac{1+\theta}{2}\frac{1}{V},$$

$$e = \frac{1-\theta}{2}\frac{1}{U},$$

U et V étant respectivement des fonctions de u et de v.

On peut encore dire que la condition nécessaire et suffisante est la suivante : les fonctions e, g devront être liées par une relation de la forme

$$eU + gV = 1.$$

Nous pouvons supposer les fonctions U et V différentes de zéro; car, si U était nulle, par exemple, on aurait $\theta = 1$, et les cercles du système cyclique seraient de rayon nul. En particularisant u et v, on peut faire en sorte que $U = 1$, $V = 1$, et la relation devient

$$e + g = 1,$$

ce qui signifie que le réseau (u, v) doit être la représentation sphérique des lignes de courbure d'une surface à courbure totale constante.

On peut donc énoncer le théorème suivant [1] :

Les surfaces dont les normales forment une congruence cyclique sont celles qui ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure qu'une surface à courbure totale constante.

Si la surface à courbure totale constante est quelconque, on a une congruence cyclique générale.

Cherchons pour quelles surfaces à courbure totale constante on obtient une congruence cyclique et de Ribaucour.

---

[1] L. Bianchi, *Sui sistemi tripli ortogonali che contengono una serie di superficie con un sistema di linee di curvatura piane* (*Annali di Matematica*, 2e série, t. XIX, n° 7).

Posons

$$e = \sin^2\omega, \qquad g = \cos^2\omega;$$

ω sera défini par l'équation

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = \sin\omega\cos\omega.$$

Il reste à voir s'il existe des solutions de cette équation telles que l'on ait

$$\frac{\partial\beta}{\partial u} = \frac{\partial\beta_1}{\partial v} = 2\beta\beta_1.$$

Or

$$\beta = \frac{\cos\omega}{\sin\omega}\frac{\partial\omega}{\partial v}, \qquad \beta_1 = -\frac{\sin\omega}{\cos\omega}\frac{\partial\omega}{\partial u}.$$

Il en résulte immédiatement que les seules solutions qui conviennent sont celles pour lesquelles

$$\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial v} = 0.$$

Il suffit évidemment de se borner à

$$\frac{\partial\omega}{\partial v} = 0.$$

Les surfaces cherchées sont donc celles qui correspondent à une solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2\omega}{du^2} = \sin\omega\cos\omega.$$

Or, si l'on se reporte aux *Leçons* de M. Darboux (t. III, p. 378), on constate facilement que le centre de courbure principal, qui est l'extrémité du rayon de courbure principal R′, décrit une droite lorsque u et v varient; en d'autres termes, les normales de la surface rencontrent une droite; donc :

Les surfaces dont les normales forment une congruence cyclique et de Ribaucour sont celles qui ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure qu'une surface à courbure totale constante de *révolution; ce sont donc des surfaces moulures* (¹) *obtenues par le mouvement d'une courbe plane dont le plan roule sur un cylindre.*

On peut arriver encore à la même conclusion de la façon suivante : ω étant une simple fonction de u, le réseau sphérique (u, v) est isotherme et les courbes (v) sont des géodésiques. Or on sait que, si une famille de courbes isothermes est composée de cercles géodésiques, il en est de même de la famille isotherme formée par les trajectoires orthogonales : les courbes sphériques (v) sont donc des grands cercles, et les courbes (u) des petits cercles les coupant à angle droit; donc, enfin, les courbes sphériques (v) sont des grands cercles passant par les extrémités d'un diamètre de la sphère; les courbes (u) sont des petits cercles dont les plans sont perpendiculaires à ce diamètre.

17. *Congruences cycliques et de Ribaucour particulières.* — Les congruences dont la représentation sphérique des développables vérifie les conditions

$$\beta = 0, \qquad \beta_1 = 0$$

sont des congruences cycliques et de Ribaucour particulières; elles ont fait l'objet d'un Mémoire de M. Guichard (²).

Considérons une surface enveloppe des plans des cercles d'un des systèmes cycliques dérivés; le système conjugué qui correspond sur cette surface aux développables de la congruence est tel que sa représentation sphérique vérifie les deux conditions précédentes; nous verrons que ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un réseau conjugué soit formé de géodésiques; ainsi les surfaces enveloppes des plans des cercles des systèmes cycliques dérivés de la congruence sont les surfaces considérées par M. Voss (³), et auxquelles M. Bianchi donne le nom de *surfaces de Voss*. Dans le cas actuel, les équations (16), qui définissent θ, admettent comme solutions particulières $\theta = 1$ et $\theta = -1$; les cercles qui correspondent à ces solutions sont de rayon nul; leurs plans passent respectivement

(¹) Darboux, *Leçons*, t. I, p. 104.

(²) C. Guichard, *Recherches sur les surfaces à courbure totale constante et sur certaines surfaces qui s'y rattachent* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. VII).

(³) A. Voss, *Ueber diejenigen Flächen, auf denen zwei Schaaren geodätischer Linien ein conjugirtes System bilden* (*Sitzungsberichte der K. Akademie zu München*, 3 mars 1888).

par F_2 et F_1 et enveloppent des surfaces qui constituent respectivement une nappe des développées de (F_2) et de (F_1).

Si l'on remarque enfin, avec M. Guichard, que les conditions $\beta = 0$, $\beta_1 = 0$ expriment que les développables de la congruence rencontrent (F_1) et (F_2) suivant leurs lignes de courbure, on peut énoncer le théorème qui suit :

Si les développables d'une congruence (D) *rencontrent les deux nappes de la surface focale suivant leurs lignes de courbure, leur représentation sphérique est la même que celle des asymptotiques d'une surface à courbure totale constante : une telle congruence est cyclique et de Ribaucour; elle est, par suite, cyclique d'une infinité de manières; les plans des cercles enveloppent des surfaces de Voss, les points de contact étant sur une même droite; les développables de la congruence formée par cette droite correspondent aux développables de la congruence* (D), *et découpent les surfaces enveloppes des plans des cercles suivant des réseaux conjugués dont la représentation sphérique est la même que celle des développables de* (D); *l'une des nappes de la développée de* (F_1) *ou de* (F_2) *est une surface de Voss.*

On peut remarquer aussi que les équations (16) admettent la solution $\theta = 0$; donc :

La surface enveloppée moyenne de la congruence est une surface de Voss.

Les conditions

$$\beta = 0, \qquad \beta_1 = 0$$

reviennent à

$$\frac{\partial e}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial u} = 0.$$

Écartons le cas des congruences isotropes dans lequel e, g sont nuls, ou, plus généralement, le cas où l'un des plans focaux serait isotrope ; on peut, en particularisant u et v, supposer

$$e = 1, \qquad g = 1.$$

Si l'on pose

$$f = -\cos 2\omega,$$

on a, pour déterminer ω, l'équation

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v} = \sin\omega \cos\omega.$$

ω étant connu, on aura ensuite ρ par l'équation

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} = \rho \cos 2\omega.$$

Ainsi :

Le problème de la détermination des congruences précédentes équivaut à celui de la déformation infinitésimale des surfaces à courbure totale constante.

C'est là, d'ailleurs, un point qui résultera immédiatement du numéro suivant.

18. *La déformation infinitésimale et la correspondance par orthogonalité des éléments.* — Le problème de la déformation infinitésimale d'une surface (M) est, comme l'on sait, identique à celui de la détermination des surfaces (N) qui lui correspondent par orthogonalité des éléments; il nous suffira de considérer ce dernier problème.

Reportons-nous au n° 1 et cherchons les équations auxquelles doivent satisfaire x, y, z pour que deux éléments correspondants des surfaces (M), (N) soient toujours rectangulaires; il suffit d'exprimer que l'on a, quels que soient du et dv,

$$\begin{aligned}(\xi\, du + \xi_1\, dv)\left[\left(\xi + \frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry\right)du + \left(\xi_1 + \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y\right)dv\right]&\\ + (\eta\, du + \eta_1\, dv)\left[\left(\eta + \frac{\partial y}{\partial u} + rx - pz\right)du + \left(\eta_1 + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z\right)dv\right] &= 0,\end{aligned}$$

d'où les conditions

$$\begin{aligned}\xi\left(\xi + \frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry\right) + \eta\left(\eta + \frac{\partial y}{\partial u} + rx - pz\right) &= 0,\\ \xi_1\left(\xi_1 + \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y\right) + \eta_1\left(\eta_1 + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z\right) &= 0,\\ \xi\left(\xi_1 + \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y\right) + \xi_1\left(\xi + \frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry\right)&\\ + \eta\left(\eta_1 + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z\right) + \eta_1\left(\eta + \frac{\partial y}{\partial u} + rx - pz\right) &= 0.\end{aligned}$$

Or $\xi\eta_1 - \eta\xi_1$ n'étant pas nul, on peut remplacer ces trois équations par le système suivant, où z_1 est une inconnue auxiliaire,

$$\xi + \frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry = \eta z_1, \qquad \xi_1 + \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y = \eta_1 z_1,$$

$$\eta + \frac{\partial y}{\partial u} + rx - pz = -\xi z_1, \qquad \eta_1 + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z = -\xi_1 z_1.$$

Par conséquent, de la même façon qu'au n° 6, les inconnues x, y, z sont déterminées par le système

$$\xi' + \frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry = 0, \qquad \xi'_1 + \frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y = 0,$$

$$\eta' + \frac{\partial y}{\partial u} + rx - pz = 0, \qquad \eta'_1 + \frac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p_1 z = 0,$$

$$\zeta' + \frac{\partial z}{\partial u} + py - qx = 0, \qquad \zeta'_1 + \frac{\partial z}{\partial v} + p_1 y - q_1 x = 0,$$

où l'on a posé

$$\xi' = \xi - \eta z_1, \qquad \xi'_1 = \xi_1 - \eta_1 z_1,$$

$$\eta' = \eta + \xi z_1, \qquad \eta'_1 = \eta_1 + \xi_1 z_1,$$

$$\zeta' = \frac{(q\xi_1 - p\eta_1)\frac{\partial z_1}{\partial u} - (q\xi - p\eta)\frac{\partial z_1}{\partial v}}{pq_1 - qp_1}, \qquad \zeta'_1 = \frac{(q_1\xi_1 - p_1\eta_1)\frac{\partial z_1}{\partial u} - (q_1\xi - p_1\eta)\frac{\partial z_1}{\partial v}}{pq_1 - qp_1}.$$

L'inconnue auxiliaire z_1 est définie par l'équation

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial v} - \frac{\partial \zeta'_1}{\partial u} = p\eta'_1 - p_1\eta' - q\xi'_1 + q_1\xi'.$$

Or, si l'on suppose que le réseau (u, v) soit celui des asymptotiques de (M), on voit, en se reportant aux n^{os} 4 et 5, que les équations que nous venons d'obtenir se déduisent des équations (6) et (7) du n° 6 en posant

$$z_m = z, \qquad \rho = \frac{z_1}{k}.$$

Nous trouvons donc ce résultat, dû à M. Ribaucour [1] :

La recherche des surfaces, correspondant par orthogonalité des élé-

[1] A. Ribaucour, *Étude des élassoïdes*, n° 188.

ments à une surface (M), *équivaut à la détermination des congruences qui admettent pour représentation sphérique de leurs développables celle des asymptotiques de* (M).

On peut énoncer d'une façon plus précise cette proposition sous la forme suivante, donnée également par M. Ribaucour [1] :

Soient (M) *et* (N) *deux surfaces qui se correspondent par orthogonalité des éléments et considérons la congruence formée par les droites* D *menées par les points de* (N) *parallèlement aux normales de* (M). *Cette congruence est une congruence de Ribaucour dont* (N) *est la surface moyenne; les plans focaux de la droite* D *sont perpendiculaires aux asymptotes de l'indicatrice de* (N) *au point* N ; *les images sphériques des développables de la congruence* (D) *sont celles des asymptotiques de* (N).

Le problème de la détermination des surfaces, correspondant à (M) par orthogonalité des éléments, se ramène, comme on le voit, à l'intégration de l'équation en z_1; le trièdre (T) étant connu, dès que z_1 sera déterminé, on n'aura plus qu'à effectuer des quadratures.

Or on peut donner de z_1 une autre interprétation que celle qui résulte de la formule précédente

$$\rho = \frac{z_1}{k}.$$

En effet, considérons le plan qui a pour équation, par rapport au trièdre (T),

$$Z = z_1.$$

Ce plan a une enveloppe qu'il touche en un point P (x_1, y_1, z_1), défini par les équations

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} + p\, y_1 - q\, x_1 = 0,$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial v} + p_1 y_1 - q_1 x_1 = 0.$$

On constate immédiatement que la droite MP qui joint ce point P au point M est parallèle à la normale à (N) en N; cette droite forme donc une congruence de Ribaucour dont (M) est la surface moyenne.

---

(1) A. Ribaucour, *Étude des élassoïdes*, n° 188.

Remarquons que, par suite de la définition du point P, la congruence des droites MP intercepte, par ses développables, un réseau conjugué sur (M); l'équation en z_1 exprime simplement que la surface moyenne de cette congruence est (M).

Donc :

La recherche des surfaces, correspondant par orthogonalité des éléments à une surface (M), *équivaut à la détermination des congruences de Ribaucour qui admettent cette surface pour surface moyenne.*

C'est d'ailleurs ce qui résulte aussi du théorème de M. Ribaucour qui montre que la représentation sphérique des asymptotiques des surfaces cherchées (N) est identique à celle des développables des congruences de Ribaucour qui admettent (N) pour surface moyenne.

Nous reprendrons au n° 28 le problème sous la dernière forme et nous montrerons qu'il est équivalent à celui, traité par M. Voss, de la détermination des réseaux conjugués à invariants égaux tracés sur (M).

IV. — Les systèmes conjugués et la déformation des surfaces.

19. *Élément linéaire correspondant à un réseau conjugué.* — L'élément linéaire d'une surface non développable étant donné sous la forme

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

cherchons si les lignes coordonnées peuvent former un réseau conjugué sur l'une des surfaces résultant de la déformation de la proposée.

Pour une telle surface, on devra avoir

$$p\eta_1 - q\xi_1 = p_1\eta - q_1\xi = 0,$$

ce qui nous permet de poser

$$p = \lambda\xi_1, \qquad q = \lambda\eta_1, \qquad p_1 = \mu\xi, \qquad q_1 = \mu\eta.$$

Portons ces valeurs dans les relations de la troisième ligne du système (A), on trouve

$$\lambda\mu = k^2,$$

en désignant par $-k^2$ la courbure totale

$$-k^2 = \frac{1}{RR'} = \frac{\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u}}{\xi\eta_1 - \eta\xi_1}.$$

Les deux premières équations de droite de (A) donneront r, r_1; il reste à exprimer que les deux premières équations de gauche sont satisfaites, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{\partial(\lambda\xi_1)}{\partial v} - \frac{\partial(\mu\xi)}{\partial u} - \lambda\eta_1 r_1 + \mu\eta r = 0,$$

$$\frac{\partial(\lambda\eta_1)}{\partial v} - \frac{\partial(\mu\eta)}{\partial v} + \lambda\xi_1 r_1 - \mu\xi r = 0,$$

ou, en tenant compte des formules (C),

$$\xi_1\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v} + C_1\lambda - A_1\mu\right) - \xi\left(\frac{\partial\mu}{\partial u} + A\mu - C\lambda\right) = 0.$$

$$\eta_1\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v} + C_1\lambda - A_1\mu\right) - \eta\left(\frac{\partial\mu}{\partial u} + A\mu - C\lambda\right) = 0.$$

Les inconnues λ, μ sont donc définies par le système

$$\lambda\mu = k^2,$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v} + C_1\lambda - A_1\mu = 0,$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial u} + A\mu - C\lambda = 0,$$

dans lequel tous les coefficients s'expriment à l'aide de E, F, G.

Prenons comme inconnue auxiliaire $z = \lambda^2$; dès que z sera connu, on en déduira λ, μ par les formules

$$\lambda^2 = z, \qquad \mu = \frac{k^2}{\lambda};$$

par conséquent, à chaque valeur de z, correspondront deux surfaces symétriques l'une de l'autre.

Les équations qui déterminent z sont

$$(17) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= -\frac{2C}{k^2}z^2 + 2\left(A + \frac{\partial \log k^2}{\partial u}\right)z. \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= -2C_1 z + 2A_1 k^2. \end{aligned}\right.$$

Égalons les deux valeurs de $\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v}$, obtenues en différentiant ces équations; il vient

$$
(18) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(2\frac{CC_1}{k^2} - \frac{\partial \frac{C}{k^2}}{\partial v}\right) z^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial C_1}{\partial u} - 4A_1 C + \frac{\partial^2 \log k^2}{\partial u\, \partial v}\right) z \\ &\qquad + 2A_1 k^2 \left(A + \frac{\partial \log k^2}{\partial u}\right) - \frac{\partial (A_1 k^2)}{\partial u} = 0. \end{aligned} \right.
$$

Cette équation donne les valeurs de z qui peuvent convenir à la question; considérant l'une des racines de cette équation, pour qu'elle convienne, il faudra qu'elle satisfasse aux équations (17), ce qui n'arrivera pas, en général.

Si nous convenons de ne pas regarder comme distinctes deux surfaces symétriques l'une de l'autre, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Il doit y avoir, entre les coefficients E, F, G *de l'élément linéaire d'une surface* (Σ), *deux relations pour que les lignes coordonnées forment un réseau conjugué sur l'une des surfaces résultant de la déformation de* (Σ). *Si l'on trace sur* (Σ) *un réseau conjugué, il n'y aura pas de surface applicable sur* (Σ) *et pour laquelle le réseau correspondant sera conjugué, tant que le réseau donné sera quelconque.*

20. *Surfaces qui admettent une représentation sphérique donnée d'un réseau conjugué.* — Soit

$$d\sigma^2 = e\, du^2 + 2f\, du\, dv + g\, dv^2$$

la formule qui donne l'élément linéaire d'une sphère de rayon 1, rapportée au système (u, v), qui est la représentation sphérique d'un réseau conjugué tracé sur une surface.

Supposons que l'on connaisse p, q, p_1, q_1; les deux premières formules de gauche de (A) donneront r, r_1; la troisième sera satisfaite et exprimera que l'élément linéaire $d\sigma$ convient à une surface à courbure totale égale à 1; ξ, ξ_1, η, η_1 seront déterminés par les formules

$$\xi = \frac{p_1}{\mu}, \qquad \xi_1 = \frac{p}{\lambda}, \qquad \eta = \frac{q_1}{\mu}, \qquad \eta_1 = \frac{q}{\lambda},$$

où λ, μ sont deux inconnues auxiliaires définies par le système qu'on obtient en exprimant que les deux premières équations de droite de (A) sont satisfaites, savoir :

$$\frac{\partial \frac{p_1}{\mu}}{\partial v} - \frac{\partial \frac{p}{\lambda}}{\partial u} - \frac{q_1}{\mu} r_1 + \frac{q}{\lambda} r = 0,$$

$$\frac{\partial \frac{q_1}{\mu}}{\partial v} - \frac{\partial \frac{q}{\lambda}}{\partial u} + \frac{p_1}{\mu} r_1 - \frac{p}{\lambda} r = 0.$$

Ces équations se déduisent de celles considérées au numéro précédent, en remplaçant respectivement

$$\xi, \quad \xi_1, \quad \eta, \quad \eta_1, \quad \lambda, \quad \mu$$

par

$$p, \quad p_1, \quad q, \quad q_1, \quad \frac{1}{\mu}, \quad \frac{1}{\lambda}.$$

Donc, en vertu des formules (D), les inconnues λ, μ sont définies par le système

$$\frac{\partial \frac{1}{\mu}}{\partial v} + \gamma_1 \frac{1}{\mu} - \alpha_1 \frac{1}{\lambda} = 0,$$

$$\frac{\partial \frac{1}{\lambda}}{\partial u} + \alpha \frac{1}{\lambda} - \gamma \frac{1}{\mu} = 0.$$

On voit qu'on peut se donner arbitrairement la représentation sphérique d'un réseau conjugué tracé sur une surface; la détermination des surfaces correspondantes dépend de l'intégration du système précédent.

Dès que l'on connaîtra les expressions des cosinus directeurs c, c', c'' de la normale à la surface, ainsi que les valeurs de λ, μ, on obtiendra les coordonnées cartésiennes rectangulaires X, Y, Z du point de la surface, au moyen de quadratures, par les formules suivantes

$$\frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{g}{h\mu}\frac{\partial c}{\partial u} + \frac{f}{h\mu}\frac{\partial c}{\partial v},$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{f}{h\lambda}\frac{\partial c}{\partial u} + \frac{e}{h\lambda}\frac{\partial c}{\partial v},$$

que l'on déduit des équations (4), et par les analogues obtenues en remplaçant X et c par Y et c', ou par Z et c''.

21. *Comparaison des symboles de M. Christoffel construits respectivement avec l'élément linéaire d'une surface rapportée à un système conjugué et avec celui de la représentation sphérique de ce système conjugué.* — Supposons que l'on remplace, dans les expressions des symboles de M. Christoffel, construits avec la forme quadratique qui est le carré de l'élément linéaire d'une surface rapportée à un système conjugué, E, F, G par leurs expressions

$$E = \frac{g}{\mu^2}, \qquad F = \frac{f}{\lambda\mu}, \qquad G = \frac{e}{\lambda^2},$$

en fonction de e, f, g et de λ, μ.

Il viendra, en tenant compte des équations du numéro précédent, auxquelles satisfont λ et μ,

$$(19) \qquad \left\{\begin{aligned} A &= \beta_1 - \frac{\partial \log \mu}{\partial u}, & A_1 &= \frac{\lambda}{\mu}\beta, \\ B &= \frac{\mu}{\lambda}\alpha_1, & B_1 &= \frac{\lambda}{\mu}\gamma, \\ C &= \frac{\mu}{\lambda}\beta_1, & C_1 &= \beta - \frac{\partial \log \lambda}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

De même, si l'on remplace dans les expressions des symboles de M. Christoffel construits avec la forme quadratique $d\sigma^2$ du numéro précédent, qui est le carré de l'élément linéaire de la représentation sphérique, e, f, g par leurs expressions

$$e = \lambda^2 G, \qquad f = \lambda\mu F, \qquad g = \mu^2 E,$$

en fonction de E, F, G et de λ, μ, il vient, en tenant compte des équations du n° 19, auxquelles satisfont λ et μ,

$$(20) \qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= B_1 + \frac{\partial \log \lambda}{\partial u}, & \alpha_1 &= \frac{\lambda}{\mu}B, \\ \beta &= \frac{\mu}{\lambda}A_1, & \beta_1 &= \frac{\lambda}{\mu}C, \\ \gamma &= \frac{\mu}{\lambda}B_1, & \gamma_1 &= B + \frac{\partial \log \mu}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

On aurait pu d'ailleurs écrire immédiatement ces équations, d'après une remarque faite au n° 20, en remplaçant dans les équations (19)

$$A, \quad B, \quad C, \quad A_1, \quad B_1, \quad C_1, \quad \lambda, \quad \mu$$

respectivement par

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1, \quad \frac{1}{\mu}, \quad \frac{1}{\lambda}.$$

22. *Systèmes conjugués d'une surface qui sont également conjugués sur l'une des surfaces provenant de sa déformation.* — Nous avons vu que les solutions communes aux équations (17) doivent satisfaire à l'équation (18); donc :

Si un réseau conjugué d'une surface (Σ) *est conjugué sur plus d'une surface provenant de la déformation de* (Σ), *il est conjugué sur une infinité de telles surfaces.*

1° Commençons par considérer un pareil réseau conjugué, c'est-à-dire considérons le cas où l'équation (18) est identique.

Cherchons l'image sphérique du réseau conjugué, supposé tracé sur l'une des surfaces qui correspondent aux solutions du système (17); nous avons, en appliquant les formules (19) du numéro précédent, les valeurs suivantes pour les coefficients de l'équation (18)

$$\frac{2CC_1}{k^2} - \frac{\partial \frac{C}{k^2}}{\partial v} = \frac{1}{\lambda^2}\left(2\beta\beta_1 - \frac{\partial\beta_1}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial C_1}{\partial u} - 4A_1C + \frac{\partial^2 \log k^2}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial\beta}{\partial u} + \frac{\partial\beta_1}{\partial v} - 4\beta\beta_1,$$

$$2A_1k^2\left(A + \frac{\partial \log k^2}{\partial u}\right) - \frac{\partial(A_1k^2)}{\partial u} = \lambda^2\left(2\beta\beta_1 - \frac{\partial\beta}{\partial u}\right).$$

L'image sphérique considérée est donc définie par les relations

$$\frac{\partial\beta}{\partial u} = \frac{\partial\beta_1}{\partial v} = 2\beta\beta_1.$$

Donc :

Si un réseau conjugué d'une surface (Σ) *est conjugué sur une infinité de surfaces provenant de la déformation de* (Σ), *sa représentation sphérique est la même que celle des développables d'une congruence cyclique et de Ribaucour, et réciproquement.*

2° Considérons maintenant un réseau conjugué d'une surface (Σ) qui reste conjugué sur une surface provenant de la déformation de (Σ), c'est-à-dire considérons le cas où les deux racines de l'équation (18) satisfont toutes deux aux équations (17).

Posons

$$N = \frac{\dfrac{2CC_1}{k^2} - \dfrac{\partial \dfrac{C}{k^2}}{\partial v}}{2A_1 k^2\left(A + \dfrac{\partial \log k^2}{\partial u}\right) - \dfrac{\partial (A_1 k^2)}{\partial u}},$$

$$2P = \frac{\dfrac{\partial A}{\partial v} + \dfrac{\partial C_1}{\partial u} - 4A_1 C + \dfrac{\partial^2 \log k^2}{\partial u\, \partial v}}{2A_1 k^2\left(A + \dfrac{\partial \log k^2}{\partial u}\right) - \dfrac{\partial (A_1 k^2)}{\partial u}}.$$

L'équation (17) s'écrit

$$Nz^2 + 2Pz + 1 = 0. \tag{17}$$

Remplaçons d'abord dans les équations (18) les valeurs des dérivées de z tirées de (17); il vient les deux équations

$$\left(\frac{\partial N}{\partial v} - 4C_1 N\right) z^2 + 2\left(\frac{\partial P}{\partial v} - 2PC_1 + 2A_1 N k^2\right) z + 4A_1 P k^2 = 0,$$

$$-4N\frac{C}{k^2} z^2 + \left[\frac{\partial N}{\partial u} + 4N\left(A + \frac{\partial \log k^2}{\partial u}\right) - 4\frac{PC}{k^2}\right] z + 2\frac{\partial P}{\partial u} + 4P\left(A + \frac{\partial \log k^2}{\partial u}\right) = 0,$$

qui, devant être satisfaites par les deux racines de l'équation (17), lui sont identiques.

Nous trouvons ainsi les conditions

$$\frac{\partial \log N}{\partial v} - 4C_1 = \frac{\partial \log P}{\partial v} - 2C_1 + 2A_1 \frac{N}{P} k^2 = 4A_1 P k^2,$$

$$-4\frac{C}{k^2} = \frac{N}{P}\,\frac{\dfrac{\partial \log N}{\partial u} + 4\left(A + \dfrac{\partial \log k^2}{\partial u}\right)}{2} - 2\frac{C}{k^2} = 2P\left[\frac{\partial \log P}{\partial u} + 2\left(A + \frac{\partial \log k^2}{\partial u}\right)\right].$$

Cherchons l'image sphérique du réseau conjugué, supposé tracé sur l'une des surfaces qui correspondent aux racines de l'équation (17); nous avons déjà trouvé, en appliquant les formules (19) du numéro précédent, les valeurs suivantes pour N et 2P

$$N = \frac{1}{\lambda^4} \frac{2\beta\beta_1 - \frac{\partial\beta_1}{\partial v}}{2\beta\beta_1 - \frac{\partial\beta}{\partial u}},$$

$$2P = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\frac{\partial\beta}{\partial u} + \frac{\partial\beta_1}{\partial v} - 4\beta\beta_1}{2\beta\beta_1 - \frac{\partial\beta}{\partial u}}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans les équations de condition, ces dernières se réduisent immédiatement aux suivantes

$$\frac{\partial\theta}{\partial u} = 2\beta_1(\theta + 1),$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial v} = 2\beta(\theta - 1),$$

en posant

$$\theta = \frac{\frac{\partial\beta}{\partial u} + \frac{\partial\beta_1}{\partial v} - 4\beta\beta_1}{\frac{\partial\beta}{\partial u} - \frac{\partial\beta_1}{\partial v}}.$$

Nous trouvons donc les conditions pour que les deux premières équations du système (16) aient une solution commune.

Donc :

Les réseaux conjugués d'une surface (Σ) *qui sont conjugués sur une surface provenant de la déformation de* (Σ) *sont caractérisés par leur représentation sphérique qui est celle des développables d'une congruence cyclique.*

23. *Le problème de O. Bonnet.* — Dans le cas particulier où les réseaux conjugués que l'on considère sont formés des lignes de courbure, on retrouve un problème posé et résolu par O. Bonnet [1].

Les résultats du numéro précédent, combinés avec ceux du n° 16, conduisent aux conclusions suivantes :

Si une surface admet plus d'une déformation conservant les lignes de

---

[1] O. Bonnet, *Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XLII, p. 58-72.

courbure, elle en admet une infinité; ses normales forment une congruence cyclique et de Ribaucour, et réciproquement; c'est une surface moulure obtenue par le mouvement d'une courbe plane dont le plan roule sur un cylindre.

Si une surface admet une seule déformation conservant les lignes de courbure, ses normales forment une congruence cyclique, et réciproquement; c'est une surface ayant même représentation sphérique de ses lignes de courbure qu'une surface à courbure totale constante qui n'est pas de révolution.

En particulier, les normales d'une surface à courbure totale constante forment une congruence cyclique : le système cyclique correspondant est celui de M. Ribaucour, formé de cercles de rayon constant.

24. *Systèmes cycliques dont les cercles sont situés dans les plans tangents d'une surface* (Σ). — On peut conpléter les résultats du n° 22 en reprenant la démonstration du théorème de M. Darboux [1] qui rattache la théorie des systèmes cycliques à celle de la déformation des surfaces.

Proposons-nous de trouver un système cyclique formé de cercles situés dans les plans tangents d'une surface (Σ), cette surface étant rapportée aux courbes qui correspondent aux développables de la congruence des axes des cercles.

Reportons-nous au n° 15; il suffit de prendre pour (M) la surface (Σ) et d'adjoindre la relation

$$z_m + \rho\theta = 0.$$

Posons

$$\theta = -\cos\sigma,$$
$$z = i\rho\sin\sigma,$$

z sera la cote d'un des foyers du cercle.

Les équations du problème deviennent les suivantes

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\cos\sigma}{\partial u} &= 2\beta_1(\cos\sigma - 1),\\ \frac{\partial\cos\sigma}{\partial v} &= 2\beta(\cos\sigma + 1); \end{aligned}\right.$$

[1] G. Darboux, *Leçons*, t. III, p. 354.

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{ll} \xi + \dfrac{\partial x}{\partial u} + q'z - ry = 0, & \xi_1 + \dfrac{\partial x}{\partial v} + q'_1 z - r_1 y = 0, \\ \eta + \dfrac{\partial y}{\partial u} + rx - p'z = 0, & \eta_1 + \dfrac{\partial y}{\partial v} + r_1 x - p'_1 z = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} + p'y - q'x = 0, & \dfrac{\partial z}{\partial v} + p'_1 y - q'_1 x = 0, \end{array}\right.$$

en posant

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{ll} p' = -i\dfrac{\cos\sigma - 1}{\sin\sigma}p, & q' = -i\dfrac{\cos\sigma - 1}{\sin\sigma}q, \\ p'_1 = -i\dfrac{\cos\sigma + 1}{\sin\sigma}p_1, & q'_1 = -i\dfrac{\cos\sigma + 1}{\sin\sigma}q_1. \end{array}\right.$$

Supposons que les équations (21) aient une solution commune σ; pour que les équations (22) déterminent un système de valeurs pour x, y, z, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$(24)\quad p_1\eta - q_1\xi = p\eta_1 - q\xi_1 = 0.$$

Supposons cette condition remplie; il existe alors un trièdre mobile (T′) dont les translations sont les mêmes que celles de (T) et dont les rotations sont p', q', r', p'_1, q'_1, r'_1; l'axe des z de ce trièdre (T′) est normal à l'origine à une surface (Σ') applicable sur (Σ); le système (22) admet une triple infinité de solutions constituées par les coordonnées des différents points fixes de l'espace par rapport au trièdre (T′).

Nous retrouvons donc le théorème de M. Darboux :

Les systèmes cycliques, formés de cercles situés dans les plans tangents d'une surface (Σ), *s'associent par triples infinités, chaque triple infinité se déduisant d'une surface* (Σ') *applicable sur* (Σ).

Remarquons que les relations (24) entraînent les suivantes

$$p'_1\eta - q'_1\xi = 0, \qquad p'\eta_1 - q'\xi_1 = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante, due à M. Ribaucour (¹) :

Les lignes de courbure des surfaces trajectoires des systèmes cycli-

(¹) A. Ribaucour, *Sur les systèmes cycliques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 17 et 24 août 1891).

ques, en triple infinité, que le théorème de M. Darboux déduit de la connaissance d'une surface (Σ'), *applicable sur* (Σ), *correspondent à un réseau conjugué de* (Σ) *qui n'est autre que le réseau conjugué commun à* (Σ) *et à* (Σ').

On peut également énoncer les résultats suivants, conséquences des formules établies, et qui montrent que la détermination analytique, au moyen des différentes équations du Tome III des *Leçons* de M. Darboux, des surfaces applicables sur une surface (Σ) équivaut à la recherche de certains réseaux conjugués tracés sur cette surface :

1° Si l'on connaît sur (Σ) un réseau conjugué (u, v) pour lequel les équations (21) ont une solution unique, on en déduit, à l'aide des formules (23), les éléments de forme de la surface (Σ') applicable sur (Σ) et admettant (u, v) comme réseau conjugué.

2° Si l'on connaît sur (Σ) un réseau conjugué (u, v) pour lequel les équations (21) ont une infinité de solutions, on en déduira les éléments de forme d'une infinité de surfaces applicables sur (Σ) et admettant (u, v) pour réseau conjugué; il en sera de même pour toutes les surfaces enveloppes des plans des cercles des systèmes cycliques dérivés d'une même congruence cyclique correspondant à une solution des équations (21).

25. *Quelques applications.* — Les résultats que nous avons établis dans les numéros précédents renferment comme conséquences un certain nombre de propositions relatives à la déformation de surfaces particulières.

1° Considérons les surfaces moulures obtenues par le mouvement d'une courbe plane dont le plan roule sur un cylindre; nous avons vu que leurs normales forment une congruence cyclique et de Ribaucour; d'où résulte cette proposition de Bour (¹) :

Étant donnée une surface moulure, il existe une famille de surfaces moulures applicables sur elle; sur toutes ces surfaces, les lignes de courbure se correspondent.

2° Si deux surfaces minima sont applicables l'une sur l'autre, le réseau conjugué commun est formé des lignes de longueur nulle; or ce réseau

(¹) Darboux, *Leçons*, t. I, p. 105.

admet, dans le cas actuel, comme représentation sphérique, celle des développables d'une congruence isotrope, c'est-à-dire d'une congruence cyclique et de Ribaucour particulière; nous retrouvons par suite ce résultat qu'*il existe une famille de surfaces minima applicables sur une surface minima donnée.*

3° Considérons une surface de Voss, c'est-à-dire une surface sur laquelle il existe un réseau conjugué formé de géodésiques; un tel réseau conjugué est caractérisé d'après les formules (1) par les conditions

$$A_1 = 0, \qquad C = 0.$$

Sa représentation sphérique, d'après les formules (19), est donc caractérisée par les conditions

$$\beta = 0, \qquad \beta_1 = 0.$$

Elle est identique à celle des développables des congruences du n° 17. Donc :

Étant donnée une surface de Voss, il existe une famille de surfaces de Voss applicables sur elle; sur toutes ces surfaces, les réseaux conjugués formés de géodésiques se correspondent.

4° Une surface à courbure totale constante étant applicable sur une sphère, il en résulte que ses normales forment une congruence cyclique; il en est donc de même pour toute surface à courbure moyenne constante. Considérons une telle surface qui ne soit pas de révolution et appliquons les formules (23); on trouve immédiatement que la surface applicable sur une surface à courbure moyenne constante, avec correspondance des lignes de courbure, est une nouvelle surface à courbure moyenne constante ayant mêmes rayons de courbure principaux; *les surfaces à courbure moyenne constante que le théorème de O. Bonnet* (¹) *fait dériver d'une telle surface s'associent donc par couples, se correspondant par leurs lignes de courbure.*

26. *Les coordonnées par rapport à trois axes rectangulaires fixes d'un point d'une surface rapportée à un système conjugué. Démonstra-*

(¹) DARBOUX, *Leçons,* t. III, p. 384.

tion d'un théorème de M. Darboux. Théorème de M. Kœnigs. Conséquences. — Soient X, Y, Z les coordonnées d'un point M de (M) par rapport à trois axes fixes rectangulaires et adoptons les notations de M. Darboux pour définir les directions des axes du trièdre (T) adjoint à M. On a d'une façon générale

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \xi a + \eta b, \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = \xi_1 a + \eta_1 b,$$

et les analogues relatives à Y et Z; ces formules sont équivalentes aux formules (4) du n° 3.

Supposons que les courbes (u), (v) soient conjuguées : il vient alors

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} = a\left(\frac{\partial \xi}{\partial v} - \eta r_1\right) + b\left(\frac{\partial \eta}{\partial v} + \xi r_1\right),$$

c'est-à-dire, en vertu des formules (C),

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} = a(B\xi + B_1\xi_1) + b(B\eta + B_1\eta_1)$$

ou enfin

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} = B\frac{\partial X}{\partial u} + B_1\frac{\partial X}{\partial v}. \tag{24}$$

Nous retrouvons donc ce théorème de M. Darboux que X, Y, Z sont des solutions de cette équation; c'est ce qui résulte d'ailleurs également des formules (2), où l'on suppose $D' = 0$.

Réciproquement, si les coordonnées X, Y, Z satisfont à une équation de la forme (24), le réseau (u, v) est conjugué.

Ceci posé, considérons deux surfaces applicables l'une sur l'autre (A_1) et (A_2), A_1 et A_2 désignant deux points correspondants. Rapportons ces surfaces au système (u, v) qui constitue leur réseau conjugué commun; les coordonnées X_1, Y_1, Z_1 du point A_1 et celles X_2, Y_2, Z_2 du point correspondant A_2 satisferont à la même équation (24); cela résulte de ce que B, B_1 dépendent uniquement des coefficients E, F, G de l'élément linéaire.

Nous pouvons donc énoncer cette proposition due, à M. Kœnigs :

Les six coordonnées cartésiennes rectangulaires X_1, Y_1, Z_1, *d'une part,* X_2, Y_2, Z_2, *d'autre part, des points correspondants de deux surfaces applicables l'une sur l'autre satisfont à une même équation li-*

néaire aux dérivées partielles du second ordre; les caractéristiques de cette équation sont les courbes qui constituent le réseau conjugué commun aux deux surfaces.

Les expressions

$$lX_1 + mX_2, \qquad lY_1 + mY_2, \qquad lZ_1 + mZ_2,$$

où l et m sont des constantes, satisfont aussi à l'équation (24). Donc :

Sur chacune des surfaces obtenues en divisant A_1A_2 *dans un rapport donné, le réseau correspondant au réseau conjugué commun à* (A_1), (A_2) *est également conjugué; ce cas se présentera en particulier pour la surface* (A), *lieu du milieu* A *de* A_1A_2.

Si l'on mène par un point fixe O *de l'espace un segment* Oa *équipollent à* AA_1, *sur la surface* (a), *le réseau correspondant au réseau conjugué commun à* (A_1), (A_2) *est conjugué.*

Le réseau conjugué commun aux deux surfaces (A_1), (A_2) *correspond au réseau conjugué commun à* (A), (a).

Remarquons enfin que du théorème de M. Kœnigs résulte la conséquence suivante :

Si deux surfaces applicables l'une sur l'autre ont plus d'un réseau conjugué commun, elles en ont une infinité; elles sont alors égales ou symétriques.

27. *Congruences dont les développables découpent une surface donnée* (M) *suivant un réseau conjugué donné.* — Utilisons la même remarque qu'au n° 11; nous définirons une droite de la congruence en joignant le point M au point correspondant $P(x_1, y_1, z_1)$ d'une surface, la correspondance étant telle que le plan tangent à (P) en P soit parallèle au plan tangent à (M) en M. On aura

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} + p y_1 - q x_1 = 0, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial v} + p_1 y_1 - q_1 x_1 = 0.$$

Les coordonnées d'un point de la droite MP s'expriment par les formules

$$x = \rho x_1, \qquad y = \rho y_1, \qquad z = \rho z_1.$$

Désignons par ρ_1, ρ_2 les valeurs de ρ qui correspondent aux points focaux; si l'on rapporte (M) au réseau conjugué donné, les équations du problème sont, d'après les formules (B), les suivantes

$$\begin{aligned}
&\frac{\xi}{\rho_1}+\frac{\partial x_1}{\partial u}+qz_1-ry_1=0, &&\frac{\xi_1}{\rho_2}+\frac{\partial x_1}{\partial v}+q_1z_1-r_1y_1=0,\\
&\frac{\eta}{\rho_1}+\frac{\partial y_1}{\partial u}+rx_1-pz_1=0, &&\frac{\eta_1}{\rho_2}+\frac{\partial y_1}{\partial v}+r_1x_1-p_1z_1=0,\\
&\frac{\partial z_1}{\partial u}+py_1-qx_1=0, &&\frac{\partial z_1}{\partial v}+p_1y_1-q_1x_1=0.
\end{aligned}$$

Appliquant les formules (A), les inconnues auxiliaires ρ_1, ρ_2 sont définies par le système

$$\frac{\partial\left(\frac{\xi}{\rho_1}\right)}{\partial v}-\frac{\partial\left(\frac{\xi_1}{\rho_2}\right)}{\partial u}=\frac{\eta}{\rho_1}r_1-\frac{\eta_1}{\rho_2}r,$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\eta}{\rho_1}\right)}{\partial v}-\frac{\partial\left(\frac{\eta_1}{\rho_2}\right)}{\partial u}=\frac{\xi_1}{\rho_2}r-\frac{\xi}{\rho_1}r_1.$$

Si l'on pose

$$\frac{1}{\rho_1}=\lambda_1,\qquad \frac{1}{\rho_2}=\lambda_2,$$

le système précédent, en vertu des formules (C), se met sous la forme suivante

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial v}+\mathrm{B}\,(\lambda_1-\lambda_2)=0,$$

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial u}-\mathrm{B}_1(\lambda_1-\lambda_2)=0.$$

La fonction $\lambda_1-\lambda_2$ est définie, comme il est aisé de le voir, par l'équation adjointe à l'équation (24); c'est un résultat conforme à celui que l'on connaît [1].

28. *Les réseaux conjugués à invariants égaux et le problème de la correspondance par orthogonalité des éléments. Autre problème. Les surfaces isothermiques.* — M. Voss a montré que la détermination des ré-

---

(1) G. Darboux, *Leçons*, t. II, p. 224.

seaux conjugués à invariants égaux tracés sur une surface [1] dépend de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre. Nous allons montrer que ce problème se rattache à la recherche des surfaces correspondant par orthogonalité des éléments à la surface proposée.

Reprenons, en effet, ce dernier problème tel que nous l'avons laissé à la fin du n° 18. Rapportons la surface (M) au réseau conjugué (u, v) qui est la trace des développables de la congruence des droites MP. Il suffit alors de faire $\lambda_2 = -\lambda_1$ au numéro précédent et les équations qui déterminent x_1, y_1, z_1 sont les suivantes

$$\lambda_1\xi + \frac{\partial x_1}{\partial u} + qz_1 - ry_1 = 0, \qquad -\lambda_1\xi_1 + \frac{\partial x_1}{\partial v} + q_1z_1 - r_1y_1 = 0,$$

$$\lambda_1\eta + \frac{\partial y_1}{\partial u} + rx_1 - pz_1 = 0, \qquad -\lambda_1\eta_1 + \frac{\partial y_1}{\partial v} + r_1x_1 - p_1z_1 = 0,$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} + py_1 - qx_1 = 0, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial v} + p_1y_1 - q_1x_1 = 0.$$

L'inconnue auxiliaire λ_1 est définie par le système

$$\frac{\partial \log\lambda_1}{\partial u} = -2B_1, \qquad \frac{\partial \log\lambda_1}{\partial v} = -2B,$$

qui la détermine à un facteur constant près, à condition que l'on ait

$$\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}.$$

Les invariants de l'équation (24) doivent être égaux; autrement dit, le réseau (u, v) est un réseau conjugué à invariants égaux.

Ce réseau conjugué étant supposé connu sur la surface (M), la détermination de x_1, y_1, z_1 s'effectuera, comme on sait, au moyen de quadratures.

Donc :

La recherche des surfaces correspondant par orthogonalité des éléments à une surface (M) *revient à la détermination des réseaux conjugués à invariants égaux tracés sur cette surface; dès qu'on connaît un*

---

[1] A. Voss, *Zur Theorie der Krümmung der Flächen* (*Mathematische Annalen*, t. XXXIX, p. 207 et suivantes).

pareil réseau, on obtient par quadratures toutes les surfaces correspondant à (M) *par orthogonalité des éléments et dont les asymptotiques correspondent aux courbes du réseau conjugué donné.*

On remarquera que nous avons établi la proposition suivante, due à M. Kœnigs :

Toute congruence de Ribaucour découpe, par ses développables, sa surface moyenne suivant un réseau conjugué à invariants égaux.

M. Kœnigs a énoncé une proposition plus générale dont nous considérerons encore le cas particulier suivant :

Supposons au n° 27 que l'on ait

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 2,$$

c'est-à-dire que les points M et P soient conjugués harmoniques par rapport aux points focaux de la droite MP.

On pourra poser

$$\frac{1}{\rho_1} = 1 + \lambda, \qquad \frac{1}{\rho_2} = 1 - \lambda,$$

et si, dans les équations du n° 27, on substitue aux inconnues x_1, y_1, z_1 les inconnues

$$x_1 - x_0, \quad y_1 - y_0, \quad z_1 - z_0,$$

en désignant par x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point fixe de l'espace par rapport au trièdre (T), on retrouve les équations du commencement de ce numéro.

Donc :

Soit une congruence de Ribaucour dont (M) *est la surface moyenne et qui est définie au moyen d'une surface* (P) *que l'on fait correspondre à* (M) *par plans tangents parallèles; si, par un point fixe* O *de l'espace, on mène* OM_1 *équipollent à* MP, *le plan tangent à* (M_1) *en* M_1 *sera parallèle au plan tangent à* (M) *en* M; *la droite* MM_1 *engendrera une congruence, ses points focaux seront conjugués harmoniques par rapport à* M *et* M_1; *les développables de cette congruence intercepteront sur* (M) *le même réseau conjugué à invariants égaux que la congruence de Ribaucour considérée.*

Si, dans l'énoncé précédent, on suppose que la congruence de Ribaucour découpe sa surface moyenne (M) suivant ses lignes de courbure, cette surface (M) est isothermique; (M_1) est la surface isothermique qui lui correspond dans le problème de M. Christoffel.