ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

P. DUHEM

Les actions électrodynamiques et électromagnétiques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 7, nº 2 (1893), p. G1-G52
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1893_1_7_2_G1_0>

© Université Paul Sabatier, 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (http://picard.ups-tlse.fr/~annales/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LES ACTIONS

ÉLECTRODYNAMIQUES ET ÉLECTROMAGNÉTIQUES,

PAR M. P. DUHEM,

Chargé d'un Cours complémentaire de Physique mathématique et de Cristallographie
à la Faculté des Sciences de Lille.

INTRODUCTION

Dans un récent Mémoire [1], nous avons essayé d'établir les lois générales de l'induction électrodynamique, telles qu'elles ont été formulées par M. H. von Helmholtz, sur des hypothèses très simples et qui se présentent pour ainsi dire d'elles-mêmes. Nous allons maintenant, poursuivant cette revision des lois de l'électricité, aborder l'étude des actions électrodynamiques et des actions électromagnétiques. Nous ne nous occuperons que des corps conducteurs, magnétiques ou non magnétiques, et nous remettrons à un autre travail l'étude des corps diélectriques. La méthode que nous emploierons est l'extension de celle que nous avons appliquée aux conducteurs linéaires dans le tome III de nos *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*. Les résultats auxquels nous parviendrons seront en complet accord avec ceux qu'a formulés, parfois presque sans démonstration, M. H. von Helmholtz. Si nos études contribuent à faire partager au lecteur l'admiration que nous inspire l'œuvre de l'illustre physicien, notre but sera atteint.

---

[1] P. Duhem, *Sur l'Induction électrodynamique* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VII, B.; 1893).

CHAPITRE PRÉLIMINAIRE [1].

LES FONCTIONS D'HELMHOLTZ.

§ 1. — *Introduction des fonctions d'Helmholtz.*

Changeons les notations qui nous ont servi au dernier Chapitre de notre Mémoire : *Sur l'Induction électrodynamique* [2]. Désignons par Ox, Oy, Oz les axes absolument fixes que nous avions désignés par $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Désignons par u, v, w les composantes suivant ces axes du flux électrique au point (x, y, z), composantes que nous avions désignées par φ, ψ, χ.

Posons

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{V} &= \int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{u_1}{r} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{x_1-x}{r^2}\left(\frac{x_1-x}{r}u_1 + \frac{y_1-y}{r}v_1 + \frac{z_1-z}{r}w_1\right)\right]d\varpi_1,\\
\mathfrak{V} &= \int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{v_1}{r} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{y_1-y}{r^2}\left(\frac{x_1-x}{r}u_1 + \frac{y_1-y}{r}v_1 + \frac{z_1-z}{r}w_1\right)\right]d\varpi_1,\\
\mathfrak{W} &= \int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{w_1}{r} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{z_1-z}{r^2}\left(\frac{x_1-x}{r}u_1 + \frac{y_1-y}{r}v_1 + \frac{z_1-z}{r}w_1\right)\right]d\varpi_1,
\end{aligned}\right.$$

les intégrations s'étendant à l'inducteur entier.

Ces quantités $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ changent de valeur, à un instant donné, d'un point à l'autre de l'espace; en un même point de l'espace, par l'effet des changements survenus dans l'inducteur, elles changent de valeur d'un instant à l'autre. Ce sont donc des fonctions des quatre variables x, y, z, t.

Moyennant les égalités (2) du Chapitre I et des égalités (8) et (13 *bis*) du Chapitre II, l'inducteur auquel appartient l'élément $d\varpi_1$ engendre au point (x, y, z) une force électromotrice d'induction dont les compo-

---

(1) Ce Chapitre est destiné à exposer quelques théorèmes analytiques indispensables. Ces théorèmes sont tous dus à M. H. von Helmholtz.

(2) P. DUHEM, *Sur l'Induction électrodynamique* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VII, B; 1893).

santes $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ sont données par

$$
(2) \quad \left\{
\begin{aligned}
\mathcal{E}_x dt &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{U} + \mathfrak{U}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathfrak{V}\frac{\partial g}{\partial x} + \mathfrak{W}\frac{\partial h}{\partial x}\right),\\
\mathcal{E}_y dt &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{V} + \mathfrak{U}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathfrak{V}\frac{\partial g}{\partial y} + \mathfrak{W}\frac{\partial h}{\partial y}\right),\\
\mathcal{E}_z dt &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{W} + \mathfrak{U}\frac{\partial f}{\partial z} + \mathfrak{V}\frac{\partial g}{\partial z} + \mathfrak{W}\frac{\partial h}{\partial z}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

D'ailleurs, on a évidemment

$$
(3) \quad \left\{
\begin{aligned}
\delta\mathfrak{U} &= \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} f + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} g + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} h + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} dt,\\
\delta\mathfrak{V} &= \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} f + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} g + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} h + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} dt,\\
\delta\mathfrak{W} &= \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} f + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} g + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} h + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t} dt.
\end{aligned}
\right.
$$

Soient a, b, c les composantes de la vitesse au point x, y, z. Nous aurons

$$
(4) \qquad f = a\,dt, \qquad g = b\,dt, \qquad h = w\,dt.
$$

En vertu des égalités (3), (4) et (5), les égalités (2) deviendront

$$
(5) \quad \left\{
\begin{aligned}
\mathcal{E}_x &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} + a\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + b\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} + c\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} + \mathfrak{U}\frac{\partial a}{\partial x} + \mathfrak{V}\frac{\partial b}{\partial x} + w\frac{\partial c}{\partial x}\right),\\
\mathcal{E}_y &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} + a\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + b\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + c\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} + \mathfrak{U}\frac{\partial a}{\partial y} + \mathfrak{V}\frac{\partial b}{\partial y} + w\frac{\partial c}{\partial y}\right),\\
\mathcal{E}_z &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t} + a\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} + b\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} + c\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} + \mathfrak{U}\frac{\partial a}{\partial z} + \mathfrak{V}\frac{\partial b}{\partial z} + w\frac{\partial c}{\partial z}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Posons

$$
(6) \quad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{P} &= \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y},\\
\mathfrak{Q} &= \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z},\\
\mathfrak{R} &= \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x},
\end{aligned}
\right.
$$

et les égalités (5) pourront encore s'écrire

$$(7)\quad \begin{cases} \mathcal{E}_x = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\dfrac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} + b\mathfrak{R} - c\mathfrak{Q} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{U} a + \mathfrak{V} b + \mathfrak{W} c)\right], \\ \mathcal{E}_y = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} + c\mathfrak{P} - a\mathfrak{R} + \dfrac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{U} a + \mathfrak{V} b + \mathfrak{W} c)\right], \\ \mathcal{E}_z = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\dfrac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t} + a\mathfrak{Q} - b\mathfrak{P} + \dfrac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{U} a + \mathfrak{V} b + \mathfrak{W} c)\right]. \end{cases}$$

Les formules (6) mettent en évidence le rôle capital que joueront, dans la théorie de l'induction électrodynamique, les fonctions $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ définies par les égalités (1).

Ces fonctions ont été introduites en Physique et leurs propriétés ont été étudiées par M. H. von Helmholtz (¹). Nous allons reproduire les résultats auxquels il est parvenu.

§ 2. — *La fonction* $\Psi(x, y, z, t)$.

Considérons un conducteur dont (x_1, y_1, z_1) est un point et $d\varpi_1$ un élément de volume tracé autour de ce point; soit e_1 la densité de l'électricité libre en ce point; soit dS_1 un élément de surface électrisée appartenant au même conducteur; soit E_1 la densité superficielle en un point de l'élément dS_1.

Au point (x, y, z) de l'espace, et à l'instant t, la fonction potentielle électrostatique a pour valeur

$$V(x, y, z, t) = \int \frac{e_1}{r}\, d\varpi_1 + \mathbf{S} \frac{E_1}{r}\, dS_1,$$

la première intégrale s'étendant aux divers volumes électrisés qui font partie du système, et la seconde aux diverses surfaces électrisées; r est la distance du point (x, y, z) à un point de l'élément $d\varpi_1$ ou de l'élément dS_1.

Nous savons que cette fonction est uniforme, finie et continue dans tout

(¹) H. Helmholtz, *Ueber die Gesetze der inconstanten elektrischen Ströme in körperlich ausgedehnten Leitern* (*Verhandlungen der Naturhistorisch-Medicinischen Vereins zu Heidelberg*, B. V, p. 84-89; 1870. — *Helmholtz Abhandlungen*, t. I, p. 537). — *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper* (*Borchardt's Journal*, t. LXXII, p. 57; 1870. — *Helmholtz Abhandlungen*, t. I, p. 545).

l'espace; à l'infini, elle devient égale à o comme $\frac{1}{r}$. Nous savons, en outre, qu'en tout point non situé sur une surface de discontinuité électrisée, cette fonction admet, par rapport à x, y, z, des dérivées partielles du premier ordre qui sont finies et continues.

Désignons par $\frac{\partial V}{\partial t}$ la quantité

$$\begin{aligned} - \mathbf{S}\, [\quad & u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ & + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)] \frac{1}{r}\, dS_1 \\ - \int & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) \frac{1}{r}\, d\varpi_1, \end{aligned}$$

la première intégrale s'étendant aux surfaces de discontinuité que présentent les conducteurs et la seconde au volume de ces conducteurs. $\frac{\partial V}{\partial t}\, dt$ serait ainsi la variation éprouvée, pendant le temps dt, par la fonction potentielle, si les conducteurs, tout en étant traversés pendant ce temps par les flux électriques qui les traversent à l'instant t, demeuraient immobiles dans la position qu'ils occupent à cet instant.

Au sujet de cette fonction $\frac{\partial V}{\partial t}$, nous admettrons :

1° Que la quantité $\frac{\partial V}{\partial t}$ existe, est uniforme, finie et continue dans tout l'espace; qu'à l'infini, elle est égale à o de la même manière que $\frac{1}{r}$;

2° Qu'en tout point non situé sur l'une des surfaces de discontinuité électrisées que le système renferme, les quantités $\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial t}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial t}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z\, \partial t}$ existent et sont finies, uniformes et continues.

Cela posé, considérons la fonction

$$\Psi(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial t} \frac{1}{r}\, d\varpi_1, \tag{8}$$

l'intégrale s'étendant à tout l'espace. Elle représente la fonction potentielle d'un agent répandu dans tout l'espace, et ayant en chaque point (x_1, y_1, z_1) une densité solide, finie et continue

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial t}.$$

L'étude de la fonction potentielle ([1]) nous fait connaître les propriétés de cette fonction, qui sont les suivantes :

1° La fonction $\Psi(x, y, z, t)$ existe, est finie, uniforme et continue en tout point (x, y, z) de l'espace.

2° Les fonctions $\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \frac{\partial\Psi}{\partial z}$ existent, sont finies, uniformes et continues en tout point (x, y, z) de l'espace.

3° Ces fonctions sont définies par les égalités suivantes :

$$
(9)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial x}\Psi(x, y, z, t) = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \dfrac{\partial V(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial t}\,\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,d\varpi_1, \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial y}\Psi(x, y, z, t) = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \dfrac{\partial V(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial t}\,\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\,d\varpi_1, \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial z}\Psi(x, y, z, t) = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \dfrac{\partial V(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial t}\,\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,\partial\varpi_1.
\end{cases}
$$

4° Les fonctions $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial y}, \ldots$ existent, sont finies, uniformes et continues en tout point de l'espace, même sur les surfaces électrisées.

5° En tout point de l'espace situé ou non sur une surface de discontinuité électrisée, on a

$$
(10)\qquad \Delta\Psi = 2\,\frac{\partial V}{\partial t}.
$$

Les identités

$$
\frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} = \frac{1}{r} - \frac{(x_1 - x)^2}{r^3},
$$

$$
\frac{\partial^2 r}{\partial y_1^2} = \frac{1}{r} - \frac{(y_1 - y)^2}{r^3},
$$

$$
\frac{\partial^2 r}{\partial z_1^2} = \frac{1}{r} - \frac{(z_1 - z)^2}{r^3}
$$

([1]) Les résultats de cette étude ne sont pas *immédiatement* transportables ici, puisque l'agent dont Ψ est la fonction potentielle s'étend dans tout l'espace et que l'étude de la fonction potentielle a été faite en supposant que cette fonction provînt de masses limitées ; mais les raisonnements qui justifient les applications faites ici de ces propriétés sont si simples, qu'il a semblé inutile de les détailler.

donnent

$$\Delta r = \frac{2}{r}$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right),$$

ce qui permet de remplacer les équations (9) par les suivantes :

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, y, z, t) &= - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial V}{\partial t} \Delta \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) d\varpi_1, \\ \frac{\partial}{\partial y} \Psi(x, y, z, t) &= - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial V}{\partial t} \Delta \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) d\varpi_1, \\ \frac{\partial}{\partial z} \Psi(x, y, z, t) &= - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial V}{\partial t} \Delta \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right) d\varpi_1. \end{aligned} \right.$$

Or le théorème de Green donne aisément

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial t} \Delta \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) d\varpi_1 = \int \frac{\partial r}{\partial x} \Delta \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial t} d\varpi_1 \\ + \mathbf{S}\, r \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial V(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial N_1} + \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial N_2} \right] dS_1; \end{aligned}$$

la dernière intégrale s'étend aux diverses surfaces de discontinuité électrisées; N_1, N_2 sont les deux directions de la normale à l'élément dS_1.

En tout point (x_1, y_1, z_1) qui se trouve soit à l'extérieur, soit à l'intérieur des conducteurs, mais qui n'est pas situé sur une surface de discontinuité électrisée, on peut écrire

$$\Delta V(x_1, y_1, z_1, t) = -4\pi e_1$$

et, par conséquent,

$$\Delta \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial t} = -4\pi \frac{\partial e_1}{\partial t}.$$

D'autre part, en tout point d'une surface de discontinuité électrisée, on a

$$\frac{\partial V(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial N_1} + \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial N_2} = -4\pi E_1$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial V(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial N_1} + \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial N_2}\right] = -4\pi \frac{\partial E_1}{\partial t}.$$

On a donc

$$(12) \qquad \int \frac{\partial V}{\partial t} \Delta \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) d\varpi_1 = -4\pi \int \frac{\partial e_1}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} d\varpi_1 - 4\pi \, \mathbf{S} \, \frac{\partial E_1}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} dS_1.$$

Mais on a aussi

$$(13) \qquad \frac{\partial e_1}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right),$$

$$(14) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial t} = & -[u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z)] \\ & -[u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)]. \end{aligned}$$

En vertu des égalités (12), (13) et (14), la première des égalités (11) devient la première des égalités

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, y, z, t) = & -\int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) \frac{\partial r}{\partial x} d\varpi_1 \\ & - \mathbf{S} \, [\;\; u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ & \qquad + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)] \frac{\partial r}{\partial x} dS_1, \\ \frac{\partial}{\partial y} \Psi(x, y, z, t) = & -\int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) \frac{\partial r}{\partial y} d\varpi_1 \\ & - \mathbf{S} \, [\;\; u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ & \qquad + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)] \frac{\partial r}{\partial y} dS_1, \\ \frac{\partial}{\partial z} \Psi(x, y, z, t) = & -\int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{d v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) \frac{\partial r}{\partial z} d\varpi_1 \\ & - \mathbf{S} \, [\;\; u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ & \qquad + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)] \frac{\partial r}{\partial z} dS_1. \end{aligned} \right.$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

Mais, d'autre part, on a

$$(16)\quad \int\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)\frac{\partial r}{\partial x}\,d\varpi_1=-\int\left(u_1\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial x_1}+v_1\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y_1}+w_1\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z_1}\right)d\varpi_1$$
$$-\mathbf{S}\big[\quad u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z)$$
$$+u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)\big]\frac{\partial r}{\partial x}\,dS_1$$

et

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial x_1}&=-\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{(x_1-x)^2}{r^3}-\frac{1}{r},\\ \frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y_1}&=-\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}=\frac{(x_1-x)(y_1-y)}{r^3},\\ \frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z_1}&=-\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}=\frac{(x_1-x)(z_1-z)}{r^3},\end{aligned}\right.$$

en sorte que la première des égalités (15) devient la première des égalités

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,y,z,t)&=-\int\left[\frac{u_1}{r}-\left(u_1\frac{x_1-x}{r}+v_1\frac{y_1-y}{r}+w_1\frac{z_1-z}{r}\right)\frac{x_1-x}{r^2}\right]d\varpi_1,\\ \frac{\partial}{\partial y}\Psi(x,y,z,t)&=-\int\left[\frac{v_1}{r}-\left(u_1\frac{x_1-x}{r}+v_1\frac{y_1-y}{r}+w_1\frac{z_1-z}{r}\right)\frac{y_1-y}{r^2}\right]d\varpi_1,\\ \frac{\partial}{\partial z}\Psi(x,y,z,t)&=-\int\left[\frac{w_1}{r}-\left(u_1\frac{x_1-x}{r}+v_1\frac{y_1-y}{r}+w_1\frac{z_1-z}{r}\right)\frac{z_1-z}{r^2}\right]d\varpi_1.\end{aligned}\right.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Ces égalités (18) vont nous servir de point de départ dans l'étude des trois fonctions d'Helmholtz $\mathfrak{U}(x,y,z,t)$, $\mathfrak{V}(x,y,z,t)$, $\mathfrak{W}(x,y,z,t)$.

§ 3. — *Propriétés des fonctions* $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$.

Si l'on compare en effet les égalités (1) et (18), on trouve

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}\mathfrak{U}(x,y,z,t)&=\frac{1-\lambda}{2}\,\frac{\partial\Psi(x,y,z,t)}{\partial x}+\int\frac{u_1}{r}\,d\varpi_1,\\ \mathfrak{V}(x,y,z,t)&=\frac{1-\lambda}{2}\,\frac{\partial\Psi(x,y,z,t)}{\partial y}+\int\frac{v_1}{r}\,d\varpi_1,\\ \mathfrak{W}(x,y,z,t)&=\frac{1-\lambda}{2}\,\frac{\partial\Psi(x,y,z,t)}{\partial z}+\int\frac{w_1}{r}\,d\varpi_1.\end{aligned}\right.$$

De ces égalités on déduit sans peine

$$
(20) \qquad \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} = \frac{1-\lambda}{2} \Delta \Psi + \int \left(u_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + w_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\varpi_1.
$$

Mais on a

$$
\begin{aligned}
& \int \left(u_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + w_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\varpi_1 \\
= & -\int \left(u_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) d\varpi_1 \\
= & \int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1} \right) \frac{1}{r} d\varpi_1 \\
& + \mathsf{S} [\; u_1 \cos(\mathrm{N}_1, x) + v_1 \cos(\mathrm{N}_1, y) + w_1 \cos(\mathrm{N}_1, z) \\
& \qquad + u_2 \cos(\mathrm{N}_2, x) + v_2 \cos(\mathrm{N}_2, y) + w_2 \cos(\mathrm{N}_2, z)] \, d\mathrm{S}_1,
\end{aligned}
$$

ou bien, en vertu des égalités (13) et (14),

$$
\int \left(u_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + w_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\varpi_1 = - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}.
$$

Si l'on tient compte de cette égalité et de l'égalité (10), on trouve

$$
(21) \qquad \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} = -\lambda \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}.
$$

Les égalités (19) donnent également

$$
\begin{aligned}
\Delta \mathfrak{U} &= \frac{1-\lambda}{2} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \Psi + \Delta \int \frac{u_1}{r} d\varpi_1, \\
\Delta \mathfrak{V} &= \frac{1-\lambda}{2} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \Psi + \Delta \int \frac{v_1}{r} d\varpi_1, \\
\Delta \mathfrak{W} &= \frac{1-\lambda}{2} \frac{\partial}{\partial z} \Delta \Psi + \Delta \int \frac{w_1}{r} d\varpi_1.
\end{aligned}
$$

Si l'on observe d'ailleurs que l'on a, d'après l'équation de Poisson,

$$\Delta \int \frac{u_1}{r}\, d\varpi_1 = -4\pi u,$$

$$\Delta \int \frac{v_1}{r}\, d\varpi_1 = -4\pi v,$$

$$\Delta \int \frac{w_1}{r}\, d\varpi_1 = -4\pi w,$$

et si l'on tient compte de l'égalité (10), les égalités précédentes deviennent

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta \mathfrak{U} &= (1-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial t} - 4\pi u,\\ \Delta \mathfrak{V} &= (1-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial t} - 4\pi v,\\ \Delta \mathfrak{W} &= (1-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial z\, \partial t} - 4\pi w. \end{aligned}\right.$$

Les égalités (19) mettent, en outre, en évidence la proposition suivante :

Les fonctions $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ varient d'une manière continue même lorsqu'on traverse une surface de discontinuité électrisée; il en est de même de leurs dérivées partielles du premier ordre par rapport à x, y, z.

Telles sont les diverses propriétés des fonctions $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ dont nous aurons à faire usage par la suite. Ces propriétés, jointes aux formules (5) ou (7) permettent d'établir tout ce que M. H. von Helmholtz a démontré touchant le mouvement de l'électricité dans les conducteurs immobiles. Parmi ces propriétés, il en est qui nous seront utiles par la suite et que nous allons établir au paragraphe suivant.

§ 4. — *Propriétés de la quantité* Π.

Considérons la quantité

$$(23)\qquad \Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{4}\int (\mathfrak{U} u + \mathfrak{V} v + \mathfrak{W} w)\, d\varpi,$$

dans laquelle l'intégration s'étend à tous les conducteurs parcourus par des courants, ou, ce qui revient au même, à tout l'espace.

Nous savons que l'on a en tout point

$$
(22)\qquad \left\{
\begin{aligned}
4\pi u &= (1-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial t} - \Delta\mathfrak{U},\\
4\pi v &= (1-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial t} - \Delta\mathfrak{V},\\
4\pi w &= (1-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial t} - \Delta\mathfrak{W}.
\end{aligned}
\right.
$$

En vertu de ces égalités (2), l'égalité (1) devient

$$
(24)\qquad
\begin{aligned}
\Pi = {}& \frac{\mathfrak{A}^2}{16\pi}\int(\mathfrak{U}\,\Delta\mathfrak{U} + \mathfrak{V}\,\Delta\mathfrak{V} + \mathfrak{W}\,\Delta\mathfrak{W})\,d\varpi\\
&-(1-\lambda)\frac{\mathfrak{A}^2}{16\pi}\int\left(\mathfrak{U}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial t} + \mathfrak{V}\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial t} + \mathfrak{W}\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial t}\right)d\varpi.
\end{aligned}
$$

Or le théorème de Green donne

$$
(25)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\int\mathfrak{U}\,\Delta\mathfrak{U}\,d\varpi + \mathbf{S}\,\mathfrak{U}\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial N_1} + \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial N_2}\right)dS &= -\int\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi,\\
\int\mathfrak{V}\,\Delta\mathfrak{V}\,d\varpi + \mathbf{S}\,\mathfrak{V}\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial N_1} + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial N_2}\right)dS &= -\int\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi,\\
\int\mathfrak{W}\,\Delta\mathfrak{W}\,d\varpi + \mathbf{S}\,\mathfrak{W}\left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial N_1} + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial N_2}\right)dS &= -\int\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi,
\end{aligned}
\right.
$$

les signes $\mathbf{S}$ indiquant des intégrations qui s'étendent aux diverses surfaces de discontinuité. Mais nous avons vu, à la fin du § 3, que l'on avait, aux divers points de ces surfaces,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial N_1} + \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial N_2} &= 0,\\
\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial N_1} + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial N_2} &= 0,\\
\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial N_1} + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial N_2} &= 0,
\end{aligned}
$$

en sorte que les égalités (25) donnent

$$
(26)\qquad
\begin{aligned}
&\int(\mathfrak{U}\,\Delta\mathfrak{U} + \mathfrak{V}\,\Delta\mathfrak{V} + \mathfrak{W}\,\Delta\mathfrak{W})\,d\varpi\\
&\quad = -\int\Bigg[\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z}\right)^2\\
&\qquad\qquad + \left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}\right)^2\\
&\qquad\qquad + \left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}\right)^2\Bigg]d\varpi.
\end{aligned}
$$

D'autre part, l'égalité (21)

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} = -\lambda \frac{\partial V}{\partial t}$$

donne

$$\begin{aligned}
&\int \left(\mathcal{U} \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial t} + \mathcal{V} \frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial t} + \mathcal{W} \frac{\partial^2 V}{\partial z\, \partial t} \right) d\varpi \\
&\quad = -\frac{1}{\lambda} \int \Bigg[\quad \mathcal{U} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial x\, \partial z} \right) \\
&\qquad\qquad + \mathcal{V} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y\, \partial x} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial y\, \partial z} \right) \\
&\qquad\qquad + \mathcal{W} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial z\, \partial x} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial z\, \partial y} + \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial z^2} \right) \Bigg] d\varpi.
\end{aligned}$$

Si l'on observe que les fonctions $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ et leurs dérivées partielles du premier ordre sont continues dans tout l'espace, on aura, au moyen d'intégrations par parties, la formule suivante

$$\begin{aligned}
(27) \qquad &\int \left(\mathcal{U} \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial t} + \mathcal{V} \frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial t} + \mathcal{W} \frac{\partial^2 V}{\partial z\, \partial t} \right) d\omega \\
&\quad = \frac{1}{\lambda} \int \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} \right)^2 d\varpi.
\end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} \right)^2 &= \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} \right)^2 \\
&\quad + 2 \left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \right),
\end{aligned}$$

en sorte que l'égalité (6) peut s'écrire

$$\begin{aligned}
(28) \qquad &\int \left(\mathcal{U} \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial t} + \mathcal{V} \frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial t} + \mathcal{W} \frac{\partial^2 V}{\partial z\, \partial t} \right) d\varpi \\
&\quad = \frac{1}{1-\lambda} \int \left[\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} \right)^2 \right] d\varpi \\
&\quad + \frac{2}{1-\lambda} \int \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \right) d\varpi \\
&\quad + \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} \int \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} \right]^2 d\varpi.
\end{aligned}$$

Au moyen d'intégrations par parties, on trouve sans peine l'égalité suivante

$$\int\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial z}-\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)d\varpi$$
$$=\mathbf{S}\,\mathcal{W}\Big[\ \ \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z_1}\cos(\mathrm{N}_1,y)+\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z_2}\cos(\mathrm{N}_2,y)$$
$$-\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y_1}\cos(\mathrm{N}_1,z)-\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y_2}\cos(\mathrm{N}_2,z)\Big]\,d\mathrm{S},$$

l'intégration qui figure au second membre s'étendant aux surfaces de discontinuité. Mais, comme nous l'avons vu à la fin du § 3, les dérivées partielles du premier ordre de la fonction $\mathcal{V}$ sont continues dans tout l'espace; on a donc

$$\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z_1}\cos(\mathrm{N}_1,y)+\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z_2}\cos(\mathrm{N}_2\,y)=0,$$
$$\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y_1}\cos(\mathrm{N}_1,z)+\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y_2}\cos(\mathrm{N}_2,z)=0,$$

et l'égalité précédente devient la première des égalités

$$\int\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial z}d\varpi=\int\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial y}d\varpi_1,$$
$$\int\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}d\varpi=\int\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial z}d\varpi_1,$$
$$\int\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}d\varpi=\int\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}d\varpi_1$$

qui transforment l'égalité (28) en

$$(29)\qquad \int\left(\mathcal{U}\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial x\,\partial t}+\mathcal{V}\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial y\,\partial t}+\mathcal{W}\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial z\,\partial t}\right)d\varpi$$
$$=-\frac{1}{1-\lambda}\int\Big[\left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial z}\right)^2$$
$$+2\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial z}+\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)\Big]\,d\varpi$$
$$+\frac{1}{\lambda(1-\lambda)}\int\left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial z}\right)^2d\varpi.$$

Les égalités (24), (26) et (29) donnent

$$(30)\qquad \Pi=-\frac{\mathfrak{A}^2}{16\pi}\Big\{\int\Big[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}-\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial x}-\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial y}-\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2\Big\}\,d\varpi$$
$$+\frac{1}{\lambda}\int\left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial z}\right)^2d\varpi.$$

Cette formule (30) montre que, *si la constante λ d'Helmholtz est positive ou nulle, la quantité* Π *est à coup sûr négative.*

C'est de ce résultat que M. H. von Helmholtz a déduit cet autre :

Sur un système de conducteurs immobiles, l'équilibre électrique est assurément stable si la constante λ est positive ou nulle.

Cherchons l'expression de $\frac{\partial \Pi}{\partial t}$, cette dérivée étant prise *en supposant tous les conducteurs immobiles.*

L'égalité (1) donne

$$\int \mathrm{U} u \, d\varpi = \int\int\Big[\frac{1+\lambda}{2}\frac{u_1}{r} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{x_1-x}{r^2}\Big(\frac{x_1-x}{r}u_1 + \frac{y_1-y}{r}v_1 + \frac{z_1-z}{r}w_1\Big)\Big] u \, d\varpi \, d\varpi_1$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathrm{U} u \, d\varpi = &\int\int\Big[\frac{1+\lambda}{2}\frac{u_1}{r} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{x_1-x}{r^2}\Big(\frac{x_1-x}{2}u_1 + \frac{y_1-y}{r}v_1 + \frac{z_1-z}{r}w_1\Big)\Big]\frac{\partial u}{\partial t} d\varpi \, d\varpi_1 \\ &+\int\int\Big[\frac{1+\lambda}{2r}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{x_1-x}{r^2}\Big(\frac{x_1-x}{r}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{y_1-y}{r}\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{z_1-z}{r}\frac{\partial w_1}{\partial t}\Big)\Big] u \, d\varpi \, d\varpi_1.\end{aligned}$$

Mais on a évidemment

$$\begin{aligned}&\int\int\Big[\frac{1+\lambda}{2r}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{(x_1-x)^2}{r^3}\frac{\partial u_1}{\partial t}\Big] u \, d\varpi \, d\varpi_1 \\ &= \int\int\Big[\frac{1+\lambda}{2}\frac{u_1}{r} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{(x_1-x)^2}{r^3}u_1\Big]\frac{\partial u}{\partial t} d\varpi \, d\varpi_1.\end{aligned}$$

Nous aurons donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathrm{U} u \, d\varpi = 2&\int\int\Big[\frac{1+\lambda}{2r}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{(x_1-x)^2}{r^3}\frac{\partial u_1}{\partial t}\Big] d\varpi \, d\varpi_1 \\ &+\int\int\frac{1-\lambda}{2}\frac{(x_1-x)(y_1-y)}{r^3}\Big(v_1\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial v_1}{\partial t}\Big) d\varpi \, d\varpi_1 \\ &+\int\int\frac{1-\lambda}{2}\frac{(x_1-x)(z_1-z)}{r^3}\Big(w_1\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial w_1}{\partial t}\Big) d\varpi \, d\varpi_1.\end{aligned}$$

De même

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{V} v\, d\varpi = 2\int\int\left[\frac{1+\lambda}{2r}\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{(y_1-y)^2}{r^3}\frac{\partial v_1}{\partial t}\right] d\varpi\, d\varpi_1$$
$$+\int\int\frac{1-\lambda}{2}\frac{(y_1-y)(z_1-z)}{r^3}\left(w_1\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial w_1}{\partial t}\right) d\varpi\, d\varpi_1$$
$$+\int\int\frac{1-\lambda}{2}\frac{(y_1-y)(x_1-x)}{r^3}\left(u_1\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) d\varpi\, d\varpi_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{W} w\, d\varpi = 2\int\int\left[\frac{1+\lambda}{2r}\frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{(z_1-z)^2}{r^3}\frac{\partial w_1}{\partial t}\right] d\varpi\, d\varpi_1$$
$$+\int\int\frac{1-\lambda}{2}\frac{(z_1-z)(x_1-x)}{r^3}\left(u_1\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) d\varpi\, d\varpi_1$$
$$+\int\int\frac{1-\lambda}{2}\frac{(z_1-z)(y_1-y)}{r^3}\left(v_1\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial v_1}{\partial t}\right) d\varpi\, d\varpi_1.$$

Ajoutons membre à membre ces trois égalités en observant que

$$\int\int\frac{(y_1-y)(z_1-z)}{r^3} w_1\frac{\partial v}{\partial t}\, d\varpi\, d\varpi_1 = \int\int\frac{(z_1-z)(y_1-y)}{r^3} w\frac{\partial v_1}{\partial t}\, d\varpi\, d\varpi_1,$$
$$\int\int\frac{(z_1-z)(y_1-y)}{r^3} v_1\frac{\partial w}{\partial t}\, d\varpi\, d\varpi_1 = \int\int\frac{(y_1-y)(z_1-z)}{r^3} v\frac{\partial w_1}{\partial t}\, d\varpi\, d\varpi_1,$$
$$\int\int\frac{(z_1-z)(x_1-x)}{r^3} u_1\frac{\partial w}{\partial t}\, d\varpi\, d\varpi_1 = \int\int\frac{(x_1-x)(z_1-z)}{r^3} u\frac{\partial w_1}{\partial t}\, d\varpi\, d\varpi_1,$$
$$\int\int\frac{(x_1-x)(z_1-z)}{r^3} w_1\frac{\partial u}{\partial t}\, d\varpi\, d\varpi_1 = \int\int\frac{(z_1-z)(x_1-x)}{r^3} w\frac{\partial u_1}{\partial t}\, d\varpi\, d\varpi_1,$$
$$\int\int\frac{(x_1-x)(y_1-y)}{r^3} v_1\frac{\partial u}{\partial t}\, d\varpi\, d\varpi_1 = \int\int\frac{(y_1-y)(x_1-x)}{r^3} v\frac{\partial u_1}{\partial t}\, d\varpi\, d\varpi_1,$$
$$\int\int\frac{(y_1-y)(x_1-x)}{r^3} u_1\frac{\partial v}{\partial t}\, d\varpi\, d\varpi_1 = \int\int\frac{(x_1-x)(y_1-y)}{r^3} u\frac{\partial v_1}{\partial t}\, d\varpi\, d\varpi_1,$$

et nous obtiendrons le résultat suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int(\mathfrak{U} u + \mathfrak{V} v + \mathfrak{W} w)\, d\varpi$$
$$= 2\int\int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{x_1-x}{r^2}\left(\frac{x_1-x}{r}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{y_1-y}{r}\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{z_1-z}{r}\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)\right] u\, d\varpi\, d\varpi_1$$
$$+ 2\int\int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{y_1-y}{r^2}\left(\frac{x_1-x}{r}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{y_1-y}{r}\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{z_1-z}{r}\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)\right] v\, d\varpi\, d\varpi_1$$
$$+ 2\int\int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{z_1-z}{r^2}\left(\frac{x_1-x}{r}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{y_1-y}{r}\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{z_1-z}{r}\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)\right] w\, d\varpi\, d\varpi_1,$$

résultat qui peut encore s'écrire, en vertu des égalités (1),

$$(31) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int (\mathcal{U} u + \mathcal{V} v + \mathcal{W} w)\, d\varpi = 2\int\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} u + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} v + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} w\right) d\varpi.$$

Les égalités (23) et (31) donnent

$$(32) \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} u + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} v + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} w\right) d\varpi.$$

Nous ferons usage de cette égalité au prochain Chapitre.

§ 5. — *Influence de la constante λ d'Helmholtz sur les phénomènes d'induction.*

Dans quel cas les trois composantes $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ [égalités (2)] de la force électromotrice d'induction en un point d'un système conducteur ont-elles des valeurs indépendantes de la valeur attribuée à la constante λ?

Les égalités (19)

$$\mathcal{U} = \int \frac{u_1}{r} d\varpi_1 + \frac{1-\lambda}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$
$$\mathcal{V} = \int \frac{v_1}{r} d\varpi_1 + \frac{1-\lambda}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial y},$$
$$\mathcal{W} = \int \frac{w_1}{r} d\varpi_1 + \frac{1-\lambda}{2}\frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

qui sont vraies à chaque instant t, que les conducteurs soient en repos ou en mouvement, résolvent immédiatement la question posée. Elles nous montrent que, *pour que les forces électromotrices d'induction engendrées par un conducteur mobile ou non soient indépendantes de la constante d'Helmholtz, il faut et il suffit que l'on ait dans tout l'espace*

$$(33) \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0,$$

ou, en d'autres termes, que la valeur de la fonction Ψ au même instant, en tous les points de l'espace, soit la même.

Ces conditions peuvent se transformer.

Avec É. Mathieu [1], réservons le nom de *seconde fonction poten-*

---

[1] E. MATHIEU, *Théorie du Potentiel et ses applications à l'électrostatique et au magnétisme,* t. I, p. 77; Paris, 1885.

tielle de la distribution dont les densités solide et superficielle sont ρ et à la quantité

$$V = \int \frac{\rho_1}{r} d\varpi_1 + \mathbf{S} \frac{\sigma_1}{r} dS_1$$

et nommons *première fonction potentielle* la quantité

$$J = \int \rho_1 r \, d\varpi_1 + \mathbf{S} \sigma_1 r \, dS_1.$$

Considérons la distribution qui a pour densité solide

$$\rho = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

et pour densité superficielle

$$\begin{aligned} \sigma = -[& \quad u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ & + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)]. \end{aligned}$$

Sa première fonction potentielle sera

$$(34) \qquad \begin{aligned} J = & -\int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) r \, d\varpi_1 \\ & - \mathbf{S} [\quad u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ & \qquad + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)] \, r \, dS_1. \end{aligned}$$

Les égalités (15) donneront

$$(35) \qquad \frac{d\Psi}{\partial x} = \frac{\partial J}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial J}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial J}{\partial z},$$

en sorte que les égalités (33) pourront s'écrire

$$(33 \; bis) \qquad \frac{\partial J}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial J}{dz} = 0.$$

La quantité J est elle-même susceptible d'une interprétation intéressante. Considérons la première fonction potentielle de la distribution électrique que porte le système :

$$(36) \qquad K = \int e_1 r \, d\varpi_1 + \mathbf{S} E_1 r \, dS_1.$$

On a

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{dy} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} = -[\quad & u_1 \cos(\mathrm{N}_1, x) + v_1 \cos(\mathrm{N}_1, y) + w_1 \cos(\mathrm{N}_1, z) \\ & + u_2 \cos(\mathrm{N}_2, x) + v_2 \cos(\mathrm{N}_2, y) + w_2 \cos(\mathrm{N}_2, z)].\end{aligned}$$

Supposons que les conducteurs qui forment le système demeurent immobiles, mais parcourus par les flux (u, v, w); dans le temps dt, K éprouverait une variation

$$\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial t} dt = dt \int \frac{\partial e_1}{\partial t} r \, d\varpi_1 + dt \, \mathbf{S} \frac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t} r \, d\mathrm{S}_1.$$

On voit que l'on a

$$\mathrm{J} = \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial t}. \tag{37}$$

Pour les courants uniformes, on a, à chaque instant,

$$\frac{\partial e}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} = 0;$$

on voit alors que les égalités (7 *bis*) sont toujours vérifiées pour de semblables courants.

Sous cette forme, on voit que les quantités $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ ont des valeurs indépendantes de λ, même lorsque les conducteurs sont mobiles, pourvu que les courants soient uniformes. *La valeur de λ n'influe donc pas sur les phénomènes d'induction produits dans des conducteurs quelconques, pourvu que les courants qui les parcourent soient uniformes.*

PREMIÈRE PARTIE.

LES FORCES ÉLECTRODYNAMIQUES.

CHAPITRE I.

L'ÉNERGIE INTERNE D'UN SYSTÈME DE CONDUCTEURS PARCOURUS PAR DES COURANTS.

§ 1. — *Détermination de l'énergie interne d'un système de conducteurs parcourus par des courants.*

Nous savons que cette énergie interne U est donnée par la formule

$$\mathrm{EU} = \mathrm{E}\Upsilon + \mathrm{W} + \sum\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)q + \mathrm{EU}', \tag{1}$$

ces diverses lettres ayant une signification et des propriétés qui ont été précisées dans nos *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme* au Livre XIV, Chapitre I, § 1.

Il s'agit de déterminer la forme de la quantité U'.

Nous ferons usage, pour cela, d'une extension de la loi de Joule.

Soient, dans un système parcouru par des courants, u, v, w les composantes du flux au point (x, y, z) et ρ la résistance spécifique en ce point. Posons

$$\rho u = \mathrm{E}_x, \qquad \rho v = \mathrm{E}_y, \qquad \rho w = \mathrm{E}_z. \tag{2}$$

Nous admettrons que, *pendant le temps dt, le système dégage une quantité de chaleur* $d\mathrm{Q}$ *donnée par l'égalité*

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,d\mathrm{Q} = dt\int\Big[&\left(\mathrm{E}_x - \mathrm{T}\frac{\partial\mathrm{E}_x}{\partial\mathrm{T}}\right)u \\ &+\left(\mathrm{E}_y - \mathrm{T}\frac{\partial\mathrm{E}_y}{\partial\mathrm{T}}\right)v \\ &+\left(\mathrm{E}_z - \mathrm{T}\frac{\partial\mathrm{E}_z}{\partial\mathrm{T}}\right)w\Big]\,d\varpi.\end{aligned} \tag{3}$$

Cette loi est l'extension naturelle aux conducteurs d'étendue finie en tout sens de la loi énoncée (*Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, Livre XIV, Chapitre II) pour les conducteurs linéaires.

L'application de cette loi aux conducteurs immobiles va nous servir à déterminer la forme de la quantité U'.

Ces conducteurs étant immobiles, nous aurons

$$dQ = -\,dU,$$

ou bien, en vertu de l'égalité (1),

$$(4)\qquad E\,dQ = -\left[E\,d\Upsilon + dW + d\sum\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)q + E\,dU'\right].$$

La loi dont l'égalité (3) représente la généralisation a été établie en négligeant les variations que les changements d'état du système font éprouver à la quantité Θ. Il est alors aisé de voir que l'on a

$$(5)\qquad \begin{aligned} dW + d\sum\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)q &= dt\int\Bigg[\frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial x}u + \frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial y}v + \frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial z}w \\ &\qquad - T\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial T}u + \frac{\partial^2\Theta}{\partial y\,\partial T}v + \frac{\partial^2\Theta}{\partial z\,\partial T}w\right)\Bigg]d\varpi. \end{aligned}$$

D'autre part, la théorie des courants hydro-électriques montre que l'on a, en général,

$$(6)\quad E\,d\Upsilon = -\,dt\int\left[\left(\varphi_x - T\frac{\partial\varphi_x}{\partial T}\right)u + \left(\varphi_y - T\frac{\partial\varphi_y}{\partial T}\right)v + \left(\varphi_z - T\frac{\partial\varphi_z}{\partial T}\right)w\right]d\varpi.$$

Les égalités (4), (5), (6) donnent donc

$$(7)\quad \begin{aligned} E\,dQ = dt\int\Bigg\{&\left[\varphi_x - T\frac{\partial\varphi_x}{\partial T} - \varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)\right]u \\ &+ \left[\varphi_y - T\frac{\partial\varphi_y}{\partial T} - \varepsilon\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)\right]v \\ &+ \left[\varphi_z - T\frac{\partial\varphi_z}{\partial T} - \varepsilon\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)\right]w\Bigg\}d\varpi - E\,dU'. \end{aligned}$$

D'autre part, les égalités (2), jointes aux égalités (5) du Chapitre préliminaire, donnent, dans le cas où les conducteurs sont immobiles,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_x &= -\frac{\partial(\varepsilon \mathrm{V} + \Theta)}{\partial z} + \varphi_x - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t},\\
\mathbf{E}_y &= -\frac{\partial(\varepsilon \mathrm{V} + \Theta)}{\partial y} + \varphi_y - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t},\\
\mathbf{E}_z &= -\frac{\partial(\varepsilon \mathrm{V} + \Theta)}{\partial z} + \varphi_z - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

Ces égalités, jointes à l'égalité (3), donnent

$$
\begin{aligned}
(8)\quad \mathbf{E}\,d\mathrm{Q} = dt \int \Bigg\{ & \left[\varphi_x - \mathrm{T}\frac{\partial \varphi_x}{\partial \mathrm{T}} - \varepsilon\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right) - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}\right] u\\
&+ \left[\varphi_y - \mathrm{T}\frac{\partial \varphi_y}{\partial \mathrm{T}} - \varepsilon\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right) - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}\right] v\\
&+ \left[\varphi_z - \mathrm{T}\frac{\partial \varphi_z}{\partial \mathrm{T}} - \varepsilon\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right) - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t}\right] w \Bigg\}\, d\varpi.
\end{aligned}
$$

La comparaison des égalités (7) et (8) donne

$$
(9)\qquad \mathbf{E}\,d\mathrm{U}' = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,dt \int \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}u + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}v + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t}w\right) d\varpi.
$$

Cette égalité est établie en supposant immobiles tous les conducteurs du système.

Or, dans ces conditions, si l'on pose [Chapitre préliminaire, égalité (23)]

$$
(10)\qquad \Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{4}\int (\mathfrak{U}u + \mathfrak{V}v + \mathfrak{W}w)\, d\varpi,
$$

nous avons vu que l'on avait [*ibid.*, égalité (32)]

$$
(11)\qquad \frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}u + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}v + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t}w\right) d\varpi.
$$

Si l'on compare les égalités (9) et (11), on trouve

$$
\mathbf{E}\frac{d\mathrm{U}'}{dt} = -\frac{\partial \Pi}{\partial t}.
$$

Cette égalité doit avoir lieu quelles que soient les variations subies par les flux électriques sur les divers conducteurs; elle exige seulement que ceux-ci soient immobiles. De cette égalité on déduit

$$\mathrm{EU}' = -\Pi + \mathrm{C},$$

C étant une quantité qui peut dépendre de la forme et de la position des divers conducteurs dont le système est composé, mais qui ne dépend pas des flux électriques dont le système est le siège.

Mais, si l'on observe que les quantités Π et U' s'annulent toutes deux lorsque, sur le système, tous les flux deviennent égaux à o, on voit que l'on a nécessairement $\mathrm{C} = 0$ et

$$\mathrm{EU}' = -\Pi. \tag{12}$$

Les égalités (1), (10) et (11) déterminent complètement l'énergie interne d'un système parcouru par des courants quelconques.

§ 2. — *Variation que la quantité* Π *subit dans une modification quelconque.*

Les relations qu'a l'énergie interne d'un système parcouru par des courants avec la quantité Π déterminée par l'égalité (10) nous amènent nécessairement à la question suivante : *Étudier la variation que subit la quantité* Π *lorsqu'on fait varier d'une manière quelconque la forme et la position des conducteurs que renferme le système et les flux électriques qui traversent ces conducteurs.*

Posons

$$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{U}_1 &= \frac{1+\lambda}{2}\frac{u_1}{r} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{x_1-x}{r^2}\left(\frac{x_1-x}{r}u_1 + \frac{y_1-y}{r}v_1 + \frac{z_1-z}{r}w_1\right),\\
\mathrm{V}_1 &= \frac{1+\lambda}{2}\frac{v_1}{r} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{y_1-y}{r^2}\left(\frac{x_1-x}{r}u_1 + \frac{y_1-y}{r}v_1 + \frac{z_1-z}{r}w_1\right),\\
\mathrm{W}_1 &= \frac{1+\lambda}{2}\frac{w_1}{2} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{z_1-z}{r^2}\left(\frac{x_1-x}{r}u_1 + \frac{y_1-y}{r}v_1 + \frac{z_1-z}{r}w_1\right).
\end{aligned}\right. \tag{13}$$

Il est facile de voir que la quantité

$$\mathrm{U}_1 u + \mathrm{V}_1 v + \mathrm{W}_1 w$$

sera une quantité où figureront symétriquement les variables relatives aux éléments $d\varpi$, $d\varpi_1$, en sorte que l'on aura

$$\mathrm{U}_1 u + \mathrm{V}_1 v + \mathrm{W}_1 w = \mathrm{U} u_1 + \mathrm{V} v_1 + \mathrm{W} w_1 \tag{14}$$

et que l'on pourra écrire

$$\Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\sum (U_1 u + V_1 v + W_1 w)\, d\varpi\, d\varpi_1, \tag{15}$$

le signe $\sum$ indiquant une sommation qui s'étend à toutes les combinaisons distinctes des éléments du système deux à deux.

Si l'élément $d\varpi$ variait seul, tout, dans l'élément $d\varpi_1$, demeurant invariable, la quantité

$$(U_1 u + V_1 v + W_1 w)\, d\varpi\, d\varpi_1$$

subirait une variation

$$\delta[(U_1 u + V_1 v + W_1 w)\, d\varpi]\, d\varpi_1$$

qui pourrait encore s'écrire, à cause de l'égalité (12),

$$\delta[(U u_1 + V v_1 + W w_1)\, d\varpi]\, d\varpi_1.$$

Si, au contraire, l'élément $d\varpi_1$ variait seul, tout, dans l'élément $d\varpi$, demeurant invariable, la quantité

$$(U_1 u + V_1 v + W_1 w)\, d\varpi\, d\varpi_1$$

subirait une variation

$$\delta_1[(U_1 u + V_1 v + W_1 w)\, d\varpi_1]\, d\varpi$$

qui peut encore s'écrire, en vertu de l'égalité (12),

$$\delta_1[(U u_1 + V v_1 + W w_1)\, d\varpi_1]\, d\varpi.$$

La variation totale de la quantité

$$(U_1 u + V_1 v + W_1 w)\, d\varpi\, d\varpi_1$$

est donc

$$\delta[(U u_1 + V v_1 + W w_1)\, d\varpi]\, d\varpi_1 + \delta_1[(U_1 u + V_1 v + W_1 w)\, d\varpi_1]\, d\varpi$$

ou, si l'on préfère,

$$\delta[(U_1 u + V_1 v + W_1 w)\, d\varpi]\, d\varpi_1 + \delta_1[(U u_1 + V v_1 + W w_1)\, d\varpi_1]\, d\varpi.$$

On a donc, d'après l'égalité (15),

$$\delta\Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\sum\left\{\delta[(\mathrm{U}u_1 + \mathrm{V}v_1 + \mathrm{W}w_1)\,d\varpi]\,d\varpi_1 + \delta_1[(\mathrm{U}_1 u + \mathrm{V}_1 v + \mathrm{W}_1 w)\,d\varpi_1]\,d\varpi\right\}$$

ou

$$\delta\Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\sum\left\{\delta[(\mathrm{U}_1 u + \mathrm{V}_1 v + \mathrm{W}_1 w)\,d\varpi]\,d\varpi_1 + \delta_1[(\mathrm{U}u_1 + \mathrm{V}v_1 + \mathrm{W}w_1)\,d\varpi_1]\,d\varpi\right\}.$$

D'ailleurs, on voit sans peine que ces égalités peuvent s'écrire

$$\delta\Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int d\varpi_1 \int \delta[(\mathrm{U}_1 u + \mathrm{V}_1 v + \mathrm{W}_1 w)\,d\varpi], \tag{16}$$

$$\delta\Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int d\varpi_1 \int \delta[(\mathrm{U}u_1 + \mathrm{V}v_1 + \mathrm{W}w_1)\,d\varpi], \tag{16 bis}$$

les intégrations s'étendant toutes au système tout entier. On doit se souvenir que δ indique une variation où l'élément $d\varpi$ varie seul, tout, en l'élément $d\varpi_1$, demeurant invariable.

C'est la forme (16) qui va nous servir au calcul explicite de $\delta\Pi$.

Soient δx, δy, δz les composantes du déplacement subi par l'élément $d\varpi$. D'après la définition de la caractéristique δ, il est évident qu'on aura simplement

$$\left\{\begin{aligned} \delta\mathrm{U}_1 &= \frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial z}\,\delta z, \\ \delta\mathrm{V}_1 &= \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial z}\,\delta z, \\ \delta\mathrm{W}_1 &= \frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial z}\,\delta z. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Si l'élément $d\varpi$ se déplaçait en entraînant avec lui le flux électrique dont il est le siège, sans que ce flux changeât ni de grandeur ni de direction par rapport à des axes invariablement liés à l'élément $d\varpi$, les composantes u, v, w de ce flux par rapport aux axes Ox, Oy, Oz qui sont invariables subiraient des variations $\delta' u$, $\delta' v$, $\delta' w$. Nous pouvons poser

$$\left\{\begin{aligned} \delta u &= \delta' u + \frac{\partial u}{\partial t}\,dt, \\ \delta v &= \delta' v + \frac{\partial v}{\partial t}\,dt, \\ \delta w &= \delta' w + \frac{\partial w}{\partial t}\,dt. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

On voit que $\frac{\partial u}{\partial t}dt$, $\frac{\partial v}{\partial t}dt$, $\frac{\partial w}{\partial t}dt$ sont les variations qu'éprouveraient, pendant le temps dt, les composantes u, v, w du flux en un point de l'élément $d\varpi$, si celui-ci demeurait immobile.

Calculons $\delta' u$, $\delta' v$, $\delta' w$.

Pour cela, prenons trois axes rectangulaires $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ dont l'orientation soit invariablement liée à celle de la matière qui forme l'élément $d\varpi$. Soient φ, ψ, χ les composantes par rapport à $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ du flux en un point de l'élément $d\varpi$. Nous aurons

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \varphi\cos(\xi,x) + \psi\cos(\eta,x) + \chi\cos(\zeta,x),\\ v &= \varphi\cos(\xi,y) + \psi\cos(\eta,y) + \chi\cos(\zeta,y),\\ w &= \varphi\cos(\xi,z) + \psi\cos(\eta,z) + \chi\cos(\zeta,z).\end{aligned}\right.$$

Si l'élément $d\varpi$ se déplace en entraînant le flux qui le traverse, les quantités φ, ψ, χ demeurent invariables; elles doivent donc être comptées comme constantes dans le calcul des quantités $\delta' u$, $\delta' v$, $\delta' w$, en sorte que l'on aura

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta' u &= \varphi\,\delta\cos(\xi,x) + \psi\,\delta\cos(\eta,x) + \chi\,\delta\cos(\zeta,x),\\ \delta' v &= \varphi\,\delta\cos(\xi,y) + \psi\,\delta\cos(\eta,y) + \chi\,\delta\cos(\zeta,y),\\ \delta' w &= \varphi\,\delta\cos(\xi,z) + \psi\,\delta\cos(\eta,z) + \chi\,\delta\cos(\zeta,z).\end{aligned}\right.$$

Soient ω, ω', ω'' les composantes relatives à Ox, Oy, Oz de la rotation instantanée de la particule $d\varpi$. On voit facilement que l'on a

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta\cos(\xi,x) &= \cos(\xi,z)\,\omega' - \cos(\xi,y)\,\omega'',\\ \delta\cos(\xi,y) &= \cos(\xi,x)\,\omega'' - \cos(\xi,z)\,\omega,\\ \delta\cos(\xi,z) &= \cos(\xi,y)\,\omega - \cos(\xi,x)\,\omega',\\ \delta\cos(\eta,x) &= \cos(\eta,z)\,\omega' - \cos(\eta,y)\,\omega'',\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

Les égalités (19), (20), (21) donnent

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta' u &= w\omega' - v\omega'',\\ \delta' v &= u\omega'' - w\omega,\\ \delta' w &= v\omega - u\omega'.\end{aligned}\right.$$

Les égalités (16), (17), (18), (22) donnent

$$\begin{aligned}
\delta \Pi = &- \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int d\varpi_1 \int \Big[\quad u\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial U_1}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial U_1}{\partial z}\,\delta z\right) \\
&\qquad + v\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial V_1}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial V_1}{\partial z}\,\delta z\right) \\
&\qquad + w\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial W_1}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial W_1}{\partial z}\,\delta z\right)\Big]\, d\varpi \\
&- \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int d\varpi_1 \int \Big[\quad U_1\left(\frac{\partial u}{\partial t}\,dt + w\omega' - v\omega''\right) \\
&\qquad + V_1\left(\frac{\partial v}{\partial t}\,dt + u\omega'' - w\omega\right) \\
&\qquad + W_1\left(\frac{\partial w}{\partial t}\,dt + v\omega - u\omega'\right)\Big]\, d\varpi \\
&- \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int d\varpi_1 \int (U_1 u + V_1 v + W_1 w)\,\delta(d\varpi).
\end{aligned}$$

Si l'on observe que l'on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U} &= \int U_1\, d\varpi_1, \\
\mathfrak{V} &= \int V_1\, d\varpi_1, \\
\mathfrak{W} &= \int W_1\, d\varpi_1,
\end{aligned}$$

on pourra écrire

$$\begin{aligned}
(23)\quad \delta \Pi = &- \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int \Big[\quad u\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z}\,\delta z\right) \\
&\qquad + v\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}\,\delta z\right) \\
&\qquad + w\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z}\,\delta z\right)\Big]\, d\varpi \\
&- \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,dt \int \left(\mathfrak{U}\,\frac{\partial u}{\partial t} + \mathfrak{V}\,\frac{\partial v}{\partial t} + \mathfrak{W}\,\frac{\partial w}{\partial t}\right) d\varpi \\
&- \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int [(\mathfrak{V}\omega'' - \mathfrak{W}\omega')\,u + (\mathfrak{W}\omega - \mathfrak{U}\omega'')\,v + (\mathfrak{U}\omega' - \mathfrak{V}\omega)\,w]\, d\varpi \\
&- \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int (\mathfrak{U} u + \mathfrak{V} v + \mathfrak{W} w)\,\delta(d\varpi).
\end{aligned}$$

Cette égalité (23) nous sera d'un grand usage dans le calcul des forces électrodynamiques.

CHAPITRE II.

LES FORCES ÉLECTRODYNAMIQUES ENTRE CONDUCTEURS D'ÉTENDUE FINIE EN TOUT SENS.

§ 1. — *Travail élémentaire des actions électrodynamiques.*

Considérons un système de conducteurs d'étendue finie en tout sens, parcourus par des courants quelconques. Imaginons que ce système éprouve une modification infiniment petite quelconque.

Son énergie interne croît de δU; sa force vive de $\delta \sum \frac{mv^2}{2}$; les forces extérieures qui le sollicitent effectuent un travail $d\mathfrak{G}_e$; il dégage une quantité de chaleur dQ et l'on a

$$(1) \qquad \mathrm{E}\,dQ + d\sum \frac{mv^2}{2} = -\mathrm{E}\,\delta U + d\mathfrak{G}_e.$$

D'autre part, la loi de Joule [Chapitre I, égalité (3)] donne

$$(2) \qquad \mathrm{E}\,dQ = dt\int\left[\left(\mathrm{E}_x - \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial \mathrm{T}}\right)u + \left(\mathrm{E}_y - \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial \mathrm{T}}\right)v + \left(\mathrm{E}_z - \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial \mathrm{T}}\right)w\right]d\varpi.$$

On peut dire que les forces intérieures au système effectuent un travail

$$(3) \qquad d\mathfrak{G}_i = \delta\sum \frac{mv^2}{2} - d\mathfrak{G}_e.$$

L'ensemble des égalités (1), (2) et (3) donne

$$(4) \qquad d\mathfrak{G}_i = -\mathrm{E}\,\delta U + dt\int\left[\left(\mathrm{E}_x - \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial \mathrm{T}}\right)u + \left(\mathrm{E}_y - \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial \mathrm{T}}\right)v + \left(\mathrm{E}_z - \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial \mathrm{T}}\right)w\right]d\varpi.$$

Dans notre Mémoire sur l'*Induction électrodynamique* (¹) [Chapitre I, égalités (1 *bis*)], nous avons donné des égalités qui, jointes à la définition des quantités E_x, E_y, E_z données par les égalités (2) du Chapitre précédent, nous permettent d'écrire

$$(5)\qquad \begin{cases} E_x = -\varepsilon \dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + \varphi_x + \mathcal{E}_x. \\ E_y = -\varepsilon \dfrac{\partial V}{\partial y} - \dfrac{\partial \Theta}{\partial y} + \varphi_y + \mathcal{E}_y, \\ E_z = -\varepsilon \dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{\partial \Theta}{\partial z} + \varphi_z + \mathcal{E}_z. \end{cases}$$

Les égalités (4) et (5), jointes aux égalités (1) et (12) du Chapitre précédent, permettent d'écrire

$$(6)\qquad \begin{aligned} d\mathcal{E}_i = {} & dt \int \left[\left(\varphi_x - T\frac{\partial \varphi_x}{\partial T}\right) u + \left(\varphi_y - T\frac{\partial \varphi_y}{\partial T}\right) v + \left(\varphi_z - T\frac{\partial \varphi_z}{\partial T}\right) w \right] d\varpi \\ & - E\,\delta\Upsilon \\ & - \varepsilon\, dt \int \left(\frac{\partial V}{\partial x} u + \frac{\partial V}{\partial y} v + \frac{\partial V}{\partial x} w \right) d\varpi - \delta W \\ & - dt \int \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} - T \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x\, \partial T} \right) u + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} - T \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y\, \partial T} \right) v \right. \\ & \qquad\qquad \left. + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} - T \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z\, \partial T} \right) w \right] d\varpi \\ & - \delta \sum \left(\Theta - T\frac{\partial \Theta}{\partial T} \right) q \\ & + dt \int (\mathcal{E}_x u + \mathcal{E}_y v + \mathcal{E}_z w)\, d\varpi + \delta \Pi. \end{aligned}$$

Or les diverses théories exposées au Tome I de nos *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme* nous laissent facilement reconnaître :

1° Que la quantité

$$-\varepsilon\, dt \int \left(\frac{\partial V}{\partial x} u + \frac{\partial V}{\partial y} v + \frac{\partial V}{\partial z} w \right) d\varpi - \delta W$$

représente le travail élémentaire des actions électrostatiques qui s'exercent entre les diverses parties du système conformément aux lois de Coulomb;

2° Que, si l'on néglige les variations qu'éprouve la quantité Θ par suite

(¹) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VII, B.; 1893.

du changement d'état des diverses parties du système (approximation que nous sommes convenu de faire) la quantité

$$-dt\int\left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}-\mathrm{T}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial \mathrm{T}}\right)u+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}-\mathrm{T}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\,\partial \mathrm{T}}\right)v+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}-\mathrm{T}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z\,\partial \mathrm{T}}\right)w\right]d\varpi$$
$$-\delta\sum\left(\Theta-\mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{T}}\right)q$$

représente le travail élémentaire des actions moléculaires imaginées par M. H. von Helmholtz;

3° Que la quantité

$$dt\int\left[\left(\varphi_x-\mathrm{T}\frac{\partial\varphi_x}{\partial \mathrm{T}}\right)u+\left(\varphi_y-\mathrm{T}\frac{\partial\varphi_y}{\partial \mathrm{T}}\right)v+\left(\varphi_z-\mathrm{T}\frac{\partial\varphi_z}{\partial \mathrm{T}}\right)w\right]d\varpi$$
$$-\mathrm{E}\,\delta\Upsilon$$

représente le travail élémentaire des forces qui s'exerceraient entre les diverses parties du système si on les ramenait à l'état neutre.

On voit donc que la présence de courants électriques dans le système a pour effet d'ajouter aux forces intérieures déjà connues de nouvelles forces, dont le travail élémentaire a pour valeur

$$(7)\qquad d\tau=-\,dt\int(\mathcal{E}_x u+\mathcal{E}_y v+\mathcal{E}_z w)\,d\varpi+\delta\Pi.$$

Ce sont les *forces électrodynamiques*.

§ 2. — *Calcul plus complet de ce travail.*

La quantité $\delta\Pi$ nous est donnée par l'égalité (23) du Chapitre précédent. Il s'agit donc de calculer plus complètement la quantité

$$dt\int(\mathcal{E}_x u+\mathcal{E}_y v+\mathcal{E}_z w)\,dt.$$

Nous aurons

$$(8)\qquad \begin{cases}\mathcal{E}_x\,dt=\delta\mathrm{L}_1+\delta\mathrm{L}_2+\ldots,\\ \mathcal{E}_y\,dt=\delta\mathrm{M}_1+\delta\mathrm{M}_2+\ldots,\\ \mathcal{E}_z\,dt=\delta\mathrm{N}_1+\delta\mathrm{N}_2+\ldots,\end{cases}$$

les quantités $\delta\mathrm{L}$, $\delta\mathrm{M}$, $\delta\mathrm{N}$ ayant les valeurs données dans notre Mémoire sur l'*Induction électrodynamique*, Chapitre II, égalités (13). Seulement, dans ces dernières égalités, les notations ne sont pas les mêmes que dans le présent Chapitre. Pour faire concorder ces notations, il faudra remplacer

$$\begin{array}{lllclll} \Phi_1, & \Psi_1, & X_1 & \text{par} & U_1, & V_1, & W_1, \\ \xi, & \eta, & \zeta & \text{par} & x, & y, & z, \\ f, & g, & h & \text{par} & \delta x, & \delta y, & \delta z. \end{array}$$

On aura alors, par exemple,

$$\begin{aligned} \delta L_1 &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\delta(U_1\, d\varpi_1) + \left(U_1\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + V_1\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} + W_1\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)d\varpi_1\right], \\ \delta M_1 &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\delta(V_1\, d\varpi_1) + \left(U_1\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + V_1\frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + W_1\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right)d\varpi_1\right], \\ \delta N_1 &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\delta(W_1\, d\varpi_1) + \left(U_1\frac{\partial\,\delta x}{\partial z} + V_1\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + W_1\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)d\varpi_1\right]. \end{aligned}$$

Si l'on observe que l'on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} &= \int U_1\, d\varpi_1, \\ \mathfrak{V} &= \int V_1\, d\varpi_1, \\ \mathfrak{W} &= \int W_1\, d\varpi_1, \end{aligned}$$

on peut écrire les égalités (8)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x\, dt &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{U} + \mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right), \\ \mathcal{E}_y\, dt &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{V} + \mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right), \\ \mathcal{E}_z\, dt &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{W} + \mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial z} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} (9) \qquad & dt\int(\mathcal{E}_x u + \mathcal{E}_y v + \mathcal{E}_z w)\, d\varpi \\ &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int(u\,\delta\mathfrak{U} + v\,\delta\mathfrak{V} + w\,\delta\mathfrak{W})\, d\varpi \\ &\quad -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\Bigg[\left(\mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)u \\ &\qquad + \left(\mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right)v \\ &\qquad + \left(\mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial z} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)w\Bigg]\, d\varpi. \end{aligned}$$

L'égalité

$$2\Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int (\mathfrak{U} u + \mathfrak{V} v + \mathfrak{W} w)\, d\varpi$$

donne

$$\begin{aligned} 2\,\delta\Pi = &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int (u\,\delta\mathfrak{U} + v\,\delta\mathfrak{V} + w\,\delta\mathfrak{W})\, d\varpi \\ &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int (\mathfrak{U}\,\delta u + \mathfrak{V}\,\delta v + \mathfrak{W}\,\delta w)\, d\varpi \\ &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int (\mathfrak{U} u \quad + \mathfrak{V} v \quad + \mathfrak{W} w)\,\delta(d\varpi). \end{aligned}$$

Si l'on remplace δu, δv, δw par leurs valeurs déduites des égalités (18) et (22) du Chapitre précédent, on trouve

$$\begin{aligned} (10) \quad &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int (u\,\delta\mathfrak{U} + v\,\delta\mathfrak{V} + w\,\delta\mathfrak{W})\, d\varpi \\ &= 2\,\delta\Pi + \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\, dt \int \left(\mathfrak{U}\frac{\partial u}{\partial t} + \mathfrak{V}\frac{\partial v}{\partial t} + \mathfrak{W}\frac{\partial w}{\partial t}\right) d\varpi \\ &\quad + \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int [u(\mathfrak{V}\,\omega'' - \mathfrak{W}\,\omega') + v(\mathfrak{W}\,\omega - \mathfrak{U}\,\omega'') + w(\mathfrak{U}\,\omega' - \mathfrak{V}\,\omega)]\, d\varpi \\ &\quad + \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int (\mathfrak{U} u + \mathfrak{V} v + \mathfrak{W} w)\,\delta(d\varpi). \end{aligned}$$

Les égalités (7), (9) et (10) donnent

$$\begin{aligned} (11) \quad d\tau = &-\delta\Pi - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\, dt \int \left(\mathfrak{U}\frac{\partial u}{\partial t} + \mathfrak{V}\frac{\partial v}{\partial t} + \mathfrak{W}\frac{\partial w}{\partial t}\right) d\varpi \\ &- \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int (\mathfrak{U} u + \mathfrak{V} v + \mathfrak{W} w)\,\delta(d\varpi) \\ &- \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int [(\mathfrak{V}\,\omega'' - \mathfrak{W}\,\omega')u + (\mathfrak{W}\,\omega - \mathfrak{U}\,\omega'')v + (\mathfrak{U}\,\omega' - \mathfrak{V}\,\omega)w]\, d\varpi \\ &+ \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int \Bigg[\quad \left(\mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right) u \\ &\qquad + \left(\mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right) v \\ &\qquad + \left(\mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial z} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right) w \Bigg]\, d\varpi. \end{aligned}$$

Remplaçons maintenant $\delta\Pi$ par son expression, déduite de l'égalité (23) du Chapitre précédent, et nous trouverons

$$(11\,bis)\qquad \begin{aligned} d\tau = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\Big[&\ u\left(\frac{\partial \mho}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \mho}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \mho}{\partial z}\,\delta z\right) \\ &+ v\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,\delta z\right) \\ &+ w\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \psi}{\partial z}\,\delta z\right)\Big]\,d\varpi \\ + \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\Big[&\ u\left(\mho\,\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \varphi\,\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} + \psi\,\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right) \\ &+ v\left(\mho\,\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \varphi\,\frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \psi\,\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right) \\ &+ w\left(\mho\,\frac{\partial\,\delta x}{\partial z} + \varphi\,\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \psi\,\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)\Big]\,d\varpi. \end{aligned}$$

§ 3. — *Transformation de l'expression précédente; calcul des forces électrodynamiques.*

Conservant le premier terme de l'expression de $d\tau$, nous allons transformer le dernier au moyen d'intégrations par parties.

Soit S une surface de discontinuité qui sépare deux milieux conducteurs 1 et 2. Les composantes du mouvement ne sont pas forcément les mêmes de part et d'autre de cette surface; d'un côté, elles seront δx_1, δy_1, δz_1; de l'autre, δx_2, δy_2, δz_2.

On voit sans peine que l'on peut écrire

$$(12)\qquad \begin{aligned} \int\Big[&\ u\left(\mho\,\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \varphi\,\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} + \psi\,\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right) \\ &+ v\left(\mho\,\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \varphi\,\frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \psi\,\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right) \\ &+ w\left(\mho\,\frac{\partial\,\delta x}{\partial z} + \varphi\,\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \psi\,\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)\Big]\,d\varpi \\ - \mathbf{S}\Big\{ &\ [u_1\cos(N_1, x) + v_1\cos(N_1, y) + w_1\cos(N_1, z)]\,(\mho\,\delta x_1 + \varphi\,\delta y_1 + \psi\,\delta z_1) \\ &+ [u_2\cos(N_2, x) + v_2\cos(N_2, y) + w_2\cos(N_2, z)]\,(\mho\,\delta x_2 + \varphi\,\delta y_2 + \psi\,\delta z_2)\Big\}\,dS \\ - \int\Big[&\ u\left(\frac{\partial \mho}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\delta y + \frac{\partial \psi}{\partial x}\,\delta z\right) \\ &+ v\left(\frac{\partial \mho}{\partial y}\,\delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \psi}{\partial y}\,\delta z\right) \\ &+ w\left(\frac{\partial \mho}{\partial z}\,\delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,\delta y + \frac{\partial \psi}{\partial z}\,\delta z\right)\Big]\,d\varpi \\ - \int &\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)(\mho\,\delta x + \varphi\,\delta y + \psi\,\delta z)\,d\varpi. \end{aligned}$$

Les égalités (11 *bis*) et (12) donnent

$$
(13)\quad \begin{aligned}
d\tau = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathbf{S}\Big\{ & [u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z)](\mathfrak{U}\,\delta x_1+\mathfrak{V}\,\delta y_1+\mathfrak{W}\,\delta z_1)\\
& +[u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)](\mathfrak{U}\,\delta x_2+\mathfrak{V}\,\delta y_2+\mathfrak{W}\,\delta z_2)\Big\}\,dS\\
+\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\Big\{ & \left[\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}\right)v-\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x}\right)w-\mathfrak{U}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\delta x\\
& +\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}\right)w-\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}\right)u-\mathfrak{V}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\delta y\\
& +\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x}\right)u-\left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}\right)v-\mathfrak{W}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\delta z\Big\}\,d\varpi.
\end{aligned}
$$

Posons

$$
(14)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{P} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y}\right),\\
\mathfrak{Q} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z}\right),\\
\mathfrak{R} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}\right),
\end{aligned}\right.
$$

et l'égalité (13) nous permettra d'énoncer les résultats suivants :

Un conducteur continu quelconque, traversé par des courants quelconques, subit deux sortes de forces électrodynamiques :

1° *Des forces appliquées à chacun des éléments des surfaces de discontinuité qui le terminent. L'élément* dS *subit une force dont les composantes sont* $\mathcal{X}\,dS$, $\mathcal{Y}\,dS$, $\mathcal{Z}\,dS$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ *ayant les valeurs suivantes :*

$$
(15)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathcal{X} &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathfrak{U}\,[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)],\\
\mathcal{Y} &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathfrak{V}\,[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)],\\
\mathcal{Z} &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathfrak{W}\,[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)],
\end{aligned}\right.
$$

N_i *étant la normale à l'élément* dS *vers l'intérieur du conducteur.*

2° *Des forces appliquées à chacun des éléments de volume du conducteur. L'élément* $d\varpi$ *subit une force dont les composantes sont* $X\,d\varpi$,

$Y\,d\varpi$, $Z\,d\varpi$. X, Y, Z *ayant les valeurs suivantes :*

$$
(16)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
X &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left[\mathfrak{R}v - \mathfrak{Q}w - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{U}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right],\\
Y &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left[\mathfrak{P}w - \mathfrak{R}u - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{V}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right],\\
Z &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left[\mathfrak{Q}u - \mathfrak{P}v - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{W}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Ces formules sont dues à M. H. von Helmholtz (1).

§ 4. — *Remarque relative aux forces appliquées à la surface d'un conducteur.*

Imaginons qu'une surface de discontinuité S sépare deux conducteurs 1 et 2; supposons, en outre, que les deux conducteurs *adhèrent* l'un à l'autre le long de la surface S, en sorte que les composantes δx_1, δy_1, δz_1 d'un point M_1 du conducteur 1 infiniment voisin de la surface S diffèrent infiniment peu des composantes δx_2, δy_2, δz_2, d'un point M_2, appartenant au conducteur 2, mais infiniment voisin du point M_1. Dans ces conditions, la force appliquée à un point de la surface S, considéré comme faisant partie du conducteur 1, et la force appliquée au même point de la surface S, considéré comme faisant partie du conducteur 2, se composent en une force unique dont les composantes sont

$$
\begin{aligned}
\xi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathfrak{U}[\;& u_1\cos(N_1,x) + v_1\cos(N_1,y) + w_1\cos(N_1,z)\\
&+ u_2\cos(N_2,x) + v_2\cos(N_2,y) + w_2\cos(N_2,z)],\\
\eta = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathfrak{V}[\;& u_1\cos(N_1,x) + v_1\cos(N_1,y) + w_1\cos(N_1,z)\\
&+ u_2\cos(N_2,x) + v_2\cos(N_2,y) + w_2\cos(N_2,z)],\\
\zeta = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathfrak{W}[\;& u_1\cos(N_1,x) + v_1\cos(N_1,y) + w_1\cos(N_1,z)\\
&+ u_2\cos(N_2,x) + v_2\cos(N_2,y) + w_2\cos(N_2,z)].
\end{aligned}
$$

(1) H. von Helmholtz, *Ueber die Theorie der Elektrodynamik*. IIIte Abhandlung. *Die elektrodynamischen Kräfte in bewegten Leitern* (*Borchardt's Journal*, t. LXXVIII, p. 300; 1874. — Helmholtz, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I, p. 734).

Soit E la densité électrique en un point de l'élément dS; nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t} = -\big[&\; u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ &+ u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)\big],\end{aligned}$$

et les composantes précédentes pourront s'écrire

$$(17) \qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathfrak{U} \frac{\partial E}{\partial t}, \\ \eta &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathfrak{V} \frac{\partial E}{\partial t}, \\ \zeta &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathfrak{W} \frac{\partial E}{\partial t}. \end{aligned}\right.$$

Si, en particulier, les courants qui traversent la surface S sont des courants uniformes, et ce cas est le seul qui puisse être soumis à des observations précises, la force dont ξ, η, ζ sont les composantes s'évanouira.

Si la surface S est la surface de contact d'un conducteur avec un isolant, les composantes $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ de la force appliquée en un point de la surface S pourront s'écrire

$$(18) \qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{X} &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathfrak{U} \frac{\partial E}{\partial t}, \\ \mathcal{Y} &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathfrak{V} \frac{\partial E}{\partial t}, \\ \mathcal{Z} &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathfrak{W} \frac{\partial E}{\partial t}. \end{aligned}\right.$$

On voit que cette force s'évanouira, elle aussi, dans le cas où le conducteur est traversé par des courants uniformes.

On serait tenté de croire que les forces représentées par les formules (15) peuvent devenir observables dans le cas où deux conducteurs 1 et 2 confinent l'un à l'autre par une surface S sans adhérer le long de cette surface.

Dans ce cas, en effet, en un point du conducteur 1 situé sur la surface S agit une force dont la composante suivant Ox a pour valeur

$$\mathcal{X}_1 = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathfrak{U} [u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z)].$$

En un point du conducteur 2, situé également sur la surface S, agit une force dont la composante suivant Ox a pour valeur

$$\mathcal{X}_2 = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathfrak{U} [u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)].$$

Supposons uniformes les courants qui traversent la surface S, et soit J $dS\,dt$ la quantité d'électricité qui traverse l'élément dS, dans le temps dt, du conducteur 1 vers le conducteur 2; nous aurons

$$\begin{aligned} J &= -[u_1\cos(N_1, x) + v_1\cos(N_1, y) + w_1\cos(N_1, z)], \\ &= u_2\cos(N_2, x) + v_2\cos(N_2, y) + w_2\cos(N_2, z), \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{X}_1 &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathfrak{u}J, & \mathfrak{X}_2 &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathfrak{u}J, \\ \mathfrak{Y}_1 &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathfrak{v}J, & \mathfrak{Y}_2 &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathfrak{v}J, \\ \mathfrak{Z}_1 &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathfrak{w}J, & \mathfrak{Z}_2 &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathfrak{w}J. \end{aligned}\right.$$

D'après ces égalités (19), les deux forces $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1)$ et $(\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Z}_2)$ qui correspondent à un même point de la surface S sont égales et de sens contraires; les actions électrodynamiques tendent donc à entraîner en sens contraire les parties superficielles contiguës de deux conducteurs que parcourent des courants uniformes.

On pourrait donc espérer d'observer les effets des forces représentées par les égalités (19), si l'on pouvait faire glisser deux conducteurs l'un sur l'autre, sans qu'ils adhèrent le long de leur surface de contact.

Mais une pareille surface de glissement paraît irréalisable. Si, par exemple, on essaye de la réaliser en faisant mouvoir un conducteur solide dans un conducteur fluide, l'effet du frottement sera tel qu'une mince couche fluide adhérera au solide et sera entraînée dans son mouvement; si l'on passe de l'intérieur du solide à l'intérieur du fluide, on observera une variation rapide des vitesses au travers d'une couche de faible épaisseur, mais non une variation discontinue des vitesses à la traversée d'une surface d'épaisseur nulle. Dès lors, les forces $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1)$ et $(\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Z}_2)$, représentées par les égalités (19), se détruiront.

Il en sera encore de même si l'on essaye de faire glisser deux conducteurs solides l'un sur l'autre. En réalité, ces deux conducteurs seront en contact non pas directement, mais par l'intermédiaire de l'air interposé, et nous pourrons répéter ce que nous venons de dire.

Les forces représentées par les égalités (15) paraissent donc échapper aux prises de l'expérience.

CHAPITRE III.

THÉORÈMES DIVERS SUR LES FORCES ÉLECTRODYNAMIQUES.

§ 1. — *Simplification des fonctions* $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$.

Les forces appliquées aux divers éléments de volume d'un conducteur dépendent des fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, définies par les égalités [Chapitre II, égalités (14)],

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{P} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}\right), \\ \mathfrak{Q} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z}\right), \\ \mathfrak{R} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\right). \end{aligned}\right.$$

Posons

$$(2)\quad \Psi = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V}{\partial t}\,\frac{1}{r}\,d\varpi_1,$$

$\frac{\partial V}{\partial t}dt$ désignant la variation que la fonction potentielle électrostatique du système éprouverait pendant le temps dt, par suite du changement de distribution qu'engendrent les flux (u, v, w), si les divers conducteurs du système demeuraient immobiles; en sorte que

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} = -\mathbf{S}\big[\; & u_1\cos(N_1, x) + v_1\cos(N_1, y) + w_1\cos(N_1, z) \\ & + u_2\cos(N_2, x) + v_2\cos(N_2, y) + w_2\cos(N_2, z)\big]\,\frac{1}{r}\,dS \\ & - \int\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)\frac{1}{r}\,d\varpi_1. \end{aligned}$$

Nous aurons [Chapitre préliminaire, égalités (19)]

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{U} &= \int \frac{u_1}{r}\,d\varpi_1 + \frac{1-\lambda}{2}\,\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\ \mathfrak{V} &= \int \frac{v_1}{r}\,d\varpi_1 + \frac{1-\lambda}{2}\,\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ \mathfrak{W} &= \int \frac{w_1}{r}\,d\varpi_1 + \frac{1-\lambda}{2}\,\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Moyennant ces égalités (3), les égalités (1) prennent la forme très simple

$$
(4) \quad \begin{cases}
\mathfrak{P} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int \dfrac{v_1}{r}\, d\varpi_1 - \dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int \dfrac{w_1}{r}\, d\varpi_1\right), \\[2ex]
\mathfrak{Q} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int \dfrac{w_1}{r}\, d\varpi_1 - \dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int \dfrac{u_1}{r}\, d\varpi_1\right), \\[2ex]
\mathfrak{R} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int \dfrac{u_1}{r}\, d\varpi_1 - \dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int \dfrac{v_1}{r}\, d\varpi_1\right),
\end{cases}
$$

ou encore, d'après les propriétés connues des fonctions potentielles ordinaires,

$$
(5) \quad \begin{cases}
\mathfrak{P} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\displaystyle\int \left(v_1 \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - w_1 \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right) d\varpi_1, \\[2ex]
\mathfrak{Q} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\displaystyle\int \left(w_1 \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - u_1 \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) d\varpi_1, \\[2ex]
\mathfrak{R} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\displaystyle\int \left(u_1 \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - v_1 \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right) d\varpi_1.
\end{cases}
$$

Ces expressions de $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ mettent en évidence un résultat fondamental; c'est que *les trois fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ ne dépendent pas de la constante λ d'Helmholtz.*

Si l'on observe qu'en tout point d'un conducteur parcouru par des courants uniformes on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

on voit que les égalités (16) du Chapitre précédent, jointes au résultat précédent, conduisent à la conclusion suivante :

La valeur de la constante λ d'Helmholtz est sans influence sur les forces électrodynamiques qui sollicitent les éléments de volume d'un conducteur traversé par des courants uniformes, quel que soit d'ailleurs le courant agissant.

Nous avons vu, au § 4 du Chapitre précédent, qu'aucune disposition expérimentale réalisable ne permettait de constater les forces électrodynamiques appliquées aux divers points des surfaces de discontinuité d'un conducteur traversé par des courants uniformes. Nous pouvons donc dire que *la constante d'Helmholtz est sans influence sur les actions électrodynamiques subies par un conducteur que traversent des courants uniformes de la part d'un conducteur que traversent des courants quelconques.*

Pour un conducteur traversé par des courants uniformes, les fonctions $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{W}$ ont, en chaque point de l'espace et à chaque instant, des valeurs indépendantes de la valeur attribuée à la constante λ (Chapitre préliminaire, § 5). Dès lors, les égalités (15) et (16) du Chapitre précédent nous montrent que *la valeur attribuée à la constante λ d'Helmholtz est sans influence sur les actions électrodynamiques qu'un conducteur traversé par des courants uniformes exerce sur un conducteur traversé par des courants quelconques.*

Si nous rapprochons ces conclusions de celle-ci, que nous avons déjà obtenue (Chapitre préliminaire, § 5) : *La constante λ est sans influence sur les phénomènes d'induction engendrés dans un conducteur quelconque par un conducteur que traversent des courants uniformes,* nous pourrons donner cet énoncé entièrement général :

Les propriétés électrodynamiques des conducteurs traversés par des courants uniformes sont indépendantes de la valeur attribuée à la constante λ d'Helmholtz.

Si l'on cherchait les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un conducteur exerce sur un autre conducteur, traversé par des courants quelconques, des actions indépendantes de la valeur attribuée à la constante λ, on serait immédiatement ramené à chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que les trois quantités $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{W}$ soient indépendantes de cette valeur; or ces conditions nous sont connues; elles s'expriment par les égalités [Chapitre préliminaire, égalité (33)]

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0$$

ou encore par les égalités [Chapitre préliminaire, égalité (33 *bis*)]

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial z} = 0.$$

Les courants qui produisent des forces électrodynamiques indépendantes de la valeur de la constante λ sont donc aussi ceux qui engendrent des forces électromotrices d'induction indépendantes de la valeur attribuée à cette constante.

§ 2. — *Retour au cas des courants linéaires; loi de Grassmann.*

La première des égalités (16) du Chapitre précédent devient, en vertu des égalités (5),

$$
\begin{aligned}
(6)\quad \mathrm{X} = &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\left[v\left(u_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - v_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right) - w\left(w_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - u_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)\right]d\varpi_1 \\
&-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\
&\times\int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{u_1}{r}+\frac{1-\lambda}{2}\frac{x-x_1'}{r^2}\left(\frac{x-x_1}{r}u_1+\frac{y-y_1}{r}v_1+\frac{z-z_1}{r}w_1\right)\right]d\varpi_1.
\end{aligned}
$$

Nous pouvons évidemment écrire

$$
\begin{aligned}
(7)\quad &\int\left[v\left(u_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - v_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right) - w\left(w_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - u_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)\right]d\varpi_1 \\
&= \int\left[u_1\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) - (uu_1+vv_1+ww_1)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]d\varpi_1.
\end{aligned}
$$

Soient f et f_1 les flux qui ont respectivement pour composantes u, v, w et u_1, v_1, w_1; soient s et s_1' les directions de ces flux; nous aurons

$$uu_1+vv_1+ww_1 = ff_1\cos(s, s_1),$$

$$u_1 = f_1\frac{dx_1}{ds_1},$$

$$u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} = f\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s},$$

$$u_1\frac{x-x_1}{r^3}+v_1\frac{y-y_1}{r^3}+w_1\frac{z-z_1}{r^3} = f_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s_1}.$$

Les égalités (6) et (7) fournissent donc l'égalité

$$X = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} f \int \left[\cos(s, s_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dx_1}{ds_1} \right] f_1 \, d\varpi_1$$
$$+ \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \int \left[\frac{1+\lambda}{2} \frac{\frac{dx_1}{ds_1}}{r} + \frac{1-\lambda}{2} (x - x_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1} \right] f_1 \, d\varpi_1.$$

Supposons maintenant que les courants agissants soient des courants linéaires, d'intensités J et J_1, de sections ω et ω_1. Nous aurons

$$d\varpi = \omega \, ds, \qquad d\varpi_1 = \omega_1 \, ds_1,$$
$$J = f\omega, \qquad J_1 = f_1 \omega_1,$$
$$\frac{dJ}{ds} ds = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\varpi.$$

L'égalité précédente deviendra alors la première des égalités

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} X \, d\varpi &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J \, ds \int \left[\cos(s, s_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dx_1}{ds_1} \right] J_1 \, ds_1 \\ &\quad + \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{dJ}{ds} ds \int \left[\frac{1+\lambda}{2} \frac{\frac{dx_1}{ds_1}}{r} + \frac{1-\lambda}{2} (x - x_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1} \right] J_1 \, ds_1, \\ Y \, d\varpi &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J \, ds \int \left[\cos(s, s_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1} \frac{dy_1}{ds_1} \right] J_1 \, ds_1 \\ &\quad + \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{dJ}{ds} ds \int \left[\frac{1+\lambda}{2} \frac{\frac{dy_1}{ds_1}}{r} + \frac{1-\lambda}{2} (y - y_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1} \right] J_1 \, ds_1, \\ Z \, d\varpi &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J \, ds \int \left[\cos(s, s_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1} \frac{dz_1}{ds_1} \right] J_1 \, ds_1 \\ &\quad + \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{dJ}{ds} ds \int \left[\frac{1+\lambda}{2} \frac{\frac{dz_1}{ds_1}}{r} + \frac{1+\lambda}{2} (z - z_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1} \right] J_1 \, ds_1. \end{aligned} \right.$$

Ces égalités (8) redonnent l'expression déjà trouvée [*Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. III, p. 266, égalités (1)] des forces qu'un courant linéaire exerce sur un élément de courant linéaire (¹).

(¹) C'est ici le lieu de rectifier une erreur qui s'est glissée dans cette partie du Tome III

Les forces appliquées aux divers éléments de volume d'un conducteur et définies par les égalités (16) du Chapitre précédent ne sont pas les seules qui soient appliquées à un conducteur. La surface de ce conducteur est, en outre, sollicitée par des forces que définissent les égalités (15) du Chapitre précédent.

Dans le cas où les circuits agissants sont linéaires, ces forces se réduisent à des forces appliquées soit aux extrémités libres des conducteurs ouverts, soit aux points par lesquels deux conducteurs linéaires glissent l'un sur l'autre. Si l'on désigne par M un de ces points d'application, par J

---

de nos *Leçons*. A la page 257, nous avons écrit l'égalité erronée

$$\cos\theta \cos\theta' = \cos\omega - r\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}$$

à la place de l'égalité

$$\cos\theta \cos\theta' = \cos\omega + r\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'}.$$

L'égalité (2) (p. 257) doit alors être remplacée par l'égalité

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{dM(r)}{dr}\right] = -\frac{1}{r}f(r)$$

et l'égalité (3) par l'égalité

$$N(r) = g(r) + \frac{1}{r}\frac{dM(r)}{dr}.$$

Il en résulte qu'à la page 265, on devra faire

$$M(r) = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{1-\lambda}{2}r,$$

au lieu de

$$M(r) = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{1-\lambda}{2}r.$$

Le terme qui, dans X [(p. 265, égalités (10)], renferme en facteur $\frac{dJ}{ds}ds$ deviendra alors

$$X_2 = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{dJ}{ds}ds\sum\int\left[\frac{1-\lambda}{2}(x-x')\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'} + \frac{1+\lambda}{2}\frac{\frac{dx'}{ds'}}{r}\right]J'\,ds'.$$

Une correction analogue, consistant à remplacer le facteur $-\left(\frac{3-\lambda}{2}\right)$, partout où il figure, par le facteur $\frac{1+\lambda}{2}$, devra être faite aux pages 266, 271, 272, 273, 275, 276.

A cette dernière page, dans l'égalité (10), le terme indépendant de r devra s'écrire $-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{1+\lambda}{2}\frac{dJ}{ds}\frac{dJ'}{ds'}ds\,ds'$ et non pas $\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{3-\lambda}{2}\frac{dJ}{ds}\frac{dJ'}{ds'}ds\,ds'$. C'est pour la valeur $\lambda = -1$, et non pour la valeur $\lambda = 3$, de λ que ce terme disparaîtrait.

l'intensité du courant qu'y *amène* le conducteur, la force appliquée au point M aura pour composantes

$$X = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J \int \left[\frac{1-\lambda}{2}(x - x_1)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1} + \frac{1+\lambda}{2}\frac{\frac{dx_1}{ds_1}}{r} \right] J_1\, ds_1,$$

$$Y = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J \int \left[\frac{1-\lambda}{2}(y - y_1)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1} + \frac{1+\lambda}{2}\frac{\frac{dy_1}{ds_1}}{r} \right] J_1\, ds_1,$$

$$Z = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J \int \left[\frac{1-\lambda}{2}(z - z_1)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1} + \frac{1+\lambda}{2}\frac{\frac{dz_1}{ds_1}}{r} \right] J_1\, ds_1.$$

Les forces de ce genre, appliquées aux extrémités libres d'un conducteur ouvert, disparaîtront si, comme nous l'avons constamment admis au Tome III de nos *Leçons,* l'intensité du courant ouvert est nulle aux deux extrémités du conducteur.

Quant aux forces de ce genre appliquées aux contacts glissants, elles ne seront pas observables si, en un pareil contact, la continuité du mouvement est rétablie, comme nous l'avons expliqué au § 4 du Chapitre précédent, et si, en outre, comme nous l'avons sans cesse admis au Tome III de nos *Leçons,* l'intensité du courant ne subit pas de variation brusque en traversant ce contact. Ainsi la théorie générale des courants, exposée dans le présent travail, conduit aux mêmes conclusions, dans le cas des courants linéaires, que la théorie exposée au Tome III de nos *Leçons.*

Les rapprochements que nous venons de faire nous permettent de dire que les formules

$$(9)\qquad \begin{cases} X_1\, d\varpi = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(\mathfrak{R} v - \mathfrak{Q} w)\, d\varpi, \\ Y_1\, d\varpi = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(\mathfrak{P} w - \mathfrak{R} u)\, d\varpi, \\ Z_1\, d\varpi = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(\mathfrak{Q} u - \mathfrak{P} v)\, d\varpi, \end{cases}$$

représentant une force appliquée à l'élément $d\varpi$, sont, pour des courants quelconques, l'expression de la *loi de Grassmann.* Les égalités (16) du Chapitre précédent nous permettent alors d'énoncer la proposition suivante :

Les actions électrodynamiques qu'un courant quelconque exerce sur *chacun des éléments de volume d'un courant uniforme sont données par la loi de Grassmann.*

Si l'on observe en outre, comme nous l'avons fait remarquer au § 4, que les forces électrodynamiques appliquées aux surfaces de discontinuité d'un conducteur parcouru par des courants uniformes peuvent toutes être pratiquement négligées, on voit que l'on peut énoncer le théorème suivant :

Un conducteur traversé par des courants quelconques agit sur un conducteur traversé par des courants uniformes comme si chaque élément $d\varpi_1$ *du premier exerçait sur chaque élément* $d\varpi$ *du second une force ayant pour composantes*

$$(10)\quad \begin{cases} \xi\, d\varpi\, d\varpi_1 = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\left(u_1\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - v_1\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)v - \left(w_1\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - u_1\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)w\right] d\varpi\, d\varpi_1, \\ \eta\, d\varpi\, d\varpi_1 = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\left(v_1\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} - w_1\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)w - \left(u_1\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - v_1\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)u\right] d\varpi\, d\varpi_1, \\ \zeta\, d\varpi\, d\varpi_1 = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\left(w_1\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - u_1\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)u - \left(v_1\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} - w_1\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)v\right] d\varpi\, d\varpi_1. \end{cases}$$

§ 3. — *Loi d'Ampère.*

Si l'on se reporte à l'une des égalités qui expriment la loi d'Ampère [*Leçons,* t. III, p. 288, égalité (6)], on voit sans peine que cette loi d'Ampère donne l'expression suivante pour la composante parallèle à Ox de l'action que l'élément $d\varpi_1$ exerce sur l'élément $d\varpi$

$$(11)\quad \begin{aligned} \xi'\, d\varpi\, d\varpi_1 = -\frac{\mathfrak{A}^2(x-x_1)}{r^3} &\times\left[uu_1 + vv_1 + ww_1 - \frac{3}{2}\left(\frac{x-x_1}{r}u + \frac{y-y_1}{r}v + \frac{z-z_1}{r}w\right)\right. \\ &\left.\times\left(\frac{x-x_1}{r}u_1 + \frac{y-y_1}{r}v_1 + \frac{z-z_1}{r}w_1\right)\right] d\varpi\, d\varpi_1. \end{aligned}$$

Si l'on compare cette égalité à la première des égalités (10), on trouve sans peine que l'on a

$$(12)\qquad (\xi' - \xi)\, d\varpi\, d\varpi_1 = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}(\alpha u + \beta v + \gamma w)\, d\varpi\, d\varpi_1$$

avec

$$
(12\ bis)\quad \left\{
\begin{aligned}
\alpha &= u_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] + v_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] + w_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right],\\
\beta &= u_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right] + v_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right] + w_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right],\\
\gamma &= u_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right] + v_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right] + w_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right].
\end{aligned}
\right.
$$

L'égalité (12) montre que si l'on veut que la loi d'Ampère et la loi de Grassmann donnent le même résultat lorsqu'on les applique au calcul de l'action exercée sur un élément de courant $d\varpi$ par le conducteur auquel appartient l'élément $d\varpi_1$, il sera nécessaire et suffisant que l'on ait

$$
(13)\qquad \int \alpha\, d\varpi_1 = 0, \qquad \int \beta\, d\varpi_1 = 0, \qquad \int \gamma\, d\varpi_1 = 0,
$$

et six autres égalités analogues obtenues en considérant les composantes parallèles à Oy et à Oz.

Or il est aisé de voir que l'on peut écrire

$$
\begin{aligned}
\int \alpha\, d\varpi_1 = -\mathbf{S}(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\big[& u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z)\\
& + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)\big]\, dS_1\\
& - \int (x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) d\varpi_1
\end{aligned}
$$

ou bien

$$
\begin{aligned}
\int \alpha\, d\varpi_1 = -\mathbf{S}\frac{(x_1 - x)^2}{r^3}\big[& u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z)\\
& + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)\big]\, dS_1\\
& - \int \frac{(x_1 - x)^2}{r^3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) d\varpi_1.
\end{aligned}
$$

La première des équations (13) devient donc la première des équations

$$(14)\quad \begin{cases} \mathbf{S}\dfrac{(x_1-x)^2}{r^3}\dfrac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1+\displaystyle\int\dfrac{(x_1-x)^2}{r^3}\dfrac{\partial e_1}{\partial t}d\varpi_1=0,\\ \mathbf{S}\dfrac{(y_1-y)^2}{r^3}\dfrac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1+\displaystyle\int\dfrac{(y_1-y)^2}{r^3}\dfrac{\partial e_1}{\partial t}d\varpi_1=0,\\ \mathbf{S}\dfrac{(z_1-z)^2}{r^3}\dfrac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1+\displaystyle\int\dfrac{(z_1-z)^2}{r^3}\dfrac{\partial e_1}{\partial t}d\varpi_1=0,\end{cases}$$

$$(15)\quad \begin{cases} \mathbf{S}\dfrac{(y_1-y)(z_1-z)}{r^3}\dfrac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1+\displaystyle\int\dfrac{(y_1-y)(z_1-z)}{r^3}\dfrac{\partial e_1}{\partial t}d\varpi_1=0,\\ \mathbf{S}\dfrac{(z_1-z)(x_1-x)}{r^3}\dfrac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1+\displaystyle\int\dfrac{(z_1-z)(x_1-x)}{r^3}\dfrac{\partial e_1}{\partial t}d\varpi_1=0,\\ \mathbf{S}\dfrac{(x_1-x)(y_1-y)}{r^3}\dfrac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1+\displaystyle\int\dfrac{(x_1-x)(y_1-y)}{r^3}\dfrac{\partial e_1}{\partial t}d\varpi_1=0.\end{cases}$$

Ajoutons membre à membre les égalités (14), en tenant compte de la relation

$$r^2=(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2.$$

Nous aurons

$$(16)\quad \mathbf{S}\frac{1}{1}\frac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1+\int\frac{1}{r}\frac{\partial e_1}{\partial t}d\varpi_1=0.$$

Moyennant cette égalité, nous pourrons donner aux égalités (14) la forme

$$(17)\quad \begin{cases} \mathbf{S}\left[\dfrac{(x_1-x)^2}{r^3}-\dfrac{1}{r}\right]\dfrac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1+\displaystyle\int\left[\dfrac{(x_1-x)^2}{r^3}-\dfrac{1}{r}\right]\dfrac{\partial e_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1,\\ \mathbf{S}\left[\dfrac{(y_1-y)^2}{r^3}-\dfrac{1}{r}\right]\dfrac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1+\displaystyle\int\left[\dfrac{(y_1-y)^2}{r^3}-\dfrac{1}{r}\right]\dfrac{\partial e_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1,\\ \mathbf{S}\left[\dfrac{(z_1-z)^2}{r^3}-\dfrac{1}{r}\right]\dfrac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1+\displaystyle\int\left[\dfrac{(z_1-z)^2}{r^3}-\dfrac{1}{r}\right]\dfrac{\partial e_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1.\end{cases}$$

Si l'on définit la quantité J comme elle a été définie au Chapitre préliminaire, égalité (34), les égalités (15) et (17) deviendront

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial x^2}=0, & \dfrac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial y^2}=0, & \dfrac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial z^2}=0,\\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial y\,\partial z}=0, & \dfrac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial z\,\partial x}=0, & \dfrac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial x\,\partial y}=0.\end{cases}$$

Si ces égalités sont vérifiées en tout point extérieur au conducteur agissant, la loi de Grassmann et la loi d'Ampère, appliquées au calcul de l'action exercée par ce conducteur sur un élément de volume d'un *conducteur parcouru par des courants, conduiront à des résultats identiques.*

En particulier, si le conducteur sur lequel s'exerce l'action est parcouru par des courants uniformes, la loi d'Ampère conduira à l'exacte expression de l'action exercée sur ce conducteur par le courant agissant.

Il est évident que les conditions (18) sont remplies lorsque le courant agissant est uniforme. Ainsi :

La loi d'Ampère est équivalente à la loi de Grassmann dans le calcul de l'action exercée par un courant uniforme sur un élément d'un conducteur parcouru par des courants quelconques; elle donne l'expression exacte de cette action si ces derniers courants sont aussi uniformes.

§ 4. — *Généralisation de la loi d'Ampère.*

La loi d'Ampère, exprimée par la formule (11) et par deux autres formules analogues, possède cette propriété que les actions mutuelles de deux éléments de volume, découpés dans deux conducteurs que traversent des courants, sont soumis à la règle de l'égalité entre l'action et la réaction. Nous allons nous proposer, dans le cas le plus général, de réduire les actions électrodynamiques à des forces élémentaires soumises au principe de l'égalité entre l'action et la réaction.

Les égalités (16) du Chapitre précédent et (12) du présent Chapitre montrent que l'élément $d\varpi$ peut être regardé comme soumis :

1° A des forces émanées de chacun des éléments $d\varpi_1$ et données par la loi d'Ampère [égalité (11)];

2° A une force dont la composante parallèle à Ox a pour valeur

$$(19)\quad \Xi\, d\varpi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[u\int \alpha\, d\varpi_1 + v\int \beta\, d\varpi_1 + w\int \gamma\, d\varpi_1 + \mathfrak{V}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] d\varpi.$$

Si l'on fait usage des formules (12 *bis*), on trouve sans peine

$$(20)\quad \begin{aligned} &u\int \alpha\, d\varpi_1 + v\int \beta\, d\varpi_1 + w\int \gamma\, d\varpi_1 \\ &= \mathbf{S}\,\frac{x-x_1}{r}\left(u\,\frac{x-x_1}{r^2} + v\,\frac{y-y_1}{r^2} + w\,\frac{z-z_1}{r^2}\right) \\ &\quad\times[\;u_1\cos(N_1,x) + v_1\cos(N_1,y) + w_1\cos(N_1,z) \\ &\qquad + u_2\cos(N_2,x) + v_2\cos(N_2,y) + w_2\cos(N_2,z)]\,dS_1 \\ &\quad + \int \frac{x-x_1}{r}\left(u\,\frac{x-x_1}{r^2} + v\,\frac{y-y_1}{r^2} + w\,\frac{z-z_1}{r^2}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) d\varpi. \end{aligned}$$

D'autre part, l'égalité qui définit $\mathfrak{V}$ [Chapitre préliminaire, égalités (1)] donne sans peine

$$(21)\quad \mathfrak{V} = \frac{1+\lambda}{2}\int\left[u_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1-x}{r}\right)+v_1\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{x_1-x}{r}\right)+w_1\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{x_1-x}{r}\right)\right]d\varpi_1$$
$$+\int\frac{x-x_1}{r}\left(u_1\frac{x-x_1}{r^2}+v_1\frac{y-y_1}{r^2}+w_1\frac{z-z_1}{r^2}\right)d\varpi_1.$$

On a, d'ailleurs,

$$(22)\quad \int\left[u_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1-x}{r}\right)+v_1\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{x_1-x}{r}\right)+w_1\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{x_1-x}{r}\right)\right]d\varpi_1$$
$$= \mathbf{S}\frac{x-x_1}{r}[\ u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z)$$
$$+u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)]\,dS_1$$
$$+\int\frac{x-x_1}{r}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)d\varpi_1.$$

Moyennant les égalités (20), (21) et (22), l'égalité (19) devient

$$(23)\quad \Xi\,d\varpi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left\{\int\frac{x-x_1}{r}\left(u\frac{x-x_1}{r^2}+v\frac{y-y_1}{r^2}+w\frac{z-z_1}{r^2}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)d\varpi_1\right.$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\int\frac{x-x_1}{r}\left(u_1\frac{x-x_1}{r^2}+v_1\frac{y-y_1}{r^2}+w_1\frac{z-z_1}{r^2}\right)d\varpi_1$$
$$+\frac{1+\lambda}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\int\frac{x-x_1}{r}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)d\varpi_1$$
$$+\mathbf{S}\frac{x-x_1}{r}\left(u\frac{x-x_1}{r^2}+v\frac{y-y_1}{r^2}+w\frac{z-z_1}{r^2}\right)$$
$$\times[\ u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z)$$
$$+u_2\cos(N_z,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)]\,dS_1$$
$$+\frac{1+\lambda}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$
$$\times\mathbf{S}\frac{x-x_1}{r}[\ u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z)$$
$$\left.+u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)]\,dS_1\right\}d\varpi_1.$$

Les égalités (12) et (23) nous font connaître la loi des forces appliquées aux divers éléments de volume $d\varpi$ du conducteur.

Un élément dS de l'une des surfaces qui terminent ce conducteur subit une force dont la composante parallèle à Ox est [Chapitre II, égalité (15)]

$$\mathcal{X}\, dS = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\, \mathcal{V}\, [u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\, dS.$$

En vertu des égalités (21) et (22) cette égalité peut s'écrire

$$(24)\quad \begin{aligned} \mathcal{X}\, dS = &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)] \\ &\times \left\{ \int \frac{x - x_1}{r}\left(u_1 \frac{x - x_1}{r^2} + v_1 \frac{y - y_1}{r^2} + w_1 \frac{z - z_1}{r^2}\right) d\varpi_1 \right. \\ &+ \frac{1+\lambda}{2} \int \frac{x - x_1}{r}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) d\varpi_1 \\ &+ \frac{1+\lambda}{2} \mathbf{S} \frac{x - x_1}{r}[\; u_1\cos(N_1, x) + v_1\cos(N_1, y) + w_1\cos(N_1, z) \\ &\qquad \left. + u_2\cos(N_2, x) + v_2\cos(N_2, y) + w_2\cos(N_2, z)]\, dS_1 \right\} dS. \end{aligned}$$

Des égalités (12), (22), (24), et des égalités analogues auxquelles donneraient lieu les composantes des forces suivant les directions Oy et Oz, on déduit sans peine la conclusion suivante :

Les actions qu'un conducteur quelconque C_1 *exerce sur un autre conducteur quelconque* C *peuvent se décomposer en actions élémentaires de la manière que voici :*

1° *Tout élément de volume* $d\varpi_1$ *du conducteur* C_1 *exerce sur tout élément de volume* $d\varpi$ *du conducteur* C *une action dirigée d'un point de l'élément* $d\varpi_1$ *vers un point de l'élément* $d\varpi$ *et ayant pour grandeur*

$$\begin{aligned} -\mathfrak{A}^2 \left\{ \frac{1}{r^2} \right. &\left[uu_1 + vv_1 + ww_1 - \frac{3}{2}\left(\frac{x_1 - x}{r}u + \frac{y_1 - y}{r}v + \frac{z_1 - z}{r}w\right) \right. \\ &\qquad \left. \times \left(\frac{x_1 - x}{r}u_1 + \frac{y_1 - y}{r}v_1 + \frac{z_1 - z}{r}w_1\right)\right] \\ &- \frac{1}{2r}\left(u\frac{x_1 - x}{r} + v\frac{y_1 - y}{r} + w\frac{z_1 - z}{r}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) \\ &- \frac{1}{2r}\left(u_1\frac{x_1 - x}{r} + v_1\frac{y_1 - y}{r} + w_1\frac{z_1 - z}{r}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ &\left. + \frac{1+\lambda}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) \right\} d\varpi\, d\varpi_1. \end{aligned}$$

2° *Tout élément* dS_1, *appartenant à une surface de discontinuité du* *conducteur* C_1, *exerce sur tout élément de volume* $d\varpi$ *du conducteur* C_1 *une force dirigée d'un point de l'élément* dS_1 *vers un point de l'élément* $d\varpi$ *et ayant pour grandeur*

$$
\begin{aligned}
-\mathfrak{A}^2 \Big\{ -\frac{1}{2r} \big[& u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\
& + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)\big] \\
& \qquad \times \left(u \frac{x_1 - x}{r} + v \frac{y_1 + y}{r} + w \frac{z_1 - z}{r} \right) \\
+ \frac{1+\lambda}{4} \big[& u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\
& + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)\big] \\
& \qquad \times \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \Big\} \, dS_1 \, d\varpi.
\end{aligned}
$$

3° *Tout élément de volume* $d\varpi_1$, *appartenant au conducteur* C_1, *exerce sur tout élément* dS *de l'une des surfaces qui terminent le conducteur* C *une action dirigée d'un point de l'élément* $d\varpi_1$ *vers un point de l'élément* dS *et ayant pour grandeur*

$$
\begin{aligned}
-\mathfrak{A}^2 \Big\{ & -\frac{1}{2r} [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)] \\
& \times \left(u_1 \frac{x_1 - x}{r} + v_1 \frac{y_1 - y}{r} + w_1 \frac{z_1 - z}{r} \right) \\
& + \frac{1+\lambda}{4} [u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)] \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1} \right) \Big\} dS \, d\varpi_1.
\end{aligned}
$$

4° *Tout élément* dS_1, *appartenant à l'une des surfaces de discontinuité du conducteur* C_1, *exerce sur tout élément* dS, *appartenant à l'une des surfaces qui terminent le conducteur* C, *une action dirigée d'un point de l'élément* dS_1 *vers un point de l'élément* dS *et ayant pour grandeur*

$$
\begin{aligned}
-\mathfrak{A}^2 \frac{1+\lambda}{4} \big[& u \cos(N_i, x) + v \cos(N_i, y) + w \cos(N_i, z)\big] \\
\times \big[& u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\
& + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)\big] \, dS \, dS_1.
\end{aligned}
$$

Il est visible que *toutes ces actions élémentaires satisfont à la règle de l'égalité entre l'action et la réaction.*

La loi que nous venons d'établir est évidemment la généralisation de celle que nous avons trouvée [1] pour les courants linéaires [*Leçons sur l'Électricité*, t. III, p. 276, égalité (10)], loi d'après laquelle deux éléments ds, ds' de courants se repoussent avec une force

$$\begin{aligned} \mathrm{R} = &- \frac{\mathfrak{A}^2 \mathrm{J}\mathrm{J}'\, ds\, ds'}{r^2}\left(\cos\omega - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right) \\ &- \frac{\mathfrak{A}^2}{2r}\mathrm{J}\, ds\, \frac{d\mathrm{J}'}{ds'}\, ds'\cos\theta - \frac{\mathfrak{A}^2}{2r}\mathrm{J}'\, ds'\, \frac{d\mathrm{J}}{ds}\, ds\cos\theta' - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\frac{1+\lambda}{2}\,\frac{d\mathrm{J}}{ds}\,\frac{d\mathrm{J}'}{ds'}\, ds\, ds'. \end{aligned}$$

L'existence de forces indépendantes de la distance parmi ces actions élémentaires constitue un paradoxe aussi facile à expliquer dans le cas général que dans le cas particulier des courants linéaires (voir *Leçons sur l'Électricité*, t. III, p. 276).

---

(1) Celle-ci étant corrigée comme nous l'avons indiqué plus haut (page 43, en note).