ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

L. SAUVAGE

Théorie générale des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 8, nº 1 (1894), p. 1-24

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1894_1_8_1_1_0>

THÉORIE GÉNÉRALE

DES

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

LINÉAIRES ET HOMOGÈNES,

PAR L. SAUVAGE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.

INTRODUCTION.

L'étude de l'équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0 \tag{1}$$

a précédé celle des systèmes de la forme

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n. \tag{A}$$

Mais, dans les lignes générales, les deux études sont parallèles, et même l'équation d'ordre n doit être rattachée à un cas particulier du système (A).

Nous entreprenons ici l'exposition des théories générales concernant le système (A), du moins de celles que l'on peut considérer aujourd'hui comme définitives. Nous avons mis en relief *la théorie des diviseurs élémentaires;* elle est, en quelque sorte, l'instrument qui nous sert dans presque toutes les questions pour tirer du calcul, d'une manière à la fois simple et complète, tout ce qu'il peut donner dans les théories qui nous occupent.

Voici l'ordre que nous avons suivi :

Chapitre I. — On démontre d'abord que, si les coefficients a du système

$$x \frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{B}$$

sont holomorphes dans le domaine de l'origine, on peut intégrer ce système par les séries. J'ai démontré la convergence de ces séries dans les *Annales de l'École Normale,* en 1886.

Chaque groupe de séries $y_1, \ldots, y_n$ qui satisfait au système (B), et plus particulièrement au système (A), est appelé *une solution du système.*

Toute la théorie de M. Fuchs (*J. de Crelle,* t. 66, et J. Tannery, *Thèse*) sur l'équation générale de la forme (1) est applicable aux systèmes (A) ou (B). Nous voyons d'abord la définition des éléments d'une solution au delà du cercle de convergence des séries, puis la distinction des systèmes de solutions en *fondamentaux* et non fondamentaux. Soient $y_{1i}, \ldots, y_{ni}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ n solutions, le déterminant

$$D = |y_{ji}| \qquad (i, j = 1, 2, \ldots n)$$

est *différent de zéro ou nul identiquement, suivant que le système de solutions est fondamental ou non.* La démonstration que l'on donne de ce théorème s'applique aux solutions définies avec la signification la plus générale.

En suivant pas à pas la théorie de M. Fuchs, on démontre la proposition de Liouville

$$D = C e^{\int(\Sigma a_{ii})dx},$$

et, comme corollaire, on prouve l'existence des systèmes fondamentaux; on montre la transformation d'un système fondamental dans un autre; on donne l'expression de la *solution générale* du système (A) au moyen des éléments d'un système fondamental.

On voit ensuite comment la connaissance d'une solution permet de réduire le nombre des équations (A) d'une unité. Les conséquences intéressantes de ce calcul sont mises en lumière. Nous avons ajouté, ce qui nous paraît nouveau, la comparaison des deux méthodes de simplification de l'équation (1), lorsque l'on traite directement cette équation comme l'a fait M. Fuchs, ou lorsqu'on la considère comme procédant d'un cas particulier du système (A).

En résumé, le premier Chapitre contient les principes essentiels de la théorie des systèmes (A), et, comme cas particulier, ceux de la théorie de l'équation (1).

Chapitre II. — En 1858, M. Weierstrass publia un premier Mémoire sur les formes quadratiques. Dix ans après, le même illustre géomètre publia, en apparence, la suite de la théorie commencée, mais, en réalité, jeta les fondements d'une théorie nouvelle d'une portée plus générale que celle des formes quadratiques. Le Chapitre II est entièrement consacré à l'exposition des idées de M. Weierstrass, sous le titre de *Théorie des diviseurs élémentaires.*

Mais la théorie de ces diviseurs n'est pas établie sans difficulté dans le Mémoire de 1868. D'un autre côté, MM. Darboux et Jordan reprenaient en France l'étude des formes quadratiques et bilinéaires (*Journal de Mathématiques pures*, 1874). Nous avons pris la méthode parfaite de M. Darboux, et nous l'avons appliquée aux formes bilinéaires dans deux Mémoires successifs (¹).

Le Chapitre II renferme seulement les principes nécessaires et suffisants pour l'étude des équations (A).

Des tentatives d'application de la théorie des diviseurs élémentaires aux systèmes différentiels ont été faites par divers auteurs. Nous croyons qu'aucun n'a fait une application *aussi générale et aussi systématique* que celle que nous présentons dans les Chapitres suivants.

Soit

$$\begin{vmatrix} pA_{11}+qB_{11} & \dots & pA_{1n}+qB_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ pA_{n1}+qB_{n1} & \dots & pA_{nn}+qB_{nn} \end{vmatrix} = [P, Q]$$

un déterminant du degré n en p et q. Soit l_ϖ l'exposant d'un diviseur linéaire $ap+bq$ dans les mineurs d'ordre ϖ de $[P, Q]$, ces mineurs étant considérés comme des polynômes en p et q, *l'expression*

$$(ap+bq)^{l_\varpi - l_{\varpi+1}}$$

est un diviseur élémentaire du déterminant $[P, Q]$.

Le théorème général auquel nous parvenons est le suivant :

Pour qu'une même substitution double de la forme

$$y'_i = C_{i1}y_1 + \ldots + C_{in}y_n,$$
$$x_i = C_{1i}x'_1 + \ldots + C_{ni}x'_n,$$

ramène à la fois les formes

$$P = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n,$$
$$Q = \Sigma a_{ij}x_iy_j$$

aux deux formes

$$P' = x'_1y'_1 + \ldots + x'_ny'_n,$$
$$Q' = \Sigma a'_{ij}x'_iy'_j,$$

il faut et il suffit que les déterminants des deux formes

$$Q - \omega P, \qquad Q' - \omega P'$$

aient mêmes diviseurs élémentaires en ω.

En outre, et cette remarque est des plus importantes, il existe une forme

---

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1891 et 1893.

canonique des expressions P′ *et* Q′ *pour lesquelles le déterminant* Q′ — ωP′ *a une forme des plus simples.* Nous utilisons cette forme dans nos théories sur les équations (A).

Chapitre III. — On trouve dans ce Chapitre l'extension aux systèmes (A) de la théorie des points singuliers de l'équation (1) donnée par M. Fuchs en 1866, et qui procède d'ailleurs, comme idée première, des théories de Puiseux sur les fonctions algébriques. Nous avons démontré, au moyen de la théorie des diviseurs élémentaires, l'existence d'un système fondamental de solutions particulières jouissant de propriétés spéciales. Nous avons aussi donné le procédé pratique de M. Fuchs pour rechercher ces solutions si importantes.

Le titre du Chapitre III est *Des points singuliers*. C'est, en effet, dans ce Chapitre que le caractère de ces points est complètement déterminé par le mode d'existence des solutions dans *leurs domaines,* et par le rôle que jouent ces points dans la reconstruction des équations différentielles (A).

Nous avons repris, sous la forme d'un système (A), la belle théorie de M. Tannery sur les équations (1) dont les intégrales sont les racines d'une même équation algébrique. Nous avons achevé *complètement* la question.

Chapitre IV. — Comme conséquence de la théorie précédente, la forme des éléments des solutions d'un système (A) peut être déterminée d'une manière générale pour le domaine d'un point ordinaire, ou singulier quelconque.

Mais on insiste d'une manière particulière sur les systèmes dits *réguliers* ou *canoniques* de la forme (B), dont on s'est occupé dès le premier Chapitre.

Les éléments de toutes leurs solutions sont composés linéairement avec des expressions de la forme

$$x^r(A_0 + A_1 \log x + \ldots + A_k \log^k x),$$

qui sont infinies d'ordre fini pour $x = 0$, *et qu'on appelle des expressions régulières, après M. Thomé* (*J. de Crelle,* t. 74 et suivants).

Le calcul complet *de l'intégration des systèmes canoniques* a été donné par M. Horn (*Mathematische Annalen,* XXXIX Bd). Nous exposons cette belle théorie qui repose encore sur la théorie des diviseurs élémentaires.

Le germe du principe employé par M. Horn est déjà dans les travaux de M. Frobenius (*J. de Crelle,* t. 74 et suivants). On le trouve presque complètement développé dans un remarquable travail de M. Grünfeld (*K. Ak. Wien,* 1888).

Ne manquons pas de faire observer que tout le Chapitre IV établit la différence essentielle entre le cas particulier du système (A) qui conduit à l'équation (1) et le cas général.

Chapitre V. — Nous espérons avoir résolu l'importante question suivante : *Quels sont tous les systèmes réguliers?* Nous avons montré que tous ces systèmes peuvent se ramener par des substitutions simples à des systèmes canoniques.

Chapitre VI. — Les théories exposées dans ce Chapitre et relatives aux systèmes à coefficients *simplement ou doublement périodiques* ont été d'abord développées par M. Floquet pour le cas d'une équation de la forme (1) (*Annales de l'École Normale,* 1883 et 1884). Nous étendons facilement les théorèmes de M. Floquet au système (A), *en nous servant toujours de la féconde théorie des diviseurs élémentaires.*

Nous avons ajouté à la théorie générale quelques belles pages de M. Picard (*J. de Crelle,* Bd. 90) sur un système à coefficients doublement périodiques.

Chapitre VII. — Nous avons mis ici à contribution M. Leo Kœnigsberger (*Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen,* Leipzig, G. Teubner, 1889). Ayant à étudier les systèmes homogènes, mais réductibles aux systèmes linéaires, nous avons surtout développé la réduction *des équations différentielles algébriques* à des équations du premier ordre.

Enfin, dans ce même Chapitre, nous montrons que la théorie générale de M. Fuchs, si belle qu'elle soit, n'empêche pas le développement, mais au contraire vient à l'aide de théories parallèles, plus utiles à divers points de vue particuliers. Ainsi, nous donnons la magnifique théorie de M. Darboux sur l'intégration des systèmes (A) par *les intégrales des systèmes* (*Comptes rendus,* 1880). Cette question nous a amené à dire quelques mots de la Théorie, si connue aujourd'hui, de M. Appell sur les fonctions invariantes et les *invariants* des systèmes (A).

Il ne nous a pas paru enfin inutile d'ajouter quelques notes élémentaires sur la théorie des déterminants.

Observations. — Les théories générales étudiées dans les divers Chapitres servent en quelque sorte d'introduction à la grande question des systèmes (A) à *solutions algébriques.* On sait déjà que le nombre des points singuliers est limité, que, pour chaque domaine, les éléments des solutions doivent être réguliers et sans logarithmes. On pourra se rendre compte facilement du degré d'avancement de cette question en relisant les remarquables Mémoires de M. Goursat sur la Théorie des équations différentielles linéaires.

CHAPITRE I.

PRINCIPES GÉNÉRAUX.

1. Le système d'équations

$$(A)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

est dit un *système d'équations différentielles linéaires et homogènes à une variable indépendante x et à n inconnues* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lorsque les coefficients $a_{11}, a_{1n}, \ldots, a_{nn}$ sont des fonctions analytiques de la variable x. Nous étudierons d'abord les systèmes de cette forme auxquels on peut ramener les systèmes de forme plus générale, comme on le verra par la suite (Chapitre VII).

Nous représenterons aussi un système de la forme (A) par la notation

$$(A')\qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

ou par la notation

$$(A'')\qquad \frac{dy_i}{dx} = \sum_j a_{ij}y_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

2. Supposons que les coefficients a aient une définition analytique dans une région du plan à contour simple, que nous appellerons T, et qui peut aller à l'infini.

Nous supposerons que ces coefficients soient uniformes dans la région (ou que l'on ait ramené l'étude de ces coefficients à celle de fonctions uniformes). Nous admettrons, en outre, que ces coefficients soient continus en tous les points de la région T, sauf en certains points. Ces points particuliers, isolés les uns des autres et généralement en nombre fini, seront appelés les *points singuliers* des fonctions a.

La variable x ayant d'abord une valeur x_0 dite *initiale* et représentée par un point dans *le plan des x*, on suppose que cette variable décrive un chemin quelconque allant du point x_0 à un autre point quelconque de la région T. Dans ces conditions, il s'agit d'abord de déterminer si, au moyen des équations (A), on peut définir n fonctions analytiques $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ayant chacune une valeur bien déterminée pour chaque point du chemin décrit par la variable x. C'est le premier problème que nous aurons à traiter.

Pour répondre à cette question, nous allons montrer qu'on peut *généralement intégrer le système* (A) par les séries.

3. Pour éviter plus loin (Chapitre IV) des répétitions, considérons de suite le système

$$(x-a)\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

et supposons que les fonctions $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ soient *holomorphes* dans un certain domaine du point $x = a$. Pour simplifier l'écriture nous poserons $x = a + x'$, de sorte que les fonctions $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ seront holomorphes dans un certain domaine de l'origine $x' = 0$.

Nous écrirons simplement les équations précédentes sous la forme (B) de l'introduction, c'est-à-dire sous la forme

$$x\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Les fonctions a_{ij} seront développables en séries uniformément convergentes dans le domaine considéré et de la forme

$$a_{ij} = a_{ij}^0 + x a_{ij}^1 + x^2 a_{ij}^2 + \ldots. \tag{3}$$

L'origine sera un point ordinaire ou un point singulier suivant que tous les coefficients constants a_{ij}^0 seront nuls ou non.

Nous allons montrer qu'on peut satisfaire au système (2) au moyen de n fonctions qu'on peut mettre sous la forme

$$y_i = x^r(\varphi_i^0 + x\varphi_i^1 + \ldots + x^k\varphi_i^k + \ldots) = x^r\varphi_i, \tag{4}$$

les séries φ_i entre parenthèses étant uniformément convergentes dans un certain domaine de l'origine.

Nous introduirons les valeurs (4) des y dans les équations (2), en tenant compte des équations, (3) et nous égalerons dans les deux membres les coefficients des mêmes puissances de x. Nous remarquerons d'abord que l'équation

$$y = x^r\varphi$$

entraîne la suivante

$$x\frac{dy}{dx} = x^r\left(x\frac{d\varphi}{dx} + r\varphi\right).$$

Ensuite nous observerons que les équations (2) deviennent après division par x^r

$$x\frac{d\varphi_i}{dx} = a_{i1}\varphi_1 + \ldots + (a_{ii} - r)\varphi_i + \ldots + a_{in}\varphi_n \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{5}$$

L'identification fournira d'abord les équations

$$(6)\quad \begin{cases} (a_{11}^0 - r)\varphi_1^0 + a_{12}^0\varphi_2^0 + \ldots + a_{1n}^0\varphi_n^0 = 0, \\ a_{21}^0\varphi_1^0 + (a_{22}^0 - r)\varphi_2^0 + \ldots + a_{2n}^0\varphi_n^0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}^0\varphi_1^0 + a_{n2}^0\varphi_2^0 + \ldots + (a_{nn}^0 - r)\varphi_n^0 = 0. \end{cases}$$

Celles-ci entraînent la condition

$$(7)\qquad F(r) = \begin{vmatrix} a_{11}^0 - r & a_{12}^0 & \ldots & a_{1n}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 - r & \ldots & a_{2n}^0 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \ldots & a_{nn}^0 - r \end{vmatrix} = 0.$$

Nous voyons d'abord que le nombre r ne pourra être que l'une des racines de l'équation algébrique de degré n

$$F(r) = 0.$$

Si tous les coefficients a_{ij}^0 sont nuls on prendra $r = 0$ et de plus dans les équations (6) les inconnues $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_n^0$ pourront prendre des valeurs arbitraires.

Soient $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les racines de l'équation $F(r) = 0$ rangées de manière qu'aucune des quantités $r_2 - r_1 - 1, \ldots, r_n - r_1 - 1$ ne soit nulle ou égale à un nombre entier positif. Cette condition sera remplie si les parties réelles ne vont pas en croissant quand on passe de la racine r_1 à l'une quelconque des autres. La quantité $r_1 + k$, quelle que soit la valeur du nombre k entier et positif, n'annulera jamais $F(r)$.

Nous prendrons $r = r_1$ et nous écrirons seulement r au lieu de r_1.

L'identification conduit maintenant à une infinité de systèmes successifs d'équations de la forme

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} k\varphi_i^k = {} & a_{i1}^0\varphi_1^k + a_{i2}^0\varphi_2^k + \ldots + (a_{ii}^0 - r)\varphi_i^k + \ldots + a_{in}^0\varphi_n^k \\ & + a_{i1}^1\varphi_1^{k-1} + a_{i2}^1\varphi_2^{k-1} + \ldots + a_{ii}^1\varphi_i^{k-1} + \ldots + a_{in}^1\varphi_n^{k-1} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{i1}^k\varphi_1^0 + a_{i2}^k\varphi_2^0 + \ldots + a_{ii}^k\varphi_i^0 + \ldots + a_{in}^k\varphi_n^0 \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Ce système d'équations est du premier degré par rapport aux coefficients $\varphi_1^k, \varphi_2^k, \ldots, \varphi_n^k$ et permet de les déterminer en fonction des coefficients φ dont l'indice supérieur est moindre. En effet, le déterminant des coefficients des inconnues est

$$\begin{vmatrix} a_{11}^0 - r - k & a_{12}^0 & \ldots & a_{1n}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 - r - k & \ldots & a_{2n}^0 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}^0 & a_{n2}^0 & \ldots & a_{nn}^0 - r - k \end{vmatrix} = F(r + k).$$

Ce déterminant ne pouvant être annulé par aucune valeur du nombre entier et positif k, on pourra déterminer de proche en proche les coefficients des séries φ.

Dans le cas où tous les coefficients a_{ik}^0 sont nuls et où, par suite, r est nul, les quantités $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_n^0$ resteront arbitraires, et tous les coefficients φ_i^k s'exprimeront finalement en fonctions linéaires et homogènes des n arbitraires $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_n^0$. En conséquence les valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ se présenteront sous la forme

$$y_i = \varphi_i^0 + x\varphi_i^1 + x^2\varphi_i^2 + \ldots,$$

et comme on pourra former n groupes de valeurs

$$\varphi_{1j}^0,\quad \varphi_{2j}^0,\quad \ldots\quad \varphi_{nj}^0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

dont le déterminant soit différent de zéro, on en conclut qu'on pourra former n groupes de valeurs correspondantes

$$y_{ij} = \varphi_{ij}^0 + x\varphi_{ij}^1 + x^2\varphi_{ij}^2 + \ldots \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

et entre les n^2 éléments y_{ij}, on ne pourra pas établir de relations simultanées et identiques de la forme

$$C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ou de la forme

$$C_1 y_{1j} + C_2 y_{2j} + \ldots + C_n y_{nj} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

à coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_n$ constants.

4. Démontrons que les séries φ obtenues dans le numéro précédent sont uniformément convergentes dans un certain domaine de l'origine.

Appelons ρ le rayon d'un cercle ayant pour centre l'origine et dans lequel les séries a_{ij} soient toutes convergentes, même aux points situés sur la circonférence. On pourra prendre ce nombre ρ assez petit pour que le module $|a_{ij}^\mu|\rho^\mu$ d'un terme quelconque $a_{ij}^\mu x^\mu$ des séries a soit aussi petit que l'on voudra, pourvu qu'on laisse de côté les premiers termes a_{ij}^0 pour lesquels on a $\mu = 0$.

Posons

$$-G_i = a_{i1}^1 \varphi_1^{k-1} + \ldots + a_{in}^k \varphi_n^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

de sorte que les équations (8) s'écriront

$$a_{i1}^0 \varphi_1^k + \ldots + (a_{ii}^0 - r - k)\varphi_i^k + \ldots + a_{in}^0 \varphi_n^k = G_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Tirons de ces équations la valeur de l'une quelconque des inconnues φ_s^k, nous aurons

$$F(r + k)\varphi_s^k = \Delta_1 G_1 + \ldots + \Delta_n G_n,$$

$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ représentant, au signe près, des déterminants mineurs du premier ordre du déterminant $F(r+k)$.

On peut écrire cette équation

$$F(r+k)\varphi_s^k \rho^k = \Delta_1 G_1 \rho^k + \ldots + \Delta_n G_n \rho^k.$$

Or nous aurons

$$\begin{aligned} -G_i \rho^k = & \quad a_{i1}^1 \rho . \varphi_1^{k-1} \rho^{k-1} + \ldots + a_{in}^1 \rho . \varphi_n^{k-1} \rho^{k-1} \\ & + a_{i1}^2 \rho^2 . \varphi_1^{k-2} \rho^{k-2} + \ldots + a_{in}^2 \rho^2 . \varphi_n^{k-2} \rho^{k-2} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \quad a_{in}^k \rho^k . \varphi_1^0 \quad + \ldots + a_{in}^k \rho^k . \varphi_n^0 . \end{aligned}$$

Un terme quelconque de cette somme est de la forme

$$a_{ij}^\mu \rho^\mu . \varphi_i^{k-\mu} \rho^{k-\mu},$$

et μ est au moins égal à 1.

Appelons α_{ij}^μ et $\psi_j^{k-\mu}$ les modules de α_{ij}^μ et de $\varphi_j^{k-\mu} \rho^{k-\mu}$. Le module de $G_i \rho^k$ sera inférieur à la somme

$$\sum \alpha_{ij}^\mu \psi_j^{k-\mu} \qquad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \ldots, n, \\ j = 1, 2, 3, \ldots, n. \\ \mu = 1, 2, 3, \ldots, k. \end{array} \right.$$

Mais pour une valeur donnée de ρ et pour $\mu > 0$, les modules α_{ij}^μ ont une valeur maximum α. De plus, pour les valeurs de μ de 1 à k, l'une des quantités $\psi^{k-\mu}$ est plus grande que les autres. Désignons-la par ψ. Le nombre des termes de la somme étant nk, le module de la somme $G_i \rho^k$ sera inférieur à $nk\alpha\psi$.

Appelons maintenant $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ les modules des déterminants $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, le module de la somme

$$\Delta_1 G_1 \rho^k + \ldots + \Delta_n G_n \rho^k$$

sera inférieur à

$$k n \alpha\psi(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n).$$

Soit aussi δ le module de $F(r+k)$ on aura pour le module ψ_k de $\varphi_s^k \rho^k$

$$\psi_k < n\alpha\psi\left(\frac{k\,\delta_1}{\delta} + \frac{k\,\delta_2}{\delta} + \ldots + \frac{k\,\delta_n}{\delta}\right).$$

Mais $\frac{k\,\delta_i}{\delta}$ est le module de la fraction $\frac{k\,\Delta_i}{F(r+k)}$, et le degré en k du numérateur est au plus égal au degré du dénominateur. On peut donc prendre k assez grand pour que, à partir de cette valeur de k et pour toutes les valeurs de k plus grandes, le module de la fraction diffère de sa limite l_i d'une quantité ε_i aussi petite qu'on voudra, et que ce module s'approche constamment de sa limite quand k augmente indéfiniment.

On aura alors pour cette valeur de k

$$\psi_k < n\alpha\psi(l_1 + l_2 + \ldots + l_n + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n).$$

Soit L la plus grande valeur de la parenthèse obtenue en prenant tous les ε positifs; on aura

$$\psi_k < n\alpha\psi \mathrm{L}.$$

Cela posé, on peut prendre ρ assez petit pour que $n\alpha\mathrm{L}$ soit un nombre plus petit que l'unité. En effet, on peut prendre ρ assez petit pour que α soit rendu aussi petit que l'on voudra. On aura donc, pour cette valeur de ρ, et pour toute valeur plus petite,

$$\psi_k < \frac{\psi}{p},$$

p étant un nombre plus grand que l'unité.

Si ensuite on remplace k par $k+1$, $k+2$, ..., on ne pourra pas augmenter la valeur de L et, par suite, celle de $n\alpha\mathrm{L}$ ou de $\frac{1}{p}$. On aura donc

$$\psi_{k+k'} < \frac{\psi}{p} \qquad (k' = 1, 2, \ldots; \infty).$$

Il résulte de là que les modules des termes des séries φ seront, à partir d'un certain rang, moindres qu'un nombre déterminé pour toute valeur de x dont le module sera au plus égal à ρ. Les séries φ seront donc uniformément convergentes à l'intérieur du cercle de rayon ρ ayant son centre à l'origine.

5. Nous ne retiendrons pour le moment que la conclusion suivante du théorème que nous venons de démontrer.

Si les coefficients a_{ij} du système d'équations différentielles linéaires et homogènes

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = \sum_j a_{ij} y_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

sont des fonctions holomorphes dans un domaine du point $x = a$ (c'est-à-dire dans un cercle d'un rayon suffisamment petit ayant son centre au point $x = a$), la variation continue du point $x = a$ à un point quelconque x situé dans ce domaine à une distance suffisamment petite δ du point $x = a$ détermine n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ holomorphes dans ce domaine δ, et pouvant prendre au point $x = a$ des valeurs $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_n^0$ complètement arbitraires.

Ces n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ forment ce que nous appellerons une *solution* du système (A).

6. La définition d'une solution peut être étendue au delà du domaine considéré.

En effet, dans le domaine δ du point $x = a$, faisons varier x depuis $x = a$ jusqu'à un point $x = b$ situé dans ce domaine. Les n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ayant d'abord les valeurs $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots, \varphi_n^0$ arriveront au point b à des valeurs généralement différentes $(\varphi_1^0)', \ldots, (\varphi_n^0)'$. Déterminons un domaine du point $x = b$, au moyen d'un cercle d'un certain rayon ayant son centre en ce point, et de telle manière que les théorèmes précédents soient applicables de nouveau; on fera passer x du point $x = b$ au point $x = c$ situé dans le second domaine, mais non nécessairement dans le premier. En ce point c on répétera ce que l'on a fait pour le point b, etc., et, par suite :

Si les fonctions a_{ij} sont uniformes dans une partie du plan limitée par un contour simple, ou même dans tout le plan, et continues en tous les points de cette région sauf en des points isolés, la variation continue de x, d'un point $x = a$ à un point quelconque de la même région, sur un chemin quelconque situé dans la région et ne passant par aucun point singulier, déterminera n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ uniformes dans toute région du plan qui ne contient aucun point singulier et continues en tous les points du chemin. Ces fonctions satisferont au système d'équations (A) et pourront prendre au point $x = a$ des valeurs $\varphi_1^0, \ldots, \varphi_n^0$ arbitrairement choisies.

C'est à l'ensemble de n fonctions ainsi définies pour la région T que nous donnerons dorénavant le nom de *solution*.

7. On appelle *système de solutions* l'ensemble de n solutions définies pour les mêmes variations de x. Les solutions d'un système ne diffèrent donc que par les valeurs initiales de leurs éléments.

Soit D le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} & \ldots & y_{n1} \\ y_{12} & y_{22} & \ldots & y_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1n} & y_{2n} & \ldots & y_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad |y_{ij}|$$

des éléments d'un système de solutions représentées par les n groupes de fonctions

$$y_{1j}, \quad \ldots, \quad y_{nj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous dirons que le système est *fondamental* si le déterminant D n'est pas identiquement nul.

Les systèmes fondamentaux étant d'une importance capitale dans nos théories, nous démontrerons d'abord qu'il existe des systèmes fondamentaux de solutions. Nous savons déjà qu'il en existe, quand on se borne à un domaine suffisamment petit du point $x = a$ dans lequel les coefficients a_{ij} sont holomorphes (§ 3).

8. Démontrons d'abord le théorème suivant :

Le déterminant D *d'un système de solutions quelconques satisfait à la relation*

$$d \log D = (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})\, dx.$$

On a

$$d \log D = \frac{1}{D} \frac{dD}{dx} dx.$$

Or

$$\frac{dD}{dx} = \sum_{i=1}^{i=n} \begin{vmatrix} y_{11} & \ldots & \frac{dy_{i1}}{dx} & \ldots & y_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1n} & \ldots & \frac{dy_{in}}{dx} & \ldots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Mais on a en général

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n.$$

On a donc

$$\begin{vmatrix} y_{11} & \ldots & \frac{dy_{i1}}{dx} & \ldots & y_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1n} & \ldots & \frac{dy_{in}}{dx} & \ldots & y_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{11} & \ldots & a_{i1} y_{11} + \ldots + a_{in} y_{n1} & \ldots & y_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1n} & \ldots & a_{i1} y_{1n} + \ldots + a_{in} y_{nn} & \ldots & y_{nn} \end{vmatrix} = a_{ii} D.$$

On a, par suite,

$$\frac{dD}{dx} = (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}) D,$$

d'où

$$\frac{1}{D} \frac{dD}{dx} = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii};$$

c'est-à-dire enfin

$$d \log D = \left(\sum_i a_{ii} \right) dx.$$

9. Si l'on intègre l'équation précédente, on pourra mettre le déterminant D sous la forme

$$D = C e^{\int \left(\sum_i a_{ii} \right) dx},$$

C étant une constante.

De là des conséquences remarquables. Si l'on se donne des valeurs initiales des n^2 fonctions y, telles que le déterminant D ne soit pas nul, la constante C ne sera pas nulle, et le déterminant D restera différent de zéro tant que la variable n'atteindra pas un point singulier du plan des x; or, nous avons écarté les points singuliers dans la définition des fonctions y. Donc, il *existe une infinité de systèmes fondamentaux de solutions.*

10. *Toute solution du système d'équations* (A) *peut s'obtenir par des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients constants des éléments d'un système fondamental de solutions.*

En effet, soit un système quelconque de solutions

$$y_{1j},\quad y_{2j},\quad \ldots,\quad y_{nj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Posons

$$Y_i = C_1 y_{i1} + C_2 y_{i2} + \ldots + C_n y_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ étant des constantes arbitraires; il est facile de vérifier que les fonctions Y constituent une solution du système (A).

Toute solution du système (A) peut, réciproquement, se mettre sous la forme précédente, pourvu que le système de solutions d'où l'on part soit fondamental.

En effet, soit

$$y_{1,n+1},\quad y_{2,n+1},\quad \ldots,\quad y_{n,n+1}$$

une solution quelconque du système d'équations (A). Cherchons à déterminer des fonctions $C_1, C_2, \ldots, C_n, \lambda$, telles que l'on ait

$$C_1 y_{i1} + C_2 y_{i2} + \ldots + \lambda y_{i,n+1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On prendra λ arbitrairement et l'on aura à résoudre un système à n inconnues $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Ce système est du premier degré; le déterminant des coefficients des inconnues est différent de zéro si le système de solutions y_{ij} est fondamental.

Les inconnues $C_1, C_2, \ldots, C_n$ seront donc des fonctions déterminées de λ.

Je dis que les rapports $\frac{C_i}{\lambda}$ se réduisent tous à des constantes. En effet, en dérivant les équation s précédentes, on a

$$y_{i1}\frac{dC_1}{dx} + \ldots + y_{in}\frac{dC_n}{dx} + y_{i,n+1}\frac{d\lambda}{dx} + C_1\frac{dy_{i1}}{dx} + \ldots + C_n\frac{dy_{in}}{dx} + \lambda\frac{dy_{i,n+1}}{dx} = 0.$$

Éliminons $\frac{dy_{ij}}{dx}$ au moyen des équations du système proposé.

Nous aurons

$$\begin{aligned}
&C_1 \frac{dy_{i1}}{dx} + \ldots + C_n \frac{dy_{in}}{dx} + \lambda \frac{dy_{i,n+1}}{dx} \\
&\quad = C_1(a_{i1}y_{11} + \ldots + a_{in}y_{n1}) + C_2(a_{i1}y_{12} + \ldots + a_{in}y_{n2}) \\
&\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad + C_n(a_{i1}y_{1n} + \ldots + a_{in}y_{nn}) + \lambda(a_{i1}y_{1,n+1} + \ldots + a_{in}y_{n,n+1}) \\
&\quad = a_{i1}(C_1y_{11} + \ldots + C_ny_{1n} + \lambda y_{1,n+1}) + \ldots \\
&\qquad + a_{in}(C_1y_{n1} + \ldots + C_ny_{nn} + \lambda y_{n,n+1}) = 0.
\end{aligned}$$

Nous aurons donc en même temps les deux systèmes d'équations

$$C_1 y_{i1} + \ldots + \lambda\ y_{i,n+1} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\frac{dC_1}{dx} y_{i1} + \ldots + \frac{d\lambda}{dx} y_{i,n+1} = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Ces deux équations déterminent les mêmes valeurs proportionnelles des inconnues, en prenant pour inconnues d'une part $C_1, C_2, \ldots, C_n, \lambda$ et, d'autre part, $dC_1, dC_2, \ldots, dC_n$ et $d\lambda$; il faut donc que l'on ait

$$\frac{dC_1}{C_1} = \frac{dC_2}{C_2} = \ldots = \frac{dC_n}{C_n} = \frac{d\lambda}{\lambda},$$

ou encore

$$d\left(\frac{C_i}{\lambda}\right) = 0,$$

ou enfin

$$\frac{C_i}{\lambda} = \text{const.}$$

Si donc on prend λ égal à -1, on aura les relations

$$y_{i,n+1} = C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

linéaires, homogènes et à coefficients constants qu'il s'agissait d'obtenir.

11. La démonstration du théorème précédent entraîne les corollaires suivants :

α. *Si un système de solutions n'est pas fondamental, il existe entre ses éléments des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme*

$$C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

β. *Entre les éléments de* $(n+1)$ *solutions du système* (A) *il existe toujours* *un système de relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme*

$$C_1 y_{i1} + \ldots + C_{n+1} y_{in+1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

12. *Si l'on substitue aux éléments d'un système fondamental de solutions d'autres éléments déterminés par les relations linéaires à coefficients constants*

$$Y_{ij} = C_{j1} y_{i1} + \ldots + C_{jn} y_{in} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

on obtient un nouveau système fondamental à condition que le déterminant des constantes de la substitution soit différent de zéro.

En effet, soient P le déterminant des fonctions Y, Q celui des fonctions y, R celui des constantes, on a identiquement

$$P = QR.$$

Or Q et R sont, par hypothèse, différents de zéro et, par suite, P est différent de zéro, et les fonctions Y forment un système fondamental.

13. Substituons à *des éléments* d'un système fondamental d'autres éléments déterminés par les relations à coefficients constants

$$Y_{hk} = C_{k1} y_{h1} + \ldots + C_{kg} y_{hg}$$

pour toutes les valeurs de h de 1 à n et pour toutes les valeurs de k de 1 à g.

Nous aurons le Tableau

$$\begin{array}{ccc}
Y_{11} & \ldots & Y_{n1} \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
Y_{1g} & \ldots & Y_{ng} \\
y_{1,g+1} & \ldots & y_{n,g+1} \\
\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
y_{1n} & \ldots & y_{nn}
\end{array}$$

Les éléments de ce Tableau forment encore un système fondamental de solutions si le déterminant de constantes $|c_{gg}|$ de la substitution est différent de zéro. En effet, le déterminant des constantes peut s'écrire

$$\begin{vmatrix}
c_{11} & \ldots & c_{1g} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
c_{21} & \ldots & c_{2g} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & . & . & \ldots & . \\
c_{g1} & \ldots & c_{gg} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
c_{g+1,1} & \ldots & c_{g+1,g} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & . & . & \ldots & . \\
c_{n1} & \ldots & c_{ng} & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{vmatrix}$$

et la question est ramenée à la précédente.

14. *Si l'on connaît une solution du système d'équations* (A), *on peut ramener l'intégration du système à celle d'un autre système de même forme ayant une inconnue de moins.*

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ les éléments de la solution connue. Il peut en exister qui soient nuls. Admettons que les éléments $u_{s+1}, u_{s+2}, \ldots, u_n$ soient identiquement nuls, sans qu'il en soit de même pour les éléments $u_1, u_2, \ldots, u_s$.

Substituons aux fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_s$ d'autres fonctions $q_1, q_2, \ldots, q_s$ déterminées par les relations

$$y_h = u_h q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, s). \tag{10}$$

Les s premières équations du système (A) deviendront

$$u_h \frac{dq_h}{dx} + q_h \frac{du_h}{dx} = a_{h1} u_1 q_1 + \ldots + a_{hs} u_s q_s + a_{h,s+1} y_{s+1} + \ldots + a_{hn} y_n,$$

ou encore

$$\begin{aligned} \frac{dq_h}{dx} = a_{h1} \frac{u_1}{u_h} q_1 + \ldots + \left(a_{hh} - \frac{1}{u_h}\frac{du_h}{dx}\right) q_h + \ldots + a_{h,s} \frac{u_s}{u_h} q_s \\ + a_{h,s+1} \frac{1}{u_h} y_{s+1} + \ldots + a_{hn} \frac{1}{u_h} y_n \qquad (h = 1, 2, \ldots, s). \end{aligned} \tag{11}$$

Remplaçons y_{s+k} par q_{s+k}, nous aurons un système en $q_1, q_2, \ldots, q_n$ de même forme que le système (A) et que nous écrirons

$$\frac{dq_i}{dx} = \alpha_{i1} q_1 + \ldots + \alpha_{in} q_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Cela posé, remarquons que le système (12) admet la solution

$$\begin{aligned} q_h &= 1 \qquad (h = 1, 2, \ldots, s), \\ q_{s+k} &= 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-s). \end{aligned}$$

Nous devrons donc avoir, entre les coefficients α, les relations

$$\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \ldots + \alpha_{is} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{13}$$

En tenant compte de ces conditions, nous pouvons écrire les équations (12) sous la forme

$$\frac{dq_i}{dx} = \alpha_{i2}(q_2 - q_1) + \ldots + \alpha_{is}(q_s - q_1) + \alpha_{is+1} q_{s+1} + \ldots + \alpha_{in} q_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Posons alors

$$z_h = q_h - q_1 \qquad (h = 2, 3, \ldots, s), \tag{15}$$

$$z_{s+k} = q_{s+k} \qquad k = 1, 2, \ldots, n-s), \tag{16}$$

et retranchons la première équation des $s-1$ suivantes. En conservant les $n-s$ dernières équations (14), nous obtiendrons un système de la forme

$$(17) \qquad \frac{dz_i}{dx} = A_{i2} z_2 + \ldots + A_{in} z_n \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

auquel il faudra joindre l'équation

$$(18) \qquad \frac{dq_1}{dx} = \alpha_{12} z_2 + \ldots + \alpha_{1n} z_n.$$

On a en outre les relations

$$(19) \qquad A_{hh} = \alpha_{hh} - \alpha_{1h} = a_{hh} - \frac{1}{u_h}\frac{du_h}{dx} - \frac{u_h}{u_1} a_{1h} \qquad (h = 2, 3, \ldots, s),$$

$$(20) \qquad A_{s+k,s+k} = \alpha_{s+k,s+k} = a_{s+k,s+k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-s),$$

$$(21) \qquad A_{h\mu} = \alpha_{h\mu} - \alpha_{1\mu} = \frac{u_\mu}{u_h} a_{h\mu} - \frac{u_\mu}{u_1} a_{1\mu} \qquad (\mu \neq h = 2, 3, \ldots, s),$$

$$(22) \qquad A_{h\nu} = \alpha_{h\nu} - \alpha_{1\nu} = \frac{1}{u_h} a_{h\nu} - \frac{1}{u_1} a_{1\nu} \qquad (\nu = s+1, \ldots, n),$$

$$(23) \qquad A_{s+k,\mu} = \alpha_{s+k,\mu} = a_{s+k,\mu} \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, s),$$

$$(24) \qquad A_{s+k,\nu} = \alpha_{s+k,\nu} = a_{s+k,\nu} \qquad (\nu \neq s+k = s+1, \ldots, n).$$

Supposons que nous ayons obtenu une solution $\zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_n$ du système (17). Nous pourrons tirer q_1 de l'équation (18) en effectuant une quadrature. Soit Q une intégrale de l'équation (18). Nous aurons

$$(25) \qquad \begin{cases} q_h = \zeta_h + Q, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{s+k} = \zeta_{s+k}, \end{cases}$$

et nous en déduirons la solution

$$(26) \qquad \begin{cases} y_1 = u_1 Q, \\ y_h = u_h(\zeta_h + Q), \\ y_{s+k} = \zeta_{s+k} \end{cases}$$

du système (A).

Nous sommes donc ramenés à la résolution du système (17) de même forme que (A), mais où le nombre des fonctions inconnues est diminué d'une unité.

15. *Étant donné un système fondamental de solutions du système* (17), *le système de solutions correspondant des équations* (A) *est aussi fondamental.*

En effet, soit Δ le déterminant des solutions

$$\xi_{2j},\quad \xi_{3j},\quad \ldots,\quad \xi_{nj} \qquad (j = 2, \ldots, n)$$

du système d'équations (17). Supposons Δ différent de zéro et, par suite, le système des solutions considérées fondamental.

L'équation (18) donne, pour chaque solution $\xi_{2j}, \ldots, \xi_{nj}$ des équations (17), une fonction Q_j, et l'on peut former un système de solutions des équations (A). Les éléments de ce système forment le Tableau

$$\begin{array}{lllllll}
u_1, & u_2, & \ldots, & u_s, & 0, & \ldots, & 0, \\
u_1 Q_1, & u_2(\xi_{22}+Q_1), & \ldots, & u_s(\xi_{s2}+Q_1), & \xi_{s+1,2}, & \ldots, & \xi_{n,2}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
u_1 Q_{n-1}, & u_2(\xi_{2n}+Q_{n-1}), & \ldots, & u_s(\xi_{sn}+Q_{n-1}), & \xi_{s+1,n} & \ldots, & \xi_{nn}.
\end{array}$$

Je dis que ce système est fondamental. En effet, s'il ne l'était pas, on pourrait établir entre ses éléments des relations à coefficients constants de la forme

$$C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

on aurait d'abord

$$C_1 u_1 + C_2 u_1 Q_1 + \ldots + C_n u_1 Q_{n-1} = 0,$$

ou, puisque u_1 n'est pas nul,

$$C_1 + C_2 Q_1 + \ldots + C_n Q_{n-1} = 0.$$

On aurait ensuite

$$C_1 u_h + C_2 u_h(\xi_{h2} + Q_1) + \ldots + C_n u_h(\xi_{hn} + Q_{n-1}) = 0,$$

ou, en tenant compte de la relation précédente, et en divisant par u_h qui n'est pas nul, on aurait

$$C_2 \xi_{h2} + \ldots + C_n \xi_{hn} = 0 \qquad (h = 2, 3, \ldots, s).$$

On aurait enfin

$$C_2 \xi_{s+k,2} + \ldots + C_n \xi_{s+k,n} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-s).$$

Ces deux derniers groupes de relations ne peuvent exister que si le système de solutions des équations (17) n'est pas fondamental, ce qui est contraire à l'hypothèse.

16. Nous avons maintenant l'indication d'une marche à suivre pour former un système fondamental de solutions des équations (A).

Soit une solution $u_1, u_2, \ldots, u_n$ du système (A). Formons un premier système auxiliaire d'équations ne renfermant que $n - 1$ inconnues.

Soit une solution $v_2, v_3, \ldots, v_n$ de ce système. Au moyen de cette solution, passons à un deuxième système auxiliaire d'équations ne renfermant que $n-2$ inconnues; au moyen d'une solution de ce nouveau système, passons de même à un système ne renfermant que $n-3$ inconnues et continuons ainsi jusqu'à ce que nous arrivions à un dernier système réduit à une seule équation renfermant une seule inconnue. Soit

$$\frac{dw}{dx} = w.\mathrm{F}$$

cette équation. Elle donnera, par une quadrature,

$$w = \mathrm{C}e^{\int \mathrm{F}dx},$$

où C est une constante arbitraire.

Cette valeur de w, n'étant pas identiquement nulle, forme à elle seule un système fondamental du dernier système auxiliaire. Elle fournira, après une intégration, une nouvelle solution de l'avant-dernier système auxiliaire. On aura alors deux solutions de ce système, et elles forment un système fondamental. Ce système fondamental permettra ensuite de former, après deux quadratures, deux solutions nouvelles du système auxiliaire précédent. Avec la solution déjà connue on aura trois solutions de ce système d'équations et ces solutions formeront un système fondamental. En remontant ainsi de proche en proche on obtiendra finalement un système fondamental de solutions des équations (A).

Le nombre total des quadratures à effectuer dans la suite du calcul est

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

17. Il existe une relation simple entre les expressions des déterminants des systèmes fondamentaux dans les systèmes d'équations (A) et (17). Soit D un déterminant relatif au système (A) et soit Δ un déterminant relatif au système (17). En négligeant les facteurs constants, qui ne sont pas nuls, puisque D et Δ doivent être différents de zéro, on a

$$\mathrm{D} = e^{\int \left(\sum_i a_{ii}\right) dx},$$

$$\Delta = e^{\int \left(\sum_i \mathrm{A}_{ii}\right) dx}.$$

Or on a, d'après les équations (19) et (20),

$$\mathrm{A}_{hh} = a_{hh} - \frac{1}{u_h}\frac{du_h}{dx} - a_{1h}\frac{u_h}{u_1} \qquad (h = 2, 3, \ldots, s),$$

$$\mathrm{A}_{s+k,s+k} = a_{s+k,s+k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-s).$$

On en conclut

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_{22} + \mathrm{A}_{33} + \ldots + \mathrm{A}_{nn} = a_{22} + \ldots + a_{nn} \\ - \left(a_{12}\frac{u_2}{u_1} + \ldots + a_{1s}\frac{u_s}{u_1}\right) - \left(\frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx} + \ldots + \frac{1}{u_s}\frac{du_s}{dx}\right).\end{aligned}$$

Mais, d'après la relation (13), on a

$$a_{12}\frac{u_2}{u_1} + \ldots + a_{1s}\frac{u_s}{u_1} = -a_{11} + \frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx}.$$

On a donc

$$\mathrm{A}_{22} + \ldots + \mathrm{A}_{nn} = (a_{11} + \ldots + a_{nn}) - \left(\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx} + \ldots + \frac{1}{u_s}\frac{du_s}{dx}\right).$$

On aura, par suite,

$$\Delta = e^{\int\left(\sum_i \mathrm{A}_{ii}\right)dx} = e^{\int\left(\sum_i a_{ii}\right)dx} e^{-\int\sum_{i=1}^{i=s}\frac{1}{u_i}\frac{du_i}{dx}dx},$$

d'où

$$\Delta = \mathrm{D}\, e^{-\log(u_1, u_2, \ldots, u_s)},$$

ou enfin

$$\mathrm{D} = \Delta . u_1, u_2, \ldots, u_s.$$

18. Comme première conséquence, imaginons qu'on donne d'abord le déterminant D et qu'on dirige le calcul de manière à obtenir le déterminant Δ. On voit que D et Δ ne pourront s'annuler l'un sans l'autre, car le produit $u_1, \ldots, u_s$ ne s'annulerait que si Δ était infini, c'est-à-dire si la variable x passait par un point singulier des coefficients A et, par suite, par un point singulier des coefficients a. On peut donc dire qu'à un déterminant D d'un système fondamental de solutions du système (A) on peut faire correspondre un déterminant Δ d'un système fondamental de solutions du système (17), et cette propriété peut évidemment s'étendre aux systèmes d'équations auxiliaires successifs.

19. Comme autre conséquence, on peut mettre le déterminant D sous la forme d'un produit de facteurs.

En effet, soient $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-2}$ les déterminants des systèmes fondamentaux de solutions des équations auxiliaires successives. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{D} &= \Delta\, u_1, u_2, \ldots, u_s, \\ \Delta &= \Delta_1 v_1, v_2, \ldots, v_{s'}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta_{n-2} &= w.\end{aligned}$$

En multipliant membre à membre, on a

$$D = u_1 u_2 \dots u_s v_1 \dots v_{s'} \dots w.$$

20. L'étude d'une équation linéaire et homogène d'ordre n de la forme

$$(27)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y$$

se ramène à celle d'un système d'équations linéaires et homogènes.

Posons, en effet,

$$(28)\qquad \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} = y_k \qquad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

et

$$(29)\qquad y = y_n.$$

Nous obtiendrons le système d'équations linéaires et homogènes

$$(30)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_n y_n, \\ \dfrac{dy_k}{dx} = y_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \dots, n). \end{cases}$$

Réciproquement, le système (30) se ramène à l'équation (27) par les substitutions inverses.

21. Considérons l'équation

$$(31)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{p_1}{x} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{p_n}{x^n} y.$$

et supposons les coefficients $p_1, p_2, \dots, p_n$ holomorphes dans le domaine de l'origine. On peut, par une substitution un peu différente de la précédente, ramener cette équation particulière à la forme (2) (§ 3). Ce calcul étant important dès maintenant, posons

$$(32)\qquad \begin{cases} y = x^{n-1} u_n, \\ \dfrac{dy}{dx} = x^{n-2} u_{n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = u_1. \end{cases}$$

Nous aurons d'abord

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{p_1}{x} u_1 + \ldots + \frac{p_n}{x} u_n,$$

et ensuite nous obtiendrons les deux équations

$$\frac{d^k y}{dx^k} = x^{n-k-1} u_{n-k},$$

$$\frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} = x^{n-k-2} u_{n-k-1},$$

d'où nous tirerons

$$(n-k-1)\, x^{n-k-1} \frac{u_{n-k}}{x} + x^{n-k-1} \frac{du_{n-k}}{dx} = \frac{d^{k+1} y}{dx} k + 1 = x^{n-k-1} \frac{u_{n-k-1}}{x},$$

ou encore

$$\frac{du_{n-k}}{dx} = \frac{u_{n-k-1}}{x} - \frac{(n-k-1)\, u_{n-k}}{x}.$$

Nous aurons donc le système d'équations linéaires et homogènes de la forme (2)

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} & x \frac{du_1}{dx} = p_1 u_1 + \ldots + p_n u_n, \\ & x \frac{du_2}{dx} = u_1 - u_2, \\ & x \frac{du_3}{dx} = u_2 - 2 u_3, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & x \frac{du_n}{dx} = u_{n-1} - (n-1)\, u_n. \end{aligned} \right.$$

22. Il est utile, pour la suite, de former l'équation $F(r) = 0$ de la forme (7) (§ 3), en supposant que l'on ait

$$p = p^0 + p' x + p^{(2)} x^2 + \ldots.$$

Cette équation a la forme

$$(34) \quad \begin{vmatrix} p_1^0 - r & p_2^0 & p_3^0 & \ldots & p_n^0 \\ 1 & -1 - r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -2 - r & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -(n-1) - r \end{vmatrix} = 0.$$

On remarquera que les mineurs du premier ordre du déterminant que l'on vient d'écrire ne peuvent avoir d'autre *plus grand commun diviseur* que l'unité.

En effet, le mineur

$$\begin{vmatrix} 1 & -1-r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -2-r & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -(n-2)-r \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

est égal à l'unité.

Nous verrons plus tard les conséquences importantes de ce fait (Chap. IV).

23. Revenons à l'équation générale

$$(27) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y_n,$$

qu'on peut ramener au système

$$(30) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = p_1 y_1 + \ldots + p_n y_n, \\ \dfrac{dy_k}{dx} = y_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n). \end{cases}$$

par les substitutions

$$(28) \qquad \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} = y_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$(29) \qquad y = y_n.$$

Le déterminant d'un système de solutions du système d'équations (30) peut se mettre sous la forme

$$(35) \qquad D = \begin{vmatrix} y_1 \; \dfrac{dy_1}{dx}, & \ldots, & \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} \\ \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ y_n \; \dfrac{dy_n}{dx}, & \ldots, & \dfrac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}.$$

S'il est différent de zéro, les n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont linéairement indépendantes; car, s'il existait entre elles une relation linéaire et homogène à coefficients constants de la forme

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = 0,$$

la même relation existerait entre les dérivées successives, c'est-à-dire entre les