P. DUHEM

Les actions électrodynamiques et électromagnétiques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 8, nº 1 (1894), p. A5-A57
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1894_1_8_1_A5_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

LES ACTIONS

ÉLECTRODYNAMIQUES ET ÉLECTROMAGNÉTIQUES,

PAR M. P. DUHEM,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Rennes.

DEUXIÈME PARTIE[1].

LES ACTIONS ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

CHAPITRE I.

L'INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE ET L'ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

§ I. — *Calcul des quantités $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ relatives à un aimant.*

L'hypothèse fondamentale sur laquelle nous ferons reposer l'étude de l'induction électromagnétique est celle que nous avons développée dans nos *Leçons sur l'électricité et le magnétisme* au Livre XVI, Chapitre II; rappelons cette hypothèse.

Considérons un élément magnétique de moment $\mathfrak{M}\,dv$. Soit BA ou dl son axe magnétique. Menons un plan perpendiculaire à l'axe dl; dans ce

(1) Voir *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VII, p. G.1.

plan, traçons un petit circuit C embrassant une aire Ω dont dl est la normale positive. Supposons ce circuit parcouru par un courant dont l'intensité J_1 est donnée par la relation

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} J_1 \Omega = \mathfrak{M}\, dv. \tag{1}$$

Nous admettrons que *cet élément magnétique et ce petit courant engendrent, en toutes circonstances, les mêmes forces électromotrices d'induction dans un élément conducteur quelconque.*

Cette hypothèse ramène l'étude de l'induction électromagnétique à l'étude de l'induction électrodynamique exercée par certains courants uniformes. Ce que nous avons vu dans notre Mémoire sur l'*Induction électrodynamique* nous montre que la mise en équation du problème de l'induction électromagnétique exige le calcul des trois fonctions $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ d'Helmholtz relatives au courant C.

D'après l'égalité (19) du Chapitre préliminaire, nous avons

$$\mathfrak{U} = \int \frac{u_1}{r} d\varpi_1 + \frac{1-\lambda}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

D'ailleurs, si le conducteur auquel se rapporte la fonction $\mathfrak{U}$ est parcouru par des courants uniformes, on a, en tout point de la masse de ce conducteur,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1} = 0$$

et en tout point de l'une des surfaces de discontinuité que présente ce conducteur,

$$\begin{gathered} u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ + u_2 \cos(N_1, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z) = 0, \end{gathered}$$

ce qui donne [Chapitre préliminaire, égalités (15)]

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0.$$

Ainsi, pour un conducteur parcouru par des courants uniformes, on a simplement

$$\mathfrak{U} = \int \frac{u_1}{r} d\varpi_1.$$

Appliquons cette formule au conducteur C. Soit ω la section infiniment petite du fil que l'on suppose disposé suivant la courbe C. Soit ds_1 un élément de longueur de ce fil. Nous aurons

$$d\varpi_1 = \omega\, ds_1,$$

$$\omega u = \mathrm{J}_1 \frac{dx}{ds_1}.$$

Nous aurons donc

$$\mathfrak{V} = \int_C \frac{\mathrm{J}_1}{r} \frac{dx}{ds_1} ds_1.$$

Si nous observons que dl est la direction de la normale positive à l'aire plane Ω qu'entoure la courbe C, le théorème de Stokes [*Leçons sur l'Électricité,* Tome III, p. 35, égalité (2)] nous donnera

$$(2) \qquad \mathfrak{V} = \Omega \mathrm{J}_1 \left[\cos(dl, z) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - \cos(dl, y) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right],$$

ξ, η, ζ étant les coordonnées d'un point de l'élément dv.

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les composantes de l'aimantation $\mathfrak{M}$ en un point de l'élément dv. Nous aurons, en vertu de l'égalité (1),

$$\mathcal{A}\, dv = \mathfrak{M} \cos(dl, x)\, dv = \frac{\sqrt{2}\Omega \mathrm{J}_1}{\mathfrak{A}} \cos(dl, x),$$

$$\mathcal{B}\, dv = \mathfrak{M} \cos(dl, y)\, dv = \frac{\sqrt{2}\Omega \mathrm{J}_1}{\mathfrak{A}} \cos(dl, y),$$

$$\mathcal{C}\, dv = \mathfrak{M} \cos(dl, z)\, dv = \frac{\sqrt{2}\Omega \mathrm{J}_1}{\mathfrak{A}} \cos(dl, z).$$

L'égalité (2) devient donc la première des égalités

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathfrak{V} &= \left(\mathcal{C} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - \mathcal{B} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) dv, \\ \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathfrak{Q} &= \left(\mathcal{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} - \mathcal{C} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right) dv, \\ \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \mathfrak{W} &= \left(\mathcal{B} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} - \mathcal{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} \right) dv; \end{aligned} \right.$$

les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

Ces formules donnent les valeurs des fonctions d'Helmholtz pour un élément magnétique. Pour un aimant de dimensions finies, on aurait

$$(3\ bis)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{I}}{\sqrt{2}}\mathfrak{U} = \displaystyle\int\left(\mathfrak{C}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} - \mathfrak{B}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)dv, \\ \dfrac{\mathfrak{I}}{\sqrt{2}}\mathfrak{V} = \displaystyle\int\left(\mathfrak{A}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta} - \mathfrak{C}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\right)dv, \\ \dfrac{\mathfrak{I}}{\sqrt{2}}\mathfrak{W} = \displaystyle\int\left(\mathfrak{B}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} - \mathfrak{A}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\right)dv. \end{cases}$$

§ II. — *Propriétés des fonctions $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ relatives à un aimant.*

Nous pourrions étudier directement les propriétés des fonctions $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ ainsi introduites; mais un artifice très simple nous permettra de déduire ces propriétés de démonstrations déjà faites.

Imaginons qu'on laisse à l'aimant sa forme, mais qu'on y distribue une aimantation nouvelle dont les composantes $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ soient liées aux composantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ de l'aimantation précédente par les relations

$$(4)\quad \frac{\mathfrak{I}}{\sqrt{2}}\mathfrak{A}' = 0, \qquad \frac{\mathfrak{I}}{\sqrt{2}}\mathfrak{B}' = \mathfrak{C}, \qquad \frac{\mathfrak{I}}{\sqrt{2}}\mathfrak{C}' = -\mathfrak{B}.$$

La fonction $\mathfrak{U}$ sera la fonction potentielle magnétique de cette distribution. Les propriétés de la fonction potentielle magnétique, établies au Livre VII de nos *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, nous feront connaître immédiatement les propriétés de la fonction $\mathfrak{U}$. Un procédé analogue nous fera connaître les propriétés des fonctions $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{W}$. Nous obtiendrons ainsi les résultats suivants :

1° Les fonctions $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ sont uniformes, finies et continues dans tout l'espace, sans excepter les points qui font partie de l'aimant ou des surfaces de discontinuité qu'il présente.

2° On a, dans tout l'espace,

$$(5)\quad \begin{aligned} \frac{\mathfrak{I}}{\sqrt{2}}\mathfrak{U} = -\mathbf{S}\big[\ &\mathfrak{C}_1\cos(N_1, y) - \mathfrak{B}_1\cos(N_1, z) \\ &+ \mathfrak{C}_2\cos(N_2, y) - \mathfrak{B}_2\cos(N_2, z)\big]\frac{1}{r}\,dS \\ &- \int\left(\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\eta} - \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\zeta}\right)\frac{1}{r}\,dv, \end{aligned}$$

la seconde intégrale s'étendant au volume entier de l'aimant, la première aux diverses surfaces de discontinuité que cet aimant présente, et en particulier à sa surface terminale.

3° Les dérivées partielles du premier ordre des fonctions $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{W}$ sont finies, continues et uniformes dans tout l'espace extérieur à l'aimant et aussi dans toute région intérieure à l'aimant où les dérivées partielles des composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de l'aimantation sont finies.

4° On peut écrire, en tout point d'une semblable région,

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} = -\mathbf{S}\Big[\mathcal{C}_1 \cos(N_1, y) - \mathcal{B}_1 \cos(N_1, z) + \mathcal{C}_2 \cos(N_2, y) - \mathcal{B}_2 \cos(N_2, z)\Big]\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,dS - \int\left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \zeta}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,dS, \tag{6}$$

et des égalités analogues pour $\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}, \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}, \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x}, \dots$

5° De telles égalités montrent que l'on a, en tout point d'une semblable région,

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

6° En un point d'une surface de discontinuité séparant deux régions 1 et 2 de l'aimant, on a

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_1} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_2}\right) &= 4\pi\big\{[\mathcal{C}_1 \cos(N_1, y) - \mathcal{B}_1 \cos(N_1, z)] + [\mathcal{C}_2 \cos(N_2, y) - \mathcal{B}_2 \cos(N_2, z)]\big\},\\
\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial N_1} + \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial N_2}\right) &= 4\pi\big\{[\mathcal{A}_1 \cos(N_1, z) - \mathcal{C}_1 \cos(N_1, x)] + [\mathcal{A}_2 \cos(N_2, z) - \mathcal{B}_2 \cos(N_2, x)]\big\},\\
\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial N_1} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial N_2}\right) &= 4\pi\big\{[\mathcal{B}_1 \cos(N_1, x) - \mathcal{A}_1 \cos(N_1, y)] + [\mathcal{B}_2 \cos(N_2, x) - \mathcal{A}_2 \cos(N_2, y)]\big\}.
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

7° En tout point extérieur à l'aimant, on a

$$\Delta \mathfrak{V} = 0, \qquad \Delta \mathfrak{Q} = 0, \qquad \Delta \mathfrak{W} = 0. \tag{9}$$

8° En tout point intérieur à l'aimant et non situé sur une surface de discontinuité, on a

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Delta\mathfrak{V} &= 4\pi\left(\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z}\right),\\ \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Delta\mathfrak{Q} &= 4\pi\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial x}\right),\\ \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\Delta\mathfrak{W} &= 4\pi\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial y}\right). \end{aligned}\right.$$

§ 3. — *L'induction électromagnétique.*

Les fonctions $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{W}$ une fois connues, il n'y a plus aucune difficulté à écrire les lois de l'induction électromagnétique; elles se déduiront immédiatement des lois de l'induction électrodynamique. En un point (x, y, z) d'un conducteur, point dont le déplacement a pour composantes δx, δy, δz, la force électromotrice d'induction électromagnétique aura pour composantes [Chapitre préliminaire, égalités (2)] les quantités $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ déterminées par

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{E}_x\,dt &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{V} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \mathfrak{Q}\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right),\\ \mathcal{E}_y\,dt &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{Q} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \mathfrak{Q}\frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right),\\ \mathcal{E}_z\,dt &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{W} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta x}{\partial z} + \mathfrak{Q}\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right). \end{aligned}\right.$$

Ces égalités sont susceptibles de transformations analogues à celles que nous avons exposées au Chapitre préliminaire, § I; il est inutile de nous y arrêter ici.

§ 4. — *L'énergie interne d'un système qui renferme des courants et des aimants.*

Dans un système qui ne renferme pas de courants, mais qui renferme des aimants, l'énergie interne a une valeur U donnée par l'égalité [*Leçons*, Tome III, égalité (3)],

$$\begin{aligned} \mathrm{EU} = \mathrm{E\Upsilon} + \mathfrak{T} + \mathrm{W} + \sum\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)q \\ + \int\left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T}) - \mathrm{T}\frac{\partial\,\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})}{\partial\mathrm{T}}\right]dv, \end{aligned}$$

ces diverses lettres ayant la signification qui leur a toujours été attribuée dans ce qui précède.

Lorsque le système renferme des courants, nous pouvons écrire

$$
(12) \qquad \mathbf{E}\mathbf{U} = \mathbf{E}\Upsilon + \mathfrak{F} + \mathbf{W} + \sum \left(\Theta - \mathbf{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathbf{T}}\right) q + \int \left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathbf{T}) - \mathbf{T}\frac{\partial\,\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathbf{T})}{\partial\mathbf{T}}\right] dv + \mathbf{E}\mathbf{U}',
$$

la quantité U′ étant assujettie à devenir égale à o lorsque les flux s'annulent en tout point du système.

C'est cette quantité U′ que nous nous proposons de déterminer.

Pour cela, nous ferons usage de la proposition suivante, énoncée et commentée dans nos *Leçons sur l'Électricité,* au Livre XV, Chapitre IV, § 4 :

La quantité de chaleur dégagée par le système pendant le temps dt a une valeur dQ donnée par l'égalité

$$
(13) \quad \mathbf{E}\,d\mathbf{Q} = dt \int \left[\left(\mathbf{E}_x - \mathbf{T}\frac{\partial\mathbf{E}_x}{\partial\mathbf{T}}\right) u + \left(\mathbf{E}_y - \mathbf{T}\frac{\partial\mathbf{E}_y}{\partial\mathbf{T}}\right) u + \left(\mathbf{E}_z - \mathbf{T}\frac{\partial\mathbf{E}_z}{\partial\mathbf{T}}\right) w\right] d\varpi + \mathbf{E}\,d\mathbf{Q}';
$$

E_x, E_y, E_z sont les composantes de la force électromotrice totale en un point (x, y, z) de l'élément conducteur $d\varpi$; l'intégrale s'étend à tous les conducteurs que renferme le système; quant à la quantité dQ′, on ne connaît son expression que dans deux cas particuliers : elle est égale à o si les corps magnétiques sont tous des solides rigides, d'état invariable, et si chacun des éléments magnétiques que renferme le système se deplace en entraînant avec lui une aimantation invariable; si tous les corps magnétiques d'aimantation variable que renferme le système sont des corps parfaitement doux, elle a une valeur donnée par l'égalité

$$
(14) \qquad \mathbf{E}\,d\mathbf{Q}' = \mathbf{T}\frac{\partial}{\partial\mathbf{T}} \int \frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathbf{T})}{\partial\mathfrak{M}}\,\delta\mathfrak{M}\,dv,
$$

l'intégration s'étendant à tous les corps magnétiques dont l'aimantation a varié pendant le temps dt.

Nous allons, pour déterminer U′, appliquer cette proposition au cas où le système, formé de corps immobiles, dont l'aimantation est invariable, est parcouru par des courants qui varient d'une manière quelconque. Dans ce cas, la quantité dQ′ est égale à o, et la quantité dQ à $(-\,\delta\mathrm{U})$; en outre, on a

$$\delta\mathfrak{F} = 0,$$

$$\delta \int \left[\left(\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T) - T\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, T)}{\partial T}\right] dv = 0,$$

en sorte que les égalités (12) et (13) donnent

$$(15)\quad \begin{aligned} &E\delta\Upsilon + \delta W + \delta\sum\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)q + E\delta U' \\ &\quad + dt\int\left[\left(E_x - T\frac{\partial E_x}{\partial T}\right)u + \left(E_y - T\frac{\partial E_y}{\partial T}\right)v + \left(E_z - T\frac{\partial E_z}{\partial T}\right)w\right] d\varpi = 0. \end{aligned}$$

Écrivons les expressions de E_y, E_y, E_z.

Désignons, désormais, par les symboles Φ, Ψ, X les quantités $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{v}$, $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{\varphi}$, $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{w}$, relatives à l'aimantation distribuée sur le système, quantités définies par les égalités (3 *bis*); réservons les symboles $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{\varphi}$, $\mathfrak{w}$ pour les fonctions analogues relatives aux flux électriques qui traversent le système, fonctions définies au Chapitre préliminaire, égalités (1).

En vertu des égalités (1) de notre Mémoire *Sur l'Induction électrodynamique*, (6) du Chapitre préliminaire et (11) du présent Chapitre, les quantités δx, δy, δz étant nulles en tout point, nous aurons

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_x - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\Phi}{\partial t}.$$

Mais, les conducteurs et les aimants devenant immobiles, l'aimantation demeurant invariable, la fonction Φ garde évidemment une valeur indépendante du temps, en sorte que l'on a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0.$$

L'égalité précédente devient alors la première des égalités

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_x - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t}, \\ E_y &= -\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_y - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial\mathfrak{\varphi}}{\partial t}, \\ E_z &= -\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_z - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial t}; \end{aligned}$$

les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

L'égalité (13) devient

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\delta\Upsilon + dt \int \Big[\Big(\varphi_x - \mathrm{T}\frac{\partial x_x}{\partial \mathrm{T}}\Big) u + \Big(\varphi_y - \mathrm{T}\frac{\partial \varphi_y}{\partial \mathrm{T}}\Big) v + \Big(\varphi_z - \mathrm{T}\frac{\partial \varphi_z}{\partial \mathrm{T}}\Big) w \Big] d\varpi \\
+ \delta \mathrm{W} - dt \int \varepsilon \Big(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} u + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} w\Big) d\varpi \\
+ \delta \sum \Big(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\Big) q - dt \int \Big[u \frac{\partial}{\partial x}\Big(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\Big) + v \frac{\partial}{\partial y}\Big(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\Big) \\
+ w \frac{\partial}{\partial z}\Big(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial t}\Big)\Big] d\varpi \\
+ \mathrm{E}\,\delta \mathrm{U}' - \frac{\mathfrak{A}^9}{2} dt \int \Big(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} u + \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial t} v + \frac{\partial \mathfrak{W}}{d t} w\Big) d\varpi = 0.
\end{aligned}
$$

En raisonnant comme nous l'avons déjà fait (première Partie, Chapitre I, § 1), nous trouverons que cette égalité entraîne la suivante

$$
\mathrm{E}\mathrm{U}' = \frac{\mathfrak{A}^2}{4} \int (\mathfrak{V} u + \mathfrak{Q} v + \mathfrak{W} w)\, d\varpi,
$$

en sorte que l'égalité (12) devient

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\mathrm{U} = \mathrm{E}\Upsilon + \mathrm{W} + \mathcal{J} + \sum \Big(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial t}\Big) q \\
+ \int \Big[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T}) - \mathrm{T}\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})}{\partial \mathrm{T}} \Big] dv \\
+ \frac{\mathfrak{A}^2}{4} \int (\mathfrak{V} u + \mathfrak{Q} v + \mathfrak{W} w)\, d\varpi.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

On voit que, conformément à ce que nous avons déjà rencontré, dans des cas plus particuliers (voir *Leçons sur l'Électricité,* Livre IV, Chapitre IV, et Livre XVI, Chapitre I), l'énergie interne d'un système qui renferme des courants et des aimants ne renferme aucun terme électromagnétique, c'est-à-dire aucun terme dépendant à la fois des intensités des courants et de l'aimantation des aimants.

CHAPITRE II.

LES FORCES ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

§ I. — *Travail virtuel des forces électromagnétiques.*

C'est encore à la proposition dont nous avons fait usage pour déterminer U' que nous demanderons les principes propres à déterminer les forces qui s'exercent entre les courants et les aimants; mais, pour appliquer cette proposition, nous ne supposerons plus immobiles les divers corps qui composent le système; nous supposerons seulement que les corps magnétiques sont des solides rigides, d'état invariable, et que chacun des éléments magnétiques garde une aimantation invariable, en sorte que, dans l'égalité (13) du Chapitre précédent, la quantité dQ' sera égale à o.

Pendant le temps dt, les forces extérieures au système effectuent un travail $d\mathfrak{T}_e$ et la force vive croît de $\delta \sum \frac{mv^2}{2}$. On a donc

$$\mathrm{E}\, dQ = d\mathfrak{T}_e - \mathrm{E}\, \delta \mathrm{U} - \delta \sum \frac{mv^2}{2},$$

en sorte que l'on peut dire que les forces intérieures au système effectuent un travail

$$d\mathfrak{T}_i = -\mathrm{E}(dQ + \delta \mathrm{U}),$$

ou bien, en vertu de l'égalité (13) du Chapitre précédent,

$$(1) \qquad d\mathfrak{T}_i = -\mathrm{E}\,\delta\mathrm{U} + dt \int \left[\left(\mathrm{E}_x - \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial \mathrm{T}}\right) u + \left(\mathrm{E}_y - \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial \mathrm{T}}\right) v + \left(\mathrm{E}_z - \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial \mathrm{T}}\right) w \right] d\varpi.$$

Chaque élément magnétique garde une aimantation invariable. On a donc

$$\delta \int \left[\mathcal{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T}) - \mathrm{T}\frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})}{\partial \mathrm{T}} \right] dv = 0,$$

et l'égalité (14) du Chapitre précédent donne

$$(2)\qquad \mathbf{E}\,\delta\mathrm{U} = \mathbf{E}\,\delta\Upsilon + \delta\mathbf{W} + \delta y + \delta\sum\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)q + \frac{\mathfrak{A}^2}{4}\delta\int(\mathfrak{V}u + \mathfrak{Q}v + \mathfrak{W}w)\,d\varpi.$$

D'autre part, on a [Chapitre préliminaire, égalité (2) et IIe Partie, Chapitre I, égalité (11)]

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathbf{E}_x\,dt = &-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon\mathrm{V}+\Theta) - \varphi_x\right]dt \\
&-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{V} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \mathfrak{Q}\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right) \\
&-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\delta\Phi + \Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} + \mathrm{X}\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right), \\
\mathbf{E}_y\,dt = &-\left[\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon\mathrm{V}+\Theta) - \varphi_y\right]dt \\
&-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{Q} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \mathfrak{Q}\frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right), \\
&-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\delta\Psi + \Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \mathrm{X}\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right) \\
\mathbf{E}_z\,dt = &-\left[\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon\mathrm{V}+\Theta) - \varphi_z\right]dt \\
&-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{W} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta x}{\partial z} + \mathfrak{Q}\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right) \\
&-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\delta\mathrm{X} + \Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial z} + \Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \mathrm{X}\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right.$$

Les égalités (1), (2) et (3) donnent

$$(4)\qquad \begin{aligned} d\mathfrak{T}_i = &-\mathbf{E}\,\delta\Upsilon - dt\int\left[\left(\varphi_x - \mathrm{T}\frac{\partial\varphi_x}{\partial\mathrm{T}}\right)u + \left(\varphi_y - \mathrm{T}\frac{\partial\varphi_y}{\partial\mathrm{T}}\right)v + \left(\varphi_z - \mathrm{T}\frac{\partial\varphi_z}{\partial\mathrm{T}}\right)w\right]d\varpi &(1)\\
&-\delta\mathbf{W} + \varepsilon\,dt\int\left(\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial x}u + \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y}v + \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial z}w\right)d\varpi &(2)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&-\delta\sum\left(\Theta-\mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)q\\&+dt\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Theta-\mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)u+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Theta-\mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)v+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Theta-\mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)w\right]d\varpi\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

$$-\delta\mathrm{Y}\qquad(4)$$

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\mathfrak{A}^2}{4}\delta\int(\mathfrak{U}u+\mathfrak{V}v+\mathfrak{W}w)\,d\varpi\\&+\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\Bigg[\quad\left(\delta\mathfrak{U}+\mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}+\mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}+\mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)u\\&\qquad\qquad+\left(\delta\mathfrak{V}+\mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial y}+\mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}+\mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right)v\\&\qquad\qquad+\left(\delta\mathfrak{W}+\mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial z}+\mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial z}+\mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)w\Bigg]d\varpi\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}&+\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\Bigg[\quad\left(\delta\Phi+\Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}+\Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}+\mathrm{X}\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)u\\&\qquad\qquad+\left(\delta\Psi+\Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial y}+\Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}+\mathrm{X}\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right)v\\&\qquad\qquad+\left(\delta\mathrm{X}+\Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial z}+\Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial z}+\mathrm{X}\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)w\Bigg]d\varpi.\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Or, au second membre de cette égalité (4), les termes (1) représentent des forces intérieures qui subsisteraient dans le système ramené à l'état neutre et désaimanté;

Les termes (2) représentent le travail des forces électrostatiques données par la loi de Coulomb;

Les termes (3) représentent le travail des forces électrocapillaires;

Le terme (4) représente le travail des forces magnétiques;

Les termes (5) représentent (Ire Partie, Chapitre II, § 2) le travail des forces électrodynamiques.

L'égalité (4) nous conduit donc à la conclusion suivante : *Dans un système qui renferme à la fois des courants et des aimants s'exercent des forces différentes de celles qui nous sont déjà connues par les théories de la Physique autres que l'Électromagnétisme. Ces forces ont pour travail virtuel*

$$(5)\qquad d\mathfrak{T}=\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\Bigg[\quad\left(\delta\Phi+\Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}+\Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}+\mathrm{X}\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)u+\left(\delta\Psi+\Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial y}+\Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}+\mathrm{X}\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right)v+\left(\delta\mathrm{X}+\Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial z}+\Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial z}+\mathrm{X}\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)w\Bigg]d\varpi,$$

l'intégration s'étendant à tous les conducteurs parcourus par des courants.

Rappelons que, pour établir cette égalité, on a supposé :

1° Que les aimants étaient des solides rigides;

2° Que l'aimantation de chaque élément magnétique demeurait, dans le mouvement de cet élément, invariablement liée à la matière qui forme cet élément.

Ces restrictions ne doivent pas être oubliées dans le calcul des quantités $\delta\Phi$, $\delta\Psi$, δX.

Nous avons [Chapitre I, égalités (3 *bis*)],

$$\Phi = \int \left(\mathcal{C} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - \mathcal{B} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) dv.$$

La variation $\delta\Phi$ qu'éprouve dans le temps dt la fonction Φ relative à un élément conducteur dv, qui lui-même éprouve un déplacement δx, δy, δz, peut s'écrire

$$\delta\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \delta z,$$

$\frac{\partial \Phi}{\partial t} dt$ désignant la variation subie pendant le temps dt par la valeur que prend la fonction Φ en un point fixe (x, y, z) de l'espace.

La particule dv garde un volume invariable; dans le temps dt, elle subit une translation $(\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta)$ et une rotation dont les composantes ont pour valeur

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\, \delta\eta}{\partial z} - \frac{\partial\, \delta\zeta}{\partial y} \right), \\ \omega' &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\, \delta\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\, \delta\xi}{\partial z} \right), \\ \omega'' &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\, \delta\xi}{\partial y} - \frac{\partial\, \delta\eta}{\partial x} \right), \end{aligned} \right.$$

On a alors

$$\delta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \eta\, \partial \xi} \delta\xi + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \eta^2} \delta\eta + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \eta\, \partial \zeta} \delta\zeta,$$

$$\delta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \zeta\, \partial \xi} \delta\xi + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \zeta\, \partial \eta} \delta\eta + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \zeta^2} \delta\zeta,$$

$$\delta\mathcal{A} = \omega' \mathcal{C} - \omega'' \mathcal{B}, \qquad \delta\mathcal{B} = \omega'' \mathcal{A} - \omega \mathcal{C}, \qquad \delta\mathcal{C} = \omega \mathcal{B} - \omega' \mathcal{A}.$$

Ces diverses égalités nous donnent

$$\begin{aligned}\delta\Phi = \int \Big[& (\omega\,\mathcal{B} - \omega'\,\mathcal{A})\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - (\omega''\,\mathcal{A} - \omega\,\mathcal{C})\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \\ & + \mathcal{C}\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \eta\,\partial \xi}\,\delta\xi + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \eta^2}\,\delta\eta + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \eta\,\partial \zeta}\,\delta\zeta\right) \\ & - \mathcal{B}\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \zeta\,\partial \xi}\,\delta\xi + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \zeta\,\partial \eta}\,\delta\eta + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \zeta^2}\,\delta\zeta\right)\Big]\,dv \\ & + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,\delta z.\end{aligned}$$

Les quantités $\delta\Psi$, δX s'expriment d'une manière analogue.

Nous trouverons sans peine que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned}(7)\qquad & u\,\delta\Phi + v\,\delta\Psi + w\,\delta X \\ & = \int \Big[\left(\mathcal{A}\,\frac{\partial P}{\partial \xi} + \mathcal{B}\,\frac{\partial Q}{\partial \xi} + \mathcal{C}\,\frac{\partial R}{\partial \xi}\right)\delta\xi \\ & \qquad + \left(\mathcal{A}\,\frac{\partial P}{\partial \eta} + \mathcal{B}\,\frac{\partial Q}{\partial \eta} + \mathcal{C}\,\frac{\partial R}{\partial \eta}\right)\delta\eta \\ & \qquad + \left(\mathcal{A}\,\frac{\partial P}{\partial \zeta} + \mathcal{B}\,\frac{\partial Q}{\partial \zeta} + \mathcal{C}\,\frac{\partial R}{\partial \zeta}\right)\delta\zeta \\ & \qquad + (\mathcal{B}\,R + \mathcal{C}\,Q)\,\omega + (\mathcal{C}\,P - \mathcal{A}\,R)\,\omega' + (\mathcal{A}\,Q - \mathcal{B}\,P)\,\omega''\Big]\,dv \\ & \qquad + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,\delta z\right) u \\ & \qquad + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\,\delta z\right) v \\ & \qquad + \left(\frac{\partial X}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial X}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial X}{\partial z}\,\delta z\right) w\end{aligned}$$

avec

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= v\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} - w\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}, \\ Q &= w\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} - u\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}, \\ R &= u\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - v\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on rapproche ces égalités (8) des égalités qui définissent les fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ [Ire Partie, Chapitre III, égalités (4)], on trouve

$$\mathfrak{P}(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \int \mathrm{P}\, d\varpi,$$

$$\mathfrak{Q}(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \int \mathrm{Q}\, d\varpi,$$

$$\mathfrak{R}(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \int \mathrm{R}\, d\varpi.$$

Si, de plus, l'aimant et le conducteur que l'on considère n'ont aucune partie commune, de telle sorte que le point (ξ, η, ζ) ne puisse faire partie du volume dont $d\varpi$ est un élément, les dérivées partielles des fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ par rapport à ξ, η, ζ, s'exprimeront par des égalités de la forme

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \xi} = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \int \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \xi}\, d\varpi.$$

L'égalité (7) permettra donc d'écrire

$$(9) \qquad \begin{aligned} -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \int & (u\,\delta\Phi + v\,\delta\Psi + w\,\delta\mathrm{X})\, d\varpi \\ = \int \Big[& \left(\mathcal{A}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \xi} + \mathcal{B}\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \xi} + \mathcal{C}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi}\right)\delta\xi \\ & + \left(\mathcal{A}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \eta} + \mathcal{B}\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \eta} + \mathcal{C}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \eta}\right)\delta\eta \\ & + \left(\mathcal{A}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \zeta} + \mathcal{B}\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \zeta} + \mathcal{C}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \zeta}\right)\delta\zeta \\ & + (\mathcal{B}\mathfrak{R} - \mathcal{C}\mathfrak{Q})\,\omega + (\mathcal{C}\mathfrak{P} - \mathcal{A}\mathfrak{R})\,\omega' + (\mathcal{A}\mathfrak{Q} - \mathcal{B}\mathfrak{P})\,\omega'' \Big]\, dv \\ -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \int \Big[& \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\delta z\right) u \\ & + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\delta z\right) v \\ & + \left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z}\delta z\right) w \Big]\, d\varpi, \end{aligned}$$

ω, ω', ω'' ayant les valeurs données par les égalités (6).

D'autre part, on a

$$(10)\quad \begin{aligned}\int\Big[& \left(\Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}+\Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}+X\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)u \\ & +\left(\Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial y}+\Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}+X\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right)v \\ & +\left(\Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial z}+\Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial z}+X\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)w\Big]\,d\varpi \\ = -\mathbf{S}\big[& u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z) \\ & +u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)\big](\Phi\,\delta x+\Psi\,\delta y+X\,\delta z)\,dS \\ -\int\Big\{ & \left[u\frac{\partial\Phi}{\partial x}+v\frac{\partial\Phi}{\partial y}+w\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\delta x \\ & +\left[u\frac{\partial\Psi}{\partial x}+v\frac{\partial\Psi}{\partial y}+w\frac{\partial\Psi}{\partial z}+\Psi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\delta y \\ & +\left[u\frac{\partial X}{\partial x}+v\frac{\partial X}{\partial y}+w\frac{\partial X}{\partial z}+X\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\delta z\Big\}\,d\varpi.\end{aligned}$$

Le signe $\mathbf{S}$ indique une intégration qui s'étend aux diverses surfaces de discontinuité du conducteur.

Les égalités (5), (9) et (10) donnent l'expression suivante, pour le travail virtuel des actions électromagnétiques,

$$(11)\quad \begin{aligned} d\mathfrak{T} = -\int\Big[& \left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\xi}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\xi}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\xi}\right)\delta\xi \\ & +\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\eta}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\eta}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\eta}\right)\delta\eta \\ & +\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\zeta}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\zeta}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\zeta}\right)\delta\zeta \\ & +(\mathcal{B}\mathfrak{R}-\mathcal{C}\mathfrak{Q})\,\omega+(\mathcal{C}\mathfrak{P}-\mathcal{A}\mathfrak{R})\,\omega'+(\mathcal{A}\mathfrak{Q}-\mathcal{B}\mathfrak{P})\,\omega''\Big]\,dv \\ -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathbf{S}\big[& u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z) \\ & +u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)\big](\Phi\,\delta x+\Psi\,\delta y+X\,\delta z)\,dS \\ -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\Big\{ & \left[v\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)-w\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]\delta x \\ & +\left[w\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)-u\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\right]\delta y \\ & +\left[u\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)-v\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\right]\delta z\Big\}\,d\varpi \\ -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int & \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)(\Phi\,\delta x+\Psi\,\delta y+X\,\delta z)\,d\varpi.\end{aligned}$$

Cette égalité, rappelons-le, suppose :

1° Que l'aimant est un solide rigide ;

2° Que le courant ne traverse aucune partie de l'aimant.

§ 2. — *Forces électromagnétiques.*

On déduit sans peine de l'égalité (11) les résultats suivants :

1° *Un courant quelconque exerce, sur un aimant rigide qu'il ne traverse pas, une action qui se compose :*

En premier lieu, d'une force ($\Xi\, dv$, $\mathrm{H}\, dv$, $\mathrm{Z}\, dv$), *appliquée à chaque élément* dv *de l'aimant,* Ξ, H, Z *étant donnés par les égalités*

$$(12)\qquad \begin{cases} \Xi = -\left(\mathcal{A}\dfrac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\xi} + \mathcal{B}\dfrac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\xi} + \mathcal{C}\dfrac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\xi}\right), \\[2ex] \mathrm{H} = -\left(\mathcal{A}\dfrac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\eta} + \mathcal{B}\dfrac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\eta} + \mathcal{C}\dfrac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\eta}\right), \\[2ex] \mathrm{Z} = -\left(\mathcal{A}\dfrac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\zeta} + \mathcal{B}\dfrac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\zeta} + \mathcal{C}\dfrac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\zeta}\right). \end{cases}$$

En second lieu, d'un couple ($\mathrm{L}\, dv$, $\mathrm{M}\, dv$, $\mathrm{N}\, dv$), *appliqué à chaque élément* dv *de l'aimant,* L, M, N *étant donnés par les égalités*

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathrm{L} = -(\mathcal{B}\mathfrak{R} - \mathcal{C}\mathfrak{Q}), \\ \mathrm{M} = -(\mathcal{C}\mathfrak{P} - \mathcal{A}\mathfrak{R}), \\ \mathrm{N} = -(\mathcal{A}\mathfrak{Q} - \mathcal{B}\mathfrak{P}). \end{cases}$$

Il est aisé de voir que les formules (12) et (13), appliquées à un courant linéaire, redonnent les lois des actions électromagnétiques exercées par de semblables courants [*Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. III, p. 496, égalités (1) et, p. 497, égalités (2)].

2° *Un aimant exerce, sur un conducteur qui lui est extérieur et qui est parcouru par des courants quelconques, une action qui se compose :*

En premier lieu, d'une force ($\mathfrak{X}\, d\mathrm{S}$, $\mathfrak{Y}\, d\mathrm{S}$, $\mathfrak{Z}\, d\mathrm{S}$), *appliquée à chacun des éléments* dS *de toute surface terminant une portion continue du* *conducteur;* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ *sont donnés par les égalités*

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{X} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\Phi\,[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)],\\ \mathfrak{Y} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\Psi\,[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)],\\ \mathfrak{Z} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,X\,[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]. \end{aligned}\right.$$

En second lieu, d'une force ($X\,d\varpi$, $Y\,d\varpi$, $Z\,d\varpi$), *appliquée à chacun des éléments de volume du conducteur,* X, Y, Z *étant donnés par les égalités*

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} X &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left[v\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) - w\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) + \Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right],\\ Y &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left[w\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) - u\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + \Psi\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right],\\ Z &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left[u\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) - v\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) + X\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

Des considérations analogues à celles que nous avons exposées dans la première Partie, Chapitre II, § 4, montrent que les forces représentées par les égalités (14) disparaissent dans tous les cas où les courants considérés sont uniformes. Ces forces ne seront donc pas observables.

§ 3. — *Loi de Biot et Savart.*

La loi de Biot et Savart (*Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. III, p. 293 et p. 432) conduirait à admettre la loi suivante, pour l'action d'un courant sur un aimant :

Remplaçons chaque élément magnétique dv par deux masses magnétiques μ et $-\mu$, placées en des points A, B de cet élément, de telle sorte que l'on ait

$$\begin{aligned} \mu\,\overline{BA}\cos(BA, x) &= \mathcal{A}\,dv,\\ \mu\,\overline{BA}\cos(BA, y) &= \mathcal{B}\,dv,\\ \mu\,\overline{BA}\cos(BA, z) &= \mathcal{C}\,dv; \end{aligned}$$

cela fait, admettons que toute masse magnétique μ subisse, de la part d'un conducteur auquel elle est extérieure, une force appliquée à cette masse μ et ayant pour composantes

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{X} &= -\mu\mathfrak{P},\\ \mathfrak{Y} &= -\mu\mathfrak{Q},\\ \mathfrak{Z} &= -\mu\mathfrak{R}.\end{aligned}\right.$$

Cherchons dans quelles conditions les résultats auxquels conduit cette loi seront d'accord avec les formules (12) et (13).

Il est facile de voir que, d'après cette loi de Biot et Savart, tout élément magnétique dv est soumis à un couple ($L\,dv$, $M\,dv$, $N\,dv$), défini par les égalités (13), et à une force ($\Xi'dv$, $H'dv$, $Z'dv$), Ξ', H', Z' étant définis par les égalités

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} \Xi' &= -\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\xi} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\eta} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\zeta}\right),\\ H' &= -\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\xi} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\eta} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\zeta}\right),\\ Z' &= -\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\xi} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\eta} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\zeta}\right).\end{aligned}\right.$$

La comparaison des égalités (12) et (17) nous montre que, pour que la loi de Biot et Savart s'applique exactement à l'action d'un certain conducteur sur un aimant extérieur quelconque, il faut et il suffit que l'on ait

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\zeta} &= \frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\eta},\\ \frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\xi} &= \frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\zeta},\\ \frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\eta} &= \frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\xi},\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire que les trois fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ soient, dans tout l'espace extérieur au conducteur, les dérivées partielles d'une même fonction, *uniforme ou non,* des coordonnées ξ, η, ζ.

Les égalités (18) peuvent se transformer.

D'après la définition des fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ [première Partie, Chapitre III, égalités (4)] nous aurons

$$-\frac{\sqrt{2}}{\mathfrak{A}}\left(\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\zeta}-\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\eta}\right)=\int\left(w\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial\zeta}-u\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\zeta^2}-u\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\eta^2}+v\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)d\varpi$$

$$=\int\left(u\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi^2}+v\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial\eta}+w\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial\zeta}\right)d\varpi$$

$$-\int u\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\zeta^2}\right)d\varpi.$$

Mais on a

$$\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^3\frac{1}{r}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\zeta^2}=0,$$

et aussi

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}.$$

On peut donc écrire

$$\frac{\sqrt{2}}{\mathfrak{A}}\left(\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\zeta}-\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial}{\partial\xi}\int\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\varpi.$$

Une intégration par parties transforme cette égalité en

$$-\frac{\sqrt{2}}{\mathfrak{A}}\left(\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\zeta}-\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial}{\partial\xi}\mathbf{S}\big[\;u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z)$$

$$+u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)\big]\frac{1}{r}\,dS$$

$$+\frac{\partial}{\partial\xi}\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{1}{r}\,d\varpi.$$

Reprenant une notation déjà employée (Chapitre préliminaire, § 2), nous poserons

$$(19)\quad \frac{\partial V}{\partial t} = -\mathbf{S}\,[\,u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)]\,\frac{1}{r}\,dS - \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{1}{r}\,d\varpi.$$

L'égalité précédente deviendra alors

$$\frac{\sqrt{2}}{\mathfrak{A}}\left(\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right).$$

De cette égalité et de deux analogues, il résulte que les conditions (18) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) = 0.\end{aligned}\right.$$

Ainsi, pour que la loi de Biot et Savart fasse connaître exactement l'action exercée par un certain conducteur sur un aimant quelconque n'ayant, avec ce conducteur, aucune partie commune, il faut et il suffit que la fonction $\frac{\partial V}{\partial t}$ ait la même valeur aux divers points de toute région continue de l'espace qui n'est pas occupée par le conducteur.

En particulier, comme $\frac{\partial V}{\partial t}$ est égal à o à l'infini, on devra, dans toute région illimitée de l'espace extérieur au conducteur, avoir

$$(20\ bis)\quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Si les courants qui traversent le conducteur sont des courants uniformes, on a, en tout point d'une région continue du conducteur,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

et, en tout point d'une surface de discontinuité,

$$\begin{aligned}&u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z)\\&+u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)=0.\end{aligned}$$

Si l'on se reporte à l'égalité (19), qui définit $\frac{\partial V}{\partial t}$, on voit que, pour un conducteur traversé par des courants uniformes, l'égalité (20 *bis*) est vérifiée dans tout l'espace. Donc la loi de Biot et Savart fait connaître exactement l'action qu'un conducteur traversé par des courants uniformes quelconques exerce sur un aimant quelconque.

Mais les conditions (20) peuvent encore être réalisées par des courants qui ne sont pas uniformes. De ce nombre sont, par exemple, les courants variables à l'intérieur d'une sphère qu'a étudiés M. H. von Helmholtz. Pour ces courants, en effet, la quantité

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

a la même valeur en tous les points équidistants du centre de la sphère. Si donc on désigne par R la distance du point (ξ, η, ζ) au centre de la sphère, on aura

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{1}{r}\,d\varpi &= \frac{1}{R}\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)d\varpi\\ &=-\frac{1}{R}\,\mathbf{S}[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)]\,dS,\end{aligned}$$

dS étant un élément de la surface de la sphère et N_i la normale à cet élément vers l'intérieur de la sphère.

D'ailleurs, dans les courants étudiés par M. H. von Helmholtz,

$$u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)$$

a la même valeur en tout point de la surface de la sphère. On a donc, en tout point (ξ, η, ζ) extérieur à la sphère,

$$\begin{aligned}&\mathbf{S}[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)]\frac{1}{r}\,dS\\&=\frac{1}{R}\,\mathbf{S}[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)]\,dS\end{aligned}$$

et il est visible que l'égalité (20 *bis*) est vérifiée en tout point extérieur à la sphère.

§ 4. — *Loi d'Ampère.*

Les idées admises par Ampère (*Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. III, p. 293, 432, 503) au sujet de l'action qu'un aimant exerce sur un courant conduisent à adjoindre à la force qui, d'après la loi de Biot et Savart, agit sur chaque masse magnétique μ, un couple appliqué à la matière qui porte cette masse, l'axe de ce couple ayant pour composantes

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L} &= \mathfrak{Z}(\eta - y) - \mathfrak{Y}(\zeta - z),\\
\mathfrak{M} &= \mathfrak{X}(\zeta - z) - \mathfrak{Z}(\xi - x),\\
\mathfrak{N} &= \mathfrak{Y}(\xi - x) - \mathfrak{X}(\eta - y),
\end{aligned}$$

ou bien, en vertu des égalités (16),

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L} &= -\mu[\mathcal{R}(\eta - y) - \mathcal{Q}(\zeta - z)],\\
\mathfrak{M} &= -\mu[\mathcal{P}(\zeta - z) - \mathcal{R}(\xi - x)],\\
\mathfrak{N} &= -\mu[\mathcal{Q}(\xi - x) - \mathcal{P}(\eta - y)].
\end{aligned}$$

Les deux couples appliqués à l'élément de volume dv se composeront alors en un couple unique ($\mathcal{L}\,dv$, $\mathcal{M}\,dv$, $\mathcal{N}\,dv$), $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ étant donnés par les égalités

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathcal{L} = \Bigg[&(\mathcal{B}\mathcal{R} - \mathcal{C}\mathcal{Q}) + \left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\xi} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\eta} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\zeta}\right)(\eta - y)\\
&- \left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\xi} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\eta} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\zeta}\right)(\zeta - z)\Bigg]\,dv,\\
\mathcal{M} = \Bigg[&(\mathcal{C}\mathcal{P} - \mathcal{A}\mathcal{R}) + \left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\xi} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\eta} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\zeta}\right)(\zeta - z)\\
&- \left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\xi} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\eta} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial\zeta}\right)(\xi - x)\Bigg]\,dv,\\
\mathcal{N} = \Bigg[&(\mathcal{A}\mathcal{Q} - \mathcal{B}\mathcal{P}) + \left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\xi} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\eta} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\zeta}\right)(\xi - x)\\
&- \left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\xi} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\eta} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\zeta}\right)(\eta - y)\Bigg]\,dv.
\end{aligned}\right.$$

Ces égalités peuvent encore s'écrire de la manière suivante :

Posons

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathcal{Q}(\zeta - z) - \mathcal{R}(\eta - y),\\
\mathbf{B} &= \mathcal{R}(\xi - x) - \mathcal{P}(\zeta - z),\\
\mathbf{C} &= \mathcal{P}(\eta - y) - \mathcal{Q}(\xi - x).
\end{aligned}\right.$$

et nous aurons

$$(21\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\left(\mathcal{A}\frac{\partial A}{\partial \xi} + \mathcal{B}\frac{\partial A}{\partial \eta} + \mathcal{C}\frac{\partial A}{\partial \zeta}\right) dv,\\
\mathcal{M} &= -\left(\mathcal{A}\frac{\partial B}{\partial \xi} + \mathcal{B}\frac{\partial B}{\partial \eta} + \mathcal{C}\frac{\partial B}{\partial \zeta}\right) dv,\\
\mathcal{N} &= -\left(\mathcal{A}\frac{\partial C}{\partial \xi} + \mathcal{B}\frac{\partial C}{\partial \eta} + \mathcal{C}\frac{\partial C}{\partial \zeta}\right) dv.
\end{aligned}\right.$$

Les définitions des fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ [Ire Partie, Chapitre III, égalité (4)] permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
-\frac{\sqrt{2}}{\mathfrak{A}}A &= \int\left[\frac{(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{r^3}u - \frac{(\xi-x)(\eta-y)}{r^3}v - \frac{(\xi-x)(\zeta-z)}{r^3}w\right]d\varpi\\
&= \int\left\{\left[\frac{1}{r} - \frac{(\xi-x)^2}{r^3}\right]u - \frac{(\xi-x)(\eta-y)}{r^3}v - \frac{(\xi-x)(\zeta-z)}{r^3}w\right\}d\varpi\\
&= -\frac{\partial}{\partial \xi}\int\left(u\frac{\partial r}{\partial x} + v\frac{\partial r}{\partial y} + w\frac{\partial r}{\partial z}\right)d\varpi\\
&= \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\mathbf{S}\, r[\ u_1\cos(N_1, x) + v_1\cos(N_1, y) + w_1\cos(N_1, z)\right.\\
&\qquad + u_2\cos(N_2, x) + v_2\cos(N_2, y) + w_2\cos(N_2, z)]\,dS\\
&\qquad\left. + \int\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) r\, d\varpi\right\}.
\end{aligned}$$

Si nous définissons la quantité J comme au Chapitre préliminaire, égalité (34), l'égalité précédente deviendra la première des égalités

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned}
A &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial J}{\partial \xi},\\
B &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial J}{\partial \eta},\\
C &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial J}{\partial \zeta}.
\end{aligned}\right.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Les égalités (21 *bis*) deviendront alors

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{A}\frac{\partial^2 J}{\partial \xi^2} + \mathcal{B}\frac{\partial^2 J}{\partial \xi\,\partial \eta} + \mathcal{C}\frac{\partial^2 J}{\partial \xi\,\partial \zeta}\right) dv,\\
\mathcal{M} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{A}\frac{\partial^2 J}{\partial \eta\,\partial \xi} + \mathcal{B}\frac{\partial^2 J}{\partial \eta^2} + \mathcal{C}\frac{\partial^2 J}{\partial \eta\,\partial \zeta}\right) dv,\\
\mathcal{N} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{A}\frac{\partial^2 J}{\partial \zeta\,\partial \xi} + \mathcal{B}\frac{\partial^2 J}{\partial \zeta\,\partial \eta} + \mathcal{C}\frac{\partial^2 J}{\partial \zeta^2}\right) dv.
\end{aligned}\right.$$

Étant donné un conducteur que traversent des courants, obtiendra-t-on le même résultat si l'on calcule l'action de ce conducteur sur un élément magnétique quelconque, soit par la loi d'Ampère, soit par la loi de Biot et Savart? Pour qu'on puisse répondre affirmativement à cette question, il faut et il suffit que l'on ait

$$\mathcal{L} = 0, \qquad \mathfrak{M} = 0, \qquad \mathfrak{N} = 0,$$

quelle que soit la position de l'élément dv et quels que soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$.

D'après les égalités (24), il faut et il suffit pour cela que l'on ait, en tout point (ξ, η, ζ) de l'espace non occupé par le conducteur,

$$(25) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 J}{\partial \xi^2} = 0, & \dfrac{\partial^2 J}{\partial \eta^2} = 0, & \dfrac{\partial^2 J}{\partial \zeta^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 J}{\partial \eta\, \partial \zeta} = 0, & \dfrac{\partial^2 J}{\partial \zeta\, \partial \xi} = 0, & \dfrac{\partial^2 J}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0. \end{array} \right.$$

Nous avons déjà rencontré [première Partie, Chapitre III, égalité (18)] ces égalités (25); nous avons vu qu'elles caractérisaient l'équivalence entre la loi électrodynamique d'Ampère et la loi électrodynamique de Grassmann. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Il est des conducteurs dont l'action sur un élément magnétique quelconque serait exprimée de la même manière, que l'on emploie au calcul de cette action la loi électromagnétique de Biot et Savart ou la loi électromagnétique d'Ampère; ces conducteurs sont aussi ceux dont l'action sur un conducteur quelconque serait exprimée de la même manière, que l'on emploie au calcul de cette action la loi électrodynamique d'Ampère ou la loi électrodynamique de Grassmann.

Les égalités (25) montrent que l'on doit avoir, en tout point extérieur au courant,

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial \zeta^2} = 0$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{S}\big[\; & u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ & + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)\big] \left(\frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial \zeta^2}\right) dS \\ & + \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial \zeta^2}\right) d\varpi = 0. \end{aligned}$$

Si l'on observe que l'on a

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial \zeta^2} = -\frac{2}{r},$$

cette égalité devient

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

C'est l'égalité (20 *bis*) du présent Chapitre. Nous avons vu que, lorsqu'elle était réalisée en tout point extérieur à un conducteur, la loi électromagnétique de Biot et Savart faisait connaître exactement l'action de ce conducteur sur un élément magnétique quelconque; nous pouvons donc énoncer encore cette proposition :

Lorsque la loi de Biot et Savart et la loi d'Ampère fournissent la même expression pour l'action d'un certain conducteur sur un élément magnétique quelconque, cette expression est exacte.

§ 5. — *Généralisation d'un théorème d'Ampère.*

On obtiendrait évidemment les formules (12) et (13) si l'on énonçait de la manière suivante la loi des actions d'un courant sur un aimant :

Tout élément de courant $d\varpi$ exerce :

1° Une force appliquée à chaque masse magnétique μ et ayant pour composantes

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} X' &= \frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{2}}\,\mu P\, d\varpi,\\ Y' &= \frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{2}}\,\mu Q\, d\varpi,\\ Z' &= \frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{2}}\,\mu R\, d\varpi. \end{aligned}\right.$$

2° Une force appliquée à chaque élément magnétique dv ayant pour composantes

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} X'' &= \frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{2}}\left[\mathcal{B}\left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta}\right) - \mathcal{C}\left(\frac{\partial P}{\partial \zeta} - \frac{\partial R}{\partial \xi}\right)\right] d\varpi\, dv,\\ Y'' &= \frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{2}}\left[\mathcal{C}\left(\frac{\partial R}{\partial \eta} - \frac{\partial Q}{\partial \zeta}\right) - \mathcal{A}\left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta}\right)\right] d\varpi\, dv,\\ Z'' &= \frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{2}}\left[\mathcal{A}\left(\frac{\partial P}{\partial \zeta} - \frac{\partial R}{\partial \xi}\right) - \mathcal{B}\left(\frac{\partial R}{\partial \eta} - \frac{\partial Q}{\partial \zeta}\right)\right] d\varpi\, dv. \end{aligned}\right.$$

Les quantités P, Q, R sont définies par les égalités (8).

On pourra évidemment transporter le point d'application de toutes ces forces que l'élément $d\varpi$ exerce sur l'élément dv en un point (x, y, z) de l'espace occupé par l'élément $d\varpi$, à condition de leur adjoindre deux couples (L', M', N'), (L'', M'', N'') donnés par les égalités

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} L' &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{A}\frac{\partial a}{\partial \xi} + \mathcal{B}\frac{\partial b}{\partial \xi} + \mathcal{C}\frac{\partial c}{\partial \xi}\right) d\varpi\, dv,\\ M' &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{A}\frac{\partial a}{\partial \eta} + \mathcal{B}\frac{\partial b}{\partial \eta} + \mathcal{C}\frac{\partial c}{\partial \eta}\right) d\varpi\, dv,\\ N' &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{A}\frac{\partial a}{\partial \zeta} + \mathcal{B}\frac{\partial b}{\partial \zeta} + \mathcal{C}\frac{\partial c}{\partial \zeta}\right) d\varpi\, dv \end{aligned}\right.$$

avec

$$(28\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} a &= Q\,(\zeta - z) - R\,(\eta - y),\\ b &= R\,(\xi - x) - P\,(\zeta - z),\\ c &= P\,(\eta - y) - Q\,(\xi - x) \end{aligned}\right.$$

et

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} L'' &= Y''(\zeta - z) - Z''(\eta - y),\\ M'' &= Z''(\xi - x) - X''(\zeta - z),\\ N'' &= X''(\eta - y) - Y''(\xi - x). \end{aligned}\right.$$

Or les égalités (28), (28 *bis*) et (29) donnent évidemment

$$\begin{aligned} L' + L'' &= 0,\\ M' + M'' &= 0.\\ N' + N'' &= 0. \end{aligned}$$

On peut donc indifféremment supposer que les forces (X', Y', Z') sont appliquées aux deux pôles de l'élément dv et la force (X'', Y'', Z'') en un point de l'élément dv, ou bien que toutes ces forces sont appliquées en un point (x, y, z) de l'espace occupé par l'élément $d\varpi$.

On obtient ainsi une généralisation d'un théorème célèbre démontré par Ampère (*Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. III, p. 294) pour les courants linéaires, fermés et uniformes. Nous avions déjà (t. III, p. 509) étendu ce théorème à des courants linéaires quelconques.

CHAPITRE III.

L'ANALOGIE DES COURANTS ET DES AIMANTS.

§ 1. — *Des courants uniformes qui équivalent à un aimant.*

Un aimant, limité par une surface S, étant donné, peut-on trouver un système de courants uniformes, parcourant un conducteur limité à la même surface, et exerçant la même action que l'aimant sur tout aimant et sur tout courant extérieur?

La réponse à cette question ne semble pas douteuse, au moins au premier abord, puisque nous avons admis qu'un élément magnétique pouvait, dans toutes ses actions, être remplacé par un courant uniforme infiniment petit. Mais, à regarder les choses de plus près, on voit que l'on peut douter s'il existe une distribution de flux électriques *variables d'une manière continue* à l'intérieur de l'aimant, et exerçant à l'extérieur les mêmes actions que cet aimant.

Nous allons voir que tout aimant peut être remplacé par une double distribution de flux électriques : les uns, distribués d'une manière continue à l'intérieur de toute région continue de l'aimant; les autres, *flux superficiels,* distribués d'une manière continue en toute surface de discontinuité que présente l'aimant, et, en particulier, en la surface S qui limite l'aimant.

Cherchons d'abord à quels caractères analytiques on reconnaîtra l'équivalence d'un aimant et d'un système de courants, *uniformes ou non.*

Désignons par $\mathcal{V}$ la fonction potentielle magnétique de l'aimant. L'aimant exercera sur un élément magnétique dv, dont (ξ, η, ζ) est un point, et dont $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ est l'aimantation, une action qui se composera :

1° D'une force $(\Xi' \, dv, \mathrm{H}' \, dv, \mathrm{Z}' \, dv)$, Ξ', H', Z' étant déterminés par les égalités

$$
(1) \quad \left\{
\begin{aligned}
\Xi' &= -\left[\mathcal{A}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}\right) + \mathcal{B}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}\right) + \mathcal{C}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}\right)\right],\\
\mathrm{H}' &= -\left[\mathcal{A}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}\right) + \mathcal{B}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}\right) + \mathcal{C}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}\right)\right],\\
\mathrm{Z}' &= -\left[\mathcal{A}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}\right) + \mathcal{B}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}\right) + \mathcal{C}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}\right)\right].
\end{aligned}
\right.
$$

2° D'un couple ($L'\,dv$, $M'\,dv$, $N'\,dv$), L', M' N' étant déterminés par les égalités

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} L' &= -\left(\mathcal{B}\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \zeta} - \mathcal{C}\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \eta}\right),\\ M' &= -\left(\mathcal{C}\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \xi} - \mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \zeta}\right),\\ N' &= -\left(\mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \eta} - \mathcal{B}\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \xi}\right).\end{aligned}\right.$$

Si l'on remplace l'aimant par un système de courants, ces courants exerceront sur un élément magnétique une action qui se composera :

1° D'une force ($\Xi\,dv$, $H\,dv$, $Z\,dv$), Ξ, H, Z étant donnés par les égalités (12) du Chapitre précédent ;

2° D'un couple ($L\,dv$, $M\,dv$, $N\,dv$), L, M, N étant donnés par les égalités (13) du Chapitre précédent.

Pour que l'aimant et le système de courants exercent la même action sur un élément magnétique quelconque, il faut et il suffit que l'on ait en tout point (ξ, η, ζ) *de l'espace non occupé par cet aimant ou par ce système de courants*

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \xi},\\ \mathfrak{Q} &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \eta},\\ \mathfrak{R} &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \zeta}.\end{aligned}\right.$$

Les actions de l'aimant sur un système de courants quelconques sont données par les égalités (14) et (15) du Chapitre précédent; les actions exercées sur le même système de courants par un conducteur que parcourent des flux électriques sont données par les égalités (15) et (16) de la Ire Partie, Chapitre II. La comparaison de ces égalités montre sans peine que l'aimant et le conducteur exerceront la même action sur un système quelconque de courants, si l'on a, en tout point (ξ, η, ζ) extérieur à l'espace occupé par l'aimant ou le conducteur,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \Phi &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{u},\\ \Psi &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{v},\\ X &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathfrak{w}.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, si ces égalités (4) ont constamment lieu, non seulement l'aimant et le conducteur parcouru par les flux électriques exerceront les mêmes forces sur un système quelconque de courants, mais encore ils engendreront les mêmes forces électromotrices d'induction dans un conducteur quelconque.

Nous allons démontrer que les égalités (4) entraînent les égalités (3).

Nous avons, en effet [I^re Partie, Chapitre II, égalités (14)],

$$\mathfrak{P} = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\zeta} - \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial\eta}\right),$$

en sorte que les égalités (4) nous permettent d'écrire

$$(5)\qquad \mathfrak{P} = -\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial\eta}\right).$$

Mais nous avons [Chapitre I, égalités (3 *bis*)],

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \Psi &= \int\left(\mathcal{A}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} - \mathcal{C}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)dv,\\ \mathrm{X} &= \int\left(\mathcal{B}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - \mathcal{A}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)dv,\end{aligned}\right.$$

x, y, z étant les coordonnées d'un point de l'élément dv de l'aimant.

Si l'on observe que l'on a

$$(7)\qquad \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi},\qquad \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} = -\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta},\qquad \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} = -\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta},$$

on déduit des égalités (5) et (6)

$$\mathfrak{P} = -\int\left[\mathcal{B}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial\eta} + \mathcal{C}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial\zeta} - \mathcal{A}\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\eta^2}\right)\right]dv.$$

Mais on a

$$\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\zeta^2} = 0,$$

ce qui permet d'écrire, au lieu de l'égalité précédente,

$$\begin{aligned}\mathfrak{P} &= - \int\left(\mathcal{A}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\xi^2} + \mathcal{B}\frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial\eta} + \mathcal{C}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\xi\,\partial\zeta}\right)dv\\ &= -\frac{\partial}{\partial\xi}\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\xi} + \mathcal{B}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\eta} + \mathcal{C}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)dv,\end{aligned}$$

ou bien, en vertu des égalités (7),

$$\mathfrak{P} = \frac{\partial}{\partial\xi}\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)dv.$$

C'est la première égalité (3).

Ainsi, *si un aimant et un courant exercent la même action sur un système quelconque de courants, ils exercent la même action sur un aimant quelconque.*

La réciproque de cette proposition n'est pas exacte : on ne peut des égalités (3) déduire les égalités (4).

Nous venons de voir que l'on pouvait écrire

$$\frac{\partial \Psi}{\partial\zeta} - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial\eta} = -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial\xi},$$

et, de même,

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial\xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial\zeta} = -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial\eta} - \frac{\partial \Psi}{\partial\xi} = -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial\zeta}.$$

Ces égalités, et les égalités que définissent $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ [Ire Partie, Chapitre II, égalités (14)] permettent de remplacer les égalités (3) par les égalités

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\Psi - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\varphi\right) - \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mathbf{X} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\chi\right) = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\mathbf{X} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\chi\right) - \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\Phi - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\upsilon\right) = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\Phi - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\upsilon\right) - \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\Psi - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\varphi\right) = 0.\end{aligned}\right.$$

Ces égalités (8) sont équivalentes aux égalités (3), car il est facile d'en déduire ces dernières. Or, ces égalités (8) donnent, non pas les égalités (4), mais les égalités plus générales

$$\Phi = \frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{2}} \mathfrak{u} + \frac{\partial F}{\partial \xi},$$

$$\Psi = \frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{2}} \mathfrak{v} + \frac{\partial F}{\partial \eta},$$

$$X = \frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{2}} \mathfrak{w} + \frac{\partial F}{\partial \zeta},$$

F étant une fonction uniforme ou non de (ξ, η, ζ).

Ainsi *de ce qu'un aimant et un courant exercent les mêmes actions sur un aimant quelconque, il n'en résulte pas qu'ils exercent les mêmes actions sur un système quelconque de courants.*

L'équivalence entre les égalités (3) et les égalités (8) a un sens physique très clair.

Lorsqu'un système de conducteurs est parcouru par des courants uniformes, les forces soit électrodynamiques [I^re Partie, Chapitre II, égalités, (15)] soit électromagnétiques [II^e Partie, Chapitre II, égalités (14)], qui sont appliquées aux éléments de surfaces des divers conducteurs cessent d'être observables. Dès lors, la comparaison des égalités (15) du Chapitre précédent aux égalités (16) du Chapitre II de la première Partie montre que, pour qu'un aimant et un conducteur parcouru par des courants exercent la même action sur un système de conducteurs parcourus par des courants uniformes, il faut et il suffit que les égalités (8) soient vérifiées. Dès lors, l'équivalence entre les égalités (3) et les égalités (8) peut s'énoncer ainsi :

Si un courant et un aimant exercent la même action sur un aimant quelconque, ils exercent la même action sur un système quelconque de courants uniformes.

Étant donné un aimant, nous allons prouver que l'on peut toujours trouver une distribution de flux électriques tant dans la masse même de cet aimant qu'à sa surface, assimilée à une lame conductrice, de telle sorte que les égalités (4) et, partant, les égalités (3) soient vérifiées.

En chaque point (x, y, z) de la masse de l'aimant, déterminons les composantes u, v, w du flux par les équations

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,u = -\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right), \\ \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,v = -\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right), \\ \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,w = -\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 X}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 X}{\partial z^2}\right). \end{cases}$$

En chaque point (α, β) d'une surface de discontinuité de l'aimant, déterminons les composantes f, g du flux électrique par les équations

$$(10)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial N_1}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial N_2}\right)\cos(\alpha, x)+\left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial N_1}+\dfrac{\partial\Psi}{\partial N_2}\right)\cos(\alpha, y)+\left(\dfrac{\partial X}{\partial N_1}+\dfrac{\partial X}{\partial N_2}\right)\cos(\alpha, z) \\ \qquad = -4\pi\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}f, \\ \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial N_1}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial N_2}\right)\cos(\beta, x)+\left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial N_1}+\dfrac{\partial\Psi}{\partial N_2}\right)\cos(\beta, y)+\left(\dfrac{\partial X}{\partial N_1}+\dfrac{\partial X}{\partial N_2}\right)\cos(\beta, z) \\ \qquad = -4\pi\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}g. \end{cases}$$

Les flux ainsi calculés détermineront un système de courants uniformes. En effet, en tout point (x, y, z) intérieur à la masse de l'aimant, on aura, d'après les égalités (9),

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{1}{4\pi}\Delta\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\frac{\partial X}{\partial z}\right).$$

Mais on a [Chapitre I, égalité (7)]

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\frac{\partial X}{\partial z} = 0;$$

on a donc, en tout point de la masse de l'aimant non situé sur une surface de discontinuité,

$$(11)\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Considérons un élément dS d'une surface de discontinuité, dans le temps dt; les flux qui parcourent la masse du conducteur amènent en cet élément une quantité d'électricité

$$(12)\qquad \begin{aligned} dQ = -[\ & u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ & + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)]\, dS\, dt. \end{aligned}$$

Les flux qui parcourent la surface elle-même y amènent dans le même temps, en l'élément dS, une quantité d'électricité [*Leçons sur l'Électricité*, t. I, p. 431, égalité (21)]

$$(13)\qquad dQ' = -\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B f}{\partial \alpha} + \frac{\partial A g}{\partial \beta}\right) dS\, dt.$$

On a

$$dQ + dQ' = 0.$$

Ce théorème est général; pour le démontrer, il est nécessaire d'écrire de très longues formules; aussi nous contenterons-nous d'en donner la démonstration pour le cas particulier où la surface de discontinuité est une surface plane; elle est notablement plus courte.

Prenons l'axe des x et l'axe des y dans la surface, l'axe des z suivant la normale N_1. Les égalités (9) et (12) nous donneront alors

$$4\pi \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\, dQ = \left[\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}\right)_2\right] dS\, dt.$$

Mais les quantités $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}$ ne subissent aucune discontinuité lorsqu'on traverse la surface. On a donc

$$(14)\qquad 4\pi \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\, dQ = \left[\left(\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}\right)_2\right] dS\, dt.$$

D'autre part, on peut prendre

$$\alpha = x, \qquad \beta = y.$$

On a alors

$$A = 1, \qquad B = 1.$$

L'égalité (13) devient

$$dQ' = -\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) dS\, dt,$$

ou bien, en vertu des égalités (10), qui deviennent

$$4\pi \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} f = -\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_1 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_2\right],$$

$$4\pi \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} g = -\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)_1 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)_2\right],$$

$$(15) \qquad 4\pi \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} dQ' = \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y\, \partial z}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y\, \partial z}\right)_2\right] dS\, dt.$$

Mais, en tout point soit de la région 1, soit de la région 2, on a [Chapitre I, égalité (7)]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y\, \partial z} = -\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}.$$

L'égalité (15) devient alors

$$(16) \qquad 4\pi \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} dQ' = -\left[\left(\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 X}{\partial z^2}\right)_2\right] dS\, dt.$$

La comparaison des égalités (14) et (16) donne, comme nous l'avions annoncé,

$$dQ + dQ' = 0.$$

Les égalités (11) et (17) nous assurent que les flux définis par les égalités (9) et (10) déterminent sur le conducteur un système de courants uniformes.

Je dis maintenant que ce système vérifie les égalités (4).

En effet, les fonctions $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, relatives à ce système de flux uniformes, doivent vérifier les égalités suivantes :

En tout point extérieur au conducteur, on doit avoir

$$\Delta \mathfrak{U} = 0, \qquad \Delta \mathfrak{V} = 0, \qquad \Delta \mathfrak{W} = 0.$$

En tout point intérieur au conducteur, on doit avoir

$$\Delta \mathfrak{U} = -4\pi u, \qquad \Delta \mathfrak{V} = -4\pi v, \qquad \Delta \mathfrak{W} = -4\pi w.$$

En tout point d'une surface de discontinuité, on doit avoir

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial N_1} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial N_2} = -4\pi[f\cos(\alpha, x) + g\cos(\beta, x)],$$

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_1} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_2} = -4\pi[f\cos(\alpha, y) + g\cos(\beta, y)],$$

$$\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial N_1} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial N_2} = -4\pi[f\cos(\alpha, z) + g\cos(\beta, z)].$$

Le théorème de Green montre, sans peine, qu'un seul système de fonctions $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ peut vérifier à la fois toutes ces conditions. Or, elles sont manifestement vérifiées si l'on prend

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{v} &= \Phi, \\ \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{V} &= \Psi, \\ \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{W} &= X. \end{aligned}\right.$$

Ces égalités (4) sont donc forcément vérifiées.

Ainsi, *on peut toujours trouver un système de courants uniformes exerçant la même action qu'un aimant donné aussi bien sur un aimant quelconque que sur un système quelconque de courants. Ce système de courants uniformes est formé de flux parcourant la masse de l'aimant donné et de flux superficiels parcourant les surfaces de discontinuité de cet aimant.*

§ 2. — *Des aimants qui sont équivalents à un système de courants.*

Si l'on se donne un aimant, sa fonction potentielle magnétique est, en tout point (ξ, η, ζ) extérieur à l'aimant, finie, continue et uniforme, ainsi que ses dérivées partielles de tous les ordres; lorsque la distance R du point (ξ, η, ζ) à l'origine des coordonnées croît au delà de toute limite, les quantités

$$R^2\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \xi}, \qquad R^2\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \eta}, \qquad R^2\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \zeta}$$

ne croissent pas au delà de toute limite; enfin, en tout point extérieur à l'aimant, on a

$$\Delta \mathcal{S} = \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \zeta^2} = 0.$$

Réciproquement, *étant donnée une fonction* $\mathcal{S}(\xi, \eta, \zeta)$ *qui, en tout point extérieur à une surface fermée* S, *est soumise aux conditions précédentes, peut-on former, à l'intérieur de la surface* S, *un aimant qui ait la quantité* $\mathcal{S}(\xi, \eta, \zeta)$ *pour fonction potentielle magnétique à l'extérieur de la surface* S?

Il est facile de voir que l'on peut former une infinité de semblables aimants.

Donnons-nous arbitrairement une fonction $f(x, y, z)$ qui, en tout point (x, y, z) intérieur à la surface S, soit uniforme, finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier et du second ordre.

D'après le principe de Dirichlet, il existe une et une seule fonction $\varpi(x, y, z)$ soumise aux conditions suivantes :

1° La fonction $\varpi(x, y, z)$ est uniforme, finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier et du second ordre, en tout point (x, y, z) intérieur à la surface S.

2° En tout point intérieur à la surface S, on a

$$\Delta \varpi(x, y, z) = \Delta f(x, y, z).$$

3° En tout point de la surface S, on a

$$\varpi = \mathcal{S}.$$

D'après le principe dérivé de Lejeune-Dirichlet, il existe une infinité de fonctions $\varphi(x, y, z)$, différant les unes des autres seulement par une constante et soumises aux conditions suivantes :

1° La fonction $\varphi(x, y, z)$ est finie, continue et uniforme, ainsi que ses dérivées partielles du premier et du second ordre, en tout point (x, y, z) intérieur à la surface S.

2° En tout point intérieur à la surface S, on a

$$\Delta \varphi(x, y, z) = \Delta f(x, y, z).$$

3° En tout point de la surface S, on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N_i} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial N_e} + \frac{\partial \varpi}{\partial N_i}.$$

Prenons l'une quelconque des fonctions φ et posons, en tout point (x, y, z) intérieur à l'aimant,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad \mathcal{B} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad \mathcal{C} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial z};$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ seront, au point (x, y, z), les composantes de l'aimantation d'un certain aimant limité à la surface S.

Prenons une fonction qui soit, en tout point (ξ, η, ζ) extérieur à la surface S, égale à $s(\xi, \eta, \zeta)$ et, en tout point (x, y, z), intérieur à la surface S, égale à $\sigma(x, y, z)$. Il est aisé de voir que cette fonction sera la fonction potentielle magnétique de l'aimant que nous venons de définir.

En effet :

1° La fonction potentielle magnétique Σ de notre aimant doit être soumise aux conditions suivantes :

Elle doit être uniforme, finie et continue dans tout l'espace.

Ses dérivées partielles des deux premiers ordres doivent être uniformes, finies et continues dans tout l'espace extérieur à la surface S et dans tout l'espace intérieur à la surface S.

A l'infini, les quantités $R\Sigma$, $R^2\frac{\partial\Sigma}{\partial\xi}$, $R^2\frac{\partial\Sigma}{\partial\eta}$, $R^2\frac{\partial\Sigma}{\partial\zeta}$ doivent demeurer finies.

En tout point (ξ, η, ζ) de l'espace extérieur à la surface S, on doit avoir

$$\frac{\partial^2\Sigma}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Sigma}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\Sigma}{\partial\zeta^2} = 0.$$

En tout point (x, y, z), intérieur à la surface S, on doit avoir

$$\frac{\partial^2\Sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Sigma}{\partial z^2} = 4\pi\left(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}\right).$$

En tout point de la surface S, on doit avoir

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial N_i} + \frac{\partial\Sigma}{\partial N_e} = 4\pi[\mathcal{A}\cos(N_i, x) + \mathcal{B}\cos(N_i, y) + \mathcal{C}\cos(N_i, z)].$$

2° Deux fonctions distinctes ne peuvent vérifier toutes deux l'ensemble de ces conditions.

3° Elles sont vérifiées par une fonction Σ égale à s en tout point extérieur à la surface S et à σ en tout point intérieur à la surface S.

Nous avons donc défini un aimant dont la fonction potentielle magnétique est égale à $\mathcal{S}(\xi, \eta, \zeta)$ en tout point extérieur à l'aimant. A chaque fonction $f(x, y, z)$ arbitrairement choisie correspond un semblable aimant. Il en existe donc bien une infinité, comme nous l'avons annoncé.

On voit, de plus, aisément que la méthode précédente donne tous les aimants *simplement lamellaires* (*Leçons sur l'Électricité*, t. II, p. 92) qui sont enfermés par la surface S et qui admettent, à l'extérieur de cette surface, la fonction potentielle magnétique donnée.

Ces préliminaires posés, proposons-nous, tout d'abord, de répondre à la question suivante :

Étant donné un système de courants qui parcourent un conducteur enfermé dans la surface S, *existe-t-il un aimant, limité à la même surface* S, *et exerçant sur un élément magnétique quelconque la même action que le système de courants?*

L'équivalence entre le système de courants et l'aimant s'exprimera en écrivant que les égalités (3) sont vérifiées en tout point (ξ, η, ζ) extérieur à la surface S. De là, nous déduisons tout d'abord la conclusion suivante :

Si les actions d'un courant sur un élément magnétique quelconque sont équivalentes à celles d'un aimant limité par la même surface que le courant, il existe une fonction de ξ, η, ζ, *uniforme, finie et continue en tout point* (ξ, η, ζ) *extérieur à la surface* S, *dont* $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ *sont les dérivées partielles du premier ordre.*

Réciproquement :

S'il existe une fonction de ξ, η, ζ, *uniforme, finie et continue en tout point* (ξ, η, ζ) *extérieur à la surface* S, *dont* $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ *soient les trois dérivées partielles du premier ordre, il existe un aimant limité à la même surface que le courant et exerçant les mêmes actions que lui sur tout élément magnétique extérieur.*

Dans ce cas, en effet, il existe une fonction $\mathcal{S}(\xi, \eta, \zeta)$, uniforme, finie et continue en tout point extérieur à la surface S, telle que l'on puisse écrire

$$\mathfrak{P}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{S}(\xi, \eta, \zeta),$$

$$\mathfrak{Q}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial}{\partial \eta} \mathcal{S}(\xi, \eta, \zeta),$$

$$\mathfrak{R}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathcal{S}(\xi, \eta, \zeta).$$

Si l'on se reporte à la définition des fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ [Ire Partie, Chapitre II, égalités (14)], on voit que les trois fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ sont uniformes, finies et continues dans tout l'espace extérieur à la surface S; qu'elles s'annulent à l'infini, et cela de telle manière que les produits

$$R^2\mathfrak{P}, \quad R^2\mathfrak{Q}, \quad R^2\mathfrak{R}$$

demeurent finis lorsque la distance R de l'origine des coordonnées au point (ξ, η, ζ) croît au delà de toute limite. Il en résulte que la fonction $\mathcal{S}(\xi, \eta, \zeta)$ admet, dans tout l'espace extérieur à la surface S, des dérivées partielles du premier ordre qui sont uniformes, finies et continues et qui s'annulent à l'infini de telle manière que les produits

$$R^2\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \xi}, \qquad R^2\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \eta}, \qquad R^2\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \zeta}$$

demeurent finis.

Les quantités $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ admettent, dans tout l'espace extérieur à la surface S, des dérivées partielles du premier ordre qui sont uniformes, finies et continues. Il en est donc de même des dérivées partielles du second ordre de la fonction $\mathcal{S}(\xi, \eta, \zeta)$.

Dans tout l'espace extérieur à la surface S, on a (Ire Partie, Chapitre II, égalités (14)],

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \zeta} = 0,$$

en sorte que la fonction $\mathcal{S}(\xi, \eta, \zeta)$ vérifie l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \zeta^2} = 0.$$

Enfin, sur la surface $\mathcal{S}$, on connaît les valeurs de $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ et, par conséquent, la valeur de $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial N_e}$.

Il existe une infinité de fonctions $\mathcal{S}$ satisfaisant aux conditions que nous venons d'indiquer. Chacune de ces fonctions, on le voit aisément, prend à l'infini une valeur bien déterminée. La connaissance de cette valeur suffit à achever la détermination de la fonction $\mathcal{S}$. D'ailleurs, les diverses fonctions $\mathcal{S}$ obtenues en changeant cette valeur ne diffèrent les unes des autres que par une constante. Si donc parmi elles il en existe une pour laquelle on puisse écrire

$$\mathfrak{P} = \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \xi}, \qquad \mathfrak{Q} = \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \eta}, \qquad \mathfrak{R} = \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \zeta},$$

on pourra écrire ces mêmes égalités pour toutes les autres.

Donc, si les trois fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ sont les trois dérivées partielles d'une même fonction de ξ, η, ζ, uniforme, finie et continue dans tout l'espace extérieur à la surface S, il existe une et une seule fonction $\mathfrak{S}(\xi, \eta, \zeta)$, telle que l'on puisse écrire les égalités (3) et énoncer en même temps les propositions suivantes :

La fonction $\mathfrak{S}(\xi, \eta, \zeta)$ est uniforme, finie et continue en tout point (ξ, η, ζ) extérieur à la surface S; à l'infini, elle est égale à o.

La fonction $\mathfrak{S}(\xi, \eta, \zeta)$ admet, à l'extérieur de la surface S, des dérivées partielles du premier ordre qui sont uniformes, finies et continues; à l'infini les quantités $R^2 \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \xi}$, $R^2 \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \eta}$, $R^2 \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \zeta}$ demeurent finies.

La fonction $\mathfrak{S}(\xi, \eta, \zeta)$ admet, à l'extérieur de la surface S, des dérivées partielles du second ordre qui sont finies et qui vérifient l'équation

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \zeta^2} = 0.$$

D'après ce que nous avons vu il y a un instant, il existe une infinité d'aimants, limités à la surface S, qui admettent la fonction $\mathfrak{S}(\xi, \eta, \zeta)$ pour fonction potentielle magnétique en dehors de cette surface. D'après ce qui a été dit au paragraphe précédent, ces aimants ont tous, sur un aimant extérieur quelconque, la même action que le système de courants considéré.

Donc, pour que les actions d'un courant limité par la surface S *sur un aimant quelconque soient équivalentes aux actions d'un aimant limité par la même surface* S, *il est nécessaire et suffisant que les trois fonctions* $\mathfrak{P}(\xi, \eta, \zeta)$, $\mathfrak{Q}(\xi, \eta, \zeta)$, $\mathfrak{R}(\xi, \eta, \zeta)$ *soient dans tout l'espace* E, *extérieur à la surface* S, *les dérivées partielles d'une même fonction uniforme, finie et continue de* ξ, η, ζ.

Supposons, en premier lieu, que *la connexité de première espèce de l'espace* E *soit du premier ordre*. Dans ce cas, pour que les trois fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ soient, dans tout l'espace E, les dérivées partielles d'une même fonction *uniforme,* finie et continue de ξ, η, ζ, il est nécessaire et suffisant que l'on ait (*Leçons sur l'Électricité,* t. III, p. 63)

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \zeta} &= \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} &= \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial \eta} &= \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial \xi}. \end{aligned}\right.$$

Nous avons déjà rencontré [Chapitre II, égalité (18)] ces égalités (18); nous avons vu qu'elles pouvaient être remplacées par la condition suivante : la quantité

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} = &-\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{1}{r}\,d\varpi \\ &-\mathbf{S}\,[\quad u_1\cos(N_1, x)+v_1\cos(N_1, y)+w_1\cos(N_1, z) \\ &\qquad +u_2\cos(N_2, x)+v_2\cos(N_2, y)+w_2\cos(N_2, z)]\,\frac{1}{r}\,dS \end{aligned}$$

a la même valeur o en tous les points de l'espace illimité E extérieur à la surface S. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Un conducteur traversé par des courants est limité par une surface S *telle que l'espace* E, *extérieur à cette surface* S, *ait une connexité de première espèce du premier ordre. Pour que ce conducteur exerce sur un aimant extérieur quelconque les mêmes actions qu'un aimant limité à la surface* S, *il faut et il suffit que l'on ait, dans tout l'espace* E,

$$(19)\qquad \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Supposons maintenant que la connexité de première espèce de l'espace E soit d'ordre $(n+1)$. Les égalités (18), ou l'égalité équivalente (19) peuvent être vérifiées sans que les trois fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ soient, dans l'espace E, les dérivées partielles d'une même fonction *uniforme* de ξ, η, ζ. Il pourra donc se faire que, bien que ces égalités soient vérifiées, aucun aimant renfermé dans la surface S ne puisse remplacer le courant considéré dans ses actions sur un aimant quelconque extérieur à la surface S.

Mais, dans ce cas, le théorème de M. Enrico Betti (*Leçons sur l'Électricité,* t. III, p. 63) nous apprend que l'on peut, au moyen de n surfaces coupures convenablement disposées, transformer l'espace E en un espace dont la connexité de première espèce soit d'ordre 1. Chacune des surfaces coupures $F_1, F_2, \ldots, F_n$ peut être considérée comme un feuillet formé de deux surfaces infiniment voisines σ_1, σ'_1; σ_2, σ'_2; $\ldots$; σ_n, σ'_n. L'ensemble des surfaces S, $\sigma_1, \sigma'_1, \sigma_2, \sigma'_2, \ldots, \sigma_n, \sigma'_n$ peut être considéré comme composant une surface fermée telle que la connexité de première espèce de l'espace extérieur à cette surface soit d'ordre 1. On pourra alors raisonner sur cette surface comme, dans le cas précédent, on a raisonné sur la surface S, et l'on arrivera à la conclusion suivante :

Un conducteur traversé par des courants est limité par une surface S; *la connexité de première espèce de l'espace* E *extérieur à la surface* S *est d'ordre* $(n+1)$; *peut-on remplacer l'action de ce conducteur sur un aimant extérieur quelconque par l'action d'un aimant limité par la surface* S *et de n aimants infiniment aplatis disposés suivant les sections* $F_1, F_2, \ldots, F_n$, *qui ramènent à l'ordre* 1 *la connexité de première espèce de l'espace* E? *Il faut et il suffit pour cela que l'on ait, en tout point de l'espace* E,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0. \tag{19}$$

D'après ce que nous avons vu au § 1, lorsqu'un courant et un aimant exercent les mêmes actions sur un aimant quelconque, ils exercent aussi les mêmes actions sur un courant uniforme quelconque et réciproquement. Nous venons d'étudier dans quel cas un courant pouvait être remplacé par un aimant sans que ses actions sur un aimant quelconque fussent changées; *ce sont aussi les cas où un courant peut être remplacé par un aimant sans que ses actions sur un système quelconque de courants uniformes soient changées.*

§ 3. — *Résumé.*

Considérons les deux quantités

$$\begin{aligned} J(\xi, \eta, \zeta) = &- \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) r \, d\varpi \\ &- \mathbf{S} [\quad u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ &\qquad + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)] \, r \, dS, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{1}{r}\,d\varpi$$
$$-\mathbf{S}\Big[\quad u_1\cos(N_1, x) + v_1\cos(N_1, y) + w_1\cos(N_1, z)$$
$$+ u_2\cos(N_2, x) + v_2\cos(N_2, y) + w_2\cos(N_2, z)\Big]\frac{1}{r}\,dS,$$

liées entre elles par la relation

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial \zeta^2} = -2\,\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{20}$$

Parmi les courants, il en est qui sont tels que

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial \zeta^2} = -2\,\frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

en tout point (ξ, η, ζ) extérieur à la surface S qui les limite. Ces courants-là jouissent des propriétés suivantes, et sont seuls à en jouir :

1° *La loi de Biot et Savart fait connaître exactement l'action de ce conducteur sur un aimant quelconque.*

2° *Si la connexité de première espèce de l'espace* E, *extérieur au conducteur, est d'ordre* 1, *on peut remplacer le conducteur considéré par un aimant limité à la surface* S, *sans changer les actions exercées soit sur un aimant quelconque, soit sur un système quelconque de courants uniformes.*

3° *Si la connexité de première espèce de l'espace* E *est d'ordre* $(n+1)$, *on peut de même remplacer le conducteur considéré par un aimant limité à la surface* S *et par* n *aimants infiniment aplatis.*

Parmi les courants précédents, une catégorie plus restreinte est formée des courants pour lesquels on a, en tout point de l'espace E,

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 J}{\partial \eta^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 J}{\partial \zeta^2} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 J}{\partial \eta\,\partial \zeta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 J}{\partial \zeta\,\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial^2 J}{\partial \xi\,\partial \eta} = 0.$$

Ces courants jouissent, à l'exclusion de tous autres, des propriétés suivantes :

1° *La loi de Grassmann et la loi d'Ampère, appliquées au calcul de l'action exercée par un tel courant sur un élément de volume d'un conducteur parcouru par des courants quelconques, conduisent à des résultats identiques.*

2° *La loi électromagnétique de Biot et Savart fait connaître exactement l'action d'un tel courant sur un aimant quelconque.*

3° *La loi électromagnétique de Biot et la loi électromagnétique d'Ampère, appliquées au calcul de l'action exercée par un tel courant sur un aimant quelconque, conduisent à des résultats identiques.*

Parmi les courants précédents, une catégorie, plus restreinte encore, se compose de ceux pour lesquels on a, en tout point de l'espace E,

$$\frac{\partial J}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial \eta} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial \zeta} = 0.$$

Ces courants possèdent, à l'exclusion de tous autres, cette propriété que *leurs actions électrodynamiques les plus générales sont indépendantes de la valeur attribuée à la constante* λ *d'Helmholtz.*

CHAPITRE IV.

AIMANTATION PAR LES COURANTS.

§ 1. — *Équations générales de l'aimantation par les courants.*

Considérons un système renfermant des courants et des masses magnétiques. Parmi ces dernières, les unes sont des aimants permanents dont nous supposons la forme et le volume invariables ainsi que l'aimantation ; les autres sont des corps parfaitement doux.

Lorsqu'une modification infiniment petite, de durée dt, se produit en ce système, il dégage une quantité de chaleur dQ, donnée par l'égalité suivante [Chapitre I, égalités (13) et (14)]

$$\begin{aligned}(1)\qquad \mathrm{E}\,dQ = dt\int\left[\left(\mathrm{E}_x - \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial \mathrm{T}}\right)u + \left(\mathrm{E}_y - \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial \mathrm{T}}\right)v + \left(\mathrm{E}_z - \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial \mathrm{T}}\right)w\right]d\varpi \\ + \mathrm{T}\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}\int\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})}{\partial \mathfrak{M}}\,\delta\mathfrak{M}\,dv,\end{aligned}$$

la première intégrale s'étendant aux conducteurs qui traversent des courants, la seconde aux masses magnétiques.

Supposons que la transformation subie par le système pendant le temps dt se réduise à une variation d'aimantation des masses magnétiques parfaitement douces sans déformation ni déplacement d'aucun des corps qui composent le système ; nous pourrons alors, en désignant par U l'énergie interne du système, écrire

$$dQ = -\,\delta \mathrm{U}.$$

D'ailleurs, U est donné par l'égalité (14) du Chapitre I. On a donc

$$\begin{aligned}(2)\qquad \mathrm{E}\,dQ = -\Big\{\mathrm{E}\,\delta\Upsilon + \delta \mathrm{W} + \delta\sum\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{T}}\right)q \\ + \delta\mathfrak{Y} + \delta\int\left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T}) - \mathrm{T}\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})}{\partial \mathrm{T}}\right]dv \\ + \frac{\mathfrak{A}^2}{4}\,\delta\int(\mathfrak{U}u + \mathfrak{V}v + \mathfrak{W}w)\,d\varpi\Big\}.\end{aligned}$$

Désignons, suivant l'usage établi aux deux Chapitres précédents, par Φ,

Ψ, X, les quantités $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{v}$, $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{q}$, $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{w}$, relatives à un aimant. Les conducteurs et les aimants du système étant tous immobiles, les lois de l'induction électrodynamique [Chapitre préliminaire, égalités (5)] et de l'induction électromagnétique [IIe Partie, égalités (11)] donnent

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_x &= -\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon \mathrm{V} + \Theta) + \varphi_x - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \\
\mathrm{E}_y &= -\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon \mathrm{V} + \Theta) + \varphi_y - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial t} + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \\
\mathrm{E}_z &= -\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon \mathrm{V} + \Theta) + \varphi_z - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t} + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
(3)\quad & \int\left[\left(\mathrm{E}_x - \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial \mathrm{T}}\right)u + \left(\mathrm{E}_y - \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial \mathrm{T}}\right)v + \left(\mathrm{E}_z - \mathrm{T}\frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial \mathrm{T}}\right)w\right]d\varpi \\
&= -\varepsilon \int\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}u + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}v + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}w\right)d\varpi \\
&\quad - \int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right)u + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right)v + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right)w\right]d\varpi \\
&\quad + \int\left[\left(\varphi_x - \mathrm{T}\frac{\partial \varphi_x}{\partial \mathrm{T}}\right)u + \left(\varphi_y - \mathrm{T}\frac{\partial \varphi_y}{\partial \mathrm{T}}\right)v + \left(\varphi_z - \mathrm{T}\frac{\partial \varphi_z}{\partial \mathrm{T}}\right)w\right]d\varpi \\
&\quad - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t}u + \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial t}v + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t}w\right)d\varpi \\
&\quad - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}u + \frac{\partial \Psi}{\partial t}v + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial t}w\right)d\varpi.
\end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$(4)\qquad \delta \mathrm{W} = -\varepsilon\, dt \int\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}u + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}v + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}w\right)d\varpi,$$

$$\begin{aligned}
(5)\qquad \delta \sum\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right)q = -dt\int\Bigg[\ & \frac{\partial}{\partial x}\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right)u \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right)v \\
&+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\Theta - \mathrm{T}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{T}}\right)w\Bigg]d\varpi,
\end{aligned}$$

$$(6)\qquad \mathrm{E}\,\delta \Upsilon = dt\int\left[\left(\varphi_x - \mathrm{T}\frac{\partial \varphi_x}{\partial \mathrm{T}}\right)u + \left(\varphi_y - \mathrm{T}\frac{\partial \varphi_y}{\partial \mathrm{T}}\right)v + \left(\varphi_z - \mathrm{T}\frac{\partial \varphi_z}{\partial \mathrm{T}}\right)w\right]d\varpi.$$

Nous avons ensuite [Chapitre préliminaire, égalité (32)]

$$(7)\qquad \frac{\mathfrak{A}^2}{4}\,\delta\int(\mathfrak{V}u+\mathfrak{P}v+\mathfrak{W}w)\,d\varpi=\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,dt\int\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial t}u+\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial t}v+\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial t}w\right)d\varpi.$$

Enfin

$$(8)\qquad \delta\int\left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})-\mathrm{T}\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})}{\partial\mathrm{T}}\right]dv=\delta\int\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})\,dv$$
$$-\mathrm{T}\frac{\partial}{\partial\mathrm{T}}\int\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})}{\partial\mathfrak{M}}\,\delta\mathfrak{M}\,dv.$$

Les égalités (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8) donnent

$$(9)\qquad \delta\mathcal{Y}+\delta\int\mathfrak{F}(\mathfrak{M},\mathrm{T})\,dv-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,dt\int\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}u+\frac{\partial\Psi}{\partial t}v+\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial t}w\right)d\varpi=0.$$

Nous allons écrire cette égalité (9) sous une forme plus explicite.

Soient $\mathfrak{s}(x, y, z)$ la fonction potentielle magnétique, au point (x, y, z), de l'aimantation répandue sur les aimants permanents et $\mathfrak{T}(x, y, z)$ la fonction potentielle magnétique, au même point, de l'aimantation répandue sur les fers doux; soient $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$ les variations que subissent, pendant le temps dt, les composantes de l'aimantation au point (x, y, z). Nous aurons, d'après une formule connue,

$$(10)\qquad \delta\mathcal{Y}=\int\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial\xi}+\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\xi}\right)\delta\mathcal{A}+\left(\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial\eta}+\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\eta}\right)\delta\mathcal{B}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial\zeta}+\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\zeta}\right)\delta\mathcal{C}\right]dv,$$

ξ, η, ζ étant les coordonnées d'un point de l'élément magnétique dv.

Si nous introduisons la fonction magnétisante $\mathrm{F}(\mathfrak{M})$, définie par l'égalité

$$\frac{1}{\mathrm{F}(\mathfrak{M})}=\frac{1}{\mathfrak{M}}\,\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M})}{\partial\mathfrak{M}},$$

nous aurons

$$(11)\qquad \delta\int\mathfrak{F}(\mathfrak{M})\,d\varpi=\int\frac{1}{\mathrm{F}(\mathfrak{M})}(\mathcal{A}\,\delta\mathcal{A}+\mathcal{B}\,\delta\mathcal{B}+\mathcal{C}\,\delta\mathcal{C})\,dv.$$

Nous avons [Chapitre I, égalités (3 *bis*)]

$$\Phi=\int\left(\mathcal{C}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}-\mathcal{B}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)dv$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}\,dt = \int \left(\delta\mathcal{C}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - \delta\mathcal{B}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) dv.$$

Dès lors, si nous posons [Chapitre II, égalités (8)],

$$\mathbf{P} = v\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} - w\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta},$$

$$\mathbf{Q} = w\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} - u\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta},$$

$$\mathbf{R} = u\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - v\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi},$$

nous verrons sans peine que l'on peut écrire

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\,u + \frac{\partial \Psi}{\partial t}\,v + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial t}\,w \right) dt$$
$$= \int (\mathbf{P}\,\delta\mathcal{A} + \mathbf{Q}\,\delta\mathcal{B} + \mathbf{R}\,\delta\mathcal{C})\,dv.$$

Si l'on observe que, d'après la définition des fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ [I^re Partie, Chapitre III, égalités (4)], on a

$$\mathfrak{P}(\zeta, \eta, \xi) = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \int \mathbf{P}\,d\varpi,$$

$$\mathfrak{Q}(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \int \mathbf{Q}\,d\varpi,$$

$$\mathfrak{R}(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \int \mathbf{R}\,d\varpi,$$

on aura aussi

$$(12) \qquad -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,dt \int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\,u + \frac{\partial \Psi}{\partial t}\,v + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial t}\,w \right) d\varpi$$
$$= \int (\mathfrak{P}\,\delta\mathcal{A} + \mathfrak{Q}\,\delta\mathcal{B} + \mathfrak{R}\,\delta\mathcal{C})\,dv.$$

En vertu des égalités (10), (11) et (12), l'égalité (9) devient

$$\int \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \xi} + \mathfrak{P} + \frac{\mathcal{A}}{F(\mathfrak{M})}\right] \delta\mathcal{A} + \left[\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \eta} + \mathfrak{Q} + \frac{\mathcal{B}}{F(\mathfrak{M})}\right] \delta\mathcal{B} + \left[\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \zeta} + \mathfrak{R} + \frac{\mathcal{C}}{F(\mathfrak{M})}\right] \delta\mathcal{C} \right\} dv = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu, quelles que soient les valeurs de $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$, en chaque point du fer doux; on a donc, en tout point d'une masse de fer doux soumise à l'action de courants et d'aimants,

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{A} &= -F(\mathfrak{M})\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \xi} + \mathfrak{P}\right), \\ \mathcal{B} &= -F(\mathfrak{M})\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \eta} + \mathfrak{Q}\right), \\ \mathcal{C} &= -F(\mathfrak{M})\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \zeta} + \mathfrak{R}\right). \end{aligned} \right.$$

Ces équations (13) représentent, sous la forme la plus générale, les lois de l'aimantation du fer doux; elles renferment, comme cas particulier, les lois de l'aimantation du fer doux par des aimants permanents [*Leçons sur l'Électricité*, t. III, p. 179, égalités (6)], par des courants uniformes [*Ibid.*, t. III, p. 397, égalités (3)] ou non uniformes [*Ibid.*, t. III, p. 490, égalités (16)], mais ne passant pas par l'aimant. Maxwell [1] et G. Kirchhoff [2] ont donné ces équations pour le cas où les courants, d'étendue finie en tout sens, sont uniformes; M. H. von Helmholtz [3] les a énoncées dans toute leur généralité. Toutefois, ces auteurs se sont bornés au cas de l'approximation de Poisson, c'est-à-dire que leurs équations renferment non pas la fonction magnétisante $F(\mathfrak{M})$, mais un coefficient d'aimantation constant k.

---

(1) MAXWELL, *A dynamical theory of the electromagnetic field* (*Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, t. CLV, p. 459; 1865. — *Maxwell's scientifics Papers*, t. I, p. 526).

(2) G. KIRCHHOFF, *Zur Theorie des in einem Eisenkörper inducirten Magnetismus* (*Poggendorff's Annalen. Ergänzungsband*, t. V; 1870. — *G. Kirchhoff's Abhandlungen*, p. 223).

(3) H. VON HELMHOLTZ, *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper*, § 8; *Einfluss dielektrischer und magnetischer Polarisation der Media* (*Borchardt's Journal*, Bd. LXXII, p. 114; 1870. — *Helmholtz wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I, p. 611).

§ 2. — *Les courants ne traversent pas la substance magnétique.*

Les équations précédentes sont générales; elles demeurent valables soit que les courants traversent la substance magnétique, soit qu'ils lui demeurent extérieurs; arrêtons-nous un instant à ce dernier cas.

L'aimantation d'un morceau de fer doux sous l'action de courants qui lui sont extérieurs peut-elle être identique à l'aimantation engendrée dans le morceau de fer doux par certains aimants? Pour cela, il faut et il suffit évidemment que les trois fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ puissent être regardées comme les trois dérivées partielles de la fonction potentielle magnétique d'aimants extérieurs au morceau de fer doux. Ce que nous avons dit au Chapitre précédent nous permet de remplacer cette condition par les suivantes :

1° La quantité $\frac{\partial V}{\partial t}$ est égale à o en tout point extérieur au conducteur parcouru par des courants;

2° Si la connexité de première espèce de l'espace extérieur à ce conducteur est d'ordre $(n + 1)$, on peut la ramener à être de l'ordre 1 au moyen de n coupures *ne rencontrant pas la masse magnétique.*

La première condition est toujours vérifiée lorsque les courants sont uniformes, mais la seconde peut ne pas l'être; certains courants uniformes peuvent donc engendrer dans une masse de fer doux une aimantation qu'un aimant ne pourrait pas engendrer. Nous en avons vu un remarquable exemple (*Leçons sur l'Électricité,* Livre XV, Chapitre VII).

L'aimantation du fer doux par des courants absolument quelconques, mais extérieurs à la masse de fer doux, se traite analytiquement de la même manière que l'aimantation du fer doux par des aimants (*Leçons sur l'Électricité,* t. III, p. 492).

§ 3. — *Mise en équation du mouvement varié de l'électricité sur une masse magnétique.*

Nous allons étudier maintenant le cas où les courants passent en totalité ou en partie au travers de la masse magnétique. Ces courants peuvent être constants ou variés. Nous allons aborder, dans ce Chapitre, le problème du mouvement varié de l'électricité sur des masses magnétiques immobiles.

Les équations de l'aimantation sont, en chaque point (x, y, z) égalités (13)],

$$
(14)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= -\mathrm{F}(\mathcal{M})\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x} + \mathcal{P}\right),\\
\mathcal{B} &= -\mathrm{F}(\mathcal{M})\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial y} + \mathcal{Q}\right),\\
\mathcal{C} &= -\mathrm{F}(\mathcal{M})\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial z} + \mathcal{R}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

les fonctions $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ étant d'ailleurs données par les égalités [I^re Partie, Chapitre II, égalités (14)]

$$
(15)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\mathcal{P} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}\right),\\
\mathcal{Q} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z}\right),\\
\mathcal{R} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

La force électromotrice d'induction électrodynamique a pour composantes, au point (x, y, z) [Chapitre préliminaire, égalités (2)],

$$
-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t},\qquad -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t},\qquad -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t}.
$$

La force électromotrice d'induction électromagnétique a pour composantes, au même point [Chapitre I, égalités (11)],

$$
\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \Phi}{\partial t},\qquad \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \Psi}{\partial t},\qquad \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial t}.
$$

On a donc

$$
(3)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\rho u &= -\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon \mathrm{V} + \Theta) + \varphi_x - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \Phi}{\partial t},\\
\rho v &= -\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon \mathrm{V} + \Theta) + \varphi_y - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \Psi}{\partial t},\\
\rho w &= -\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon \mathrm{V} + \Theta) + \varphi_z - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t} + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial t}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on désigne par e la densité de l'électricité en un point d'une masse conductrice, et par E la densité superficielle de l'électricité en un point d'une surface de discontinuité, on aura

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi e \tag{4}$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial N_1} + \frac{\partial V}{\partial N_2} = -4\pi E. \tag{5}$$

Les quantités dont on se propose de connaître la valeur à chaque instant et en chaque point sont les quantités

$$\mathcal{A}, \quad \mathcal{B}, \quad \mathcal{C}, \quad u, \quad v, \quad w, \quad e, \quad E. \tag{6}$$

La fonction $\mathcal{S}(x, y, z)$, la fonction $\Theta(x, y, z)$ et les fonctions φ_x, φ_y, φ_z étant des fonctions d'x, y, z et du temps que l'on suppose connues, on voit que les égalités (1), (2), (3), (4), (5) ramènent la détermination des quantités (6) à la détermination des huit fonctions

$$\mathfrak{T}, \quad \mathfrak{U}, \quad \mathfrak{V}, \quad \mathfrak{W}, \quad \Phi, \quad \Psi, \quad X, \quad V.$$

Dans le cas où la fonction magnétisante $F(\mathfrak{M})$ est remplacée par un coefficient d'aimantation constant, on retrouve les équations qui ont servi de point de départ aux recherches de M. H. von Helmholtz; dans le cas particulier où les courants sont uniformes, on retrouve les lois étudiées par Maxwell, G. Kirchhoff et M. Paul Janet.