ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

E. LANDFRIEDT

Quelques recherches sur les fonctions à multiplicateurs

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 9, nº 3 (1895), p. G1-G18
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1895_1_9_3_G1_0>

QUELQUES RECHERCHES

SUR

LES FONCTIONS A MULTIPLICATEURS,

PAR M. E. LANDFRIEDT.

INTRODUCTION.

Les fonctions à multiplicateurs, dont nous allons nous occuper, ont fait jusqu'à présent l'objet des travaux d'un mathématicien français ([1]). Les résultats obtenus par ce savant ont mis en évidence l'analogie frappante qui existe entre la théorie de ces fonctions et celle des fonctions algébriques rationnelles en s et z. Nous allons essayer de faire ressortir davantage cette analogie, en traitant un genre de questions auxquelles n'a pas touché l'auteur déjà cité.

Après avoir exposé, dans un premier Chapitre, une démonstration de l'extension du théorème d'Abel aux fonctions à multiplicateurs $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$, basée sur la seule définition de ces fonctions, nous arrivons au véritable but de notre travail. Après avoir défini ce que nous entendons par défaut et excès du système de pôles d'une fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$, nous arrivons à introduire dans la théorie de ces fonctions une classification entièrement analogue à celle qu'a introduite M. Christoffel dans la théorie des fonctions algébriques. Nous donnons les propriétés essentielles caractérisant les deux espèces de fonctions Φ, que distingue notre classification, et nous établissons notamment une formule générale pour représenter chacune de ces deux catégories de fonctions $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$.

La méthode dont nous nous servons est celle de Riemann, adoptée aussi

([1]) Appell, *Généralisation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce* (*Journal de Math.* par M. Resal; 1883). — P. Appell, *Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs, etc.* (*Acta. math.*, t. XIII).

par M. P. Appell. Nous employons cependant, pour rendre simplement connexe la surface T de Riemann, un mode de coupures un peu différent de celui dont se sert M. P. Appell.

CHAPITRE I.

I. — Généralités.

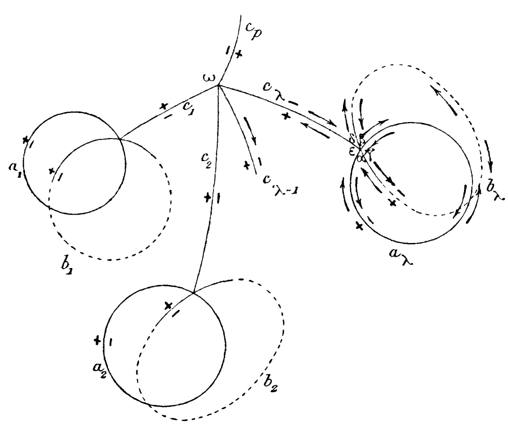
Soit

$$F(s^n, z^m) = 0$$

l'équation algébrique définissant s en fonction de z. Nous introduisons la surface de Riemann correspondante, que nous désignerons par la lettre T. Cette surface sera transformée en la surface simplement connexe T' de Riemann au moyen d'un système de $3p$ coupures a_λ, b_λ, c_λ ($\lambda = 1, 2, \ldots, p$). Ici nous ne suivrons pas entièrement le mode de coupures adopté par M. P. Appell.

Après avoir introduit les $2p$ coupures a_λ, b_λ, ainsi que le fait M. P. Appell, nous prenons sur la surface T un point quelconque ω, ne coïncidant avec aucun point singulier de la fonction s. Cela fait, nous menons à partir du

Fig. 1.



point ω p coupures c_λ se continuant, sans se couper mutuellement, jusqu'aux p points d'intersection (a_λ, b_λ). Sur chacune de ces $3p$ coupures ainsi définies nous distinguons deux bords, un bord positif et un bord négatif, ainsi que le montre la figure. L'ensemble de ces bords formera une seule ligne courbe, limite de la surface simplement connexe T′. Les flèches indiquent les sens d'un parcours positif de cette courbe limite.

Le mode de coupures ainsi introduit permet de simplifier certaines démonstrations et de rendre plus symétriques certaines formules de M. P. Appell. C'est ainsi que les relations liant les modules de périodicité d'une intégrale de première espèce seront remplacées par les suivantes :

$$A_\lambda(1-n_\lambda)-B_\lambda(1-m_\lambda)-C_\lambda=0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{\lambda=1}^{p} C_\lambda=0 \qquad (\lambda=1,2,\ldots,p).$$

De même la relation 13°, donnée par M. P. Appell (p. 34) sera remplacée par

$$\sum_{\lambda=1}^{p}[A_\lambda(s-n_\lambda)-B_\lambda(1-m_\lambda)]=0,$$

qui se déduit des relations précédentes par une simple addition.

Comme on le voit également dans cette nouvelle notation, l'intégrale de première espèce aura, non plus $3p-1$ modules de périodicité, mais bien $3p$. C'est là surtout ce qui contribuera à rendre les formules plus symétriques. Une remarque analogue s'applique aux intégrales de seconde et de troisième espèce.

Dans la suite nous désignerons toute fonction aux multiplicateurs m_λ, n_λ par le symbole $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$, l'indice dénotant les multiplicateurs.

II. — Extension du théorème d'Abel aux fonctions $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$.

Nous allons maintenant développer une démonstration de l'extension du théorème d'Abel aux fonctions $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$, basée, non plus comme celle de M. P. Appell sur la formule donnant la fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$, mais sur *la seule définition de la fonction*. Cette démonstration nous permettra en même temps de donner ce célèbre théorème sous une forme un peu plus complète que celle sous laquelle l'a énoncé M. P. Appell.

Avant d'en arriver à notre démonstration, nous établissons quelques théorèmes préliminaires.

Théorème A. — *Toute fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ uniforme sur* T′ *ne devient infinie en* T′ *qu'en un nombre de points fini et jamais qu'à un ordre fini.*

Démonstration. — $\frac{d\log\Phi_{m_\lambda n_\lambda}}{dz} = \varphi$ est une fonction algébrique et n'a, par conséquent, que des pôles d'un ordre fini et en nombre fini. Or φ ne peut devenir infinie qu'aux zéros et aux infinis de $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$.

Donc, etc.

THÉORÈME B. — *La somme* N *des nombres d'ordre de* $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ *en* T′ *est égale à zéro.*

Démonstration. — Nous entendons ici par nombre d'ordre ce que Neumann (*Vorles. über Riem. Theorie d. Abel'schen Integr.*, p. 41) entend par *Ordnungszahlen*. Nous avons alors, en vertu d'un théorème de Cauchy,

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_{(T')} d\log\Phi_{m_\lambda n_\lambda},$$

l'intégrale étant étendue, dans le sens positif, au contour complet de la surface simplement connexe T′.

Or

$$\begin{aligned}\int_{(T')} d\log\Phi_{m_\lambda n_\lambda} &= \sum \int \left| \begin{matrix}\alpha\\ a\\ \gamma\end{matrix} \right|_\lambda (d\overset{+}{\log}\Phi_{m_\lambda n_\lambda} - d\overset{-}{\log}\Phi_{m_\lambda n_\lambda})\\ &+ \sum \int \left| \begin{matrix}\beta\\ b\\ \gamma\end{matrix} \right|_\lambda (d\overset{-}{\log}\Phi_{m_\lambda n_\lambda} - d\overset{+}{\log}\Phi_{m_\lambda n_\lambda})\\ &+ \sum \int \left| \begin{matrix}\omega\\ c\\ \delta\end{matrix} \right|_\lambda (d\overset{+}{\log}\Phi_{m_\lambda n_\lambda} - d\overset{-}{\log}\Phi_{m_\lambda n_\lambda});\end{aligned}$$

donc $N = 0$, parce que le long de chaque coupure

$$d\overset{+}{\log}\Phi_{m_\lambda n_\lambda} = d\overset{-}{\log}\Phi_{m_\lambda n_\lambda}.$$

De ce théorème, nous déduisons immédiatement :

THÉORÈME C. — $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ *possède en* T′ *autant de zéros que d'infinis.*

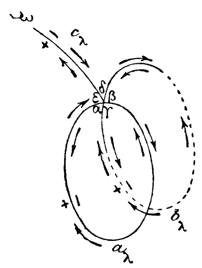
Ces théorèmes préliminaires une fois établis, nous abordons la démonstration du théorème d'Abel dans son extension aux fonctions $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$.

Nous considérons, à cet effet, la fonction

$$P = u_\mu \frac{d\log\Phi_{m_\lambda n_\lambda}}{dz},$$

où u_μ désigne l'intégrale normale de première espèce de Riemann, possédant le long de a_λ le module de périodicité $\binom{\lambda}{\mu}\pi i$ et le long de b_λ, le mo-

Fig. 2.



dule de périodicité $a_{\lambda\mu}$. Le symbole $\binom{\lambda}{\mu}$ désigne zéro ou l'unité, selon que $\lambda \gtrless \mu$ ou $\lambda = \mu$.

Soient

$$\begin{array}{llllllll} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \varepsilon_3, & \ldots, & \varepsilon_k, & \ldots, & \varepsilon_q & \text{les zéros,} \\ \delta_1, & \delta_2, & \delta_3, & \ldots, & \delta_k, & \ldots, & \delta_q & \text{les infinis de } \Phi_{m_\lambda n_\lambda}. \end{array}$$

Nous aurons alors :

1° Dans le voisinage de ε_k, $\dfrac{d \log \Phi_{m_\lambda n_\lambda}}{dz} = \dfrac{1}{z - \varepsilon_k}$ + fonction continue,

$$P = \frac{u_\mu(\varepsilon_k)}{z - \varepsilon_k} + \text{fonct. cont.}$$

P aura donc, en cet endroit, un résidu, Rés.$(\varepsilon_k) = u_\mu(\varepsilon_k)$.

2° Dans le voisinage de δ_k $\dfrac{d \log \Phi_{m_\lambda n_\lambda}}{dz} = \dfrac{1}{z - \delta_k}$ + fonct. cont.,

$$P = -\frac{u_\mu(\delta_k)}{z - \delta_k} + \text{fonct. cont.}$$

Le résidu correspondant de P sera donc Rés.$(\delta_k) = - u_\mu(\delta_k)$. La fonction P ne possédant pas sur la surface T′ d'autre résidu différent de zéro, la somme γ de ces résidus sera

$$(\alpha) \qquad \gamma = \sum_{k=1}^{k=q} [u_\mu(\varepsilon_k) - u_\mu(\delta_k)].$$

Or, P est partout uniforme sur T′; nous aurons donc, d'après un théorème connu,

$$\gamma = \frac{1}{2\pi i}\int_{(T')} u_\mu \, d\log \Phi_{m_\lambda n_\lambda},$$

l'intégrale étant étendue, dans le sens positif, au contour complet de T′. Nous poserons, pour abréger,

$$2\pi i\gamma = \sum_{\lambda=1}^{p}(a_\lambda) + \sum_{1}^{p}(b_\lambda) + \sum_{1}^{p}(c_\lambda),$$

et nous calculerons séparément chacune des trois sommes à droite

$$(1) \qquad (a_\lambda) = \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda (\overset{+}{u}_\mu d\log\overset{+}{\Phi}_{m_\lambda n_\lambda} - \overset{-}{u}_\mu d\log\overset{-}{\Phi}_{m_\lambda n_\lambda})$$

$$= \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda (\overset{+}{u}_\mu - \overset{-}{u}_\mu)\, d\log\Phi_{m_\lambda n_\lambda};$$

donc

$$\sum(a_\lambda) = \pi i \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\mu d\log\Phi_{m_\lambda n_\lambda} = \pi i(\log n_\mu + g_\mu 2\pi i),$$

où g_μ désigne un nombre entier.

D'une manière analogue, nous avons

$$(2) \qquad \sum_{1}^{p}(b_\lambda) = -\sum_{\lambda=1}^{p} a_{\lambda\mu}\log m_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{p} a_{\lambda\mu} h_\lambda 2\pi i,$$

$$(3) \qquad \sum_{\lambda=1}^{p}(c_\lambda) = 0.$$

Nous trouvons ainsi

$$(\beta) \qquad \gamma = \frac{1}{2}\log n_\mu - \frac{1}{2\pi i}\sum_{\lambda=1}^{p} a_{\lambda\mu}\log m_\lambda + g_\mu \pi i + \sum_{\lambda=1}^{p} a_{\lambda\mu} h_\lambda.$$

En égalant les deux expressions ci-dessus obtenues pour γ, nous avons le théorème suivant :

Théorème d'Abel. — *Si* $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q)$, $(\delta_1, \ldots, \delta_q)$ *désignent les zéros et* *les infinis d'une fonction* $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$, *nous avons les* p *relations*

$$(1)\quad \sum_{k=1}^{k=q}[u_\mu(\varepsilon_k)-u_\mu(\delta_k)]=\frac{1}{2}\log n_\mu-\frac{1}{2\pi i}\sum_{\lambda=1}^{p}a_{\lambda\mu}\log m_\lambda+(g\,|\,h)_\mu \quad (\mu=1,2,3,\ldots,p),$$

où

$$(g\,|\,h)_\mu=g_\mu\pi i+\sum_{\lambda=1}^{p}h_\lambda a_{\lambda\mu}.$$

Les logarithmes figurant à droite sont considérés comme uniformes, tandis que les nombres entiers g_λ, h_λ *sont définis rigoureusement par les formules*

$$\int\left|\begin{matrix}\alpha\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\mu d\log\Phi_{m_\lambda n_\lambda}=\log n_\mu+2\pi i\,g_\mu,$$

$$\int\left|\begin{matrix}\beta\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda d\log\Phi_{m_\lambda n_\lambda}=\log m_\lambda-2\pi i\,h_\lambda.$$

Nous démontrons réciproquement que, si les équations (1) sont vérifiées et si, de plus, g_μ et h_λ sont des nombres entiers, les deux systèmes de points $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q)$ et $(\delta_1, \ldots, \delta_q)$ sont les zéros et les infinis d'une fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$.

A cet effet, nous considérons la fonction

$$\Phi=e^{\sum\limits_{k=1}^{q}\omega_{\varepsilon\delta}(z)-2\sum\limits_{\lambda=1}^{p}h_\lambda u_\lambda+\frac{1}{\pi i}\sum\limits_{\lambda=1}^{p}\log m_\lambda u_\lambda+\text{const.}}.$$

Cette fonction Φ est uniforme en T′ et admet, ainsi qu'il est facile de le vérifier,

Le long de a_λ, le multiplicateur m_λ,

» c_λ, » 1,

» b_μ, le multiplicateur

$$e^{2\sum\limits_{k=1}^{q}[u_\mu(\varepsilon_k)-u_\mu(\delta_k)]-2\sum\limits_{\lambda=1}^{p}h_\lambda a_{\lambda\mu}+\frac{1}{\pi i}\sum\limits_{\lambda=1}^{p}a_{\lambda\mu}\log m_\lambda}.$$

Puisque, par hypothèse, les équations (1) sont vérifiées et que g_μ et h_λ sont supposés être des nombres entiers, le multiplicateur se réduit à

$$e^{\log n_\mu+g_\mu 2\pi i}=n_\mu.$$

La réciproque du théorème d'Abel se trouve ainsi démontrée. Nous résumons en un seul théorème.

Théorème. — *Pour qu'il existe une fonction* $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$, *uniforme en* T′ *et admettant le long de* a_λ *et* b_λ *les multiplicateurs constants* m_λ, n_λ, *il faut et il suffit que les équations* (1) *soient vérifiées,* g_μ *et* h_λ *étant des nombres entiers.*

Cas spécial. — Le cas spécial que M. P. Appell distingue toujours rigoureusement du cas général se présente toutes les fois que les zéros et les infinis de $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ sont les zéros et les infinis d'une fonction algébrique rationnelle en s et z, et ne peut se présenter que dans cette hypothèse. Nous n'entrons pas dans la discussion de ce cas spécial, au moins pour ce qui regarde les équations du théorème d'Abel. Les multiplicateurs m_λ, n_λ satisferont à certaines relations, qui se trouvent chez M. P. Appell, toutefois sans la détermination des nombres entiers M, N qui y figurent. Nous n'insistons pas.

CHAPITRE II.

CLASSIFICATION DES FONCTIONS $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$.

I. — Cas général.

Nous donnons dans ce Chapitre, avec les modifications nécessaires, l'extension aux fonctions $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ de principes introduits par M. Christoffel dans la théorie des fonctions algébriques. *Voir*, à ce sujet, le commencement du Mémoire de M. Christoffel, *Ueber die canonische Form der Riemann'schen integrale* 1^ter^ *Gattung* (Brioschi, *Annali di Matematica*, 2^e^ série, t. IX).

Nous prenons comme point de départ, dans les développements qui suivent, l'équation

$$\sum_{k=1}^{k=q} G_k \, \omega'(\varepsilon_k) = 0, \tag{1}$$

donnée par M. P. Appell, page 28 de son Mémoire. Dans cette équation, les points ε_k sont les pôles de $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ et G_k les résidus correspondants, tandis que ω' est la dérivée par rapport à z de l'intégrale générale ω de première espèce relative aux multiplicateurs inverses $m'_\lambda = 1 : m_\lambda$, $n'_\lambda = 1 : n_\lambda$.

Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q$ les pôles d'une fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$; nous supposons que les coefficients $c_1, \ldots, c_{p-1}$ entrant dans l'expression de l'intégrant général de première espèce

$$\omega' = c_1\omega'_1 + c_2\omega'_2 + \ldots + c_{p-1}\omega'_{p-1},$$

soient déterminés de manière que ω' devienne zéro en tous les points $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ à l'exception d'un seul ε_k. L'équation (1) nous donnera alors

$$G_k\,\omega'(\varepsilon_k) = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \omega'(\varepsilon_k) = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Si* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_q$ *désignent les pôles d'une fonction* $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ *et* ω' *l'intégrant général de première espèce relatif aux multiplicateurs inverses* $m'_\lambda = 1 : m_\lambda$, $n'_\lambda = 1 : n_\lambda$, *le système d'équations*

$$(1_a) \qquad \omega'(\varepsilon_1) = 0, \qquad \omega'(\varepsilon_2) = 0, \qquad \ldots, \qquad \omega'(\varepsilon_q) = 0$$

contiendra au moins une *équation surnuméraire.*

Soit ρ le nombre exact des équations surnuméraires du système $\omega'(\varepsilon_1) = 0, \ldots, \omega'(\varepsilon_q) = 0$, $q - \rho$ le nombre des autres équations que nous appellerons *essentielles*. Nous aurons alors

$$\rho \overline{\overline{>}} 1 \qquad \text{et} \qquad q - \rho \overline{\overline{<}} p - 1,$$

puisque le nombre des équations essentielles ne peut dépasser le nombre $p - 1$ des coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}$ à notre disposition. Soient

$$\begin{array}{llllr} \omega'(\varepsilon_1) = 0, & \ldots, & \omega'(\varepsilon_\alpha) = 0, & \ldots, \quad \omega'(\varepsilon_{q-\rho}) = 0 & \text{les équat. essentielles,} \\ \omega'(\varepsilon_{q-\rho+1}) = 0, & \ldots, & \omega'(\varepsilon_\beta) = 0, & \ldots, \quad \omega'(\varepsilon_q) \;\; = 0 & \text{» \quad surnuméraires.} \end{array}$$

Les membres gauches de ces équations sont liés par des relations de la forme

$$(1_b) \qquad \omega'(\varepsilon_\beta) \equiv \sum_{\alpha=1}^{q-\rho} \gamma_{\alpha\beta}\,\omega'(\varepsilon_\alpha),$$

où le signe $\equiv$ est le symbole de l'identité. En effet, les relations (1_b) sont des identités par rapport aux coefficients $c_1, \ldots, c_{p-1}$.

En vertu de (1_b), l'équation (1) prend la forme

$$(1_c)\qquad \sum_\alpha \omega'(\varepsilon_\alpha)\Big(G_\alpha + \sum_\beta G_\beta \gamma_{\alpha\beta}\Big) = 0.$$

Or, les équations $\omega'(\varepsilon_\alpha) = 0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, q-\rho)$ ne contenant aucune équation surnuméraire, nous pourrons déterminer les coefficients $c_1, \ldots, c_{p-1}$ de manière à avoir

$$\omega'(\varepsilon_1) = a_1, \qquad \ldots, \qquad \omega'(\varepsilon_\alpha) = a_\alpha, \qquad \ldots, \qquad \omega'(\varepsilon_{q-\rho}) = a_{q-\rho},$$

où $a_1, \ldots, a_{q-\rho}$ désignent des quantités arbitraires. Nous pourrons notamment déterminer les coefficients de manière que $\omega'(\varepsilon_\alpha)$ devienne zéro en tous les points ε_α, à l'exception d'un seul, que nous choisirons d'une façon arbitraire. L'équation (1_c) nous donnera, par suite,

$$(2)\qquad G_\alpha + \sum_\beta \gamma_{\alpha\beta} G_\beta = 0.$$

Cette relation n'est autre chose que la solution, par rapport aux résidus $G_1, \ldots, G_q$, du système de $p-1$ équations

$$\begin{array}{l} G_1\omega'_1(\varepsilon_1) \;\; + G_2\omega'_1(\varepsilon_2) \;\; + \ldots + G_q\omega'_1(\varepsilon_q) \;\; = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ G_1\omega'_{p-1}(\varepsilon_1) + G_2\omega'_{p-1}(\varepsilon_2) + \ldots + G_q\omega'_{p-1}(\varepsilon_q) = 0. \end{array}$$

Il résulte de cette relation (2) que, si $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ désignent les pôles d'une fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$, les résidus correspondants ne pourront être choisis arbitrairement. Le nombre des résidus pouvant être pris d'une façon arbitraire est égal au nombre ρ des équations surnuméraires du système (1_a). Les autres résidus seront des fonctions linéaires des premiers et seront donnés par la relation (2). C'est là une propriété commune aux fonctions $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ et aux fonctions algébriques rationnelles en s et z.

La considération du nombre $q-\rho$ des équations essentielles va nous conduire à une classification des fonctions $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ en deux grandes catégories. Si

$$q - \rho < p - 1,$$

l'intégrant général ω' ne deviendra pas identiquement nul, si nous déterminons les coefficients $c_1, \ldots, c_{p-1}$ de manière que ω' devienne zéro aux points $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{q-\rho}$. Si, au contraire,

$$q-\rho=p-1,$$

ω' sera identiquement nul, si nous imposons aux coefficients c la même détermination.

Dans le premier cas, nous appellerons le système de points $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ un *système de première espèce,* et la fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$, qui devient infinie en ces points, *fonction* $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ *de première espèce.* Dans le second cas, nous parlerons de *systèmes de deuxième espèce et de fonctions* $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ *de deuxième espèce.*

Nous allons nous occuper successivement de ces deux espèces de fonctions $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$.

A. — *Fonctions* $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ *de première espèce.*

Toute $\Phi^{(1)}_{m_\lambda n_\lambda}$ (fonction de première espèce) est caractérisée par les relations

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} q-\rho=p-2-\lambda, \\ \lambda \gtreqless 0. \end{cases}$$

Tout intégrant général de première espèce

$$\omega'=c_1\omega'_1+c_2\omega'_2+\ldots+c_{p-1}\omega'_{p-1}$$

contient $p-1$ coefficients constants et sera, par suite, déterminé à un facteur constant près, si nous lui imposons $p-2$ zéros essentiels. Le nombre $q-\rho$ des points essentiels étant inférieur de λ à $p-2$, ces points essentiels ne suffiront pas pour déterminer complètement l'intégrant ω'. Nous appellerons λ le *défaut* du système $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ et du système d'équations (1_a); ρ sera appelé *excès* du système de points et du système d'équations (1_a). Les deux nombres ρ et λ sont les nombres caractéristiques de tout système de première espèce.

Soient $\Phi^{(1)}_{m_\lambda n_\lambda}$ une fonction de première espèce, ω' l'intégrant général de première espèce aux multiplicateurs inverses. Nous formons le produit

$$\tau=\Phi^{(1)}_{m_\lambda n_\lambda}\omega'.$$

Ce produit sera une fonction algébrique, uniforme et régulière sur T.

Nous supposons ω' déterminé de manière à devenir zéro en tous les points $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$; $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ désignant les pôles de $\Phi^{(1)}_{m_\lambda n_\lambda}$, τ ne pourra alors devenir infinie qu'aux infinis de ω', c'est-à-dire aux points de ramification de T; c'est, par conséquent, l'intégrant général de première espèce w' de Riemann par rapport à T; donc

$$\Phi^{(1)}_{m_\lambda n_\lambda}\omega' = w'.$$

ω' n'étant pas identiquement nul, nous avons le théorème suivant :

Théorème II. — *Toute fonction $\Phi^{(1)}_{m_\lambda n_\lambda}$ de première espèce est de la forme*

$$\Phi^{(1)}_{m_\lambda n_\lambda} = \frac{w'}{\omega'}.$$

Cette expression nous donne immédiatement une limite supérieure pour le nombre de pôles d'une fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ de première espèce. En effet, ω' possède

$$2p-2$$

zéros situés à distance finie. C'est là aussi la limite supérieure en question. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème III. — *Le nombre des pôles d'une fonction $\Phi^{(1)}_{m_\lambda n_\lambda}$ est*

$$\leqq 2p-2.$$

Les deux nombres ρ et λ ne sont pas indépendants l'un de l'autre. En effet, si

$$q = p + r,$$

nous pourrons, outre les q pôles, imposer à $\Phi^{(1)}_{m_\lambda n_\lambda}$ r zéros choisis arbitrairement. $\Phi^{(1)}$ sera alors déterminé à un facteur constant près. Dans le cas actuel, nous avons

$$q = p + (\rho - \lambda - 2),$$

c'est-à-dire que nous pourrons, outre les q pôles, choisir arbitrairement

$$\rho - \lambda - 2$$

zéros de $\Phi^{(1)}_{m_\lambda n_\lambda}$. Nous obtenons ainsi une série de relations

$$\begin{array}{lcl}
\rho = \lambda + 2, & \text{pour} & q = p, \\
\rho = \lambda + 3, & \text{»} & q = p + 1, \\
\ldots\ldots\ldots, & & \ldots\ldots\ldots, \\
\rho = \lambda + 2 + r, & \text{»} & q = p + r, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots, \\
\rho = \lambda + p, & \text{»} & q = 2p - 2.
\end{array}$$

Il suit de là que, pour une valeur donnée de q, ρ et λ sont liés par une relation bien déterminée. ρ est toujours plus grand que λ; sa valeur minima est $2 + r$ pour $q = p + r$.

Pour $p = 0$, il n'existe pas de fonction à multiplicateurs constants.

Pour $p = 1$, nous avons $2p - 2 = 0$. Les fonctions $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ correspondant à cette valeur de p ne peuvent donc être des fonctions de première espèce.

Nous nous bornons à ces développements pour les fonctions $\Phi^{(1)}_{m_\lambda n_\lambda}$ de première espèce.

B. — *Fonctions $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ de seconde espèce.*

Toute fonction $\Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda}$ (fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ de seconde espèce) est caractérisée par la relation

$$(\beta) \qquad q - \rho = p - 1,$$

où le nombre ρ, auquel ici aussi nous donnerons le nom d'*excès* du système des équations essentielles, est au moins égal à l'unité. Nous pouvons, par suite, énoncer immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Toute fonction $\Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda}$ possède au moins p pôles simples.*

De la relation (β), qui peut s'écrire

$$q = p + (\rho - 1),$$

nous déduisons, en outre, le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *Si nous imposons à une fonction $\Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda}$ de seconde espèce q pôles simples, nous pourrons encore choisir arbitrairement*

$$\rho - 1$$

zéros de cette fonction; $\Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda}$ *sera alors déterminée à un facteur constant près.*

Soient maintenant $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ le système des pôles d'une fonction $\Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda}$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\alpha, \ldots, \varepsilon_{q-\rho}$ les points essentiels de ce système. En vertu de la relation (β), les équations

$$\omega'(\varepsilon_1) = 0, \qquad \ldots, \qquad \omega'(\varepsilon_\alpha) = 0, \qquad \omega'(\varepsilon_{p-1}) = 0,$$

où ω' désigne comme précédemment l'intégrant général de première espèce aux multiplicateurs inverses, ne renfermeront aucune équation surnuméraire. Nous pourrons donc déterminer les coefficients $c_1, \ldots, c_{p-1}$ de

$$\omega' = c_1\omega'_1 + c_2\omega'_2 + \ldots + c_{p-1}\omega'_{p-1},$$

de manière qu'ils vérifient les équations

$$\omega'(\varepsilon_1) = a_1, \qquad \ldots, \qquad \omega'(\varepsilon_\alpha) = a_\alpha, \qquad \ldots, \qquad \omega'(\varepsilon_{p-1}) = a_{p-1},$$

où $a_1, \ldots, a_\alpha \ldots, a_{p-1}$ désignent des quantités arbitraires.

Supposons que ce soit fait; nous trouverons ainsi pour $c_1, \ldots, c_{p-1}$ des fonctions linéaires et homogènes des quantités a_α. La substitution en ω' de ces valeurs ainsi obtenues pour $c_1, \ldots, c_{p-1}$ nous donnera

$$(\gamma) \qquad \omega' = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p-1} a_\alpha \Omega'_\alpha,$$

les coefficients a_α étant des quantités arbitraires; les facteurs Ω'_α seront des intégrants de première espèce aux multiplicateurs inverses. Ces intégrants sont liés étroitement au système des $p-1$ points essentiels ε_α.

Soit, en effet, ε_μ un point quelconque du système des points ε_α; nous aurons

$$\omega'(\varepsilon_\mu) = a_\mu, \qquad \text{et} \qquad \omega'(\varepsilon_\mu) = \sum_{\alpha=1}^{p-1} a_\alpha \Omega'_\alpha(\varepsilon_\mu),$$

d'où

$$a_\mu = \sum_{\alpha=1}^{p-1} a_\alpha \Omega'_\alpha(\varepsilon_\mu).$$

De cette dernière relation nous déduisons immédiatement

1° $\Omega'_\mu(\varepsilon_\mu) = 1$, pour $\alpha = \mu$,

2° $\Omega'_\alpha(\varepsilon_\mu) = 0$, » $\alpha \gtrless \mu$.

Nous avons ainsi découvert un système singulier de $p-1$ intégrants de première espèce aux multiplicateurs inverses. Ces intégrants Ω'_α sont liés étroitement au système des $p-1$ points essentiels ε_α. Ω'_α est nul en tous les points $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{p-1}$, à l'exception du seul point ε_α, pour lequel cet intégrant est égal à l'unité.

Revenons maintenant à l'équation

$$\sum_{k=1}^{q} G_k \omega'(\varepsilon_k) = 0,$$

ou

$$\sum_\alpha G_\alpha \omega'(\varepsilon_\alpha) + \sum_\beta G_\beta \omega'(\varepsilon_\beta) = 0,$$

qui nous a servi de point de départ dans notre classification des fonctions $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$. La substitution

$$\omega'(\varepsilon_\alpha) = a_\alpha, \qquad \omega'(\varepsilon_\beta) = \sum_\alpha a_\alpha \Omega'_\alpha(\varepsilon_\beta),$$

nous donnera

$$\sum_\alpha G_\alpha a_\alpha + \sum_\beta G_\beta \sum_\alpha a_\alpha \Omega'_\alpha(\varepsilon_\beta) = 0,$$

où

$$\sum_\alpha a_\alpha \left\{ G_\alpha + \sum_\beta G_\beta \Omega'_\alpha(\varepsilon_\beta) \right\} = 0,$$

c'est-à-dire

$$G_\alpha = -\sum_\beta G_\beta \Omega'_\alpha(\varepsilon_\beta), \tag{δ}$$

a_1, a_α, a_{p-1} étant des quantités arbitraires.

Si nous désignons par $t(0|\varepsilon_k)$ une intégrale de deuxième espèce, d'une fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$, toute fonction $\Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda}$ pourra être mise sous la forme

$$\Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda} = \sum_\alpha G_\alpha t(0|\varepsilon_\alpha) + \sum_\beta G_\beta t(0|\varepsilon_\beta) + \varpi,$$

où w est une intégrale de première espèce d'une fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$. En vertu de la relation δ, cette formule peut s'écrire

$$(\varepsilon) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda} = w - \sum\limits_{\beta} G_\beta \varphi_\beta, \\ \text{où} \\ \qquad \varphi_\beta = \sum\limits_{\alpha=1}^{p-1} \Omega'_\alpha(\varepsilon_\beta) t(0|\varepsilon_\alpha) - t(0|\varepsilon_\beta). \end{array} \right.$$

Ainsi que nous l'avons vu, p est le nombre minimum de pôles que possède une fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ de seconde espèce. Soit $\Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda}$ une fonction de deuxième espèce d'ordre p, aux multiplicateurs $m_\lambda n_\lambda$. Cette fonction pourra se mettre sous la forme

$$\Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda} = w - G\varphi,$$

où

$$\varphi = \sum_{\alpha=1}^{p-1} \Omega'_\alpha(\varepsilon_p) t(0|\varepsilon_\alpha) - t(0|\varepsilon_p).$$

Nous pouvons disposer à notre aise du résidu G, qui figure dans cette formule. Supposons $G = -1$. Nous aurons, dans cette hypothèse,

$$(1) \qquad \text{Dans le voisinage de } \varepsilon_p \quad \Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda} = -\frac{1}{z - \varepsilon_p} + \text{fonct. cont.},$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} \text{Dans le voisinage de } \varepsilon_1, & \Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda} = & \Omega'_1(\varepsilon_p) \dfrac{1}{z-\varepsilon_1} & + \text{fonct. cont.}, \\ \quad \text{»} \qquad \varepsilon_2, & \Phi^{(2)} = & \Omega'_2(\varepsilon_p) \dfrac{1}{z-\varepsilon_2} & + \text{fonct. cont.}, \\ \dots\dots\dots\dots & & & \dots, \\ \quad \text{»} \qquad \varepsilon_{p-1}, & \Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda} = & \Omega'_{p-1}(\varepsilon_p) \dfrac{1}{z-\varepsilon_{p-1}} & + \text{fonct. cont.}, \end{array} \right.$$

Nous avons ainsi trouvé le théorème suivant :

Théorème VI. — *Si nous déterminons une fonction $\Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda}$ d'ordre p, de manière que son résidu au point fixe ε_p soit -1, cette fonction $\Phi^{(2)}_{m_\lambda n_\lambda}$ possédera aux $p-1$ pôles restants $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}$ des résidus égaux aux valeurs que prennent au point fixe ε_p les $p-1$ intégrants Ω' que nous avons trouvés précédemment.*

Ainsi que nous l'avons démontré, le cas général n'admet pour $p=1$ aucune fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ de première espèce. Il est facile de prouver que pour $p=1$ le cas général n'admet pas non plus de fonction de deuxième espèce. Pour $p=1$, la relation

$$q-\rho=p-1,$$

qui caractérise les fonctions de deuxième espèce, se réduit en effet à

$$q-\rho=0;$$

le nombre des équations essentielles de système

$$\omega'(\varepsilon_1)=0, \qquad \ldots, \qquad \omega'(\varepsilon_q)=0$$

serait donc nul, ce qui est une absurdité. Les fonctions à multiplicateurs donnés, qui correspondent à la valeur 1 de p, rentrent, par conséquent, toutes dans le cas spécial de M. P. Appell. Nous allons donner brièvement la théorie de ce cas spécial.

II. — Cas spécial.

Comme on le sait, le cas spécial, que M. P. Appell sépare toujours soigneusement du cas général, a lieu toutes les fois que Φ est de la forme

$$\Phi_{m_\lambda n_\lambda}=\tau\mathcal{E}(z),$$

où τ désigne une fonction algébrique rationnelle en s et z, et $\mathcal{E}(z)$ la fonction exponentielle employée couramment par M. P. Appell. Ici encore nous distinguerons deux espèces de fonctions Φ. Nous dirons que $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ est de première ou de deuxième espèce suivant que τ est de première ou de deuxième espèce (*voir* le Mémoire de M. Christoffel).

Les fonctions de première espèce sont caractérisées par la relation

$$q-\rho=p-1-\lambda,$$

celles de deuxième espèce par la relation

$$q-\rho=p,$$

où ρ et λ désignent l'excès et le défaut du système d'équations

$$w'(\varepsilon_1) = 0, \qquad \ldots, \qquad w'(\varepsilon_q) = 0,$$

w' étant l'intégrant général de première espèce de Riemann.

Les théorèmes bien connus sur les systèmes de pôles d'une fonction algébrique se trouvent ainsi immédiatement démontrés pour la fonction $\Phi_{m_\lambda n_\lambda}$ correspondante. Quelques-uns de ces théorèmes sont énoncés dans le Mémoire déjà cité de M. Christoffel. Nous nous dispenserons de les reproduire ici.