Annales de la faculté des sciences de Toulouse

L. Sauvage

Théorie générale des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 9, nº 4 (1895), p. 1-76

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1895_1_9_4_1_0>

THÉORIE GÉNÉRALE

DES

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

LINÉAIRES ET HOMOGÈNES,

PAR L. SAUVAGE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.

CHAPITRE V.

DES SYSTÈMES RÉGULIERS.

88. Nous avons vu que les systèmes de la forme (B) où (79)

$$x\frac{dy_i}{dx} = \sum_j a_{ij}y_j$$

(Chap. IV, nos 83 et suivants), où les a sont des fonctions holomorphes dans le domaine de l'origine, ont toutes leurs solutions régulières, c'est-à-dire que les éléments de chaque solution demeurent finis dans le domaine de l'origine, quand on les a préalablement multipliés par une puissance convenable de x.

Les systèmes précédents ne sont pas les seuls à être ce que nous appellerons maintenant des *systèmes réguliers*. En effet, si l'on pose

$$y_i = x^{h_i}z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et, par suite,

$$\frac{dy_i}{dx} = x^{h_i}\left(\frac{dz_i}{dx} + \frac{h_i}{x}z_i\right),$$

le système différentiel (79) devient

$$\begin{gathered}
\frac{dz_1}{dx} = \frac{a_{11} - h_1}{x}z_1 + \frac{a_{12}}{x^{h_1-h_2+1}}z_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{x^{h_1-h_n+1}}z_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{dz_n}{dx} = \frac{a_{n1}}{x^{h_n-h_1+1}}z_1 + \frac{a_{12}}{x^{h_n-h_2+1}}z_2 + \ldots + \frac{a_{nn} - h_n}{x}z_n,
\end{gathered}$$

et, sous cette nouvelle forme, le système est encore régulier.

Le système

$$\frac{dy_1}{dx} = \left(-\frac{1}{x^2} + \alpha_{11}^0 + \alpha_{11}^1 x + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \alpha_{12}^0 + \alpha_{12}^1 x + \ldots\right) y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \alpha_{21}^0 + \alpha_{21}^1 x + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^2} + \alpha_{22}^0 + \alpha_{22}^1 x + \ldots\right) y_2,$$

qui ne rentre dans aucune des deux formes précédentes, est aussi régulier. Car, si l'on pose

$$z_1 = y_1 + y_2, \qquad z_2 = y_1 - y_2,$$

on aura, pour déterminer z_1 et z_2, un système différentiel de la forme

$$\frac{dz_1}{dx} = \left(\frac{1}{x} + \ldots\right) z_1 + \left(-\frac{2}{x^2} + \ldots\right) z_2,$$
$$\frac{dz_2}{dx} = \left(-\frac{1}{x} + \ldots\right) \frac{z_1 + z_2}{2} + \left(\frac{1}{x} + \ldots\right) \frac{z_1 - z_2}{2},$$

et, si l'on remplace z_2 par $x z_2$, on obtiendra un système de la forme (B).

On voit donc qu'il y a une grande variété de systèmes réguliers. Nous allons montrer que l'on peut tous les rattacher à ceux d'entre eux qui ont la forme (79) ou (B), et que, pour cette raison, nous appellerons des *systèmes réguliers canoniques*.

89. Soit

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{115}$$

un système d'équations différentielles linéaires et homogènes, telles que, dans le domaine de l'origine, les coefficients a soient uniformes et continus, sauf à l'origine, et que les éléments des solutions multipliés par des puissances convenables de x restent finis.

Pour le point $x = \infty$, on multiplierait les éléments des solutions par des puissances convenables de $\frac{1}{x}$.

Les solutions seront, comme nous allons le rappeler, formées de la manière suivante.

Nous avons vu au Chapitre IV (nos 80 et suivants) que l'on peut former un système fondamental de solutions du système (115), tel que ces solutions se partagent en groupes distincts dont les éléments prennent les formes

$$(116) \qquad \left\{ \begin{aligned} y_{i1} &= x^r \omega^{m-1} \Delta_{m-1} f_i(u), \\ y_{i2} &= x^r \omega^{m-2} \Delta_{m-2} f_i(u), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{i,m-k} &= x^r \omega^k \Delta_k f_i(u), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{im} &= x^r f_i(u), \end{aligned} \right.$$

où l'on a

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

(117) $$\omega = e^{2\pi r\sqrt{-1}},$$

(118) $$u = \frac{\log x}{2\pi\sqrt{-1}},$$

où $\Delta_k f(u)$ représente la différence d'ordre k de $f(u)$ par rapport à l'accroissement 1 de u, et enfin où ω est une racine de l'équation fondamentale en ω, fournissant un diviseur élémentaire de degré m.

On sait que u augmente de 1 quand x fait le tour de l'origine.

L'équation (117) ne détermine r qu'à un nombre entier quelconque près.

Les polynomes en u, $f_i(u)$ fournissent des différences $\Delta_k f_i(u)$ qui sont elles-mêmes des polynomes, et y_{i1} est la seule solution où n'entre pas forcément u, et par suite $\log x$.

Ces principes étant rappelés, formons le système différentiel caractérisé par des relations de la forme (116), mais où les solutions sont régulières. On supposera que toutes les valeurs de r sont déterminées de manière que les coefficients de u dans les polynomes $f_i(u)$ soient holomorphes, ce qui sera suffisant pour la régularité.

Or, on sait qu'on a (Chap. III, n° 63)

$$\mathrm{D}a_{ij} = \begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & \dfrac{dy_{i1}}{dx} & \cdots & y_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdot & \cdots & \cdots \\ y_{1n} & \cdots & \dfrac{dy_{in}}{dx} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix},$$

D étant le déterminant du système fondamental de solutions, et a_{ij} un coefficient quelconque des équations (115). Il résulte de la forme de a_{ij} que ce coefficient est régulier comme les éléments y_{ij} et leurs dérivées $\frac{dy_{ij}}{dx}$. On peut donc remplacer a_{ij} par $\frac{a_{ij}}{x^{\alpha_{ij}}}$ dans les équations (115), et dire que tous les systèmes réguliers ont la forme

(119) $$\frac{dy_i}{dx} = \sum_j \frac{a_{ij}}{x^{\alpha_{ij}}} y_j,$$

où les coefficients a_{ij} sont holomorphes dans le domaine de l'origine.

Étudions aussi le déterminant

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & y_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1n} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Le système fondamental de solutions de la forme (116) peut être choisi tel que, si l'on pose

$$y_{ij} = x^r P_{ij}(\log x),$$

P étant la caractéristique d'un polynome, les coefficients de ce polynome restent holomorphes dans le domaine de l'origine. Dans ces conditions on pourra poser

$$D = x^R \Pi(\log x),$$

Π désignant aussi un polynome à coefficients holomorphes. Si la variable x fait le tour de l'origine, on sait qu'on aura

$$D_1 = CD,$$

où D_1 sera la nouvelle valeur de D, et C un déterminant de constantes. Donc, si l'on pose

$$C = e^{2\pi\rho\sqrt{-1}},$$

le produit $Dx^{-\rho}$ sera uniforme dans le domaine de l'origine, et l'on pourra poser simplement

$$D = x^\rho \Psi(x),$$

où $\Psi(x)$ sera holomorphe.

Cela suffit pour que les logarithmes disparaissent de $\Pi(\log x)$. Posons, en effet,

$$\Pi(\log x) = p_0 + p_1 \log x + \ldots + p_\lambda \log^\lambda x,$$

$p_0, p_1, \ldots, p_\lambda$ représentant des fonctions holomorphes, et identifions les deux formes de D. Nous aurons

$$x^\rho \Psi(x) = x^R(p_0 + p_1 \log x + \ldots + p_\lambda \log^\lambda x). \tag{120}$$

Faisons tourner la variable x autour de l'origine, nous aurons

$$e^{2\pi\rho\sqrt{-1}} x^\rho \Psi(x) = e^{2\pi R\sqrt{-1}} x^R \left[p_0 + p_1(\log x + 2\pi\sqrt{-1}) + \ldots + p_\lambda(\log x + 2\pi\sqrt{-1})^\lambda\right],$$

ou, en faisant $e^{2\pi R\sqrt{-1}} = C_1$,

$$C x^\rho \Psi(x) = C_1 x^R [p_0 + p_1 \log x + \ldots + p_\lambda \log^\lambda x + q_0 + q_1 \log x + \ldots + q_{\lambda-1} \log^{\lambda-1} x], \tag{121}$$

en appelant $q_0, q_1, \ldots, q_{\lambda-1}$ des fonctions holomorphes.

Des équations (120) et (121), on tire

$$C(p_0 + \ldots + p_\lambda \log^\lambda x) = C_1(p_0 + \ldots + p_\lambda \log^\lambda x + q_0 + \ldots + q_{\lambda-1} \log^{\lambda-1} x).$$

C'est une équation algébrique en $\log x$, ce qui ne peut exister, car une telle équation aurait une infinité de racines distinctes. Il faut donc que ses coefficients soient identiquement nuls, ce qui donnera d'abord

$$Cp_\lambda = C_1 p_\lambda.$$

Puisque p_λ n'est pas nul, il faut que l'on ait $C = C_1$, et, par suite, ρ et R ne diffèrent que par un nombre entier.

La relation

$$q_0 + q_1 \log x + \ldots + q_{\lambda-1} \log^{\lambda-1} x = 0$$

entraînera ensuite

$$q_{\lambda-1} = 0, \qquad q_{\lambda-2} = 0, \qquad \ldots, \qquad q_1 = 0, \qquad q_0 = 0.$$

Il est facile de voir que les p et les q sont reliés par des relations telles que l'on aura aussi

$$p_\lambda = 0, \qquad p_{\lambda-1} = 0, \qquad \ldots, \qquad p_1 = 0.$$

Donc l'expression $x^\rho\,\Psi(x)$ qui se réduit à $x^{\mathrm{R}} p_0$ *ne contient pas de logarithmes.*

Le déterminant D est lié aux coefficients des équations (115) par la relation de Liouville

$$D = C e^{\int (a_{11} + \ldots + a_{nn}) dx}.$$

Il faut alors que cette expression soit aussi régulière. Pour trouver les conditions de régularité, posons

$$a_{11} + \ldots + a_{nn} = \frac{A_\alpha}{x^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}} + \ldots,$$

α étant plus grand que l'unité, et nous aurons

$$\int (a_{11} + \ldots + a_{nn})\, dx = \frac{A_\alpha}{(1-\alpha) x^{\alpha-1}} + \ldots + K \log x + \ldots + L_p x^p + \ldots.$$

D'où nous tirerons

$$D = C e^{\frac{A_\alpha}{(1-\alpha) x^{\alpha-1}}} \times x^k \times \theta(x),$$

où $\theta(x)$ est une fonction holomorphe dans le domaine de l'origine.

Il est évidemment nécessaire et suffisant que α ne dépasse pas l'unité pour que l'expression de D soit régulière. Donc, *si* D *est le déterminant d'un système fondamental de solutions d'équations régulières de la forme* (115), *l'expression $a_{11} + \ldots + a_{nn}$, multipliée par x, est holomorphe.*

90. On peut remplacer le système

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_j \frac{a_{ij}}{x^{\alpha_{ij}}} y$$

par un système de même forme en posant, pour *une* valeur de i,

$$y_i = x^k z, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dy_i}{dx} = x^k\left(\frac{dz}{dx} + \frac{k}{x}z\right). \tag{122}$$

On obtiendra les équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_j}{dx} &= \frac{a_{j1}}{x^{\alpha_{j1}}}y_1 + \ldots + \frac{a_{ji}}{x^{\alpha_{ji}-k}}z + \ldots + \frac{a_{jn}}{x^{\alpha_{jn}}}y_n, \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{a_{i1}}{x^{\alpha_{i1}+k}}y_1 + \ldots + \left(\frac{a_{ii}}{x^{\alpha_{ii}}} - \frac{k}{x}\right)z + \ldots + \frac{a_{in}}{x^{\alpha_{in}+k}}y_n \end{aligned}\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n),$$

c'est-à-dire que, si l'on considère le Tableau des exposants

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1i} & \ldots & \alpha_{1n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ \alpha_{i1} & \ldots & \alpha_{ii} & \ldots & \alpha_{in}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{ni} & \ldots & \alpha_{nn}, \end{matrix}$$

on peut, par une substitution de la forme (122), *modifier la colonne d'indice i et la ligne d'indice i, de sorte que, si tous les nombres de la colonne augmentent ou diminuent du nombre k, tous les nombres de la ligne diminuent ou augmentent du même nombre k. Seul le nombre α_{ii} est invariable s'il est positif. Dans le cas contraire, il faut tenir compte du terme introduit $-\frac{k}{x}$ dans le coefficient de z.*

91. Écrivons les équations (119) sous la forme

$$x^{1+\alpha_i}\frac{dy_i}{dx} = \sum_j a_{ij}y_j. \tag{123}$$

Si les coefficients a_{ij} sont holomorphes dans le domaine de l'origine, et si tous les nombres entiers α_i sont nuls ou négatifs, le système est régulier.

Nous n'aurons donc de difficultés à rencontrer que dans la recherche des systèmes réguliers où l'un au moins des nombres α_i est positif, en même temps que toutes les valeurs initiales correspondantes a_{ij}^0 $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ne sont pas nulles à la fois. Nous nous placerons dans cette hypothèse.

Nous supposerons d'abord que tous les nombres α_i soient positifs, et nous poserons

$$a_{ij} = a_{ij}^0 + x a_{ij}^1 + x^2 a_{ij}^2 + \ldots.$$

Nous ferons ensuite la substitution

$$y_i = x^r \varphi_i(x) = x^r(\varphi_i^0 + x\varphi_i^1 + x^2\varphi_i^2 + \ldots)$$

et nous identifierons, sachant qu'il doit exister au moins une solution de cette forme.

Nous aurons d'abord les équations

$$a_{i1}^0 \varphi_1^0 + \ldots + a_{in}^0 \varphi_n^0 = 0,$$

qui devront être compatibles, et nous pourrons supposer au moins l'un des φ, soit φ_1^0, différent de zéro. Alors, si cela est nécessaire, nous remplacerons, dans les équations différentielles (123), l'inconnue y_i par $y_i + \lambda_i y_1$ ($i = 2, 3, \ldots, n$), de sorte que la valeur initiale $\varphi_i^0 + \lambda_i \varphi_1^0$ ne soit nulle pour aucune valeur de i, et nous aurons

$$x^{1+\alpha_1} \frac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + a_{12}(y_2 + \lambda_2 y_1) + \ldots + a_{1n}(y_n + \lambda_n y_1),$$

$$x^{1+\alpha_i} \left(\frac{dy_i}{dx} + \lambda_i \frac{dy_1}{dx} \right) = a_{i1} y_1 + a_{i2}(y_2 + \lambda_2 y_1) + \ldots + a_{in}(y_n + \lambda_n y_1).$$

Il est évident que le nouveau système différentiel pourra prendre la même forme générale que le système (123), et sera régulier comme lui. Mais, de plus, si l'on fait maintenant la substitution

$$y_i = x^r \varphi_i(x),$$

on devra avoir $\varphi_i^0 \neq 0$ pour toutes les valeurs de i.

92. Nous supposerons que le système (123) est préparé de manière à satisfaire à cette hypothèse.

Parmi les équations (123) distinguons celles qui correspondent à la plus grande valeur α des nombres entiers α_i, et plaçons-les les premières. Le système (123) pourra s'écrire

$$(124) \qquad x^{1+\alpha} \frac{dy_i}{dx} = \sum_j b_{ij} y_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et, pour les valeurs $1, 2, \ldots, h$ de l'indice i toutes les quantités b_{ij}^0 ne seront pas nulles pour toutes les valeurs de j, tandis que l'on aura $b_{ij}^0 = 0$ pour $i = h+1, h+2, \ldots, n$.

Dans ces conditions, on peut démontrer que le déterminant

$$(125) \qquad \begin{vmatrix} b_{11}^0 & \ldots & b_{1h}^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{h1}^0 & \ldots & b_{hh}^0 \end{vmatrix}$$

est nul. En effet, dans le système (124), considérons la solution

$$u_i = x^\rho \omega^{m-1} \Delta_{m-1} f_i(u) = x^\rho \varphi_i(x) = x^\rho(\varphi_i^0 + x\varphi_i^1 + x^2 \varphi_i^2 + \ldots)$$

où nous pouvons supposer $\varphi_i^0 \neq 0$, et posons

$$y_i = u_i q_i.$$

Nous aurons

$$x^{1+\alpha} u_i \frac{dq_i}{dx} = b_{i1} u_1 q_1 + \ldots + \left(b_{ii} u_i - x^{1+\alpha} \frac{du_i}{dx}\right) q_i + \ldots + b_{in} u_n q_n.$$

Mais

$$\frac{1}{u_i} \frac{du_i}{dx} = \frac{\rho}{x} + \frac{1}{\varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dx}.$$

Nous aurons donc

$$x^{1+\alpha} \frac{dq_i}{dx} = b_{i1} \frac{\varphi_1}{\varphi_i} q_1 + \ldots + \left[b_{ii} - \left(\frac{\rho}{x} + \frac{1}{\varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dx}\right) x^{1+\alpha}\right] q_i + \ldots + b_{in} \frac{\varphi_n}{\varphi_i} q_n.$$

Comme ces équations admettent la solution $q_i = 1$, nous aurons identiquement

$$b_{i1} \frac{\varphi_1}{\varphi_i} + \ldots + b_{in} \frac{\varphi_n}{\varphi_i} = 0. \tag{126}$$

Cela posé, remplaçons q_i par $x^r(q_i^0 + x q_i^1 + \ldots)$. Nous aurons

$$\begin{aligned} x^{1+\alpha} &\left[\frac{r}{x}(q_i^0 + x q_i^1 + \ldots) + q_i^1 + 2x q_i^2 + \ldots\right] \\ &= (b_{i1}^0 + x b_{i1}^1 + \ldots) \frac{\varphi_1^0 + \ldots}{\varphi_i^0 + \ldots} (q_1^0 + x q_1^1 + \ldots) + \ldots . \end{aligned} \tag{127}$$

En identifiant à zéro les coefficients des diverses puissances de x, nous aurons d'abord la condition de possibilité

$$\begin{vmatrix} b_{11}^0 & b_{12}^0 \dfrac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} & \ldots & b_{1n}^0 \dfrac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\ b_{21}^0 \dfrac{\varphi_1^0}{\varphi_2^0} & b_{22}^0 & \ldots & b_{2n}^0 \dfrac{\varphi_n^0}{\varphi_2^0} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ b_{n1}^0 \dfrac{\varphi_1^0}{\varphi_n^0} & b_{n2}^0 \dfrac{\varphi_2^0}{\varphi_n^0} & \ldots & b_{nn}^0 \end{vmatrix} = 0. \tag{128}$$

Au moyen du premier membre de cette condition formons l'équation en s

$$\begin{vmatrix} b_{11}^0 - s & \ldots & b_{1n}^0 \dfrac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ b_{n1}^0 \dfrac{\varphi_1^0}{\varphi_n^0} & \ldots & b_{nn}^0 - s \end{vmatrix} = 0. \tag{129}$$

Elle pourra se ramener à l'équation

$$(130)\qquad \begin{vmatrix} b_{11}^0 - s & b_{12}^0 & \cdots & b_{1n}^0 \\ b_{21}^0 & b_{22}^0 - s & \cdots & b_{2n}^0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}^0 & b_{n2}^0 & \cdots & b_{nn}^0 - s \end{vmatrix} = 0.$$

Mais, à cause des conditions (126), on peut écrire

$$x^{1+\alpha}\frac{dq_i}{dx} = b_{i2}\frac{\varphi_2}{\varphi_i}(q_2 - q_1) + \ldots + b_{in}\frac{\varphi_n}{\varphi_i}(q_n - q_1) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

de sorte que, si l'on pose

$$z_h = q_h - q_1 \qquad (h = 2, 3, \ldots, n),$$

on pourra former un nouveau système différentiel régulier de la forme

$$x^{1+\alpha}\frac{dz_h}{dx} = \left(b_{h2}\frac{\varphi_2}{\varphi_h} - b_{12}\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)z_2 + \ldots,$$

et, en posant

$$z_h = z_h^0 + x z_h^1 + \ldots,$$

on pourra encore identifier à zéro les coefficients des diverses puissances de x, et l'on aura la condition

$$\begin{vmatrix} b_{h2}^0\dfrac{\varphi_2^0}{\varphi_h^0} - b_{12}^0\dfrac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0}\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} = 0,$$

qui fournira l'équation en s

$$(131)\qquad \begin{vmatrix} b_{22}^0\dfrac{\varphi_2^0}{\varphi_2^0} - b_{12}^0\dfrac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} - s & \cdots & b_{2n}^0\dfrac{\varphi_n^0}{\varphi_2^0} - b_{1n}^0\dfrac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ b_{n2}^0\dfrac{\varphi_2^0}{\varphi_n^0} - b_{12}^0\dfrac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} & \cdots & b_{nn}^0\dfrac{\varphi_n^0}{\varphi_n^0} - b_{1n}^0\dfrac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} - s \end{vmatrix} = 0.$$

Introduisons la racine zéro supplémentaire, et écrivons cette équation sous la forme

$$(132)\qquad \begin{vmatrix} -s & b_{12}^0\dfrac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} & \cdots & b_{1n}^0\dfrac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\ 0 & b_{22}^0 - b_{12}^0\dfrac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} - s & \cdots & b_{2n}^0\dfrac{\varphi_n^0}{\varphi_2^0} - b_{1n}^0\dfrac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\ \cdot & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & \cdots\cdots & \cdots & b_{nn}^0 - b_{1n}^0\dfrac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} - s \end{vmatrix} = 0.$$

En ajoutant la première ligne à chacune des suivantes, nous aurons

(133)
$$\begin{vmatrix} -s & b_{12}^0 \dfrac{\varphi_2^0}{\varphi_1^0} & \dots & b_{1n}^0 \dfrac{\varphi_n^0}{\varphi_1^0} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ -s & b_{n2}^0 \dfrac{\varphi_2^0}{\varphi_n^0} & \dots & b_{nn}^0 - s \end{vmatrix} = 0.$$

Mais à cause des conditions (126) on a, par exemple,

$$-\left[b_{i2}^0 \frac{\varphi_2^0}{\varphi_i^0} + \ldots + (b_{ii}^0 - s) + \ldots + b_{in}^0 \frac{\varphi_n^0}{\varphi_i^0}\right) = b_{i1}^0 \frac{\varphi_1^0}{\varphi_i^0} + s.$$

Donc, si l'on retranche, dans le déterminant (133), la somme des éléments des dernières colonnes des éléments correspondants de la première, on aura l'équation (129) et, par suite, l'équation (130). Appelons $\Delta(s)$ et $\Delta_1(s)$ les premiers membres des équations (130) et (133), nous aurons, au signe près, la relation

(134)
$$\Delta(s) = s\Delta_1(s).$$

Voici les conséquences de la relation (134).

Considérons d'abord une équation régulière à une inconnue

$$x^{1+\alpha}\frac{dy}{dx} = ay \qquad (\alpha > 0);$$

nous aurons

$$\Delta(s) = -s.$$

Donc $\Delta(s) = 0$ admet la racine zéro.

Passons à un système régulier de deux équations différentielles. Nous aurons, à cause du cas précédent,

$$\Delta_1(s) = 0$$

et, à cause de la relation (134), l'équation

$$\Delta(s) = 0$$

devra admettre deux fois la racine zéro.

De proche en proche, on démontrera que l'équation $\Delta(s) = 0$ a n racines nulles, si le système (124) est régulier. Mais on a ici, en tenant compte des b_{ij}^0 qui sont nuls,

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} b_{11}^0 - s & \dots & b_{1h}^0 & b_{1,h+1}^0 & \dots & b_{1n}^0 \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ b_{h1}^0 & \dots & b_{hh}^0 - s & b_{h,h+1}^0 & \dots & b_{hn}^0 \\ 0 & \dots & 0 & -s & \dots & 0 \\ . & \dots & . & .. & \dots & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -s \end{vmatrix} = 0.$$

On en conclut que le déterminant

$$\begin{vmatrix} b_{11}^0 & \ldots & b_{1h}^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{h1}^0 & \ldots & b_{hh}^0 \end{vmatrix}$$

est nul.

93. Cette condition subsiste après qu'on a fait une substitution de la forme

$$y_1 = z + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n$$

dans les équations (124).

En effet, on a

$$x^{1+\alpha}\frac{dz}{dx} = (b_{11} - m_2 b_{21} - \ldots - m_n b_{n1})z + \sum_i [b_{1i} - \ldots - m_n b_{ni} + m_i(b_{11} - \ldots - m_n b_{n1})] y_i,$$

$$x^{1+\alpha}\frac{dy_i}{dx} = b_{i1} z + (b_{i2} + m_2 b_{i1}) y_2 + \ldots + (b_{in} + m_n b_{i1}) y_n.$$

Le déterminant qu'il faut étudier se réduit, à cause des conditions

$$b_{ij}^0 = 0 \qquad (i = h+1, \ldots, n),$$

à

$$\begin{vmatrix} b_{11}^0 - \ldots - m_h b_{h1}^0 & b_{12}^0 - \ldots - m_h b_{h2}^0 + m_2(b_{11}^0 - \ldots - m_h b_{h1}^0) & \ldots \\ b_{21}^0 & b_{22}^0 + m_2 b_{21}^0 & \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant se ramène immédiatement au déterminant

$$\begin{vmatrix} b_{11}^0 & \ldots & b_{1h}^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{h1}^0 & \ldots & b_{hh}^0 \end{vmatrix}$$

et, par conséquent, ces deux déterminants sont nuls ensemble.

On verrait de même qu'une substitution quelconque

$$y_i = z_i + m_1 y_1 + \ldots + m_{i-1} y_{i-1} + m_{i+1} y_{i+1} + \ldots + m_n y_n,$$

pour une valeur donnée de i, même pour $i = h+1, \ldots, n$, ne change rien à la conclusion précédente.

En conséquence, il n'est pas nécessaire que l'on ait $\varphi_i^0 \neq 0$ pour que le déterminant $| b_{11}^0 \ldots b_{hh}^0 |$ soit nul ; car, pour arriver au cas où φ_i^0 n'est nul pour aucune valeur de i, on n'a fait que des substitutions de la forme de celles que l'on vient d'étudier.

94. Revenons maintenant au système différentiel (123) mis sous la forme

$$x^{1+\alpha}\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1+\ldots+a_{in}y_n, \tag{135}$$

et supposé régulier. Admettons d'abord que, pour aucune valeur de i, on n'ait tous les a_{ij}^0 nuls quel que soit j, et posons

$$y_i = x^r\varphi_i = x^r(\varphi_i^0+x\varphi_i^1+x^2\varphi_i^2+\ldots). \tag{136}$$

Nous aurons les équations

$$a_{i1}^0\varphi_1^0+\ldots+a_{in}^0\varphi_n^0 = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n); \tag{137}$$

et, puisque le système (123) admet au moins une solution de la forme (136), le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}^0 & \ldots & a_{1n}^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}^0 & \ldots & a_{nn}^0 \end{vmatrix} \tag{138}$$

doit être nul.

Posons alors

$$z = \lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\ldots+\lambda_ny_n, \tag{139}$$

et déterminons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ par les conditions

$$a_{1j}^0\lambda_1+\ldots+a_{nj}^0\lambda_n = 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, n); \tag{140}$$

nous aurons

$$\begin{aligned} x^{1+\alpha}\frac{dz}{dx} &= x^{1+\alpha}\left(\lambda_1\frac{dy_1}{dx}+\ldots+\lambda_n\frac{dy_n}{dx}\right) \\ &= \lambda_1(a_{11}y_1+\ldots+a_{1n}y_n)+\ldots+\lambda_n(a_{n1}y_1+\ldots+a_{nn}y_n) \\ &= (\lambda_1a_{11}+\ldots+\lambda_na_{n1})y_1+\ldots+(\lambda_1a_{1n}+\ldots+\lambda_na_{nn})y_n. \end{aligned}$$

A cause des conditions (140), cette équation pourra s'écrire

$$x^{\alpha}\frac{dz}{dx} = a'_1y_1+\ldots+a'_ny_n,$$

où $a'_1, \ldots, a'_n$ seront des fonctions holomorphes comme les fonctions a_{ij}.

Les équations (140) étant compatibles donnent au moins une valeur, λ_n par exemple, qui n'est pas nulle, et, de l'équation (139), on tire

$$y_n = \frac{1}{\lambda_n}z-\frac{\lambda_1}{\lambda_n}y_1-\ldots-\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}y_{n-1},$$

de sorte qu'on peut éliminer y_n et remplacer le système (135) par le système

$$\begin{aligned}
x^{1+\alpha}\frac{dy_1}{dx} &= b_{11}y_1 + \ldots + b_{1,n-1}y_{n-1} + b_{1n}z, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
x^{1+\alpha}\frac{dy_{n-1}}{dx} &= b_{n-1,1}y_1 + \ldots + b_{n-1,n-1}y_{n-1} + b_{n-1,n}z, \\
x^{\alpha}\frac{dz}{dx} &= b_{n1}y_1 + \ldots + b_{n-1,n}y_{n-1} + b_{nn}z,
\end{aligned}$$

et, dans ce système, le déterminant

$$(141) \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_{11}^0 & \ldots & b_{1,n-1}^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n-1,1}^0 & \ldots & b_{n-1,n-1}^0 \end{vmatrix}$$

devra être nul en vertu du théorème du n° 92.

Posons maintenant

$$y_i = z_i + \mu_i z \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
x^{1+\alpha}\frac{dz_i}{dx} &= x^{1+\alpha}\frac{dy_i}{dx} - \mu_i x^{1+\alpha}\frac{dz}{dx} \\
&= (b_{i1}y_1 + \ldots + b_{in}z) - \mu_i x(b_{n1}y_1 + \ldots + b_{nn}z) \\
&= b_{i1}(z_1 + \mu_1 z) + \ldots + b_{i,n-1}(z_{n-1} + \mu_{n-1}z) + b_{in}z \\
&\quad - \mu_i x[b_{n1}(z_1 + \mu_1 z) + \ldots + b_{n,n-1}(z_{n-1} + \mu_{n-1}z) + b_{nn}z].
\end{aligned}$$

Le coefficient de z sera

$$\mu_1 b_{i1} + \ldots + \mu_{n-1}b_{i,n-1} + b_{in} - \mu_i x(\mu_1 b_{n1} + \ldots + \mu_{n-1}b_{n,n-1} + b_{nn}),$$

et, si l'on veut qu'il soit nul pour $x = 0$, il faudra poser

$$(142) \qquad \mu_1 b_{i1}^0 + \ldots + \mu_{n-1}b_{i,n-1}^0 + b_{in}^0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Mais le déterminant de ces équations étant nul, elles pourront n'être pas compatibles.

Supposons ces équations non compatibles, et remarquons que l'on doit avoir

$$\begin{aligned}
b_{11}^0\varphi_1^0 + \ldots + b_{1n}^0\varphi_n^0 &= 0, \\
&\ldots\ldots\ldots, \\
b_{n-1,1}^0\varphi_1^0 + \ldots + b_{n-1,n}^0\varphi_n^0 &= 0.
\end{aligned}$$

Il faudra en conclure que l'on a $\varphi_n^0 = 0$, et, dans cette hypothèse, on pourra poser

$$z = xz'.$$

Les équations (142) se réduiront aux équations

$$\mu_1 b_{i1}^0 + \ldots + \mu_{n-1} b_{i,n-1}^0 = 0.$$

Mais l'équation en z deviendra

$$x^{1+\alpha} \frac{dz}{dx} = b_{n1} z_1 + \ldots + b_{n,n-1} z_{n-1} + b'_{nn} z,$$

et l'on devra avoir aussi

$$\mu_1 b_{n1}^0 + \ldots + \mu_{n-1} b_{n,n-1}^0 = 0,$$

et il y aura compatibilité, car on doit pouvoir poser

$$b_{i1}^0 \varphi_1^0 + \ldots + b_{i,n-1}^0 \varphi_{n-1}^0 + b_{in}^0 \varphi_n^0 = 0,$$

et de plus, on a identiquement

$$b_{in}^0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Alors, si c'est nécessaire, on devra pouvoir calculer des nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1}$ tels que l'on ait

$$\begin{aligned} \nu_1 b_{11}^0 + \ldots + \nu_{n-1} b_{n-1,1}^0 + b_{n1}^0 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ \nu_1 b_{1,n-1}^0 + \ldots + \nu_{n-1} b_{n-1,n-1}^0 + b_{n,n-1}^0 &= 0, \end{aligned}$$

et alors l'expression

$$x^{1+\alpha}(\nu_1 z_1 + \ldots + \nu_{n-1} z_{n-1} + z')$$

sera égale à

$$(\nu_1 b_{11} + \ldots + \nu_{n-1} b_{n-1,1} + b_{n1}) z_1 + \ldots + (\nu_1 b_{1n} + \ldots + b_{nn}) z'$$

et sera divisible par x. Nous prendrons alors

$$\nu_1 z_1 + \ldots + \nu_{n-1} z_{n-1} + z'$$

pour inconnue à la place de z'. Soit, par exemple,

$$u = \nu_1 z_1 + \ldots + \nu_{n-1} z_{n-1} + z'.$$

Les équations différentielles prendront la forme générale

$$\left.\begin{aligned} x^{1+\alpha} \frac{dy_i}{dx} &= a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} u, \\ x^{\alpha} \frac{du}{dx} &= a_{n1} y_1 + \ldots + a_{nn} u, \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

et l'on aura maintenant

$$a_{in}^0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

De plus, le déterminant

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11}^0 & \ldots & a_{1,n-1}^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n-1,1}^0 & \ldots & a_{n-1,n-1}^0 \end{vmatrix}$$

sera nul.

Partons maintenant des dernières équations différentielles obtenues, et employons de nouveau, avec des significations analogues, mais non identiques, les notations qui nous ont déjà servi.

Posons

$$(143) \qquad z = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_{n-1} y_{n-1},$$

et déterminons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ par les conditions

$$(144) \qquad a_{1j}^0 \lambda_1 + \ldots + a_{n-1,j}^0 \lambda_{n-1} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1);$$

nous aurons, comme précédemment,

$$x^\alpha \frac{dz}{dx} = a'_1 y_1 + \ldots + a'_{n-1} y_{n-1} + a'_n u.$$

Les équations (144) étant compatibles donnent au moins une valeur, λ_{n-1} par exemple, qui n'est pas nulle, et l'on peut poser

$$y_{n-1} = \frac{1}{\lambda_{n-1}} z - \frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}} y_1 - \ldots - \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-1}} y_{n-1},$$

de sorte qu'on peut éliminer y_{n-1} et former le nouveau système différentiel

$$(145) \quad \begin{cases} x^{1+\alpha} \dfrac{dy_1}{dx} = b_{11} y_1 + \ldots + b_{1,n-2} y_{n-2} + b_{1,n-1} z + b_{1n} u, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x^{1+\alpha} \dfrac{dy_{n-2}}{dx} = b_{n-2,1} y_1 + \ldots + b_{n-2,n-2} y_{n-2} + b_{n-2,n-1} z + b_{n-2,n} u, \\ x^\alpha \dfrac{dz}{dx} = b_{n-1,1} y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_{n-1,n-1} z + b_{n-1,n} u, \\ x^\alpha \dfrac{du}{dx} = b_{n1} y_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_{n,n-1} z + b_{nn} u. \end{cases}$$

et, dans ce système, le déterminant

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11}^0 & \ldots & b_{1,n-2}^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ b_{n-2,1}^0 & \ldots & b_{n-2,n-2}^0 \end{vmatrix}$$

devra être nul.

Posons maintenant

$$y_i = z_i + \mu_i z \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2);$$

nous aurons

$$x^{1+\alpha}\frac{dz_i}{dx} = A_{i1} z_1 + \ldots + A_{i,n-2} z_{n-2} + A_{i,n-1} z + A_{in} u.$$

Le coefficient de z sera, pour $x = 0$,

$$\mu_1 b_{i1}^0 + \ldots + \mu_{n-2} b_{i,n-2}^0 + b_{i,n-1}^0,$$

et, si l'on veut qu'il soit nul, il faudra poser

$$(146) \qquad \mu_1 b_{i1}^0 + \ldots\ b_{i,n-1}^0 = 0 \qquad (i = 1.2, \ldots, n-2).$$

Ces équations peuvent ne pas être compatibles. Mais, comme on doit avoir

$$b_{i1}^0 \varphi_1^0 + \ldots + b_{i,n-1}^0 \varphi_{n-1}^0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2),$$

on devra poser $\varphi_{n-1}^0 = 0$, ce qui conduira à remplacer z par xz'. Les équations (146) se réduiront aux équations compatibles

$$\mu_1 b_{i1}^0 + \ldots + \mu_{n-2} b_{i,n-2}^0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Alors, si c'est nécessaire, on devra pouvoir calculer des nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-2}$ tels que l'on ait

$$\nu_1 b_{1j}^0 + \ldots + \nu_{n-2} b_{n-2,j}^0 + b_{n-1,j}^0 = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-2),$$

et alors l'expression

$$x^{1+\alpha}(\nu_1 z_1 + \ldots + \nu_{n-2} z_{n-2} + z')$$

sera égale à

$$(\nu_1 b_{11} + \ldots + b_{n1}) z_1 + \ldots + (\nu_1 b_{1,n-1} + \ldots + b_{n,n-1}) z'$$

et sera divisible par x. On prendra alors

$$\nu_1 z_1 + \ldots + \nu_{n-2} z_{n-2} + z'$$

pour inconnue à la place de z', et finalement les équations différentielles prendront la forme

$$\begin{aligned}
x^{1+\alpha}\frac{dy_i}{dx} &= a_{i1}\ y_1 + \ldots + a_{i,n-1}\ u_1 + a_{in}\ u_2,\\
x^{\alpha}\ \frac{du_1}{dx} &= a_{n-1,1} y_1 + \ldots + a_{n-1,n-1} u_1 + a_{n-1,n} u_2,\\
x^{\alpha}\ \frac{du_2}{dx} &= a_{n1}\ y_1 + \ldots + a_{n,n-1}\ u_1 + a_{nn}\ u_2,
\end{aligned}$$

et l'on aura maintenant

$$a_{i,n-1}^0 = 0, \qquad a_{in}^0 = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-2).$$

De plus, le déterminant

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11}^0 & \ldots & a_{1,n-2}^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n-2,1}^0 & \ldots & a_{n-2,n-2}^0 \end{vmatrix}$$

sera nul.

Il est évident que le procédé pourra s'appliquer indéfiniment, et, par suite, qu'on pourra ramener le système proposé à la forme

$$x^\alpha \frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n.$$

En diminuant α d'autant d'unités qu'il sera nécessaire, ce qu'on sait maintenant réaliser pratiquement, on sera finalement ramené à un système canonique.

95. Étudions l'exemple numérique suivant

$$\frac{dy_1}{dx} = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} + \ldots\right) y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = \left(-1 + x + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \ldots\right) y_2.$$

On trouve d'abord qu'il faut remplacer y_2 par xy_2, ce qui donne

$$\frac{dy_1}{dx} = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \ldots\right) y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = \left(-\frac{1}{x} + 1 + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \ldots\right) y_2.$$

La même substitution sera encore nécessaire, et l'on aura

$$\frac{dy_1}{dx} = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \ldots\right) y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \ldots\right) y_1 + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \ldots\right) y_2.$$

On posera maintenant

$$z = y_1 - y_2, \qquad \text{d'où} \qquad y_1 = z + y_2,$$

et l'on aura

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{dy_2}{dx} = \left(-\frac{3}{x} - \frac{1}{x} + \ldots\right)(z + y_2) + \left(\frac{4}{x} + \ldots\right) y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \ldots\right)(z + y_2) + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \ldots\right) y_2$$

ou encore

$$\frac{dy_2}{dx} = \left(-\frac{2}{x} + \ldots\right) y_2 + \left(-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} + \ldots\right) z,$$

$$\frac{dz}{dx} = \left(\ldots\ldots\ldots\right) y_2 + \left(-\frac{4}{x} + \ldots\right) z.$$

Enfin, remplaçons z par zx, nous aurons

$$\frac{dy_2}{dx} = \left(-\frac{2}{x} + \ldots\right) y_2 + \left(-\frac{1}{x} + 1 + \ldots\right) z,$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\left(\ldots\ldots\ldots\right) y_2 - \left(\frac{5}{x} + \ldots\right) z.$$

C'est un système canonique, ce qui prouve que le système proposé primitivement est régulier.

Du reste, on peut le vérifier autrement, en remarquant que le système qu'on vient d'étudier dérive du système numérique du n° 88 par le moyen des substitutions

$$y_1 = x^3 z_1, \qquad y_2 = x z_2.$$

96. Le cas le plus important des systèmes réguliers est celui qui provient de l'équation d'ordre n

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{p_1}{x^{\varpi_1}} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{p_n}{x^{\varpi_n}} y, \tag{147}$$

supposée régulière. On peut le traiter facilement d'une manière directe.

En effet, remplaçons l'équation (147) par le système équivalent

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = \frac{p_2}{x^{\varpi_1}} y_1 + \frac{p_2}{x^{\varpi_2}} y_2 + \ldots + \frac{p_n}{x^{\varpi_n}} y_n, \\ &\frac{dy_j}{dx} = y_{j-1} \qquad (j = 2, 3, \ldots, n), \end{aligned} \right. \tag{148}$$

les p étant des fonctions holomorphes non nulles pour $x = 0$.

Faisons le changement de variables suivant

$$\begin{aligned} y_n &= x^\rho \varphi_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{n-i} &= x^{\rho-i} \varphi_{n-i}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_1 &= x^{\rho-(n-1)} \varphi_1, \end{aligned}$$

de manière que les dernières équations (148) prennent la forme canonique. Par exemple, l'équation

$$y_{n-i-1} = \frac{dy_{n-i}}{dx}$$

donnera

$$\varphi_{n-i-1} = (\rho - i)\,\varphi_{n-i} + x\,\frac{d\varphi_{n-i}}{dx}.$$

On remarquera en passant que

$$\varphi^0_{n-i-1} = (\rho - i)\,\varphi^0_{n-i},$$

et, par suite, que

$$\varphi^0_{n-i-1} = (\rho - i)(\rho - i + 1)\dots(\rho - 1)\rho\,\varphi^0_n,$$

et tous les φ^0_i seront différents de zéro, si ρ est quelconque.

La première équation (148) deviendra

$$x^{\rho-(n-1)}\frac{d\varphi_1}{dx} + (\rho - n + 1)x^{\rho-n}\varphi_1 = \frac{p_1}{x^{\varpi_1-\rho+n-1}}\varphi_1 + \dots + \frac{p_n}{x^{\varpi_n-\rho}}\varphi_n,$$

ou encore

$$x\frac{d\varphi_1}{dx} + (\rho - n + 1)\,\varphi_1 = \frac{p_1}{x^{\varpi_1-1}}\varphi_1 + \dots + \frac{p_n}{x^{\varpi_n-n}}\varphi_n.$$

Les équations précédentes forment donc un système qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} x^h\frac{d\varphi_1}{dx} &= \mathrm{P}_1\varphi_1 + \mathrm{P}_2\varphi_2 + \dots + \mathrm{P}_n\varphi_n,\\ x\frac{d\varphi_{n-i}}{dx} &= \varphi_{n-i-1} - (\rho - i)\,\varphi_{n-i}, \end{aligned}$$

et où toutes les quantités P ne seront pas nulles à la fois pour $x = 0$.

Le système sera régulier si l'on a

$$\varpi_1 \leqq 1, \qquad \varpi_2 \leqq 2, \qquad \dots, \qquad \varpi_n \leqq n,$$

car alors on aura $h \leqq 1$.

Je dis que ces conditions suffisantes sont nécessaires. Pour le démontrer, admettons la proposition pour une équation de la forme (147) et d'ordre $(n-1)$ et démontrons qu'elle est vraie pour une équation d'ordre n. Comme elle est vraie pour $n = 1$, elle sera ainsi démontrée en général.

Au n° **24** du Chapitre I nous avons montré que, pour ramener un système de la forme (148) à un système non seulement linéaire, mais encore de la même forme, on devait poser

$$y_n = y = u\int t\,dx;$$

u étant une intégrale donnée de l'équation différentielle (147). Dans les conditions actuelles, nous supposerons u_n régulier et de la forme $x^r\varphi_n(x)$ et, en nous reportant aux notations de ce n° **24**, nous ramènerons le système (148) au système également régulier

$$\frac{dt_1}{dx} = P_1 t_1 + \ldots + P_{n-1} t_{n-1},$$

$$\frac{dt_k}{dx} = t_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

où l'on a

$$P_1 = \frac{1}{u}\left[-\frac{n}{1}\frac{du}{dx} + \frac{p_1 u}{x^{\varpi_1}}\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$P_{n-1} = \frac{1}{u}\left[-\frac{n(n-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \frac{p_1}{x^{\varpi_1}}\frac{n(n-1)\ldots 3.2}{1.2\ldots(n-2)}\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}} + \ldots + \frac{p_{n-1}u}{x^{\varpi_{n-1}}}\right].$$

Nous supposons que $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ peuvent se mettre sous les formes $\frac{\Pi_1}{x}, \frac{\Pi_2}{x^2}, \ldots, \frac{\Pi_{n-1}}{x^{n-1}}$, où $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-1}$ sont des fonctions holomorphes.

On remarquera alors que l'on a

$$u = x^r \varphi(x),$$

$$\frac{du}{dx} = x^r \frac{d\varphi}{dx} + r x^{r-1}\varphi,$$

et, d'une manière générale,

$$\frac{d^k u}{dx^k} = x^r \frac{d^k\varphi}{dx^k} + \alpha_1 x^{r-1}\frac{d^{k-1}\varphi}{dx^{k-1}} + \ldots + \alpha_k x^{r-k}\varphi,$$

ce que l'on peut écrire

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=k} \alpha_\lambda x^{r-\lambda}\frac{d^{k-\lambda}\varphi}{dx^{k-\lambda}}, \qquad \left(\frac{d^0\varphi}{dx^0} = \varphi\right),$$

et, par suite,

$$\frac{1}{u}\frac{d^k u}{dx^k} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=k} \alpha_\lambda x^{-\lambda}\frac{1}{\varphi}\frac{d^{k-\lambda}\varphi}{dx^{k-\lambda}}.$$

Chacun de ces produits est donc infini d'ordre infini d'ordre k au plus.

En conséquence, si des expressions de $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ on tire $\frac{p_1}{x^{\varpi_1}}, \frac{p_2}{x^{\varpi_2}}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{x^{\varpi_{n-1}}}$, on obtiendra des expressions infinies d'ordres finis $1, 2, \ldots, n-1$ respectivement comme $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ eux-mêmes. On devra donc avoir $\varpi_1 = 1$, $\varpi_2 = 2, \ldots, \varpi_{n-1} = n-1$.

Enfin, de la première équation (148) on tirera

$$\frac{p_n}{x^{\varpi_n}} = -\frac{1}{u}\left(\frac{d^n u}{dx^n} + \frac{p_1}{x}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{p_{n-1}}{x^{n-1}}\frac{du}{dx}\right),$$

et, en développant le calcul, on verra que l'on a aussi $\varpi_n = n$ (¹).

On retrouve ainsi le beau théorème de M. Fuchs :

Les équations différentielles linéaires et homogènes, d'ordre n et à coefficients uniformes, dont les intégrales n'ont qu'un nombre fini de points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_\rho, \infty$, et restent régulières dans les domaines de ces points, sont de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{P_{\rho-1}(x)}{\Psi(x)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{P_{2(\rho-1)}(x)}{[\Psi(x)]^2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + \frac{P_{n(\rho-1)}(x)}{[\Psi(x)]^n}y,$$

où

$$\Psi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\rho),$$

et où les $P(x)$ désignent des polynomes en x de degrés marqués par les indices ou de degrés moindres.

Cette belle conclusion de l'étude des systèmes réguliers montre que le seul cas général possédant un caractère de simplicité est celui du système (148) qui provient de l'équation (147) différentielle d'ordre n.

97. Écrivons une équation régulière d'ordre n sous la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{p_1}{x}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{p_n}{x^n}y = 0.$$

Les exposants r des solutions seront déterminés par l'équation

$$D(r) = (r-n+1)(r-n+2)\ldots r + p_1^0(r-n+2)\ldots r + \ldots + p_n^0 = 0,$$

qui est algébrique et de degré n en r.

Cette équation s'appelle, soit l'*équation fondamentale déterminante*, soit l'*équation caractéristique* de l'équation différentielle.

Il est utile de connaître les principales propriétés de cette équation algébrique.

D'abord, pour former l'équation $D(r) = 0$, on pourra procéder de la manière suivante. On posera $y = x^r$ dans le premier membre de l'équation différentielle, ce qui donnera l'expression

$$x^{r-n}[r(r-1)\ldots(r-n+1) + p_1 r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots + p_n].$$

(¹) *Voir* la Thèse de M. Floquet.

On divisera ce résultat par x^r, et l'on égalera à zéro le coefficient de la plus basse puissance de x.

Voici d'autres propriétés :

Si p_n est identiquement nul, $D(r)$ est divisible par r. Faisons cette division et changeons ensuite r en $r+1$, nous aurons l'équation caractéristique de l'équation différentielle d'ordre $n-1$, obtenue en prenant pour inconnue $\frac{dy}{dx}$. Il n'y a qu'à vérifier l'exactitude du calcul proposé, ce qu'il est facile de faire.

Si l'on pose $y = x^{r_0}z$ dans l'équation différentielle, l'équation caractéristique de l'équation en z aura pour racines celles de l'équation caractéristique primitive, diminuées de r_0. Elle se déduit donc de l'équation $D(r) = 0$ en changeant r en $r + r_0$.

Si l'on pose $y = \Psi(x)z$, $\Psi(x)$ étant une fonction holomorphe différente de zéro pour $x = 0$, l'équation caractéristique de l'équation en z est la même que celle de l'équation en y. En effet, on voit sans peine que l'équation en z étant de la forme

$$\frac{d^n z}{dx^n} + (p_1 + P_1)\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + (p_2 + P_2)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + (p_n + P_n)z = 0,$$

son équation caractéristique a son premier membre décomposable en deux parties, la première provenant de l'expression

$$x^{r-n}[r(r-1)\ldots(r-n+1) + p_1 r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots + p_n],$$

et la seconde de l'expression

$$x^{r-n}[r(r-1)\ldots(r-n+1) + P_1 r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots + P_n].$$

Or, le plus haut exposant de x dans les dénominateurs de la première expression étant supérieur au plus grand exposant de x dans la seconde, si l'on multiplie par x^{g-r}, g étant le plus grand de tous les exposants, et si l'on fait ensuite $x = 0$, la seconde expression donnera un résultat nul, et l'on obtiendra, par conséquent, le même résultat qu'en opérant sur la première expression seule, c'est-à-dire sur celle qui correspond à l'équation caractéristique de l'équation en y.

Ces diverses propriétés, rapprochées des théories que l'on a vues dans les Chapitres précédents, servent de base à la théorie des équations différentielles linéaires et homogènes d'ordre n dans la plupart des Mémoires (1) publiés sur cette question. Pour plus de détails, nous renverrons le lecteur à ces Travaux.

---

(1) FUCHS, *Journal de Crelle*, t. 66, p. 121 et Tomes suivants. — TANNERY, *Thèse de Doctorat*. — THOMÉ et FRŒBENIUS, *Journal de Crelle*, t. 66 et suivants.

Ajoutons enfin une remarque. Il peut se présenter une circonstance curieuse dans le cas des systèmes réguliers. Si, en un point quelconque $x=0$, toutes les racines de l'équation caractéristique $F(r)=0$ sont entières, positives et distinctes, elles ne formeront qu'un seul groupe. Si, en outre, les logarithmes disparaissent dans l'intégration, les solutions n'offriront au point $x=0$ aucune singularité, et ce point ne sera pas en réalité un point singulier. Il ne diffère des autres points qu'en ce que le déterminant d'un système fondamental de solutions s'y annule. Ces points ont reçu, de M. Weierstrass, le nom de *points à apparence singulière*.

98. Le théorème de M. Fuchs fournit une seconde méthode pour décider si un système quelconque est régulier.

Posons

$$z = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n,$$

et soit donné le système

$$x^\rho \frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + \ldots + a_{in} y_n. \tag{149}$$

Il est à peu près évident que ce système sera régulier, si la valeur z satisfait à une équation différentielle régulière d'ordre n, *quelles que soient les valeurs* de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Nous allons préciser cette question.

D'abord z satisfait à une équation différentielle. Car si la variable x fait le tour de l'origine, on a, avec les notations du Chapitre III,

$$Z_j = \lambda_1 Y_{1j} + \ldots + \lambda_n Y_{nj},$$

et, entre les anciennes et les nouvelles valeurs y_{ij} et Y_{ij} des éléments d'un système fondamental de solutions, existent les relations

$$Y_{ij} = C_{j1} y_{i1} + \ldots + C_{jn} y_{in},$$

de sorte qu'on a

$$Z_j = \lambda_1 (C_{j1} y_{11} + \ldots + C_{jn} y_{1n}) + \ldots + \lambda_n (C_{j1} y_{n1} + \ldots + C_{jn} y_{nn})$$

ou

$$Z_j = C_{j1}(\lambda_1 y_{11} + \ldots + \lambda_n y_{n1}) + \ldots + C_{jn}(\lambda_1 y_{1n} + \ldots + \lambda_n y_{nn}),$$

ou enfin

$$Z_j = C_{j1} z_1 + \ldots + C_{jn} z_n.$$

On reconnaît les équations caractéristiques d'une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n. Pour des valeurs choisies de λ, l'ordre n'est pas nécessairement n; il faut, pour cela, en plus des conditions précédentes, que les n fonctions $z_1, \ldots, z_n$ soient linéairement indépendantes.

Le contraire peut arriver. En effet, écrivons la relation

$$A_1 z_1 + \ldots + A_n z_n = 0$$

à coefficients constants. On en conclura, en faisant

$$z_j = \lambda_1 y_{1j} + \ldots + \lambda_n y_{nj},$$

la relation

$$A_1(\lambda_1 y_{11} + \ldots + \lambda_n y_{n1}) + \ldots + A_n(\lambda_1 y_{1n} + \ldots + \lambda_n y_{nn}) = 0$$

ou

$$\lambda_1(A_1 y_{11} + \ldots + A_n y_{1n}) + \ldots + \lambda_n(A_1 y_{n1} + \ldots + A_n y_{nn}) = 0.$$

Or, les parenthèses renferment les éléments d'une certaine solution du système différentiel. *Donc, si l'équation générale en z n'est pas d'ordre n, il existe une solution $\eta_1, \ldots, \eta_n$ des équations en y, entre les éléments de laquelle il existe une relation linéaire à coefficients constants de la forme*

$$\lambda_1 \eta_1 + \ldots + \lambda_n \eta_n = 0.$$

La réciproque est vraie. En effet, on a

$$\eta_i = A_1 y_{i1} + \ldots + A_n y_{in}$$

et, par suite,

$$\lambda_1(A_{11} y_{11} + \ldots) + \ldots + \lambda_n(A_1 y_{n1} + \ldots) = 0$$

ou

$$A_1(\lambda_1 y_{11} + \ldots + \lambda_n y_{n1}) + \ldots + A_n(\lambda_1 y_{1n} + \ldots) = 0.$$

Donc les n fonctions

$$z_i = \lambda_1 y_{1i} + \ldots + \lambda_n y_{ni}$$

ne sont pas linéairement indépendantes.

Mais si les λ restent quelconques, l'ordre de l'équation en z est n. Car, pour que l'équation

$$\lambda_1(A_1 y_{11} + \ldots + A_n y_{1n}) + \ldots + \lambda_n(A_1 y_{n1} + \ldots + A_n y_{nn}) = 0$$

soit satisfaite pour toutes les valeurs de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, il faudrait que l'on eût

$$A_1 y_{in} + \ldots + A_n y_{in} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ce qui est impossible, si le système de solution y_{ij} est fondamental.

On formera l'équation d'*ordre n en z* de la manière suivante.

Posons, en général,

$$\frac{d^k y_i}{dx^k} = \frac{1}{x^{k\rho}}(A_{i1}^k y_1 + \ldots + A_{in}^k y_n),$$

et dérivons cette équation. Nous aurons

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}y_i}{dx^{k+1}} = {} & \frac{1}{x^{k\rho}}\left(y_1\frac{dA_{i1}^k}{dx}+\ldots+y_n\frac{dA_{in}^k}{dx}\right)\\ & +\frac{1}{x^{k\rho}}\left(A_{i1}^k\frac{dy_1}{dx}+\ldots+A_{in}^k\frac{dy_n}{dx}\right)\\ & -\frac{k\rho}{x^{k\rho+1}}(A_{i1}^k y_1+\ldots+A_{in}^k y_n),\end{aligned}$$

et, en remplaçant $\frac{dy_i}{dx}$ par sa valeur tirée des équations proposées, nous obtiendrons

$$\frac{d^{k+1}y_i}{dx^{k+1}} = \frac{1}{x^{(k+1)\rho}}(A_{i1}^{k+1}y_1+\ldots+A_{in}^{k+1}y_n),$$

équations où l'on a

$$A_{ij}^{k+1} = x^\rho\frac{dA_{ij}^k}{dx} - k\rho x^{\rho-1}A_{ij}^k+(A_{i1}^k A_{1j}^1+\ldots+A_{in}^k A_{nj}^1),$$

et les fonctions A_{ij} seront holomorphes, à condition que ρ soit un entier positif, et que les fonctions a_{ij} de l'équation (149) qu'on peut écrire A_{ij}^1 soient holomorphes.

On aura alors successivement

$$\frac{d^k z}{dx^k} = \lambda_1\frac{d^k y_1}{dx^k}+\ldots+\lambda_n\frac{d^k y_n}{dx^k},$$

$$x^{k\rho}\frac{d^k z}{dx^k} = \lambda_1(A_{11}^k y_1+\ldots)+\lambda_n(A_{n1}^k y_1+\ldots),$$

$$x^{k\rho}\frac{d^k z}{dx^k} = (\lambda_1 A_{11}^k+\ldots)y_1+\ldots+(\lambda_1 A_{1n}^k+\ldots)y_n,$$

ce que nous écrirons simplement

$$x^{k\rho}\frac{d^k z}{dx^k} = P_{k1}y_1+\ldots+P_{kn}y_n.$$

En faisant $k=1, 2, \ldots, n$ dans cette équation, nous obtiendrons n équations du premier degré en $y_1, \ldots, y_n$. Avec l'équation qui définit z nous aurons $n+1$ équations entre lesquelles nous pourrons éliminer $y_1, \ldots, y_n$. Le résultat obtenu est de la forme

$$\begin{vmatrix} x^{n\rho}\frac{d^n z}{dx^n} & P_{n1} & \ldots & P_{nn}\\ x^{(n-1)\rho}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} & P_{n-1,1} & \ldots & P_{n-1,n}\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ z & \lambda_1 & \ldots & \lambda_n\end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant, de la forme

$$(150)\qquad \frac{d^n z}{dx^n} + \frac{1}{x^\rho}\frac{\Delta_1}{\Delta}\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{x^{(n-1)\rho}}\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x^{n\rho}}\frac{\Delta}{\Delta_n} z = 0.$$

Si l'on a $\rho = 1$, tous les rapports $\frac{\Delta_i}{\Delta}$ devront être holomorphes, car l'équation en z devra être régulière comme le système proposé.

Pour une valeur quelconque de ρ, les conditions seront, comme on l'a déjà vu directement, compliquées à cause de la présence indispensable des n indéterminées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans les déterminants Δ.

Cependant, si les hypothèses

$$\lambda_j = 0, \qquad j \neq i, \qquad \lambda_i \neq 0,$$

faites pour toutes les valeurs de i successivement, conduisent à n équations différentielles d'*ordre n*, chacune de ces équations, étant débarrassée d'arbitraires, sera d'une façon rapide reconnue régulière ou non, et cet examen suffira évidemment pour formuler une conclusion sur l'équation générale en z, ou sur le système proposé lui-même.

99. Le procédé qui permet de ramener un système régulier à la forme canonique consiste à faire une suite mélangée de substitutions des formes

$$y_i | x^k y_i$$

ou

$$y_i | z_i + \sum_j m_j y_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n).$$

Réciproquement, si l'on fait, dans un système canonique général, une suite de substitutions arbitraires des formes précédentes, on formera un système régulier quelconque.

Comme conclusion de ce Chapitre, nous dirons que tout système régulier peut être ramené à un *système canonique*.

CHAPITRE VI.

DES SYSTÈMES A COEFFICIENTS PÉRIODIQUES.

100. Au moyen des principes exposés au Chapitre précédent, on peut reconnaître si les solutions d'un système d'équations linéaires et homogènes sont régulières en chaque point. Si, de plus, les racines de l'équation caractéristique sont entières, et si les logarithmes disparaissent, les éléments des solutions seront uniformes. Nous supposerons dans le Chapitre VI que ces hypothèses soient réalisées dans tout le plan, et nous étudierons la classe très intéressante des *équations différentielles de la forme*

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n,$$

où les coefficients a sont des fonctions uniformes admettant la période ω, *et dont les solutions sont uniformes.*

Si l'on pose $e^{\frac{2\pi x\sqrt{-1}}{\omega}} = x'$, le système A prendra la forme

$$\text{(A')} \qquad \frac{dy_i}{dx'} \times \frac{2\pi x'\sqrt{-1}}{\omega} = a'_{i1}y_1 + \ldots + a'_{in}y_n.$$

Ce système linéaire pourra être étudié comme un système ordinaire, et, en rétablissant ensuite la variable indépendante x, on aura mis en évidence le rôle de la période ω.

Mais on peut employer un procédé direct de recherches, comme nous le montrerons dans ce Chapitre.

101. Soient $y_{ij} (j = 1, 2, \ldots, n)$, ou $f_{ij}(x)$ n solutions distinctes du système différentiel (A). Quand la variable x va, par un chemin quelconque, du point x au point $x + \omega$, les fonctions uniformes $f_{ij}(x)$ prennent les nouvelles valeurs $f_{ij}(x + \omega)$, tandis que les coefficients uniformes et périodiques a reprennent leurs valeurs primitives. En conséquence, les $f_{ij}(x + \omega)$, fonctions toujours distinctes, forment un second système fondamental de solutions dont on peut exprimer les éléments en fonctions linéaires, homogènes, à coefficients constants des éléments du premier système fondamental $f_{ij}(x)$. On aura donc des relations de la forme

$$f_{ij}(x+\omega) = C_{j1} f_{i1}(x) + \ldots + C_{jn} f_{in}(x), \tag{151}$$

où le déterminant des constantes C est différent de zéro.

102. *Les relations* (151) *sont caractéristiques dans le plan des systèmes d'équations linéaires et homogènes, à coefficients périodiques, et dont l'intégrale générale est uniforme.*

Soit, en effet, D le déterminant, supposé différent de zéro, de n^2 fonctions y_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, \ldots, n)$ d'une variable indépendante x, uniformes dans tout le plan et n'ayant que l'infini pour point singulier.

Supposons que cette variable x décrive un chemin quelconque allant du point x au point $x+\omega$. Si les n^2 fonctions prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants telles que les relations (151), ces fonctions forment un système fondamental de solutions d'un système d'équations de la forme (A) dont les coefficients a sont périodiques et n'ont d'autre point singulier que l'infini.

Nous démontrerons cette proposition en formant un système d'équations tel que (A) auquel satisfassent les n^2 solutions y_{ij}. Nous aurons, en général, les relations

$$\frac{dy_{ij}}{dx} = a_{i1} y_{1j} + \ldots + a_{in} y_{nj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

et nous en tirerons

$$\mathrm{D}\, a_{ip} = \begin{vmatrix} y_{11} & \ldots & \dfrac{dy_{i1}}{dx} & \ldots & y_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1n} & \ldots & \dfrac{dy_{in}}{dx} & \ldots & y_{nn} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire que nous pourrons calculer les coefficients a.

Ces coefficients sont exprimés par le rapport de deux déterminants. Le dénominateur du rapport est toujours D ; le numérateur est le résultat obtenu en remplaçant dans D les éléments d'une colonne par les dérivées des fonctions y_{ij}. Les éléments des deux déterminants prennent des valeurs nouvelles liées aux anciennes par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants de la forme (151) quand la variable x décrit un chemin quelconque du point x au point $x+\omega$. Les constantes sont les mêmes pour les éléments homologues des deux déterminants qui forment le rapport. Les deux termes du rapport sont donc multipliés par le même déterminant des constantes. Donc le rapport ne change pas, et, par suite, les coefficients a sont des fonctions périodiques.

Les coefficients a, n'ayant évidemment pas d'autres points singuliers que ceux des fonctions y_{ij} elles-mêmes, n'ont d'autre point singulier que l'infini.

Enfin, le déterminant D n'étant pas identiquement nul, les fonctions y_{ij} forment un système fondamental de solutions du système d'équations (A).

103. Considérons maintenant deux systèmes fondamentaux de solutions du système d'équations (A). Nous représenterons leurs valeurs par y_{ij} et η_{ij}, et leurs nouvelles valeurs par Y_{ij} et H_{ij} quand la variable x a passé du point x au point $x+\omega$. Les déterminants L et Λ des constantes qui entrent dans les relations

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Y}_{ij} &= l_{j1}y_{i1}+\ldots+l_{jn}y_{in} \\ \mathrm{H}_{ij} &= \lambda_{j1}y_{i1}+\ldots+\lambda_{jn}\eta_{in} \end{aligned}\right\} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

seront différents de zéro.

Si l'on exprime les éléments η_{ij} en fonction des éléments y_{ij}, on aura les relations à coefficients constants

$$\begin{aligned} \eta_{ij} &= \mathrm{C}_{j1}y_{i1}+\ldots+\mathrm{C}_{jn}y_{in}, \\ \mathrm{H}_{ij} &= \mathrm{C}_{j1}\mathrm{Y}_{i1}+\ldots+\mathrm{C}_{jn}\mathrm{Y}_{in}, \end{aligned}$$

d'où, en développant les deux expressions de H_{ij},

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_{ij} &= (\mathrm{C}_{j1}l_{11}+\ldots+\mathrm{C}_{jn}l_{n1})y_{i1}+\ldots+(\mathrm{C}_{j1}l_{1n}+\ldots+\mathrm{C}_{jn}l_{nn})y_{in}, \\ \mathrm{H}_{ij} &= (\lambda_{j1}\mathrm{C}_{11}+\ldots+\lambda_{jn}\mathrm{C}_{n1})y_{i1}+\ldots+(\lambda_{j1}\mathrm{C}_{1n}+\ldots+\lambda_{jn}\mathrm{C}_{nn})y_{in}, \end{aligned}$$

on aura

$$\mathrm{C}_{j1}l_{1i}+\ldots+\mathrm{C}_{jn}l_{ni} = \lambda_{j1}\mathrm{C}_{1i}+\ldots+\lambda_{jn}\mathrm{C}_{ni};$$

on en conclut (n° 58) *que les diviseurs élémentaires du déterminant*

$$\mathrm{R}(\varepsilon) = \begin{vmatrix} l_{11}-\varepsilon & \ldots & l_{n1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ l_{1n} & \ldots & l_{nn}-\varepsilon \end{vmatrix}$$

ne dépendent pas du choix du système fondamental de solutions qui sert à former ce déterminant.

104. Posons, en général

$$\mathrm{Y}_{ij} = l_{j1}y_{i1}+\ldots+l_{jn}y_{in},$$

les coefficients l étant indépendants de l'indice i. Nous venons de voir que le déterminant $\mathrm{R}(\varepsilon)$ conserve les mêmes diviseurs élémentaires quand on change le système fondamental de solutions. On a vu, d'autre part (Chap. II, n° 53), qu'on peut former *a priori* un déterminant ayant les mêmes diviseurs élémentaires que le précédent. Ce déterminant $R'(\varepsilon)$ est

$$R'(\varepsilon) = \left|\begin{array}{c|c|c}
\begin{array}{ccccc}
\varepsilon_1-\varepsilon & 0 & \ldots & . & \ldots\ldots \\
1 & \varepsilon_1-\varepsilon & \ldots & . & \ldots\ldots \\
. & \ldots\ldots & \ldots & . & \ldots\ldots \\
. & \ldots\ldots & \ldots & 1 & \varepsilon_1-\varepsilon
\end{array} & & \\
\hline
& \begin{array}{ccccc}
\varepsilon_2-\varepsilon & 0 & \ldots & . & \ldots\ldots \\
1 & \varepsilon_2-\varepsilon & \ldots & . & \ldots\ldots \\
. & \ldots\ldots & \ldots & . & \ldots\ldots \\
. & \ldots\ldots & \ldots & 1 & \varepsilon_2-\varepsilon
\end{array} & \\
\hline
& & \ldots \\
\multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}
\end{array}\right|.$$

Il résulte de là qu'on peut faire une double substitution de la forme

$$y_{ij} = C_{j1}y'_{i1} + \ldots + C_{jn}y'_{in},$$
$$x'_{ij} = C_{1j}x_{i1} + \ldots + C_{nj}x_{in},$$

qui ramène à la fois la forme

$$x_{i1}Y_{i1} + \ldots + x_{in}Y_{in}$$

à la forme

$$x'_{i1}Y'_{i1} + \ldots + x'_{in}Y'_{in},$$

et la forme

$$x_{i1}y_{i1} + \ldots + x_{in}y_{in}$$

à la forme

$$x'_{i1}y'_{i1} + \ldots + x'_{in}y'_{in}$$

les y' et les Y' étant les anciennes et les nouvelles valeurs d'éléments qui correspondent au déterminant $R'(\varepsilon)$.

Or, si l'on considère la forme de ce déterminant par rapport aux coefficients qu'on appelait l d'une manière générale, on voit qu'on a les relations importantes

$$\begin{array}{l}
Y'_{i1} = \varepsilon_1 y'_{i1}, \\
Y'_{i2} = \varepsilon_1 y'_{i2} + y'_{i1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
Y'_{ij} = \varepsilon_1 y'_{ij} + y'_{i,j-1}, \\
Y'_{i'1} = \varepsilon_2 y'_{i'1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
Y'_{ij'} = \varepsilon_2 y'_{i'j'} + y'_{i,j'-1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

On tire de là le théorème suivant :

Soient $(\varepsilon_1 - \varepsilon)^{e_1}, \ldots, (\varepsilon_\rho - \varepsilon)^{e_\rho}$ *les diviseurs élémentaires du déterminant* $R(\varepsilon)$, *et il importe peu que les binomes* $\varepsilon_1 - \varepsilon, \ldots, \varepsilon_\rho - \varepsilon$ *soient distincts ou non, on peut trouver un système fondamental de solutions dont les éléments se groupent d'après les relations*

$$\begin{aligned} Y_{i1} &= \varepsilon_h y_{i1}, \\ Y_{i2} &= \varepsilon_h y_{i2} + y_{i1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_{ie_h} &= \varepsilon_h y_{ie_h} + y_{i,e_h-1}, \end{aligned}$$

$(\varepsilon_h - \varepsilon)^{e_h}$ *étant l'un quelconque des* ρ *diviseurs élémentaires de* $R(\varepsilon)$.

105. On peut arriver aux relations précédentes en partant d'un système fondamental quelconque de solutions, et en substituant à ses éléments d'autres éléments qui leur soient liés par des relations linéaires et homogènes indépendantes et à coefficients constants convenablement choisis.

Le choix de ces coefficients est déterminé par des procédés identiques à ceux qu'on a exposés au Chapitre III (n^{os} 68 et suivants) dans une question absolument analogue.

106. Posons

$$f(x) = \varpi_1(x) + x\,\varpi_2(x) + \ldots + x^{m-1}\,\varpi_m(x),$$

les fonctions ϖ satisfaisant aux relations

$$\Pi = \varepsilon\varpi,$$

lorsque dans ces fonctions x varie de x à $x + \omega$. On dit dans ces conditions que chaque fonction uniforme $\varpi(x)$ est *périodique de seconde espèce à la période* ω *et au multiplicateur* ε. Si $\varepsilon = 1$, on dit simplement que $\varpi(x)$ est *périodique*. On peut dire aussi que $\varpi(x)$ est périodique de première espèce.

Toute fonction uniforme satisfaisant à la relation

$$\Pi = \varepsilon\varpi, \qquad \text{ou} \qquad \varpi(x + \omega) = \varepsilon\,\varpi(x),$$

peut être représentée par l'expression

$$\varpi(x) = e^{rx} p(x),$$

où l'on a $\varepsilon = e^{r\omega}$, et où $p(x)$ est une fonction périodique de première espèce. En effet, le produit $e^{-rx}\varpi(x)$ est périodique de première espèce.

107. Pour chaque groupe de solutions satisfaisant aux relations

$$\begin{aligned} Y_{i1} &= \varepsilon y_{i1}, \\ Y_{i2} &= \varepsilon y_{i2} + y_{i1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_{im} &= \varepsilon y_{im} + y_{i,m-1}, \end{aligned}$$

on pourra poser

$$(152)\quad \left\{\begin{aligned} y_{im} &= f_i(x), \\ y_{i,m-1} &= \varepsilon\,\Delta\, f_i(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{i,m-k} &= \varepsilon^k\,\Delta_k\, f_i(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{i1} &= \varepsilon^{m-1}\,\Delta_{m-1}\, f_i(x), \end{aligned}\right.$$

absolument comme dans les n^os 80 et 81 du Chapitre IV, les différences Δ étant prises par rapport à l'accroissement ω de x. Vérifions, en effet, que ces formules sont vraies. Nous aurons

$$\begin{aligned} Y_{m-k} &= \varepsilon^{k+1}\Delta_k f(x+\omega) \\ &= \varepsilon^{k+1}[\Delta_k f(x) + \Delta_{k+1} f(x)] \\ &= \varepsilon\, y_{m-k} + y_{m-k-1}. \end{aligned}$$

Mais, dans le calcul de $\Delta f(x)$, il faut bien remarquer que l'on a

$$f(x) = \varpi_1(x) + x\,\varpi_2(x) + \ldots = e^{rx}[p_1(x) + x\,p_2(x) + \ldots];$$

de sorte que l'on a

$$f(x+\omega) = e^{r\omega}e^{rx}[p_1(x+\omega) + (x+\omega)\,p_2(x+\omega) + \ldots]$$

ou

$$f(x+\omega) = \varepsilon[\varpi_1(x) + (x+\omega)\,\varpi_2(x) + \ldots],$$

et, par suite, dans le calcul des Δ successifs de $f(x)$, il faut changer x en $x+\omega$ seulement en dehors des coefficients $\varpi(x)$, ces coefficients étant considérés comme des constantes, et ensuite multiplier par ε à chaque nouvel accroissement Δ.

On peut encore dire que chaque groupe de solutions peut être représenté par des expressions de la forme

$$(153)\quad \left\{\begin{aligned} y_{im} &= e^{rx}\varphi^1_{im}, \\ y_{i,m-1} &= e^{rx}[\varphi^1_{i,m-1} + x\varphi^2_{i,m-1}], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{i1} &= e^{rx}[\varphi^1_{i1} + x\varphi^2_{i1} + \ldots + x^{m-1}\varphi^m_{i1}], \end{aligned}\right.$$

les fonctions φ des seconds membres étant *périodiques* de première espèce, et liées entre elles par des relations qu'on déduit facilement des équations (152).

108. On peut considérer les équations

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n$$

à coefficients constants comme des équations à coefficients périodiques, de période arbitraire ω. Considérons le groupe précédent de solutions. r y est arbitraire avec ω. Mais, si l'on se donne ω, r est déterminé par la relation $\varepsilon = e^{r\omega}$. On retrouve le résultat bien connu, c'est-à-dire que les racines ε de l'*équation fondamentale* sont liées aux racines r de l'*équation caractéristique* par la relation $\varepsilon = Ce^r$, C étant une constante. De plus, on trouve que les formes sont celles qui conviennent aux éléments des solutions du système (A).

109. Considérons maintenant un système d'équations

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n,$$

dont les coefficients a sont *doublement périodiques*, et dont l'intégrale générale est uniforme, avec le seul point $x = \infty$ pour point singulier.

Nous poserons, d'une manière générale,

$$P_m(x) = \varpi_0(x) + x\,\varpi_1(x) + \ldots + x^m\,\varpi_m(x),$$

les fonctions $\varpi(x)$ étant périodiques de seconde espèce, à la période ω et au même multiplicateur ε, et

$$P'_m(x) = \varpi'_0(x) + x\,\varpi'_1(x) + \ldots + x^m\,\varpi'_m(x),$$

les fonctions ϖ' étant périodiques de seconde espèce, à la période ω', et au même multiplicateur ε'.

D'après les formules (152) du n° **107**, le système (A) admet un système fondamental de solutions dont chaque groupe est de la forme

$$(154) \qquad \begin{cases} y_{i,m} = P_{0,i}(x), \\ y_{i,m-1} = P_{1,i}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{i,1} = P_{m-1,i}(x). \end{cases}$$

Ce groupe appartient à un multiplicateur ε, racine d'une équation fondamentale $R(\varepsilon) = 0$.

D'ailleurs, d'après les théories générales du Chapitre IV, toute solution appartenant au même multiplicateur est une combinaison linéaire d'éléments caractérisés par les relations (154). Observons cependant qu'il peut y avoir plus d'un groupe de relations de cette nature.

En d'autres termes, soit $R(\varepsilon) = 0$ l'équation fondamentale aux multiplicateurs; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\mu$ les racines distinctes de cette équation. A l'une de ces racines ε_k d'ordre de multiplicité μ_k correspondront un ou plusieurs groupes de relations de la forme

$$\left.\begin{array}{l} y^{k'}_{im_{k'}} = P^{k'}_{0i}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y^{k'}_{i1} \;\; = P^{k'}_{m_{k'}-1}(x) \end{array}\right\} \qquad (k' = 1, 2, \ldots, \nu_k),$$

de manière que, ν_k étant le nombre de ces groupes, le nombre total des relations soit μ_k. *Toute solution appartenant au seul multiplicateur ε_k est une combinaison linéaire des μ_k solutions précédentes.*

Ce théorème résulte de considérations identiques à celles qui terminent le Chapitre IV.

Mais on peut le démontrer directement sous l'énoncé suivant :

S'il existe une relation identique de la forme

$$C_1 A_{i1} + \ldots + C_\mu A_{i\mu} = 0 \tag{155}$$

entre des solutions formant l'ensemble A_{i1} appartenant au multiplicateur ε_1, des solutions formant l'ensemble A_{i2} appartenant au multiplicateur ε_2, ..., des solutions formant l'ensemble $A_{i\mu}$ appartenant au multiplicateur ε_μ; les C étant d'ailleurs des constantes, on a séparément

$$A_{i1} = 0, \qquad A_{i2} = 0, \qquad \ldots, \qquad A_{i\mu} = 0.$$

En effet, donnons à x les valeurs successives $x + \omega$, $x + 2\omega$, ..., $x + \overline{\mu - 1}\,\omega$, et désignons par $F^{\eta_1}_{i1}, F^{\eta_2}_{i2}, \ldots, F^{\eta_\mu}_{i\mu}$ les coefficients des plus hautes puissances de x dans les groupements $A_{i1}, \ldots, A_{i\mu}$, nous aurons

$$C_1 A_{i1}(x + \lambda\omega) + \ldots + C_\mu A_{i\mu}(x + \lambda\omega) = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \mu - 1).$$

Si l'on élimine les C entre ces μ équations et si l'on ordonne l'équation obtenue par rapport à x, on aura

$$F_{i1} + x F_{i2} + \ldots + x^\eta F^\eta_{i\mu} = 0, \tag{156}$$

où les fonctions F sont périodiques de seconde espèce au multiplicateur $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\mu$.

Cela résulte de la forme même de cette équation quand on l'écrit

$$\begin{vmatrix} A_{i1}(x) & \ldots & A_{i\mu}(x) \\ A_{i1}(x+\omega) & \ldots & A_{i\mu}(x+\omega) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ A_{i1}(x+\overline{\mu-1}\,\omega) & \ldots & A_{i\mu}(x+\overline{\mu-1}\,\omega) \end{vmatrix} = 0.$$

De plus, la relation (156), dont le premier membre est considéré comme un polynome en x, doit être identique, sans quoi l'équation algébrique de degré η en x aurait une infinité de racines. En effet, cette équation pourrait aussi s'écrire

$$(\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_\mu)^\lambda\left[F_{i1}+(x+\lambda\omega)F_{i2}+\ldots+(x+\lambda\omega)^\eta F_{i\mu}^\eta\right]=0,$$

quelle que soit la valeur de λ. Il faut donc que le coefficient $F_{i\mu}^\eta$ soit nul en particulier. Or, ce coefficient est

$$F_{i\mu}^\eta(x) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_\mu \\ \varepsilon_1^2 & \ldots & \varepsilon_\mu^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_1^{\mu-1} & \ldots & \varepsilon_\mu^{\mu-1} \end{vmatrix} F_{i1}^{\eta_1}F_{i2}^{\eta_2}\ldots F_{i\mu}^{\eta_\mu},$$

c'est-à-dire que $F_{i\mu}^\eta(x)$ est un produit de facteurs dont aucun n'est nul par hypothèse.

Donc, la relation (155) ne peut exister que si l'on a $C_1=0, \ldots, C_\mu=0$, ou encore, la relation ne peut résulter que des relations séparées

$$A_{i1}=0, \qquad \ldots, \qquad A_{i\mu}=0.$$

110. Le théorème précédent se traduit d'une manière remarquable par un rapprochement entre deux déterminants $R(\varepsilon)$, $R(\varepsilon')$.

Considérons, en effet, les groupes des solutions qui correspondent à la période ω et au multiplicateur ε_k comme formant un groupe unique; appelons G ce groupe. Le nombre des solutions contenues dans G est μ_k, c'est-à-dire le degré de multiplicité de la racine ε_k dans l'équation $R(\varepsilon)=0$.

Toute solution qui admet le seul multiplicateur ε_k se tire d'ailleurs de G par des combinaisons linéaires.

Cela posé, soit $\varphi_{ij}(x)$ une solution quelconque contenue dans G, $\varphi_{ij}(x+\omega')$ sera aussi une solution puisque les coefficients du système différentiel proposé (A) admettent aussi la période ω'. On devra donc avoir

$$\varphi_{ij}(x+\omega') = L_{i1}\varphi_{i1}+\ldots+L_{i\mu_k}\varphi_{i\mu_k} \qquad (j=1, 2, \ldots, \mu_k).$$

Ces relations étant absolument les mêmes que les relations (151) du n° 101, on en déduit immédiatement les mêmes conséquences, à savoir celles du n° 104.

On peut diviser les relations φ_{ij} en groupes correspondant aux diviseurs élémentaires du déterminant

$$R(\varepsilon') = \begin{vmatrix} L_{11} - \varepsilon' & \dots & L_{1\mu_k} \\ \dots\dots & \dots & \dots \\ L_{\mu_k 1} & \dots & L_{\mu_k\mu_k} - \varepsilon' \end{vmatrix},$$

de manière que, si $(\varepsilon'_h - \varepsilon)^{e_h}$ *est un diviseur élémentaire de* $R(\varepsilon')$, *on ait un groupe de solutions linéairement indépendantes qui satisfassent aux relations*

$$(157) \qquad Y_{i\sigma} = \varepsilon'_h y_{i\sigma} + y_{i,\sigma-1} \qquad (\sigma = 1, 2, \dots, e_h).$$

Nous retiendrons de ce théorème qu'*à toute racine distincte de l'équation* $R(\varepsilon) = 0$ *correspond au moins une solution satisfaisant à l'équation* $Y_i = \varepsilon' y_i$, ε' *étant une racine de* $R(\varepsilon') = 0$, *et nécessairement aussi une racine de* $R_1(\varepsilon') = 0$, *c'est-à-dire de l'équation fondamentale relative à la période* ω'.

En conséquence, puisque à toute racine ε correspond au moins une racine ε' et *réciproquement, il faut que les deux équations* $R(\varepsilon) = 0$, $R_1(\varepsilon') = 0$ *admettent le même nombre de racines distinctes* et ces racines correspondent au nombre de groupements incompatibles entre eux qu'on peut faire avec les solutions, comme on l'a expliqué au numéro précédent.

111. Maintenant que les déterminants $R(\varepsilon)$, $R(\varepsilon')$ ne se décomposent pas en diviseurs élémentaires parallèles, le fait est possible, comme l'a prouvé M. Floquet [*Sur les équations linéaires à coefficients doublement périodiques* (*Annales de l'École Normale supérieure,* n° 29; 1884)]. Il existe cependant des rapports entre les deux décompositions en diviseurs élémentaires et la nature des solutions. Par exemple, si l'un des déterminants $R(\varepsilon)$ n'a que des diviseurs élémentaires simples, il en est de même de $R(\varepsilon')$ et le système proposé a tous les éléments de ses solutions de forme doublement *périodique de seconde espèce* (Floquet, *loc. cit.*, n° 6). Sans insister sur ces considérations, malgré l'intérêt qu'elles présentent, nous signalerons les beaux résultats donnés dans un cas particulier par M. Picard (*Journal de Crelle,* 1881).

Considérons les trois équations

$$(158) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= -Av + Bw, \\ \frac{dv}{dx} &= Au - Cw \\ \frac{dw}{dx} &= -Bu + C \end{aligned} \right.$$

Remarquons en passant que ce système jouit de la singulière propriété de coïncider avec le système obtenu en changeant les signes de A, B, C et en permutant les coefficients symétriques par rapport à la diagonale principale du déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & -A & B \\ A & 0 & -C \\ -B & C & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous reviendrons d'ailleurs sur ce point, et d'une manière plus générale, dans le Chapitre VII.

Nous supposerons que A, B, C sont des fonctions doublement périodiques ordinaires de x aux périodes $2k$ et $2ik'$.

Admettons que les éléments du système (158) soient des fonctions uniformes dans tout le plan, comme les coefficients des équations proposées.

(α). Soient

$$(159)\qquad \begin{cases} u_1, v_1, w_1, \\ u_2, v_2, w_2, \\ u_3, v_3, w_3 \end{cases}$$

trois solutions distinctes. On aura identiquement

$$(160)\qquad u_m u_n + v_m v_n + w_m w_n = C_{mn}, \qquad (m, n = 1, 2, 3),$$

à cause des équations (158) satisfaites par deux solutions quelconques, même confondues pour $m = n$. Il y a six relations de la forme (160).

Nous imaginons que chacune des solutions correspond à un multiplicateur ε_m pour la période $2k$ et à un multiplicateur ε'_m pour la période $2ik'$, m prenant les valeurs successives 1, 2, 3.

1° Supposons que les constantes C_{11}, C_{22}, C_{33} ne soient pas nulles toutes les trois, et soit $C_{11} \gtrless 0$. Alors la fonction $u_1^2 + v_1^2 + w_1^2$ admettant les multiplicateurs ε_1^2 et $\varepsilon_1'^2$ et n'étant pas nulle, on devra avoir $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1'^2 = 1$, puisque le changement de x en $x + 2k$ et en $x + 2ik'$ ne peut altérer C_{11}. Donc le système (158) admet au moins une solution *doublement périodique*.

2° Si l'on a $C_{11} = C_{22} = C_{33} = 0$, les trois autres constantes ne peuvent être nulles à la fois. Car, si les six constantes étaient nulles, on tirerait des équations (160), pour une solution quelconque U, V, W,

$$U^2 + V^2 + W^2 = 0,$$

ce qui est impossible puisque, pour une valeur donnée de x, on peut imaginer arbitrairement les valeurs de U, V, W.

Soit alors $C_{12} \gtrless 0$. La fonction

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2$$

admettra les multiplicateurs $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ et $\varepsilon'_1 \varepsilon'_2$, et aura une valeur constante différente de zéro. On aura donc

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon'_1 \varepsilon'_2 = 1.$$

Mais le déterminant formé par le tableau (159), a pour valeur

$$C e^{\int o.x dx} = \text{une constante}.$$

D'ailleurs, il admet les multiplicateurs $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ et $\varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \varepsilon'_3$. On a donc aussi

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \varepsilon'_3 = 1.$$

Il résulte de ce qui précède que l'on a

$$\varepsilon_3 = \varepsilon'_3 = 1,$$

c'est-à-dire que le système (158) admet encore au moins une solution *doublement périodique*.

(β). Nous rappelons que nous appelons *fonction périodique de seconde espèce* toute fonction qui admet les deux multiplicateurs ε et ε' dont l'un au moins diffère de l'unité, et nous avons supposé, dans le cas (α), que le système (158) admettait trois solutions de cette nature. Nous en avons conclu l'existence d'une solution doublement périodique au sens ordinaire du mot.

Nous supposerons maintenant que le système (158) n'admet que deux solutions u_1, v_1, w_1 et u_3, v_3, w_3 doublement périodiques de seconde espèce, et nous imaginerons une troisième solution u_2, v_2, w_2 distincte des premières. Nous avons vu dans la théorie générale qu'on peut choisir cette solution de sorte que l'on ait

$$\begin{aligned} u_2(x + 2k) &= \varepsilon_1 u_2 + a u_1, \\ v_2(x + 2k) &= \varepsilon_1 v_2 + a v_1, \\ w_2(x + 2k) &= \varepsilon_1 w_2 + a w_1, \end{aligned}$$

a étant une constante; on aura aussi et en même temps

$$\begin{aligned} u_2(x + 2ik') &= \varepsilon'_1 u_2 + b u_1, \\ v_2(x + 2ik') &= \varepsilon'_1 w_2 + b v_1, \\ w_2(x + 2ik') &= \varepsilon'_1 w_2 + b w_1. \end{aligned}$$

Si l'une des constantes C_{11} ou C_{33}, par exemple C_{11} n'est pas nulle, on a vu qu'il existe une solution doublement périodique.

Le seul cas à discuter est celui où l'on a $C_{11} = C_{33} = 0$. Si C_{12} n'est pas nul, on aura $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1'^2 = 1$, car l'expression $u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2$ se transforme, par le changement de x en $x + 2k$, en $\varepsilon_1^2 (u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2)$. On aura donc $\varepsilon_1^2 = 1$ et de même $\varepsilon_1'^2 = 1$. Donc il existe une solution doublement périodique.

Si C_{11}, C_{33}, C_{12} sont nulles à la fois, soit $C_{22} \gtrless 0$. L'expression $u_2^2 + v_2^2 + w_2^2$ devient, en changeant x en $x + 2k$, $\varepsilon_1^2 (u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)$, d'où l'on tire encore les mêmes conclusions que dans les cas précédents.

Si C_{11}, C_{33}, C_{22}, C_{12} sont nulles à la fois, soit $C_{13} \gtrless 0$, on aura $\varepsilon_1 \varepsilon_3 = 1$, et, si enfin $C_{13} = 0$, on aura encore la relation $\varepsilon_1 \varepsilon_3 = 1$, car on a

$$u_2 u_3 + v_2 v_3 + w_2 w_3 = C_{23},$$

et nécessairement $C_{23} \lesseqgtr 0$, comme on l'a vu plus haut.

Mais le tableau (159) est un déterminant constant qui donne les relations

$$\varepsilon_1^2 \varepsilon_3 = 1 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_1'^2 \varepsilon_3' = 1,$$

quand on change x en $x + 2k$ ou en $x + 2ik'$. Donc, à cause de l'une des relations

$$\varepsilon_1^2 = 1, \qquad \varepsilon_3^2 = 1 \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon_1 \varepsilon_3 = 1,$$

et de celles qu'on vient d'écrire, l'un des multiplicateurs ε_1 ou ε_3 sera égal à 1, l'autre ε' étant égal à ± 1. *Dans le cas de* $\varepsilon' = -1$, *on considérera la période* $4ik'$. Donc, il y a une solution *doublement périodique* comme dans les cas précédents.

(γ). Supposons enfin qu'il n'y ait qu'une solution $u_1 v_1 w_1$ doublement périodique de seconde espèce, deux autres solutions pouvant être choisies de manière à satisfaire aux relations

$$\begin{aligned}
u_2(x + 2k) &= \varepsilon_1 u_2 + a u_1,\\
v_2(x + 2k) &= \varepsilon_1 v_2 + a v_1,\\
w_2(x + 2k) &= \varepsilon_1 w_2 + a w_1,\\
u_3(x + 2k) &= \varepsilon_1 u_3 + b u_2 + c u_1,\\
v_3(x + 2k) &= \varepsilon_1 v_3 + b v_2 + c v_1,\\
w_3(x + 2k) &= \varepsilon_1 w_3 + b w_2 + c w_1.
\end{aligned}$$

On verra, au moyen des équations (160), que l'on a toujours $\varepsilon_1^2 = 1$. D'ailleurs le déterminant (148), qui est constant, permet de poser $\varepsilon_1^3 = 1$: on aura donc $\varepsilon_1 = 1$. De même, $\varepsilon_1' = 1$. Il y a donc encore dans le cas (γ) une solution *doublement périodique*.

112. Pour déterminer les formes analytiques des éléments des solutions satisfaisant à la fois aux conditions (154) du n° 109 et aux conditions (157) du n° 110, nous rappellerons d'abord quelques propositions de la théorie des fonctions elliptiques.

On démontre l'existence d'une fonction θ satisfaisant aux relations

$$\theta(x+\omega) = \theta(x),$$
$$\theta(x+\omega') = \theta(x) e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}(x+c)},$$

De ces relations on déduit, en prenant les dérivées logarithmiques,

$$\frac{\theta'(x+\omega)}{\theta(x+\omega)} = \frac{\theta'(x)}{\theta(x)},$$
$$\frac{\theta'(x+\omega')}{\theta(x+\omega')} = \frac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega},$$

de sorte que, si l'on pose $Z(x) = \frac{\theta'(x)}{\theta(x)}$, on a les relations

$$Z(x+\omega) = Z(x).$$
$$Z(x+\omega') = Z(x) + q,$$
$$\omega q = -2\pi\sqrt{-1}.$$

Au moyen de la fonction $Z(x)$ construisons les fonctions

$$u(x) = \frac{\omega\omega'}{2\pi\sqrt{-1}} Z(x) \qquad \text{et} \qquad u\,(x) = -\frac{\omega\omega'}{2\pi\sqrt{-1}}\left[Z(x) - \frac{qx}{\omega'}\right].$$

Nous aurons les relations

$$u(x+\omega) = u(x), \qquad u'(x+\omega) = u'(x) - \omega,$$
$$u(x+\omega') = u(x) - \omega', \qquad u'(x+\omega') = u'(x)$$

et

$$u + u' + x = 0.$$

Nous allons montrer qu'on peut exprimer les éléments des solutions des systèmes à coefficients périodiques et à intégrales uniformes au moyen de ces fonctions $u(x)$ et $u'(x)$.

113. Considérons l'expression

$$P_m(x) = \varpi_0(x) + \ldots + x^m \varpi_m(x),$$

de multiplicateur ε par rapport à la période ω, et admettant ω' comme seconde période avec le multiplicateur ε'; nous aurons

$$P(x+\omega') = \varepsilon' P(x),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}&\varpi_0(x+\omega')+(x+\omega')\varpi_1(x+\omega')+\ldots+(x+\omega')^m\varpi_m(x+\omega')\\&\quad=\varepsilon'[\varpi_1(x)+x\varpi_1(x)+\ldots+x^m\varpi_m(x)].\end{aligned}$$

Identifions les deux membres par rapport aux diverses puissances de x, nous aurons les $m+1$ équations

$$\begin{aligned}&\varpi_{m-k}(x+\omega')+\frac{m-k+1}{1}\omega'\varpi_{m-k+1}(x+\omega')\\&\quad+\frac{(m-k+1)(m-k+2)}{2}\omega'^2\varpi_{m-k+2}(x+\omega')+\ldots\\&\quad+\frac{(m-k+1)(m-k+2)\ldots(m-1)m}{1.2\ldots k}\omega'^k\varpi_m(x+\omega')\\&\qquad\qquad=\varepsilon'\varpi_{m-k}(x)\qquad(k=0,1,2,\ldots,m).\end{aligned}$$

Ces équations donnent

$$(161)\quad\left\{\begin{aligned}&\varpi_m(x+\omega')=\varepsilon'\varpi_m(x),\\&\varpi_{m-1}(x+\omega')=-\frac{m}{1}\varepsilon'\omega'\varpi_m(x)+\varepsilon'\varpi_{m-1}(x),\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\&\varpi_{m-k}(x+\omega')=(-1)^k\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k}\varepsilon'\omega'^k\varpi_m(x)+\ldots\\&\qquad-\frac{m-k+1}{1}\varepsilon'\omega'\varpi_{m-k+1}(x)+\varepsilon'\varpi_{m-k}(x),\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\&\varpi_0(x+\omega')=(-1)^m\varepsilon'\omega'^m\varpi_m(x)+\ldots+\varepsilon'\varpi_0(x).\end{aligned}\right.$$

De ces relations, nous déduisons les conséquences suivantes.

Soit posé

$$\varpi_m(x)=\varpi_{00}(x),$$

on a

$$\frac{\varpi_{m-1}(x+\omega')}{\varpi_m(x+\omega')}=\frac{\varpi_{m-1}(x)}{\varpi_m(x)}-m\omega'.$$

Par suite, la fonction

$$\frac{\varpi_{m-1}(x)}{\varpi_m(x)}-mu(x)$$

est uniforme et périodique aux deux périodes ω et ω'.

Soit $\chi_1(x)$ cette fonction doublement périodique.

Posons

$$\chi_1(x)\varpi_m(x)=\varpi_{10}(x).$$

Nous pourrons écrire

$$\varpi_{m-1}(x)=\varpi_{10}(x)+\frac{m}{1}\varpi_{00}(x)u(x).$$

Nous allons montrer que l'on peut poser, en général,

$$(162)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi_{m-k}(x) &= \varpi_{k0}(x) + \frac{m-k+1}{1}\varpi_{k-1,0}(x)u(x) \\ &+ \frac{(m-k+2)(m-k+1)}{1.2}\varpi_{k-2,0}(x)u^2(x)+\dots \\ &+ \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1.2\dots k}\varpi_{00}(x)u^k(x). \end{aligned}\right.$$

Admettons que la loi soit vraie pour l'indice $k-1$, nous pourrons toujours écrire la relation (162) où $\varpi_{k0}(x)$ est une fonction à déterminer.

Cette fonction $\varpi_{k0}(x)$ sera nécessairement uniforme, périodique de seconde espèce avec la période ω et le multiplicateur ε; nous allons voir qu'elle admet encore comme les autres fonctions ϖ_{j0} la période ω' avec le multiplicateur ε'. En effet, on a

$$\begin{aligned} \varpi_{m-k}(x+\omega') = \varpi_{k0}(x+\omega') &+ \varepsilon'\frac{m-k+1}{1}\varpi_{k.1,0}(x)[u(x)-\omega']+\dots \\ &+ \varepsilon'\frac{m(m-1)\dots m-k+1}{1.2\dots k}\varpi_{00}(x)[u(x)-\omega']^k. \end{aligned}$$

D'ailleurs, l'une des relations (150) donne

$$\begin{aligned} \varpi_{m-k}(x+\omega') = (-1)^k\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1.2\dots k}\varepsilon'\omega'^k\varpi_{00}(x)+\dots \\ + \varepsilon'\left[\varpi_{k0}(x)+\frac{m-k+1}{1}\varpi_{k-1,0}(x)u(x)+\dots\right]. \end{aligned}$$

En égalant ces deux valeurs de $\varpi_{m-k}(x+\omega')$, on a

$$\varpi_{k0}(x+\omega') = \varepsilon'\varpi_{k0}(x),$$

ce qui démontre la proposition qu'on avait en vue.

114. On déduit de ce qui précède que l'on a

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_m(x) &= \varpi_0(x)+\dots+x^m\varpi_m(x) \\ &= [\varpi_{m0}(x)+x\varpi_{m-1,0}(x)+\dots+x^m\varpi_{00}(x) \\ &\quad+\frac{u(x)}{1}[\varpi_{m-1,0}(x)+2x\varpi_{m-2,0}(x)+\dots+mx^{m-1}\varpi_{00}(x)] \\ &\quad+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\quad+\frac{[u(x)]^m}{1.2\dots m}m(m-1)\dots2.1\,\varpi_{00}(x). \end{aligned}$$

Chacune de ces parenthèses est une dérivée de la première d'entre elles, lorsqu'on y considère les fonctions ϖ_{j0} comme des constantes. On peut écrire, avec cette convention,

$$P_m(x) = \Pi(x) + \frac{u(x)}{1}\frac{\partial\Pi(x)}{\partial x} + \ldots + \frac{[u(x)]^m}{1.2\ldots m}\frac{\partial^m\Pi(x)}{\partial x^m}.$$

Remplaçons x par $x + u(x)$ en dehors des $\varpi_{j0}(x)$ dans $\Pi(x)$, nous aurons précisément l'expression $P_m(x)$ que nous venons d'écrire.

Mais $x + u(x) = - u'(x)$. On a donc

$$P_m(x) = \varpi_{m0}(x) - \varpi_{m-1,0}(x)u'(x) + \varpi_{m-2,0}(x)[u'(x)]^2 + \ldots + (-1)^m\varpi_{00}(x)u'^m(x),$$

ce que l'on peut écrire

$$P_m(x) = \pi_0(x) + \pi_1(x)u'(x) + \ldots + \pi_m(x)u'^m(x),$$

en posant

$$(-1)^j\varpi_{m-j,0}(x) = \pi_j(x),$$

et en particulier

$$\pi_m(x) = (-1)^m\varpi_{00}(x) = (-1)^m\varpi_m(x).$$

Donc, quand la forme P_m *admet le multiplicateur* ε' *pour une seconde période* ω', *on peut poser*

$$P_m = \pi_0(x) + \ldots + \pi_m(x)u'^m(x), \tag{163}$$

les fonctions $\pi(x)$ *étant doublement périodiques de seconde espèce et aux multiplicateurs* ε, ε' *avec les périodes* ω, ω'. *Les deux formes de* P_m *sont toujours du même degré en* x *et* $u'(x)$. *Car les coefficients* $\varpi_m(x)$ *et* $\pi_m(x)$ *des termes du plus haut degré sont égaux au signe près.*

115. De même, l'expression P'_m au multiplicateur ε' avec la période ω', admettant ω comme période de seconde espèce au multiplicateur ε, peut se mettre sous la forme

$$P'_m = \pi'_0(x) + \pi'_1(x)u(x) + \ldots + \pi'_{m'}(x)u^{m'}(x), \tag{164}$$

les fonctions π' étant périodiques doubles de seconde espèce.

116. *Si une fonction* $F(x)$ *peut se mettre sous les deux formes* $P_m(x)$ *et* $P'_0(x)$, *on peut lui donner la forme* (163). *De même, si elle admet les deux formes* $P_0(x)$ *et* $P'_{m'}(x)$, *on peut lui donner la forme* (164).

Cet énoncé est le résumé des numéros précédents.

117. Cherchons maintenant l'expression d'une fonction $F(x)$ capable des deux formes $P_m(x)$ et $P'_{m'}(x)$ où aucun des deux nombres m ou m' n'est nul.

Supposons que l'on puisse ramener la forme

$$P_m(x) = \varpi_0(x) + \ldots + x^m \varpi_m(x)$$

à la forme

$$P_{m'}(x) = \varpi'_0(x) + \ldots + x^{m'} \varpi_{m'}(x).$$

Il faudra que l'on ait identiquement

$$\varpi_0(x) + \ldots + x^m \varpi_m(x) = P'_{m'}(x),$$

et par suite, en changeant x successivement en $x + \omega$, $x + 2\omega$, $\ldots$, on aura les relations

$$(165)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varpi_0(x) + \ldots + x^m \varpi_m(x) = P'_{m'}(x), \\ \varepsilon\,\varpi_0(x) + \ldots + (x+\omega)^m \varepsilon\,\varpi_m(x) = P'_{m'}(x+\omega), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varepsilon^m \varpi_0(x) + \ldots + (x+m\omega)^m \varepsilon^m \varpi_m(x) = P'_{m'}(x+m\omega) \end{array}\right.$$

suffisantes pour déterminer $\varpi_0(x)$, $\ldots$, $\varpi_m(x)$. On aura

$$\varpi_k(x) = \frac{1}{\Delta}\left[\Delta_0 P'_{m'}(x) + \ldots + \Delta_m P'_{m'}(x+m\omega)\right],$$

et il est facile de calculer les déterminants Δ.

Dans le dénominateur commun Δ, on peut mettre en facteur

$$\varepsilon^{1+2+\ldots+m} = \varepsilon^{\frac{m(m+1)}{2}},$$

et l'autre facteur devient le produit des différences mutuelles des $m+1$ quantités x, $x+\omega$, $\ldots$, $x+m\omega$, c'est-à-dire est égal à

$$\omega^{\frac{m(m+1)}{2}} . 1^m . 2^{m-1} \ldots (m-1)^2 m^1.$$

On a donc

$$\Delta = (\varepsilon\omega)^{\frac{m(m+1)}{2}} . 1^m . 2^{m-1} \ldots (m-1)^2 m^1.$$

Quand à l'un quelconque Δ_j des autres déterminants, on l'obtient en supprimant la $(j+1)^{\text{ième}}$ ligne et $(k+1)^{\text{ième}}$ colonne. On peut donc mettre $\varepsilon^{\frac{m(m+1)}{2}-j}$ en facteur et l'on a un second facteur qui est le produit des différences mutuelles des m quantités $x + \lambda\omega$ (où $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m$) multiplié par la somme $S_{j,m-k}$ de leurs produits $m-k$ à $m-k$. On a donc, après un calcul facile,

$$\Delta_j = (-1)^{m+k} \varepsilon^{\frac{m(m+1)}{2}-}\ \omega^{\frac{m(m-1)}{2}}\, 1^{m-1} . 2^{m-2} \ldots (m-1)^1 C^j_m S_{j,m-k},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\Delta_j}{\Delta} = (-1)^{m+k} \frac{C_m^j \varepsilon^{m-j} S_{j,m-k}}{(\varepsilon\omega)^m 1.2\ldots m},$$

où C_m^j est le nombre des combinaisons de m objets j à j.

Par suite, on a

$$\varpi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(\varepsilon\omega)^m 1.2\ldots m} \left\{ \begin{array}{l} C_m^0 S_{0,m-k} \varepsilon^m P'_{m'}(x) - C_m^1 S_{1,m-k} \varepsilon^{m-1} P'_{m'}(x+\omega) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (-1)^{m-1} C_m^{m-1} \varepsilon S_{m-1,m-k} P'_{m'}(x + \overline{m-1}\,\omega) \\ + (-1)^m C_m^m S_{m,m-k} P'_{m'}(x + m\omega) \end{array} \right\}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, m).$$

Si l'on pose d'une manière générale

$$f(x+m\varpi) - C_m^{m-1} \varepsilon f(x + \overline{m-1}\,\omega) + \ldots + (-1)^m \varepsilon^m f(x) = \delta_{\omega\varepsilon}^{(m)} f(x),$$

on aura, en particulier,

$$\varpi_m(x) = \frac{1}{(\varepsilon\omega)^m 1.2\ldots m} \delta_{\omega\varepsilon}^m P'_{m'}(x).$$

On voit, par conséquent, que $\varpi_k(x)$ est une fonction linéaire homogène des quantités $P'_{m'}(x), \ldots, P'_{m'}(x+m\omega)$, dont les coefficients sont des polynomes en x *tous de degré* $m-k$. Or, ces quantités P' sont des expressions de même forme que $P'_{m'}(x)$, de même multiplicateur ε' et de même degré m'. Donc $\varpi_k(x)$ est une expression de la forme $P'_{m'}(x)$ de même multiplicateur ε' et d'un degré égal ou inférieur à $m'+m-k$.

Faisant successivement $k = m, m-1, \ldots, 1, 0$, on aura pour $\varpi_m(x)$, $\varpi_{m-1}(x), \ldots, \varpi_1(x), \varpi_0(x)$ des expressions de la forme $P'_{m'}(x)$ du même multiplicateur ε', mais de degrés respectivement égaux ou inférieurs à m', $m'+1$, $m'+m-1$, $m'+m$. Les coefficients des termes du plus haut degré sont dans ces expressions

$$(166) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{C_m^0}{(\varepsilon\omega)^m 1.2\ldots m} \delta_{\omega\varepsilon}^{m'} \varpi'_{m'}(x), \\ \dfrac{-C_m^1}{(\varepsilon\omega)^m 1.2\ldots m} \delta_{\omega\varepsilon}^{m} \omega'_{m'}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{(-1)^m C_m^m}{(\varepsilon\omega)^m 1.2\ldots m} \delta_{\omega\varepsilon}^{m} \varpi'_{m'}(x), \end{array} \right.$$

et ne diffèrent mutuellement que par des facteurs constants.

Donc, si les deux formes $P_m(x)$ *et* $P'_{m'}(x)$ *représentent une même fonction, chaque* coefficient de l'une admet la forme de l'autre ainsi que son multiplicateur, mais avec un degré égal ou inférieur à la différence entre $m + m'$ et l'exposant de la puissance de x qui multiplie ce coefficient.

Pour $m' = 0$, on voit que $\varpi_m(x)$ est du degré zéro, c'est-à-dire, ce qu'on a déjà vu, que si $P_m(x)$ admet la période ω' au multiplicateur ε', le coefficient $\varpi_m(x)$ de la plus haute puissance de x est doublement périodique de seconde espèce comme $P_m(x)$ lui-même.

118. Soit maintenant $F(x)$ capable des deux formes $P_m(x)$, $P'_{m'}(x)$; il faut que les coefficients $\varpi_j(x)$ de $P_m(x)$ soient de la forme $P'_{m'}(x)$ avec des degrés respectivement égaux, en général, à m', $m'+1$, $m'+m$. On aura donc

$$\varpi_{m-k}(x) = \varpi'_{k0}(x) + \ldots + x^{m'+k}\varpi'_{k,m+k}(x) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m),$$

les fonctions ϖ' à deux indices étant entièrement analogues aux fonctions ϖ' à un seul indice dans $P'_{m'}(x)$. Remarquons que l'on a, d'après la formule (166),

$$\varpi'_{k,m'+k}(x) = \frac{(-1)^k C_m^k}{(\varepsilon\omega)^m 1.2\ldots m} \delta_{\omega\varepsilon}^m \varpi'_{m'}(x).$$

Mais le second membre de l'équation (166) admet comme le premier membre la période ω et le multiplicateur ε. On a donc

$$\varpi_{m-k}(x) = \Pi'_{k0}(x) + \Pi'_{k1}(x)\,u(x) + \ldots + \Pi'_{k,m'+k}(x)\,u^{m'+k}(x),$$

où les fonctions Π' sont doublement périodiques de seconde espèce aux multiplicateurs ε et ε'.

Rappelons en même temps que l'on a

$$\Pi'_{k,m'+k}(x) = (-1)^{m'+k}\varpi'_{k,m'+k}(x).$$

La fonction considérée $F(x)$, qui est égale à $P_m(x)$, s'exprime de la manière suivante

$$F(x) = U_{m+m'} + x U_{m+m'-1} + \ldots + x^m U_{m'},$$

en désignant par $U_{m'-k}$ un polynome en $u(x)$ de degré $m'+k$, dont les coefficients sont doublement périodiques de seconde espèce aux multiplicateurs ε et ε'.

119. Si l'on dirige le calcul de manière que l'expression $P'_{m'}(x)$ soit susceptible de la forme $P_m(x)$ on obtiendra pour $F(x)$ l'expression

$$F(x) = U'_{m+m'} + x U'_{m+m'-1} + \ldots + x^{m'} U'_m,$$

où U'_{m+k} désigne un polynome en $u'(x)$ de degré $m+k$, dont les coefficients sont doublement périodiques de seconde espèce aux multiplicateurs ε, ε'.

Nous nous proposons de mettre $F(x)$ sous une forme finale qui renferme à la fois les deux formes $P_m(x)$ et $P'_{m'}(x)$. Mais nous aurons besoin de quelques théorèmes préliminaires.

120. *Si le polynome en $u(x)$*

$$\psi'_0(x) + \psi'_1(x)\, u(x) + \ldots + \psi'_\rho(x)\, u^\rho(x),$$

dont les coefficients ψ' admettent la période ω' au multiplicateur ε', est nul identiquement, tous ses coefficients sont identiquement nuls.

On a, en effet,

$$\psi'_0(x+k\omega') + \psi'_1(x+k\omega')\, u(x+k\omega') + \ldots + \psi'_\rho(x+k\omega')\, u^\rho(x+k\omega') = 0,$$

ce qui s'écrit, en divisant par ε^k et quel que soit l'entier k,

$$\psi'_0(x) + \psi'(x)[u(x) - k\omega'] + \ldots + \psi'_\rho[u(x) - k\omega']^\rho = 0.$$

Le polynome en z

$$\psi'_0(x) + \psi'(x) z + \ldots + \psi'_\rho(x) z^\rho$$

a donc infinité de racines et, par suite, les coefficients ψ' sont identiquement nuls.

De même :

Si le polynome en $u'(x)$

$$\psi_0(x) + \psi_1(x)\, u'(x) + \ldots + \psi_{\rho'}(x)[u'(x)]^{\rho'},$$

dont les coefficients admettent la période ω avec le multiplicateur ε, est identiquement nul, tous ses coefficients sont identiquement nuls.

De ces deux théorèmes, on déduit que :

Si un polynome aux variables $u(x)$ et $u'(x)$, dont les coefficients admettent les périodes ω et ω' et les multiplicateurs ε et ε', est identiquement nul, tous ses coefficients sont identiquement nuls.

En effet, ordonnons-le par rapport à $u(x)$. Les coefficients de $u(x)$ sont de la forme ψ', donc ils sont séparément nuls. Mais ce sont des polynomes en $u'(x)$ dont les coefficients sont de la forme $\psi(x)$. Donc les divers coefficients de ces polynomes sont identiquement nuls.

Comme corollaire :

Si deux polynomes aux deux variables $u(x)$, $u'(x)$ dont les coefficients *admettent les périodes* ω *et* ω' *avec les multiplicateurs* ε *et* ε' *sont identiques, tous leurs coefficients sont identiques chacun à chacun.*

121. Nous avons trouvé

$$F(x) = U_{m'+m} + x U_{m'+m-1} + \ldots + x^m U_m.$$

En dehors des U remplaçons x par $-[u(x) + u'(x)$, ce qui est possible, puisque l'on a par définition

$$u + u' + x = 0.$$

Nous aurons

$$F(x) = U_{m'+m} - [u(x) + u'(x)] U_{m'+m-1} + \ldots + (-1)^m [u(x) + u'(x)]^m U_{m'}.$$

C'est un polynome aux deux variables $u(x)$ et $u'(x)$ à coefficients doublement périodiques de seconde espèce, de degré m en $u'(x)$. Je dis qu'il est de degré m' par rapport à $u(x)$.

En effet, on a aussi

$$F(x) = U'_{m+m'} - [u(x) + u'(x)] U'_{m+m'-1} + \ldots + (-1)^m [u(x) + u'(x)]^{m'} U'_m,$$

et cette expression doit être identique à la précédente. D'après les théorèmes du n° **120**, il faut que $F(x)$ soit du degré m' par rapport à $u(x)$.

En résumé :

Si une fonction $F(x)$ *est capable des deux formes* $P_m(x)$ *et* $P'_{m'}(x)$, *elle coïncide avec un polynome aux deux variables* $u(x)$ *et* $u'(x)$ *à coefficients doublement périodiques aux périodes* ω *et* ω' *et aux multiplicateurs* ε *et* ε'; *elle est de degré* $m + m'$ *en général, et est toujours de degré* m *en* $u'(x)$ *et de degré* m' *en* $u(x)$, *et ne peut s'exprimer ainsi que d'une seule manière.*

122. Nous avons vu que, dans tous les cas, le système (A) du n° **109** admet m solutions distinctes susceptibles chacune des deux formes P et P'.

Il résulte de ce qui précède que les éléments de ces m solutions peuvent être mis sous la forme

$$y_{ik} = R_{ik}(u, u', x),$$

où $R(x, u, u')$ désigne une expression de la nature de $F(x)$ dans le numéro précédent.

123. Comme exemple d'intégration du système (A), nous rappellerons que M. Picard a intégré le système

$$\frac{du}{ds} = \frac{v}{R}, \qquad \frac{dv}{ds} = -\frac{u}{R} - \frac{w}{r}, \qquad \frac{dw}{ds} = \frac{v}{r},$$

où R et r désignent les deux rayons de courbure d'une courbe dont l'arc est s, et u, v, w représentent les neuf cosinus des angles que font avec les axes de coordonnées la tangente, la normale et la binormale de la courbe. M. Picard a intégré ce système de la forme du n° 111 dans le cas où l'on a

$$\frac{1}{R} = \frac{2n}{a}\,\mathrm{dn}\left(\frac{S}{a}\right), \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{b},$$

a et b étant deux constantes, n un entier positif et $\mathrm{dn}\,x$ la troisième fonction elliptique.

Nous renverrons, pour cet exemple, le lecteur au Mémoire de M. Picard, où il trouvera les détails nécessaires pour le calcul, et des explications sur l'origine de ces questions dans les profondes recherches de M. Hermite sur l'équation de Lamé

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2\,\mathrm{sn}^2 x + h]y,$$

où $\mathrm{sn}\,x$ est la fonction elliptique ordinaire de module k, n un entier positif et h une constante quelconque.

CHAPITRE VII.

DES SYSTÈMES D'ORDRE QUELCONQUE ET THÉORÈMES COMPLÉMENTAIRES.

124. Il est facile d'établir qu'un système d'équations différentielles d'ordre quelconque peut être remplacé par un système d'équations du premier ordre.

Soit, en effet,

$$(167)\qquad F_i\left(x, z, \frac{dz_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{\lambda_{j1}} z_1}{dx^{\lambda_{j1}}}, \ldots, z_n, \frac{dz_n}{dx}, \ldots, \frac{d^{\lambda_{jn}} z_n}{dx^{\lambda_{jn}}}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

un système de n équations différentielles, d'ordres variés par rapport à des fonctions $z_1, \ldots, z_n$ d'une même variable indépendante x. Ce système renferme autant d'équations que d'inconnues. Prenons pour inconnues auxiliaires les dérivées successives des variables $z_1, \ldots, z_n$, nous aurons le nouveau système

$$(168)\qquad \left\{\begin{array}{l} F_i\left(x, z_1, z'_1, \ldots, z_1^{(\lambda_1-1)}, \dfrac{dz_1^{(\lambda_1-1)}}{dx}, \ldots, z_n, \ldots, z_n^{(\lambda_n-1)}, \dfrac{dz_n^{(\lambda_n-1)}}{dx}\right) = 0, \\ \qquad \dfrac{dz_1}{dx} = z'_1, \qquad \ldots, \qquad \dfrac{dz_1^{(\lambda_1-2)}}{dx} = z_1^{(\lambda_1-1)}. \\ \qquad \ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad \dfrac{dz_n}{dx} = z'_n, \qquad \ldots, \qquad \dfrac{dz_n^{(\lambda_n-2)}}{dx} = z_1^{(\lambda_n-1)}, \end{array}\right.$$

renfermant $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ équations du premier ordre, si l'on appelle λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ respectivement les plus grandes valeurs des nombres $\lambda_{j1}, \ldots, \lambda_{jn}$ dans les équations (167).

Il est évident que l'intégration du système (167) entraîne celle du système (168) et réciproquement.

125. On peut remplacer le système (167) par un système analogue au système (168), mais de forme plus symétrique.

En effet, on suppose implicitement dans le système (167) et, par suite, dans le système (168), que les premiers membres des équations, c'est-à-dire les fonctions F des diverses lettres $x, z_1, z'_1, \ldots$, sont indépendants entre eux. On pourra donc tirer de $n-1$ de ces équations $n-1$ des dérivées $\frac{dz^{(\alpha)}}{dx}$ $(\alpha = \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, et les porter dans l'une quelconque des autres; en d'autres termes, on pourra éliminer $n-1$ dérivées dans chacune des n premières équations (168), et il faudra que le nouveau système se présente sous la forme

$$(169)\quad \left\{\begin{array}{l} \Phi_i\left(x, z_1, z'_1, \ldots, z_1^{(\mu_1)}, \ldots, z_k, z'_k, \ldots, z_k^{(\mu_k)}, \dfrac{dz_k^{(\mu_k)}}{dx}, \ldots, z_n, \ldots, z_n^{(\mu_n)}\right) = 0, \\ \dfrac{dz^{(\alpha-1)}}{dx} = z^{(\alpha)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{array}\right.$$

Chaque équation Φ renfermera une dérivée, sinon on pourrait, sans intégration, faire disparaître, par des procédés de calcul ordinaire, l'une des variables de la question. Chacun des Φ renfermera une dérivée distincte, sans quoi on pourrait égaler les valeurs des dérivées égales tirées des deux équations $\Phi = 0$ différentes, et l'on aurait une relation $\Phi = 0$ sans dérivées.

Développons le calcul. Soit

$$(170)\qquad \Phi(x, z_1, z'_1, \ldots, z_1^{(\nu_1)}, \ldots, z_n, z'_n, \ldots, z_n^{(\nu_n)}) = 0$$

une équation sans dérivées. On tirerait de là l'une des inconnues $z_k^{(r)}$ et on pourrait l'éliminer entre cette équation (170) et $n-1$ des n premières équations du système (169), de sorte qu'on ait

$$(171)\qquad \psi_i(x, z_1, z'_1, \ldots, z_1^{(\mu_1)}, \ldots, z_k, z'_k, z_k^{(r-1)}, z_k^{(r+1)}, \ldots, z_k^{(\mu_k)}, z_n, \ldots, z_n^{(\mu_n)}) = 0$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots, n-1).$$

En outre l'équation

$$\frac{dz_k^{(r-1)}}{dx} = z_k^{(r)}$$

pourrait être remplacée par l'équation

$$\psi\left(x, z_1, z'_1, \ldots, z_k^{(r-1)}, z_k^{(r+1)}, \ldots, z_n, z'_n, \ldots, \frac{dz_k^{(r-1)}}{dx}\right) = 0,$$

c'est-à-dire par l'équation (170) quand on y a remplacé $z_k^{(r)}$ par sa valeur tirée de l'équation ci-dessus.

Mais si l'on différentie l'équation (170), on a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{dz_1} z'_1 + \ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial z_k^{(r-1)}} z_k^{(r)} + \frac{\partial\Phi}{\partial z_k^{(r)}} z_k^{(r+1)} + \ldots = 0.$$

On peut encore éliminer $z_k^{(r)}$ au moyen de la relation $\dfrac{dz_k^{(r-1)}}{dx} = z_k^{(r)}$ et l'on aura finalement le système

$$(172)\quad \begin{cases} \psi = 0, & \\ \psi_i = 0 & (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \dfrac{dz_1}{dx} = z_1', \quad \ldots, & \dfrac{dz_1^{(\mu_1-2)}}{dx} = z_1^{(\mu_1-1)}, \\ \ldots\ldots, \quad \ldots, & \ldots\ldots, \\ \dfrac{dz_k}{dx} = z_k', \quad \ldots, \quad \dfrac{dz_k^{(r-2)}}{dx} = z_k^{(r-1)}, \quad \dfrac{dz_k^{(r+1)}}{dx} = z_k^{(r+2)}, \quad \ldots, & \dfrac{dz_k^{(\mu_k-2)}}{dx} = z_k^{(\mu_k-1)}, \\ \ldots\ldots, \quad \ldots, \quad \ldots\ldots, \quad \ldots\ldots, \quad \ldots, & \ldots\ldots, \\ \dfrac{dz_n}{dx} = z_n', \quad \ldots, & \dfrac{dz_n^{(\mu_n-2)}}{dx} = z_n^{(\mu_n-1)}, \end{cases}$$

qui renferme $\mu_1 + \ldots + (\mu_k - 1) + \ldots + \mu_n$ équations à autant d'inconnues.

Le système (172) est équivalent au système (169) puisque toutes les conditions fonctionnelles de ce dernier système sont satisfaites dans le système (172).

En continuant ainsi, on peut être ramené à un système complètement algébrique. Nous écarterons ce cas.

Donc, en général, tout système de n équations différentielles à n inconnues peut être ramené à un système de la forme dite *de Jacobi*.

$$(173)\qquad f_\lambda\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \frac{dy_\lambda}{dx}\right) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m).$$

126. En résolvant les équations (163) par rapport aux dérivées qu'elles renferment, on pourra mettre le système sous la forme

$$\frac{dy_\lambda}{dx} = \varphi_\lambda(x, y_1, \ldots, y_m) \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots, m).$$

Le calcul est particulièrement intéressant dans le cas où le système (173) est *algébrique,* c'est-à-dire lorsque les fonctions F sont algébriques, entières et rationnelles par rapport à toutes les lettres qu'elles renferment.

Mettons les équations (173) sous la forme

$$(174)\quad \begin{cases} Y_1^{\nu_1} + f_{11}(x, y_1, \ldots, y_m) Y_1^{\nu_1-1} + \ldots + f_{1\nu_1}(x, y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Y_m^{\nu_m} + f_{m1}(x, y_1, \ldots, y_m) Y_m^{\nu_m-1} + \ldots + f_{m\nu_m}(x, y_1, \ldots, y_m) = 0, \end{cases}$$

où l'on a

$$\frac{dy_\lambda^h}{dx^h} = Y_\lambda^h.$$

Posons

$$(175)\qquad t = a_1 Y_1 + \ldots + a_m Y_m,$$

les quantités a étant des indéterminées et formons l'équation

$$(t - t_1)\dots(t - t_N) = 0, \tag{176}$$

où $N = \nu_1 \nu_2 \dots \nu_m$ représente le nombre des combinaisons des éléments des solutions des équations (174). L'équation (176) est rationnelle par rapport aux coefficients des équations (174), car son premier membre est une fonction symétrique des racines de ces équations. On peut donc calculer les coefficients de l'équation (176) et la mettre sous la forme

$$R(t) = g_0(x, y_1, \dots, y_m)t^N + \dots + g_N(x, y_1, \dots, y_m) = 0, \tag{177}$$

où les g sont des fonctions entières des lettres qu'ils renferment.

Prenons maintenant d'autres constantes b et posons

$$u = b_1 Y_1 + \dots + b_m Y_m, \tag{178}$$

ce qui donnera N fonctions $u_1, u_2, \dots, u_N$. Il est évident que, quel que soit ρ entier et positif, l'expression $t_1^\rho u_1 + \dots + t_N^\rho u_N$ sera une fonction symétrique des racines des équations (174) et s'exprimera rationnellement en $x, y_1, \dots, y_m$. Posons alors

$$\left\{\begin{array}{lll} u_1 & + \dots + u_N & = \omega_0(x, y_1, \dots, y_m), \\ u_1 t_1 & + \dots + u_N t_N & = \omega_1(x, y_1, \dots, y_m), \\ \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,} \\ u_1 t_1^{N-1} & + \dots + u_N t_N^{N-1} & = \omega_{N-1}(x, y_1, \dots, y_m), \end{array}\right. \tag{179}$$

et multiplions ces équations par des facteurs indéterminés $\lambda_{N-1}, \lambda_{N-2}, \dots, \lambda_1$ et g_0; nous aurons, après addition,

$$U_1 \Omega(t_1) + \dots + u_N \Omega(t_N) = g_0 \omega_{N-1} + \lambda_1 \omega_{N-2} + \dots + \lambda_{N-1}\omega_0, \tag{180}$$

à condition que Ω soit déterminé par la relation

$$g_0 t^{N-1} + \lambda_1 t^{N-2} + \dots + \lambda_{N-1} = \Omega(t).$$

Déterminons maintenant les λ, de sorte que l'on ait

$$\Omega(t_1) = 0, \quad \dots, \quad \Omega(t_{\alpha-1}) = 0, \quad \Omega(t_{\alpha+1}) = 0, \quad \dots, \quad \Omega(t_N) = 0,$$

ou, ce qui revient au même, à condition que $\Omega(t)$ qui est du degré $N - 1$ en t, et dont on connaît les racines, devienne $\frac{R(t)}{t - t_\alpha}$, c'est-à-dire

$$g_0 t^{N-1} + (g_1 + g_0 t_\alpha) t^{N-2} + \dots + (g_{N-1} + g_{N-2} t_\alpha + \dots + g_0 t_\alpha^{N-1}).$$

Alors, en tenant compte de l'équation de définition de $\Omega(t)$, nous aurons

$$(181)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = g_1 + g_0 t_\alpha, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda_{N-1} = g_{N-1} + g_{N-2} t_\alpha + \dots + g_0 t_\alpha^{N-1}. \end{array}\right.$$

En outre, l'équation (180) deviendra

$$u_\alpha = \frac{g_0 \omega_{N-1} + \lambda_1 \omega_{N-2} + \dots + \lambda_{N-1}\omega_0}{\Omega(t_\alpha)}.$$

Puisque, d'une part, les λ, d'après les équations (181), sont des fonctions entières de t_α avec des coefficients entiers en $x, y_1, \dots, y_m$ et que, d'autre part, d'après l'équation $\frac{R(t)}{t-t_\alpha} = \Omega(t)$, on a

$$\Omega(t_\alpha) = R'(t_\alpha) = N g_0 t_\alpha^{N-1} + (N-1) g_1 t_\alpha^{N-2} + \dots + g_{N-1},$$

on voit que u_α prendra la forme

$$(182)\qquad u_\alpha = \frac{S_1(x, y_1, \dots, y_m) t_\alpha^{N-1} + S_2(x, y_1, \dots, y_m) t_\alpha^{N-2} + \dots + S_N(x, y_1, \dots, y_m)}{R'(t_\alpha)},$$

où les S sont rationnels et où $R'(t_\alpha)$ ne dépend pas des constantes b renfermées dans u_α. En outre, à cause de l'indétermination des constantes a, on peut supposer que $R'(t_\alpha)$ n'est pas nul.

Si l'on supposait $R'(t_\alpha) = 0$ il y aurait deux racines égales dans l'équation (177) et, par suite, une relation algébrique entre $x, y_1, y_2, \dots, y_m$, ce que l'on ne suppose pas.

Soit $Y_{1\alpha}, \dots, Y_{m\alpha}$ la combinaison des solutions des équations (174) qui correspond à t_α et, avec des choix quelconques des constantes b, formons les m équations

$$(183)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_1 Y_{1\alpha} + \dots + a_m Y_{m\alpha} = t_\alpha, \\ b_{11} Y_{1\alpha} + \dots + b_{m1} Y_{m\alpha} = S_{11} t_\alpha^{N-1} + \dots + S_{N1} : R'(t_\alpha). \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ b_{1,m-1} Y_{1\alpha} + \dots + b_{m,m-1} Y_{m\alpha} = S_{1,m-1} t_\alpha^{N-1} + \dots + S_{N,m-1} : R'(t_\alpha). \end{array}\right.$$

Nous pouvons construire les formules

$$Y_{\rho\alpha} = A_{1\rho} t_\alpha^{N-1} + \dots + A_{N\rho} : R'(t_\alpha),$$

où les A sont des fonctions rationnelles de $x, y_1, \dots, y_m$ et $R'(\alpha)$ une fonction entière de degré $N-1$ en t_α, avec des coefficients fonctions entières des mêmes lettres.

Donc, les branches $Y_{1\alpha}, \dots, Y_{m\alpha}$ des fonctions algébriques $Y_1, \dots, Y_m$ de x,

$y_1, \ldots, y_m$ sont formées de fonctions rationnelles d'une seule fonction algébrique t_α et de ces grandeurs $x, y_1, \ldots, y_m$.

Les coefficients s'expriment rationnellement au moyen de ces quantités, et à chaque combinaison de branches correspond une valeur de t, solution de l'équation (177) et réciproquement. De plus, la forme des expressions obtenues est indépendante de l'indice α de t.

127. Soit $g(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ le plus petit dénominateur commun des fonctions $A_{1\rho}, \ldots, A_{N\rho}$ ($\rho = 1, 2, \ldots, m$), on aura

$$A_{\alpha\rho} = \frac{g_{\alpha\rho}(x, y_1, \ldots, y_m)}{g(x, y_1, \ldots, y_m)},$$

et $g_{\alpha\rho}$ et g seront des fonctions entières. On pourra donc écrire

$$Y_{\rho\alpha} = \frac{g_{1\rho} t_\alpha^{N-1} + g_{2\rho} t_\alpha^{N-2} + \ldots + g_{N\rho}}{g R'(t_\alpha)},$$

et, si l'on pose $g R(t) = G(x, t, y_1, \ldots, y_m)$, on aura, puisque g ne dépend pas de t,

$$Y_{\rho_\alpha} = \frac{G_\rho(x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m)}{\dfrac{\partial G(x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m)}{\partial t_\alpha}},$$

où G_ρ sera une fonction de $x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m$, du degré $N - 1$ en t_α. En revenant à la notation $Y = \dfrac{dy}{dx}$, nous aurons ce théorème :

Le système différentiel

$$f_\lambda\left(x, y_1, \ldots, y_m, \frac{dy_\lambda}{dx}\right) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m),$$

du degré ν_λ *en* $\dfrac{dy_\lambda}{dx}$, *peut être remplacé par les* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m = N$ *systèmes suivants, chacun équivalent au précédent*

$$(184) \qquad \frac{dy_\lambda}{dx} = \frac{G_\lambda(x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m)}{\dfrac{\partial G(x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m)}{\partial t_\alpha}} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, N),$$

où $G_1, G_2, \ldots, G_m$ *sont des fonctions entières et où* t_α *représente successivement chacune des* N *solutions de l'équation du* $N^{\text{ième}}$ *degré*

$$G(x, t, y_1, \ldots, y_m) = 0.$$

Les fonctions $G_1, \ldots, G_m$ *sont du degré* $N - 1$ *en* t_α. La forme (184) est dite *de Jacobi* ou *de M. Weierstrass.*

128. On peut décomposer G en facteurs irréductibles en t. Supposons que t_α annule le facteur $g(x, t, y, \ldots, y_m)$, on aura

$$G = g \times h(x, t, y_1, \ldots, y_m),$$

et h ne sera pas nul pour $t = t_\alpha$. On aura, par suite,

$$\frac{\partial G}{\partial t} = h\frac{\partial g}{\partial t} + g\frac{\partial h}{\partial t},$$

et pour $t = t_\alpha$

$$\frac{\partial G}{\partial t_\alpha} = h\frac{\partial g}{\partial t_\alpha}.$$

On en déduira la formule

$$Y_{\rho\alpha} = \frac{G_\rho(x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m)}{h(x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m)} \times \frac{1}{\frac{\partial g}{\partial t_\alpha}}.$$

Soit n le degré en t de l'équation $g = 0$ et soient $t_\alpha, t_\beta, \ldots, t_\mu$ ses solutions, on aura

$$\frac{G_\rho(t_\alpha)}{h(t_\alpha)} = \frac{G_\rho(t_\alpha) \times h(t_\beta) \times \ldots \times h(t_\mu)}{h(t_\alpha) \times h(t_\beta) \times \ldots \times h(t_\mu)}$$

et le dénominateur sera une fonction entière symétrique des racines. Il s'exprimera rationnellement en $x, y_1, \ldots, y_m$. Le numérateur renfermera une fonction entière symétrique des racines de l'équation et $\frac{g}{t - t_\alpha}$ s'exprimera rationnellement en $x, y_1, \ldots, y_m$. Le numérateur pourra même, au moyen de l'équation $g = 0$, être abaissé au degré $n - 1$ en t_α. On aura donc la formule

$$Y_{\rho\alpha} = \frac{g_\rho(x, t_\alpha, y_1, \ldots, y_m)}{\frac{\partial g}{\partial t_\alpha}}.$$

D'où, comme conclusion générale, le théorème suivant :

Décomposons le polynome $R(t)$ *en facteurs irréductibles* $g_1, g_2, \ldots, g_\sigma$. *Le système différentiel proposé pourra être remplacé par les systèmes équivalents suivants, au nombre de* $N = \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$

$$\frac{dy_\lambda}{dx} = \frac{g_{k\lambda}(x, t_{k\rho}, y_1, \ldots, y_m)}{\frac{\partial g_k}{\partial t_{k\rho}}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \sigma), \tag{185}$$

où $g_k, g_{k1}, \ldots, g_{km}$ *sont des fonctions entières de leurs lettres et où* $t_{k\rho}$ *est successivement remplacé par chacune des racines de chacune des équations irréductibles* $g_k = 0$.

Il est important de remarquer que la réduction pratique du système (174) au système (184) est toujours possible, mais que le passage au système (185) n'est pas toujours praticable, à cause de la décomposition effective du polynome $R(t)$ en ses facteurs irréductibles. On a donc seulement démontré l'équivalence des systèmes (174) et (185). Nous ajouterons que, dans une équation irréductible telle que $g_k = 0$, on peut passer d'une solution t à toutes les autres, d'une manière continue en faisant décrire certains chemins fermés aux variables x et y. Donc les systèmes (185), qui correspondent aux diverses solutions d'une même équation $g_k = 0$, peuvent être représentés par un seul d'entre eux et, par suite :

Le système (174) peut être représenté par les σ systèmes différentiels

$$\frac{dy_\lambda}{dx} = \frac{g_{k\lambda}(x, t_\lambda, y_1, \ldots, y_m)}{\dfrac{\partial g_k}{\partial t_\lambda}}, \tag{186}$$

où t_λ est une quelconque des solutions des σ équations algébriques

$$g_k = 0 \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, \sigma).$$

La théorie que nous venons de faire est générale. Le cas particulier qui nous intéresse est celui où les équations finales (184) ou (186) ont leurs seconds membres fonctions linéaires et homogènes de $y_1, y_2, \ldots, y_m$. L'étude de ces équations a été faite, dans tous les Chapitres précédents, sous la forme (A) du Chapitre I.

129. Puisque nous avons donné la théorie de la réduction à la forme canonique des *systèmes algébriques,* il ne nous semble pas inutile d'y joindre les premiers principes de l'*irréductibilité de ces systèmes*.

Soient

$$\frac{\partial\, G(x, t_1, y_1, \ldots, y_m)}{\partial t_1} \frac{dy_\lambda}{dx} = G_\lambda(x, t_1, \ldots, y_m) \tag{184'}$$

les équations d'un système algébrique où t_1 est une racine choisie de l'équation $G = 0$.

Supposons qu'il existe une solution $\eta_1, \ldots, \eta_m$ dont ν des éléments satisfassent à une relation algébrique telle que

$$f(x, \eta_1, \ldots, \eta_\nu) = 0. \tag{187}$$

Si, dans les équations (184), et avec les conditions $G = 0$ et

$$f(x, y_1, \ldots, y_\nu) = 0, \tag{188}$$

on élimine y_ν, par exemple, on obtiendra un système différentiel à $m - 1$ équations qu'on pourra supposer ramené à la forme canonique

$$(189)\qquad \frac{\partial g(x, u_1, y_1, \ldots, y_{\nu-1}, y_{\nu+1}, \ldots, y_m)}{\partial u_1}\frac{dy_\lambda}{dx}$$
$$= g_\lambda(x, y_1, \ldots, y_{\nu-1}, y_{\nu+1}, \ldots, y_m) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots, m),$$

et où u_1 est une solution de l'équation $g(x, u, y_1, \ldots, y_m) = 0$, et $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\nu-1}, \eta_{\nu+1}; \ldots, \eta_m$ formera une solution de ce système (189).

Réciproquement, si une partie des éléments d'une solution $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ de (184), soit $\eta_1, \ldots, \eta_\nu$, forme une solution complète d'un système à ν équations différentielles

$$(190)\qquad \frac{\partial h(x, v_1, y_1, \ldots, y_\nu)}{\partial v_1}\frac{dy_\mu}{dx} = h_\mu(x, v_1, y_1, \ldots, y_\nu) \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots, \nu),$$

où v_1 satisfait à l'équation $h(x, v_1, y_1, \ldots, y_\nu) = 0$, appelons $\overline{t}_1$ et $\overline{v}_1$ les valeurs de t_1 et v_1 qui correspondent à la solution $\eta_1, \ldots, \eta_m$, on tirera des équations (184) et (190) les relations

$$(191)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial G(x, \overline{t}_1, \eta_1, \ldots, \eta_m)}{d\overline{t}_1} h_\lambda(x, \overline{v}_1, \eta_1, \ldots, \eta_\nu) = \dfrac{\partial h(x, \overline{v}_1, \eta_1, \ldots, \eta_\nu)}{d\overline{v}_1} G_\lambda(x, \overline{t}_1, \eta_1, \ldots, \eta_m) \\ \qquad\qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots, \nu). \end{array}\right.$$

Il y aura donc des relations algébriques entre les éléments de la solution $\eta_1, \ldots, \eta_m$, à la condition que les équations (191) ne soient pas toutes identiques, c'est-à-dire que les ν premières équations du système (184) ne renferment que $y_1, \ldots, y_\nu$; alors elles formeraient elles-mêmes un système différentiel à ν équations. Écartons ce dernier cas, et éliminons de l'une des équations (174), de l'équation $G = 0$ et de l'une des relations

$$\frac{\partial G(x, t_1, y_1, \ldots, y_m)}{\partial t_1} h_\alpha(x, v_1, y_1, \ldots, y_m) = \frac{\partial h}{\partial v_1} G_\alpha,$$

la quantité y_m; nous aurons un système différentiel à $m-1$ équations, admettant la solution $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m-1}$ et dont la partie $\eta_1, \ldots, \eta_\nu$ forme encore une solution de (190). Opérons sur ce système à $m-1$ équations comme on a fait pour le système précédent, nous obtiendrons un système à $m-2$ équations, etc. et, finalement, nous aurons un système de ν équations de la forme

$$(192)\qquad \frac{\partial H(x_1, T_1, y_1, \ldots, y_\nu)}{\partial T_1}\frac{dy_\lambda}{dx} = H_\lambda(x, T_1, y_1, \ldots, y_\nu) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \nu),$$

où T_1 satisfait à la relation

$$(193)\qquad H(x, T_1, y_1, \ldots, y_\nu) = 0.$$

Ce système admettant la solution $\eta_1, \ldots, \eta_\nu$, commune avec le système (180), on tirera de (193) et (190)

$$(194) \qquad \frac{\partial \mathrm{H}(x, \overline{\mathrm{T}_1}, \eta_1, \ldots, \eta_\nu)}{\partial \overline{\mathrm{T}_1}} h_\alpha(x, \overline{v_1}, \eta_1, \ldots, \eta_\nu) = \frac{\partial h}{\partial \overline{v_1}} \mathrm{H}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \nu),$$

où $\overline{\mathrm{T}_1}$ satisfait à la relation

$$(195) \qquad \mathrm{H}(x, \overline{\mathrm{T}_1}, \eta_1, \ldots, \eta_\nu) = 0.$$

Si les équations (195) n'étaient pas identiques en $\eta_1, \ldots, \eta_\nu$, on pourrait encore diminuer d'une unité le nombre des équations du système (192), et alors une partie $\eta_1, \ldots, \eta_\nu$ de la solution $\eta_1, \ldots, \eta_m$ du système (190) serait une solution d'un système à moins de ν équations; *mais nous supposerons qu'aucune partie de la solution $\eta_1, \ldots, \eta_\nu$ de* (190) *ne forme une solution d'un système algébrique à moins de ν équations.* En conséquence, les équations (195) seront identiques, et, par suite, toutes les solutions de (190) formeront des parties des solutions de (184), et il est évident que l'identité des équations (195) subsiste quand, au lieu de $\overline{v_1}$, on y introduit une branche quelconque de la fonction implicite v_1 définie par l'équation $h(x, v_1, y_1, \ldots, y_m) = 0$, et que $\eta_1, \ldots, \eta_m$ est remplacé par $y_1, \ldots, y_m$. Il faudra supposer que $\overline{v_1}$ a suivi un chemin convenable pour arriver à l'une quelconque de ses branches.

De là une définition de l'irréductibilité.

Le système algébrique et différentiel de m équations est dit irréductible, *quand aucune combinaison de moins de m éléments de chacune de ses solutions ne forme une solution d'un système différentiel de moins de m équations. En d'autres termes, le système proposé ne fournit aucune solution à un système quelconque de moins de m équations, algébrique et de même forme.*

130. Revenons aux équations (184) du n° **127**, et appelons *degré du système* le degré en t de l'équation algébrique

$$\mathrm{G}(x, t, y_1, \ldots, y_m) = 0.$$

Nous allons montrer qu'un système irréductible de m équations et de degré n ne peut avoir aucune solution commune avec un système de m équations, mais de degré inférieur à n.

Mettons, en effet, ce deuxième système sous la forme canonique

$$(196) \qquad \frac{\partial g(x, \theta, y_1, \ldots, y_m)}{\partial \theta} \frac{dy_\lambda}{dx} = g_\lambda(x, \theta, y_1, \ldots, y_m)$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, m),$$

où θ est une racine de l'équation irréductible de degré $\nu < n$,

$$(197) \qquad g(x, \theta, y_1, \ldots, y_m) = 0,$$

et supposons que le système (174) et les équations (196) et (197) déterminent une solution commune $\eta_1, \ldots, \eta_m$. On aurait

$$(198) \qquad \frac{G_\alpha(x, T_1, \eta_1, \ldots, \eta_m)}{\dfrac{\partial G(x, T_1, \eta_1, \ldots, \eta_m)}{\partial T_1}} = \frac{g_\alpha(x, \Theta_1, \eta_1, \ldots, \eta_m)}{\dfrac{\partial g(x, \Theta_1, \eta_1, \ldots, \eta_m)}{\partial \Theta_1}} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

où T_1 et Θ_1 représentent les valeurs de t_1 et θ_1 qui correspondent à la solution $\eta_1, \ldots, \eta_m$. D'après ce qui précède, puisqu'il ne peut y avoir de relation algébrique entre les éléments d'une solution d'un système irréductible, l'équation (188) ou encore l'équation

$$\frac{G_\alpha(x, t_1, y_1, \ldots, y_m)}{\dfrac{\partial G(x, t_1, y_1, \ldots, y_m)}{\partial t_1}} = \frac{g_\alpha(x, \theta_1, y_1, \ldots, y_m)}{\dfrac{\partial g(x, \theta_1, y_1, \ldots, y_m)}{\partial \theta_1}}$$

doit être identique en $y_1, \ldots, y_m$, et alors les deux systèmes d'équations (184) et (196) se confondent, puisque toutes les solutions leur sont communes.

Mettons l'équation (197) sous la forme

$$(199) \qquad \theta_1^\nu + \omega_1(x, y_1, \ldots, y_m)\theta_1^{\nu-1} + \ldots + \omega_\nu(x, y_1, \ldots, y_m) = 0,$$

où les ω sont des fonctions rationnelles, et remarquons que la réduction d'un système différentiel à la forme canonique peut toujours être conduite de sorte que t_1, qui est une fonction rationnelle de $x, y_1, \ldots, y_m, \dfrac{dy_1}{dx}, \ldots, \dfrac{dy_m}{dx}$, soit encore, au moyen des équations (186) et (199), rendue fonction entière de θ_1 au degré $n - 1$, et à coefficients rationnels en $x, y_1, \ldots, y_m$. Alors on pourra poser

$$(200) \quad t_1 = \Omega_0(x, y_1, \ldots, y_m) + \Omega_1(x, y_1, \ldots, y_m)\theta_1 + \ldots + \Omega_{\nu-1}(x, y_1, \ldots, y_m)\theta_1^{\nu-1}.$$

Alors, à cause de (189), ou encore en éliminant θ_1, on aura une équation du degré ν en t_1, et les coefficients seront rationnels en $x, y_1, \ldots, y_m$. Mais l'équation $G = 0$ étant irréductible, il est impossible de supposer que l'équation (187) définissant θ_1 soit d'un degré inférieur.

Comme corollaire, l'équation $G = 0$, irréductible en $t_1, x, y_1, \ldots, y_m$, est encore irréductible en $t_1, \eta_1, \ldots, \eta_m$. Car, s'il en était autrement, le système différentiel initial aurait une solution commune avec un système de degré moindre.

Enfin, il résulte de ce qui précède que, si l'on considère un système irréductible qui a une solution commune avec un système du même nombre d'équations ou d'un nombre plus grand, toutes ses solutions forment chacune toute une solution ou une partie d'une solution du second système.

131. La théorie générale d'intégration que nous avons exposée dans les Chapitres précédents n'ôte rien à l'importance de procédés particuliers d'intégration qui fournissent d'ailleurs de remarquables théorèmes.

Nous donnerons, pour terminer ce travail, quelques exemples de ces théories particulières.

Nous avons appelé *solution* du système

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{A}$$

un ensemble de fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ satisfaisant à ces équations. Nous appellerons, *par opposition, intégrale* du système (A) toute relation

$$f(x, y_1, \ldots, y_n) = \text{const.}, \tag{201}$$

qui est identiquement satisfaite en vertu des équations (A), c'est-à-dire par une solution arbitraire de ces équations.

Si l'on connaît un système fondamental de solutions y_{ij}, la solution générale des équations (A) est de la forme

$$y_i = C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in}, \tag{202}$$

et l'on peut résoudre ces équations par rapport aux constantes arbitraires. On obtiendra ainsi n intégrales linéaires distinctes

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_{11}y_1 + \ldots + \alpha_{1n}y_n = C_1, \\ \alpha_{n1}y_1 + \ldots + \alpha_{nn}y_n = C_n, \end{array}\right. \tag{203}$$

où les α sont des fonctions connues des solutions données y_{ij}.

Réciproquement, si l'on connaît n intégrales distinctes, on obtiendra, en résolvant les équations (203), des équations de la forme

$$y_i = C_1 A_{i1} + \ldots + C_n A_{in}, \tag{204}$$

et, puisque les constantes sont indéterminées, on peut faire, par exemple, $C_2 = 0, \ldots, C_n = 0$, et l'on voit que A_{i1} sera une solution du système (A). On pourra donc mettre les équations (204) sous la forme (202).

Posé au point de vue de la recherche des *intégrales,* le problème de l'intégration du système (A) est donc différent de la théorie générale que nous avons exposée. On comprend qu'il y ait une importance considérable à rechercher les formes les plus simples des intégrales.

Supposons, par exemple, avec M. Darboux, que les coefficients a des équations (A) soient *des fonctions rationnelles de x*. Il pourra exister des intégrales non linéaires, algébriques et rationnelles, tandis que les intégrales linéaires peuvent être irrationnelles ou même transcendantes. Il y a donc intérêt à chercher ces intégrales de degré supérieur. Nous allons montrer comment M. Darboux parvient à résoudre ce problème, et en même temps indiquer les beaux théorèmes qui se rattachent à la question.

Prenons d'abord un exemple. L'équation

$$2a\frac{d^2y}{dx^2}+a'\frac{dy}{dx}-2y=0,$$

où a' est la dérivée de a, admet les deux intégrales premières linéaires

$$e^{-\int\frac{dx}{\sqrt{a}}}\left(y+\sqrt{a}\,\frac{dy}{dx}\right)=C_1,$$

$$e^{+\int\frac{dx}{\sqrt{a}}}\left(y-\sqrt{a}\,\frac{dy}{dx}\right)=C_2,$$

et elles peuvent être irrationnelles ou transcendantes, tandis que l'intégrale du second degré

$$y^2-a\frac{dy^2}{dx^2}=C_1C_2$$

est algébrique et rationnelle quand a est rationnel.

Considérons une intégrale rationnelle de degré quelconque

$$f(x,y_1,\ldots,y_n)=C, \tag{205}$$

elle doit satisfaire identiquement à l'équation aux dérivées partielles

$$0=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y_1}(a_{11}y_1+\ldots+a_{1n}y_n)+\ldots+\frac{\partial f}{\partial y_n}(a_{n1}y_1+\ldots+a_{nn}y_n). \tag{206}$$

On voit ainsi que, si la fonction f n'est pas homogène, en la décomposant en parties homogènes en $y_1,\ldots,y_n$, chaque partie égalée séparément à une constante donnera une intégrale du système (A). En effet, soit

$$f=f_1+f_2+\ldots+f_k,$$

on aura identiquement

$$\sum\frac{\partial f_i}{\partial x}+\sum\frac{\partial f_i}{\partial y_1}(a_{11}y_1+\ldots+a_{1n}y_n)\ldots+\sum\frac{\partial f_i}{\partial y_n}(a_{n1}y_1+\ldots+a_{nn}y_n)=0 \tag{207}$$
$$(i=1,2,\ldots,k).$$

Changeons y en λy, et nous aurons

$$(208)\quad \left\{\begin{aligned} & f_i(\lambda y_1, \ldots, \lambda y_n) = \lambda^{\mu_i} f_i(y_1, \ldots, y_n), \\ & \frac{\partial f_i(\lambda y_1, \ldots, \lambda y_n)}{\partial x} = \lambda^{\mu_i} \frac{\partial f_i(y_1, \ldots, y_n)}{\partial x}, \\ & \frac{\partial f_i(\lambda y_1, \ldots, \lambda y_n)}{\partial(\lambda y)} = \lambda^{\mu_i - 1} \frac{\partial f_i(y_1, \ldots, y_n)}{\partial y}, \end{aligned}\right.$$

et aussi

$$(209)\quad \sum \lambda^{\mu_i} \frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum \lambda^{\mu_i} \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(a_{11} y_1 + \ldots + a_{n1} y_n) + \ldots + \sum \lambda^{\mu_i} \frac{\partial f_i}{\partial y_n}(\ldots) = 0,$$

et, λ étant absolument arbitraire, il faut que l'on ait séparément

$$(210)\quad \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(a_{11} y_1 + \ldots + a_{n1} y_n) + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n}(a_{n1} y_1 + \ldots + a_{nn} y_n) = 0.$$

Nous pourrons donc supposer que, dans l'équation (205), f est homogène en $y_1, \ldots, y_n$.

Cela posé, soit y_{ij} un système fondamental de solutions et soit

$$(211)\qquad y_i = C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in}$$

la solution générale.

On peut supposer ces valeurs y_i portées dans $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ et f devra rester constant après la substitution (211).

Tout covariant F de f, multiplié par une puissance convenable (négative) du déterminant de la substitution (211), se transforme dans le covariant analogue formé avec la fonction $\varphi(C_1, C_2, \ldots, C_n)$, où $\varphi(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ est la fonction *indépendante de x* qui résulte de la substitution (211) faite dans $f(x, y_1, \ldots, y_n)$.

Mais ce nouveau covariant étant exprimé au moyen des constantes $C_1, \ldots, C_n$ prises comme nouvelles variables, est indépendant de x, c'est-à-dire est une constante par rapport à x. *Donc enfin tout covariant de l'intégrale f, multiplié par une puissance convenable d'une fonction connue de x, est également une intégrale.*

La proposition s'étend au cas où l'on a plusieurs intégrales, et où l'on considère un covariant quelconque du système de ces formes.

En effet, soient

$$\begin{gathered} f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_k(x, y_1, \ldots, y_n) \end{gathered}$$

k formes intégrales homogènes qui deviennent par la substitution (201) $\varphi_i(C_1, \ldots, C_n)$, c'est-à-dire des constantes.

Remplaçons les variables $y_1, \ldots, y_n$ par les variables $C_1, \ldots, C_n$ au moyen de la substitution (211). Nous aurons d'abord

$$f_i(x, C_1 y_{11} + \ldots + C_n y_{1n}, \ldots) = \varphi_i(C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Ensuite le covariant F de $f_1, f_2, \ldots, f_k$ est une expression $F(f_1, \ldots, f_k)$ qui se reproduit après la substitution (201), mais multipliée par une puissance δ^n du déterminant de la substitution.

On aura donc, par suite du changement de variables (211),

$$F(f_1, \ldots, f_k) = F(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)\delta^n.$$

Or δ ne dépend que de x. On voit donc, en revenant aux anciennes variables, que

$$F(f_1, \ldots, f_k) \times \delta^{-n}$$

est une constante, c'est-à-dire une intégrale.

Ce beau théorème s'applique, avec des modifications convenables, aux contrevariants de $f(x, y_1, \ldots, y_n)$, comme nous allons le montrer.

Introduisons pour cela le système auxiliaire

$$(212) \qquad \frac{dz_i}{dx} = -a_{1i}z_1 - a_{2i}z_2 - \ldots - a_{ni}z_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le système (212) est dit *réciproque du système* (A). Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et $z_1, \ldots, z_n$ deux solutions quelconques appartenant respectivement au système (A) et à son réciproque (212), on aura

$$y_1 z_1 + y_2 z_2 + \ldots + y_n z_n = \text{const.}$$

En effet, en dérivant, on trouve

$$z_1 \frac{dy_1}{dx} + \ldots + z_n \frac{dy_n}{dx} + y_1 \frac{dz_1}{dx} + \ldots + y_n \frac{dz_n}{dx} = 0,$$

et, si l'on remplace les dérivées par leurs valeurs tirées de (A) et (212), on trouve une identité.

Il résulte de là que, pour intégrer le système (A), on n'augmente pas la difficulté en considérant l'ensemble des systèmes (A) et (212). On aura, en effet, à résoudre en plus un système algébrique de la forme

$$y_{1i}z_1 + \ldots + y_{ni}z_n = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

pour connaître la solution générale de (212) quand on aura déjà un système fondamental de solutions de (A).

Or, si l'on pose

$$H = \sum\sum a_{ik} z_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

l'ensemble des systèmes (A) et (202) revient à écrire le *système canonique, dans le sens classique du mot,*

$$(213) \qquad \frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial z_i}, \qquad \frac{dz_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}.$$

Alors, soient

$$f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n \mid z_1, z_2, \ldots, z_n) = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

k intégrales homogènes en $y_1, \ldots, y_n$ et en $z_1, \ldots, z_n$.

Toute forme invariante de ce système d'intégrales, multipliée par une fonction connue de x, est encore une intégrale du système canonique.

En effet, la solution générale de (A) est

$$(214) \qquad y_i = C_1 y_{i1} + \ldots + C_n y_{in},$$

et les intégrales de (203) sont

$$(215) \qquad y_{1i} z_1 + \ldots + y_{ni} z_n = \gamma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

car les équations (204) et (205) donnent

$$y_1 z_1 + \ldots + y_n z_n = C_1 \gamma_1 + \ldots + C_n \gamma_n = \text{const.}$$

Alors, si dans les intégrales on remplace $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n$ par leurs valeurs tirées de (204) et (215), elles doivent se transformer en des fonctions

$$\varphi_i[C_1, \ldots, C_n \mid \gamma_1, \ldots, \gamma_n] \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

indépendantes de x. Mais (214) et (215) sont des substitutions linéaires qui changent les variables y et z dans les variables C et γ. Donc toute forme invariante du système des intégrales f se réduira, quand on la multipliera par une puissance convenable du déterminant de la substitution (214), à la fonction analytique formée avec les fonctions φ_i, c'est-à-dire à une fonction des constantes C et γ. Or, une telle fonction est encore une intégrale.

Le déterminant de la substitution est égal, comme on l'a vu au Chapitre I, à $e^{-\int \Sigma a_{ii} dx}$. Enfin, remarquons que le dernier théorème démontré comprend la fameuse proposition de Poisson dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

132. Donnons enfin, d'après M. Appell, les principes essentiels de la théorie des fonctions invariantes des intégrales des systèmes quelconques de la forme (A)

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n.$$

M. Appell donne, dans un sens très général, le nom de *fonction invariante* de np quantités X_{ik} à chaque fonction algébrique entière des variables qui se reproduit multipliée par une puissance de la substitution quand on fait sur les variables une substitution linéaire telle que

$$X_{ik} = C_{i1}Y_{1k} + \ldots + C_{in}Y_{nk}.$$

Une pareille fonction peut être représentée par le Tableau

$$\begin{Bmatrix} X_{11} & \ldots & X_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{1n} & \ldots & X_{np} \end{Bmatrix}$$

ou par la notation $\mathrm{I}\begin{vmatrix} X_{11} & \ldots & X_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{n1} & \ldots & X_{np} \end{vmatrix}$,

ou par la notation simplifiée $\mathrm{I}(X_{ik})_{np}$.

M. Appell démontre les théorèmes généraux suivants :

I. Si l'on a l'identité

$$\mathrm{I}(X_{ik})_{np} = D^m\,\mathrm{I}(Y_{ik})_{np},$$

D étant le déterminant de la substitution ; la fonction invariante est homogène et de degré m par rapport aux variables d'une même ligne.

II. On a identiquement

$$\mathrm{I}(X_{ik})_{np} = 0 \qquad \text{si} \qquad p < n.$$

III. Si $p = n$, une fonction invariante est, à un facteur près indépendant des variables X, une puissance du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_{11} & \ldots & X_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{n1} & \ldots & X_{nn} \end{vmatrix}.$$

IV. Toute fonction invariante est une fonction entière et homogène de degré n des $n(p-n)+1$ déterminants Δ, Δ_{ip}, $\Delta_{i,n+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ où l'on a posé d'une manière générale (en supposant $p > n$)

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} X_{11} & \ldots & X_{1,i-1} & X_{1k} & X_{1,i+1} & \ldots & X_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{n1} & \ldots & X_{n,i-1} & X_{nk} & X_{n,i+1} & \ldots & X_{nn} \end{vmatrix}.$$

On pourrait appliquer ces théorèmes à l'étude des systèmes différentiels (A). Mais, comme le fait M. Appell lui-même, on peut faire de ces systèmes une étude directe et d'ailleurs très simple; nous allons le faire voir.

Toute fonction algébrique entière F *des éléments des solutions d'un système fondamental* y_{ik} *des équations* (A)

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n$$

et des dérivées de ces éléments, qui se reproduit multipliée par un facteur constant différent de zéro quand on remplace le système fondamental de solutions par un autre système fondamental, est égale à une fonction algébrique entière des coefficients a et de leurs dérivées multipliée par une puissance de l'expression $e^{\int(a_{11}+\ldots+a_{nn})dx}$.

D'abord F doit se reproduire à un facteur constant près quand on permute entre elles les solutions y_{ik}. En effet, on peut remplacer les deux solutions y_{i1} et y_{i2} par les deux solutions $a_1y_{i1} + b_1y_{i2}$ et $a_2y_{i1} + b_2y_{i2}$, pourvu que le déterminant $a_1b_2 - b_1a_2$ soit différent de zéro. On prendra $a_1 = 0$, $b_2 = 0$, $a_2 = 1$, $b_1 = 1$ et l'on aura permuté les deux solutions y_{i1} et y_{i2}. Alors, les deux fonctions entières $F(y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in})$, $F(y_{i2}, y_{i1}, \ldots, y_{in})$ ne différant que par un facteur constant, il faut qu'on trouve dans chacune la solution y_{i1} avec les dérivées de ses éléments jusqu'à un même ordre de dérivation.

Donc, F *contient les dérivées des éléments des solutions* y_{ik} *jusqu'à un ordre de dérivation indépendant de l'indice* k.

F est une *fonction invariante* des quantités formant le Tableau

$$\begin{array}{ccc}
y_{11}, & \ldots, & y_{1n}, \\
\dfrac{dy_{11}}{dx}, & \ldots, & \dfrac{dy_{1n}}{dx}, \\
\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
\dfrac{d^py_{11}}{dx^p}, & \ldots, & \dfrac{d^py_{1n}}{dx^p}, \\
\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
y_{n1}, & \ldots, & y_{nn}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, \\
\dfrac{d^py_{n1}}{dx^p}, & \ldots, & \dfrac{d^py_{nn}}{dx^p},
\end{array}$$

et au nombre de $n^2(p+1)$. En effet, supposons qu'on passe du système fondamental de solutions y_{ik} à un autre système fondamental quelconque

$$Y_{ik} = C_{1i} y_{i1} + \ldots + C_{ni} y_{in}.$$

Il faudra que l'on ait identiquement

$$F\left(y_{11}, \ldots, y_{1n}, \ldots, \frac{d^p y_{1n}}{dx^p}, \ldots, \frac{d^p y_{nn}}{dx^p}\right) = H\,F\left(Y_{11}, \ldots, Y_{1n}, \ldots, \frac{d^p Y_{1n}}{dx^p}, \ldots, \frac{d^p Y_{nn}}{dx^p}\right),$$

H étant une fonction des seuls coefficients C de la substitution. D'ailleurs ce facteur H est différent de zéro tant que le nouveau système Y_{ik} est fondamental, c'est-à-dire tant que le déterminant des constantes C est différent de zéro. Donc H ne peut différer que par un facteur numérique k d'une puissance de D et l'on a

$$H = k D^m.$$

On peut supposer $Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n$ pour calculer k, et le calcul donne immédiatement $k = 1$.

La fonction F se reproduit donc multipliée par D^m quand on fait sur les variables y_{ik} la substitution indiquée. Donc F est une fonction invariante des $n^2(p+1)$ quantités du Tableau ci-dessus. Or, en vertu des équations proposées (A) et des équations dérivées qui ont même forme que les équations (A) elles-mêmes, on peut éliminer dans F *toutes les dérivées*, et alors F étant une fonction algébrique des seuls éléments du déterminant

$$D = |y_{ik}|,$$

et ne s'annulant qu'avec lui, est précisément une puissance de ce déterminant, multipliée par un facteur qui ne peut être que zéro ou une fonction algébrique entière des coefficients de l'équation différentielle et de leurs dérivées. Ce résultat est conforme aux théorèmes généraux.

Pour les systèmes de la forme (A), le nombre des applications semble restreint. Mais, pour le cas particulier d'une équation linéaire d'ordre n, on peut tirer de là les théories de l'élimination et de la transformation des équations différentielles, comme en Algèbre pour les équations de degré n. Nous renverrons pour ces questions au Mémoire de M. Appell.

NOTE SUR LES DÉTERMINANTS.

133. Considérons un déterminant quelconque P dont les éléments sont représentés par la notation a_{rs}. Nous aurons les relations

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{1s}\dfrac{\partial P}{\partial a_{1s}}+\ldots+a_{ns}\dfrac{\partial P}{\partial a_{ns}}=P,\\ a_{r1}\dfrac{\partial P}{\partial a_{r1}}+\ldots+a_{rn}\dfrac{\partial P}{\partial a_{rn}}=P,\end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} a_{1r}\dfrac{\partial P}{\partial a_{1s}}+\ldots+a_{nr}\dfrac{\partial P}{\partial a_{ns}}=0,\\ a_{r1}\dfrac{\partial P}{\partial a_{s1}}+\ldots+a_{rn}\dfrac{\partial P}{\partial a_{sn}}=0,\end{cases}$$

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial a_{rs}^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial a_{rs}\,\partial a_{r's}}=0,\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial a_{rs}\,\partial a_{rs'}}=0,$$

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial a_{rs}\,\partial a_{r's'}}=-\frac{\partial^2 P}{\partial a_{rs'}\,\partial a_{r's}}.$$

Le déterminant $\dfrac{\partial^2 P}{\partial a_{rs}\,\partial a_{r's'}}$ de l'ordre $n-2$ se déduit, au signe près, du déterminant P en effaçant dans ce dernier deux lignes, la $r^{\text{ième}}$ et la $r'^{\text{ième}}$ et deux colonnes, la $s^{\text{ième}}$ et la $s'^{\text{ième}}$. Mais on peut aussi considérer les expressions $\dfrac{\partial P}{\partial a_{rs}}$ comme des déterminants principaux, et l'on obtient les formules suivantes, analogues aux formules (1),

$$(5)\qquad \begin{cases} a_{s1}\dfrac{\partial^2 P}{\partial a_{r1}\,\partial a_{s1}}+\ldots+a_{sn}\dfrac{\partial^2 P}{\partial a_{r1}\,\partial a_{sn}}=\dfrac{\partial P}{\partial a_{r1}},\\ a_{s1}\dfrac{\partial^2 P}{\partial a_{r2}\,\partial a_{s1}}+\ldots+a_{sn}\dfrac{\partial^2 P}{\partial a_{r2}\,\partial a_{sn}}=\dfrac{\partial P}{\partial a_{r2}},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ a_{s1}\dfrac{\partial^2 P}{\partial a_{rn}\partial a_{s1}}+\ldots+a_{sn}\dfrac{\partial^2 P}{\partial a_{rn}\partial a_{sn}}=\dfrac{\partial P}{\partial a_{rn}}.\end{cases}$$

Portons ces valeurs dans la seconde relation (1) et tenons compte des équations (3) et (4), nous aurons

$$(6)\qquad P=\begin{vmatrix} a_{r1} & a_{s1}\\ a_{r2} & a_{s2}\end{vmatrix}\frac{\partial^2 P}{\partial a_{r1}\,\partial a_{s2}}+\ldots+\begin{vmatrix} a_{r,n-1} & a_{s,n-1}\\ a_{rn} & a_{sn}\end{vmatrix}\frac{\partial^2 P}{\partial a_{r,n-1}\,\partial a_{sn}},$$

ou encore

$$P = \sum_u \sum_v \begin{vmatrix} a_{ru} & a_{su} \\ a_{rv} & a_{sv} \end{vmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial a_{ru}\, \partial a_{sv}}. \tag{7}$$

L'équation (7) correspond à la règle de Laplace quand on développe le déterminant P par rapport aux éléments de deux colonnes à la fois.

134. Il est facile de démontrer cette règle en général. On peut d'abord faire des calculs analogues aux précédents, mais on peut aussi faire une démonstration générale comme nous allons l'indiquer.

Rappelons d'abord que, pour former les permutations des nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ donnés, on peut considérer d'abord p désignées de ces lettres $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ par exemple, et permuter d'abord ces lettres. Puis, considérant les $n-p$ autres lettres, on les permutera. On obtiendra ainsi $\varpi_p \varpi_{n-p}$ permutations, ϖ_k étant en général le nombre des permutations de k lettres. En appelant C_n^p le nombre des combinaisons de n objets p à p, on aura C_n^p manières de faire l'opération précédente; on aura donc

$$\varpi_n = C_n^p \varpi_p \varpi_{n-p},$$

parce que toutes les permutations de n lettres ont été comptées ainsi chacune une fois et une fois seulement comme il est facile de s'en assurer.

Toutes les permutations *d'un même groupe* sont caractérisées par ce fait que les p premières lettres sont les mêmes.

Cela posé, considérons un déterminant dont un terme quelconque ait la forme

$$\varepsilon a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant une permutation des seconds indices, et ε donnant le signe correspondant à cette permutation. Dans tous les termes, on peut supposer que *les p premiers seconds indices* sont toujours $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ *rangés dans un ordre quelconque*. Donc, pour obtenir tous les termes, on pourra les déduire de la permutation

$$\alpha_1 \ldots \alpha_p, \qquad \alpha_{p+1} \ldots \alpha_n,$$

en permutant d'abord les premiers indices, puis les $n-p$ derniers. On obtiendra ainsi successivement les termes

$$\varepsilon a_{p+1,\alpha_{p+1}} \ldots a_{n,\alpha_n} \left[\sum \pm a_{1\alpha_1} \ldots a_{p,\alpha_p} \right],$$

ou

$$\varepsilon \left[\sum a_{1\alpha_1} \ldots a_{p\alpha_p} \right] a_{p+1,\alpha p+1} \ldots a_{n,\alpha_n},$$

et ensuite les termes

$$\varepsilon\left[\sum a_{1\alpha_1}\ldots a_{p,\alpha_p}\right]\left[\sum a_{p+1,\alpha_{p+1}}\ldots a_{n\alpha_n}\right],$$

le signe ε résultant toujours de la permutation $\alpha_1\ldots\alpha_p\,|\,\alpha_{p+1}\ldots\alpha_n$, considérée comme résultant maintenant des deux permutations $\alpha_1\ldots\alpha_p$ et $\alpha_{p+1}\ldots\alpha_n$.

La conclusion à tirer de là est la règle de Laplace, qui consiste à prendre, par exemple, p lignes, à en tirer tous les déterminants possibles à p^2 éléments, et à multiplier ces déterminants partiels par les déterminants complémentaires, c'est-à-dire par ceux qu'on obtient en effaçant, dans le déterminant principal, les lignes et les colonnes qui ont déjà servi. Les signes doivent concorder dans le développement ordinaire du déterminant principal, et dans le développement par la règle de Laplace.

135. Dans les formules (1) et (2), chaque dérivée partielle $\frac{\partial P}{\partial a_{rs}}$ est, au signe près, le déterminant qu'on obtient en supprimant la ligne r et la colonne s dans le déterminant principal P. En général, on appelle *mineurs d'ordre m* les déterminants qu'on obtient en supprimant m lignes et m colonnes quelconques dans le déterminant principal. Soit

$$c=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1,2,\ldots,m} \tag{8}$$

le nombre des combinaisons de n objets m à m. Écrivons ces combinaisons les unes à la suite des autres dans un ordre choisi, et numérotons-les de sorte que les numéros $1, 2, \ldots, c$ caractérisent les diverses combinaisons. Soient γ et δ deux quelconques de ces numéros. Si dans le déterminant P on supprime tous les éléments qui ont leur premier indice dans la combinaison γ, et leur second indice dans la combinaison δ, les éléments restants formeront un mineur quelconque d'ordre m. Nous le représenterons par la notation $P_{\gamma\delta}^{(m)}$. Le nombre de ces mineurs est évidemment égal à c^2, et avec eux on peut former le déterminant

$$S_c^{(m)}=\begin{vmatrix} P_{11}^{(m)} & \ldots & P_{1c}^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{c1}^{(m)} & \ldots & P_{cc}^{(m)} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

On a pour les mineurs du premier ordre les plus simples combinaisons. Par exemple, la notation $P_{rs}^{(1)}$ indiquera qu'on a supprimé la ligne r et la colonne s. *Le déterminant $S_n^{(1)}$ est dit alors le déterminant adjoint du déterminant* P.

Si, dans le déterminant P, on supprime les lignes et les colonnes qui servent à former $P_{\gamma\delta}^{(m)}$, il restera un déterminant d'ordre $n-m$ qu'on peut représenter par le symbole

$$P_{-\gamma,-\delta}^{(n-m)}.$$

et qu'on appelle *complémentaire* par rapport au mineur $P_{\gamma\delta}^{(m)}$. De même, le déterminant $S_c^{(n-m)}$ formé avec les $P_{-\gamma,-\delta}^{(n-m)}$ est dit *complémentaire du déterminant* $S_c^{(m)}$. En particulier, les mineurs complémentaires des $P_{rs}^{(1)}$ sont les éléments eux-mêmes du déterminant P.

Choisissons les seconds indices dans la combinaison δ formée de m lettres, alors la règle de Laplace aura pour traduction algébrique la formule

$$P = P_{1\delta}^{(m)} P_{-1,-\delta}^{(n-m)} + P_{2\delta}^{(m)} P_{-2,-\delta}^{(n-m)} + \ldots + P_{c\delta}^{(m)} P_{-c,-\delta}^{(n-m)}. \tag{10}$$

Si, dans cette formule, on remplace δ par δ', on introduira nécessairement des lettres qui appartiennent à la combinaison complémentaire $-\delta$. Alors le déterminant P pourra être remplacé par un autre déterminant où des colonnes seraient identiques. La formule (10) entraîne donc la formule

$$0 = P_{1\delta'}^{(m)} P_{-1,-\delta'}^{(n-m)} + \ldots + P_{c\delta'}^{(m)} P_{-c,-\delta'}^{(n-m)}. \tag{11}$$

136. Comme applications des formules (10) et (11), formons des produits de déterminants où les indices (m) et $(n-m)$ seront supprimés pour la commodité de l'écriture. Nous aurons, comme première application, la formule

$$\begin{vmatrix} P_{11} & \ldots & P_{1c} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{c1} & \ldots & P_{cc} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} P_{-1,-1} & P_{-1,-2} & \ldots & P_{-1,-s} & \ldots & P_{-1,-c} \\ P_{-2,-2} & P_{-2,-2} & \ldots & P_{-2,-s} & \ldots & P_{-c,-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P & 0 & \ldots & P_{1s} & \ldots & P_{1c} \\ 0 & P & \ldots & P_{2s} & \ldots & P_{2c} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & P_{ss} & \ldots & P_{sc} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & P_{cs} & \ldots & P_{cc} \end{vmatrix}.$$

En particulier, pour $m = n-1$ et $s = n-2$, on a, en changeant les indices $n-1$ et n en 1 et 2,

$$\frac{\partial P}{\partial a_{11}} \frac{\partial P}{\partial a_{22}} - \frac{\partial P}{\partial a_{12}} \frac{\partial P}{\partial a_{21}} = P \frac{\partial^2 P}{\partial a_{11}\, \partial a_{22}},$$

et, d'une manière semblable mais générale,

$$\frac{\partial P}{\partial a_{rs}} \frac{\partial P}{\partial a_{r's'}} - \frac{\partial P}{\partial a_{rs'}} \frac{\partial P}{\partial a_{r's}} = P \frac{\partial^2 P}{\partial a_{rs}\, \partial a_{r's'}}. \tag{12}$$

137. Comme seconde application on a, de la même manière, la formule

$$S_c^{(m)} S_c^{(n-m)} = P^c, \tag{13}$$

d'où, en particulier,

$$S_n^{(1)} = P^{n-1}. \tag{14}$$

Cette dernière formule donne la valeur du déterminant adjoint en fonction de celle du déterminant proposé.

138. Arrivons à la formule de Cauchy,

$$R_{\gamma\delta}^{(m)} = P_{\gamma 1}^{(m)} Q_{\delta 1}^{(m)} + \ldots + P_{\gamma c}^{(m)} Q_{\delta c}^{(m)}. \tag{15}$$

Commençons par définir le produit R des deux déterminants P et Q du même ordre. On aura, par définition,

$$r_{\mu\nu} = p_{\mu 1} q_{\nu 1} + \ldots + p_{\mu n} q_{\nu n}, \tag{16}$$

en appelant p, q, r les termes des trois déterminants; on peut écrire simplement

$$r_{\mu\nu} = S^n(p_{\mu 1}, q_{\nu 1}), \tag{17}$$

le signe de sommation S étant relatif aux seconds indices 1. On aura, par suite,

$$R = \begin{vmatrix} S^n(p_{11} q_{11}) & S^n(p_{11} q_{21}) & \ldots & S^n(p_{11} q_{n1}) \\ S^n(p_{21} q_{11}) & S^n(p_{21} q_{21}) & \ldots & S^n(p_{21} q_{n1}) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ S^n(p_{n1} q_{11}) & S^n(p_{n1} q_{21}) & \ldots & S^n(p_{n1} q_{n1}) \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Supposons que dans R on échange deux lignes, par exemple les deux premières. On aura l'échange entre les deux éléments

$$S^n(p_{11} q_{i1}) \quad \text{et} \quad S^u(p_{21} q_{i1}).$$

Rien n'est donc changé dans le déterminant Q. Au contraire, dans P, la suite

$$p_{11}, \quad p_{12}, \quad \ldots, \quad p_{1n}$$

est remplacée par

$$p_{21}, \quad p_{22}, \quad \ldots, \quad p_{2n},$$

et inversement. On a donc échangé au fond les deux premières lignes de P.

D'une manière générale, on peut dire que, si l'on échange les lignes d'indice i et j dans l'un des deux déterminants P et R, le même échange doit être fait dans l'autre déterminant pour que la loi

$$R = PQ$$

subsiste. Si, au lieu des lignes, on considère les colonnes, alors R et Q seront associés dans l'ordre de ces colonnes.

Cela posé, considérons un mineur quelconque $R_{\gamma\delta}^{(m)}$ de R. Amenons les lignes et les colonnes qui correspondent aux combinaisons γ et δ dans les premiers rangs. La même opération devra être faite sur les lignes de P et les colonnes de Q et l'on aura toujours

$$R = PQ.$$

Il suffira donc de démontrer la formule de Cauchy dans le cas particulier représenté par la formule suivante :

$$R_{11}^{(m)} = P_{11}^{(m)} Q_{11}^{(m)} + \ldots + P_{1c}^{(m)} Q_{1c}^{(m)}. \tag{19}$$

Considérons un terme quelconque de $R_{11}^{(m)}$. Il est dérivé du terme principal

$$r_{11} r_{22} \ldots r_{mm}$$

par des permutations effectuées sur les seconds indices. Il sera donc de la forme

$$\varepsilon r_{1\alpha_1} \ldots r_{m\alpha_m},$$

ou encore de la forme

$$\varepsilon S^n(p_{11}, q_{\alpha_1,1}).S^n(p_{21}, q_{\alpha_2,1}) \ldots S^n(p_{m1}, q_{\alpha_m,1}).$$

Son développement renfermera donc toutes les combinaisons

$$p_{1\beta_1} \ldots p_{m\beta_m} q_{\alpha_1\gamma_1} \ldots q_{\alpha_m\gamma_m}, \tag{A}$$

où $\beta_1 \ldots \beta_m$, $\gamma_1 \ldots \gamma_m$ sont des combinaisons quelconques de m des indices 1, 2, ..., n.

Cela posé, $R_{11}^{(m)}$ est un déterminant, c'est-à-dire une fonction qui change de signe quand on change la parité de l'une des suites des indices de ses termes. Il faut donc que toutes les combinaisons A soient précédées d'un signe conforme à la loi de leurs indices. Mais alors, en raisonnant comme pour la règle de Laplace, on pourra démontrer la formule

$$R_{11}^{(m)} = \Sigma \pm S(p_{1,\beta_1} \ldots p_{m,\beta_m}) S(q_{\alpha_1,\gamma_1} \ldots q_{\alpha_m,\gamma_m}),$$

ou encore, en revenant aux notations adoptées,

$$R_{11}^{(m)} = P_{11}^{(m)} Q_{11}^{(m)} + \ldots + P_{1c}^{(m)} Q_{1c}^{(m)}.$$

139. Il nous reste à démontrer que le déterminant $S_c^{(m)}$ est une puissance de P. M. Francke l'a démontré d'abord par une méthode directe. Ensuite, M. Borchardt, dans une Note ajoutée au Mémoire de M. Francke, a obtenu d'une manière presque immédiate ce théorème important en s'appuyant sur la remarque suivante facile à démontrer : l'expression entière et rationnelle

$$(A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n)^k$$

n'a pour diviseurs entiers et rationnels que des expressions de la forme

$$\lambda(A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n)^{\mu} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, k);$$

or c'est le cas du déterminant P^k, où l'on peut appeler $x_1, \ldots, x_n$ les éléments d'une même ligne ou d'une même colonne.

Cela posé, la relation

$$S_c^{(m)} S_c^{(n-m)} = P^c,$$

établie par Cauchy, montre que $S_c^{(m)}$ est un diviseur de P^c et, de plus, un diviseur entier et rationnel. Il faut donc que l'on ait

$$S_c^{(m)} = \lambda P^{\mu}.$$

On trouve facilement l'exposant μ et la constante $\lambda = 1$, en cherchant d'une part la dimension de $S_c^{(m)}$ par rapport à une lettre quelconque du déterminant P, et, d'autre part, en supposant P réduit à sa diagonale principale.

NOTE SUR LA RÈGLE DE LAGRANGE.

140. Soit la fraction rationnelle

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n\varphi(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_n}{x-a} + \Psi(x),$$

où $\varphi(x)$ n'est plus divisible par $x-a$.

Posons $x = a+h$, nous aurons

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = A_1 + A_2 h + \ldots + A_n h^{n-1} + h^n\Psi(a+h).$$

D'un autre côté, nous aurons

$$\frac{f(a+h)}{(x-a-h)h^n\varphi(a+h)} = [A_1 + A_2 h + \ldots + A_n h^{n-1} + h^n\Psi(a+h)]$$
$$\times \frac{1}{h^n}\left[\frac{1}{x-a} + \frac{h}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(x-a)^n} + h^n\chi(a+h)\right].$$

Le coefficient de $\frac{1}{h}$, dans ce développement, est

$$\frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_n}{x-a},$$

c'est-à-dire la partie du développement de $\frac{f(x)}{(x-a)^n\varphi(x)}$, qui correspond à la racine a.