

H. BOUASSE

## Sur les oscillations à peu près sinusoïdales à longue période

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1<sup>re</sup> série*, tome 11, n° 4 (1897), p. F17-F76

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1897\\_1\\_11\\_4\\_F17\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1897_1_11_4_F17_0)

© Université Paul Sabatier, 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

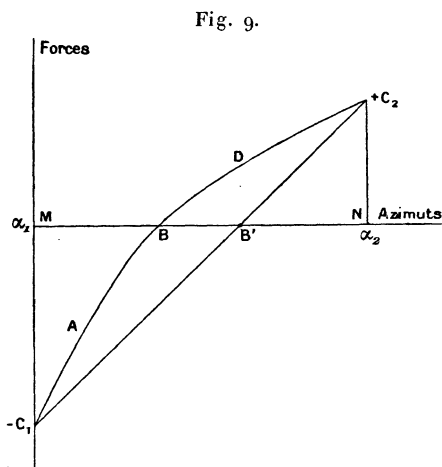
Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

le fil de suspension est quelconque), on peut compter les durées d'oscillation à partir de l'azimut parfaitement déterminé pour lequel les forces fonction de l'azimut ont une résultante nulle. Cette position peut être appelée *position d'équilibre statique*, parce que c'est dans cet azimut que s'arrêtera le repère dont on détermine les époques de passage.

Fort heureusement, dans la pratique, la vitesse peut être considérée comme maxima et le mouvement comme uniforme, lors du passage à cette position d'équilibre statique; ce qui dispense de faire l'enregistrement complet de l'oscillation et légitime la méthode exposée au Chapitre précédent, qui donne simplement et automatiquement les vitesses maxima et les époques en question.

Ces préliminaires posés, entrons dans l'étude théorique d'une oscillation à peu près sinusoidale.

Soit un mobile qui part avec une vitesse nulle d'un point caractérisé par le couple  $-C_1$  et un azimut  $\alpha_1$ ; il oscille et parvient, de nouveau avec une vitesse nulle, au point caractérisé par le couple  $C_2$  et l'azimut  $\alpha_2$ . Désignons par  $\varphi(\alpha)$  la loi des couples représentée par la courbe ABD (*fig. 9*). La



condition d'arrêt est que les aires  $\alpha_1 AB$ ,  $\alpha_2 B'D$  soient égales. On se propose de déterminer, pour quelques formes simples de la courbe ABD, la durée d'oscillation et l'amortissement.

Par définition, l'amortissement est mesuré par le nombre  $\mu$  défini par la relation

$$\mu = 2 \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2};$$

Ce nombre est supposé généralement petit; il ne dépassera pas, par exemple, 0,2.

On désigne par  $\varepsilon$  le temps nécessaire pour accomplir le parcours unique d'une vitesse nulle à une autre vitesse nulle; par  $T$  le temps nécessaire à parcourir une courbe d'aller et une courbe de retour: on a donc à peu près  $T = 2\varepsilon$ .

On appelle  $\varepsilon$  l'étendue  $\alpha_2 - \alpha_1$  d'un parcours simple,  $A$  l'amplitude de l'oscillation définie à partir d'un point voisin du point  $B$  où la force est nulle et dont la définition précise est donnée dans chaque cas particulier; on a donc à peu près  $\varepsilon = 2A$ .

Suivant la convention énoncée au début de ce Chapitre, nous employons arbitrairement les termes *force* et *déplacement*, ou *couple* et *azimut*.

1. *Forme type : oscillation harmonique.* — La courbe  $ABD = \varphi(\alpha)$  est une droite  $\Gamma\alpha$ . La constante  $\Gamma$  s'appelle *constante de torsion*. Il n'y a pas d'amortissement,  $\mu = 0$ . La durée de l'oscillation est constante et indépendante de l'amplitude.

L'équation du mouvement est

$$M \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \Gamma\alpha = 0.$$

Posons  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ; on a

$$\alpha = A \sin \omega t, \quad T = 2\varepsilon = 2\pi \sqrt{\frac{M}{\Gamma}}.$$

2. *Forces produisant un amortissement et ne modifiant pas la durée.*

— Supposons que sur le mobile agissent

1° Une force proportionnelle à l'élongation;

2° Une somme de forces proportionnelles à des puissances positives de la vitesse.

La courbe  $\varphi(\alpha)$  aboutit, à ses deux extrémités, à la droite invariable  $C = \Gamma\alpha$ , qui coupe l'axe des abscisses en un point fixe  $B'$  auquel nous rapporterons les amplitudes et par rapport auquel nous compterons les déplacements et mesurerons les durées.

Posons  $B'M = A_1$ ,  $B'N = A_2$ ; nous avons

$$\mu = 2 \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} = 2 \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\Delta A}{A}.$$

L'amortissement est ici défini par la perte d'amplitude divisée par l'amplitude moyenne.

Soit  $f_0 + f_1 v + f_2 v^2 + \dots$  la somme des forces proportionnelles à des puissances de la vitesse; nous n'écrivons que des puissances entières; les résultats seraient les mêmes s'il se trouvait des puissances fractionnaires positives.

Pour un azimut  $\alpha$ , la force proportionnelle à l'élongation est  $\Gamma\alpha$ ; le travail pour un déplacement  $d\alpha$  est  $\Gamma\alpha d\alpha$ ; donc l'énergie potentielle correspondant à un azimut  $\alpha$  est  $\frac{\Gamma\alpha^2}{2}$ . Si l'amplitude est en un bout  $A$  et qu'elle devienne pour l'autre bout  $A - \Delta A$ , la perte d'énergie est  $\Gamma A \Delta A$ ; elle mesure le travail des autres forces pendant la demi-oscillation. Or cette oscillation restant sensiblement sinusoidale, ce travail est

$$P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (f_0 + f_1 v + f_2 v^2 + \dots) d\alpha,$$

avec

$$\alpha = A \sin \omega t.$$

En posant

$$I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} \beta d\beta,$$

il vient

$$P = A(f_0 I_0 + f_1 A \omega I_1 + f_2 A^2 \omega^2 I_2 + \dots).$$

d'où enfin

$$\mu = \frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{\Gamma} \left[ \frac{f_0 I_0}{A} + f_1 \omega I_1 + f_2 A \omega^2 I_2 + \dots \right].$$

On trouve facilement

$$I_0 = 2, \quad I_1 = \frac{\pi}{2}, \quad I_2 = \frac{4}{3}, \quad I_3 = \frac{3\pi}{8}, \quad \dots, \quad I_5 = \frac{5\pi}{16}.$$

Même raisonnement pour des puissances fractionnaires positives.

Donc si un mobile est soumis à une force proportionnelle à l'élongation et à une somme de forces proportionnelles à des puissances quelconques positives de la vitesse, la perte d'amplitude  $\Delta A$  s'exprime par un développement où entrent les mêmes puissances du produit  $A \omega$  ou du quotient  $\frac{A}{\Gamma}$ .

*Cas particuliers.*

a. Admettons qu'il ne subsiste que le terme  $f_1 v$ . On a

$$\Gamma \Delta A = \frac{\pi^2 A}{T} f_1.$$

On sait que dans ce cas l'oscillation peut être représentée par la sinusoïde amortie

$$\alpha = A e^{-\lambda t} \sin \omega t.$$

On appelle  $\lambda T$  le décrement logarithmique. Cherchons à déterminer  $\lambda$  en fonction de  $f_1$  et des autres constantes. Pourvu que l'amortissement ne soit pas trop rapide, on a

$$\lambda T = 2 \frac{\Delta A}{A} = 2\mu, \quad \lambda = \frac{f_1}{2M}.$$

La constante  $\Gamma$  n'intervient pas dans l'expression de  $\lambda$ , comme l'ont remarqué MM. Cornu et Baille; mais ce n'est qu'apparent, car elle intervient dans  $\lambda T$ , que peut seulement déterminer l'expérience.

b. Admettons qu'il ne subsiste que le terme  $f_2 v^2$ . On a

$$\Delta A = \frac{16}{3} \pi^2 f_2 \frac{A^2}{\Gamma T^2}.$$

Or

$$\Gamma T^2 = 4\pi^2 M \quad \text{d'où} \quad \Delta A = \frac{4f_2}{3} \frac{A^2}{M}.$$

La constante du fil n'intervient réellement plus; il ne reste que le moment d'inertie. La raison s'en voit immédiatement: en augmentant le diamètre du fil, on augmente bien la valeur de l'énergie potentielle, correspondant à une perte d'azimut  $\Delta A$ , mais on augmente dans le même rapport les pertes d'énergie dues à l'accroissement de la vitesse angulaire qui résulte du changement de fil. Ce curieux résultat a été démontré par Hirn, au moyen d'une analyse de huit pages in-quarto dont il se montre très fier.

c. Enfin si les deux termes  $f_1 v + f_2 v^2$  subsistent, on a

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\pi^2}{\Gamma T} \left[ f_1 + \frac{16}{3} f_2 \frac{A}{T} \right].$$

Exprimons les coefficients en fonction de ce qu'on mesure généralement.

Soient trois lectures successives des azimuts de vitesse nulle que nous supposons faites en degrés :  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

Posons  $\mathcal{E}' = \alpha_1 - \alpha_2$ ,  $\mathcal{E}'' = \alpha_3 - \alpha_2$ ; ce sont les étendues des parcours.

La variation  $\Delta\mathcal{E}$  correspond à l'étendue moyenne  $\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}' + \mathcal{E}''}{2}$ .

L'expérience donne donc directement  $\mathcal{E}$  et  $\Delta\mathcal{E}$  et l'on peut supposer  $\Delta\mathcal{E}$  exprimé en fonction de  $\mathcal{E}$ , dans le cas particulier actuel, par la formule à deux termes  $\Delta\mathcal{E} = a\mathcal{E} + b\mathcal{E}^2$ .

Or  $\mathcal{E}$  et  $\Delta\mathcal{E}$  représentent en d'autres unités la même chose que  $2A$  et  $2\Delta A$ ; on a donc identiquement

$$a + b\mathcal{E} \equiv \frac{\pi^2}{\Gamma\Gamma} f_1 + \frac{16\pi^2}{3\Gamma\Gamma^2} f_2 A;$$

d'où

$$f_1 = a \frac{\Gamma\Gamma}{\pi^2}, \quad f_2 = b \frac{\mathcal{E}}{A} \frac{3\Gamma\Gamma^2}{16\pi^2}.$$

Or  $\mathcal{E}$  est exprimé en degrés,  $A$  en radians; donc  $\frac{\mathcal{E}}{A} = \frac{360}{\pi}$ ; d'où enfin

$$f_1 = a \frac{\Gamma\Gamma}{\pi^2}, \quad f_2 = 67,5 b \frac{\Gamma\Gamma^2}{\pi^3},$$

formules qui permettent de calculer  $f_1$  et  $f_2$  en dynes-centimètres.

Il est souvent commode d'énoncer le résultat, non plus en radians-dynes-centimètres, mais en centimètres-dynes. Ce qui revient à admettre que le couple produit par une vitesse angulaire  $\nu$  et représenté par  $f_1\nu + f_2\nu^2$  est produit par une force ayant son point d'application à une distance  $d$  de l'axe et agissant sous l'action de la vitesse linéaire  $V = \nu d$ ; son expression est  $f'_1 V + f'_2 V^2$ .

Or on a identiquement

$$f'_1 V + f'_2 V^2 \equiv f'_1 \nu d + f'_2 \nu^2 d^2.$$

Cette force correspond au couple  $f'_1 \nu d^2 + f'_2 \nu^2 d^3$ ; d'où identiquement

$$f'_1 \nu d^2 + f'_2 \nu^2 d^3 \equiv f_1 \nu + f_2 \nu^2;$$

d'où, enfin,

$$f'_1 = \frac{f_1}{d^2}, \quad f'_2 = f_2 \frac{1}{d^3},$$

$$f'_1 = \frac{a\Gamma\Gamma}{\pi^2 d^2}, \quad f'_2 = 67,5 b \frac{\Gamma\Gamma^2}{\pi^3 d^3}.$$

On a aussi

$$\frac{f'_1}{f'_2} = 0,0465 \frac{a}{b} \frac{d}{T}.$$

Ces transformations sont souvent utiles.

*Influence d'une série de percussions en certains points d'une oscillation sinusoidale ou à peu près sinusoidale.*

Soient  $\alpha = 0$  la position d'équilibre,  $\alpha$  le point où l'on donne la petite impulsion.

On a

$$\alpha = A \sin \omega t, \quad v = \omega A \cos \omega t.$$

Le temps  $t_1$ , mis pour aller de 0 à  $\alpha$ , est

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \operatorname{arc tang} \frac{\omega \alpha}{v}.$$

Si à partir de  $\alpha$ , sans impulsion, le corps finit son oscillation, il arrive au repos au bout d'un temps

$$t_2 = \frac{1}{\omega} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc tang} \frac{\omega \alpha}{v} \right) \quad \text{tel que} \quad t_1 + t_2 = \frac{T}{4}.$$

Supposons qu'en  $\alpha$  on donne une petite impulsion  $-\delta v$ ; le corps continue avec une vitesse un peu différente et le temps nécessaire pour aller de  $\alpha$  au repos devient

$$t'_2 = \frac{1}{\omega} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc tang} \frac{\omega \alpha}{\omega - \delta v} \right).$$

La diminution de durée est sensiblement  $\frac{\alpha \delta v}{\omega^2 A^2}$ .

Soit maintenant  $F$  la force à chaque instant exprimée en fonction de  $\alpha$  qui produit l'impulsion.

On a

$$F d\alpha = M d \frac{v^2}{2} = M v \delta v;$$

d'où

$$\delta v = \frac{F}{M v} d\alpha.$$

La diminution du temps est

$$\frac{F \alpha d\alpha}{M \nu \omega A^2} = \frac{\alpha \delta \nu}{\omega^2 A^2}.$$

Cette formule donne des résultats déjà connus.

Supposons que l'impulsion se produise au passage par la position d'équilibre,  $\alpha = 0$ . L'expression  $\frac{\alpha d\nu}{\omega^2 A^2}$  est nulle quel que soit  $\delta\nu$ . Donc une impulsion dans ces conditions ne change pas la durée. M. Cornu a appliqué cette propriété dans la synchronisation des horloges; bien avant lui, Helmholtz l'avait utilisée, théoriquement pour l'explication des phénomènes de résonance dans l'oreille, pratiquement pour l'entretien des diapasons.

Supposons, en second lieu, deux impulsions symétriques; l'effet est nul sur la durée, car l'effet total est

$$(+\alpha - \alpha) \frac{\delta\nu}{\omega^2 A^2} = 0.$$

Le théorème a été énoncé par M. Lippmann, qui en a déduit une méthode d'entretien électrique d'une horloge. Mais il ne faisait qu'appliquer explicitement ce qui se trouve réalisé dans les horloges à poids. Seulement, ce sont deux séries d'impulsions symétriques que produit l'échappement, et non deux impulsions; la théorie reste la même.

Ces préliminaires posés, considérons une oscillation à peu près sinusoïdale; sur le mobile agissent donc : 1° une force proportionnelle à l'élongation; 1° d'autres forces quelconques suffisamment petites par rapport à la première. Nous pouvons considérer que ces forces, au lieu d'agir d'une manière continue, procèdent par impulsions successives. Ce procédé est théoriquement inattaquable; reste à savoir s'il nous conduit simplement au résultat cherché.

Pour connaître la durée d'oscillation d'un mouvement périodique, il faut, suivant la marche régulière, intégrer d'abord complètement l'équation différentielle du mouvement, pour déterminer  $\alpha$  en fonction de  $\nu$ . Ceci fait, la durée d'un parcours est fournie par la quadrature

$$\tau = \int_{\nu=0}^{\nu=0} \frac{d\alpha}{\nu}.$$

Or les deux opérations sont généralement impossibles.

Il n'en va pas de même avec la méthode actuelle. On compare la durée



de l'oscillation à peu près sinusoïdale à la durée de l'oscillation rigoureusement sinusoïdale; la différence de ces durées est donnée par la quadrature

$$\int_{v=0}^{v=0} \frac{F \alpha d\alpha}{M v \omega^2 A^2},$$

mais le problème est devenu tout différent.

Comme l'intégrale précédente est une correction, il n'est plus nécessaire de connaître  $F$  et  $v$  rigoureusement en fonction de  $\alpha$ ; une simple approximation suffit. Il est, par exemple, généralement plus que suffisant de supposer dans la quadrature le mouvement rigoureusement sinusoïdal.

*Application au cas où la force  $F$  est développable suivant une série de puissances positives de la vitesse.*

Supposons donc, comme première approximation, le mouvement rigoureusement sinusoïdal.

On a

$$\alpha = A \sin \omega t, \quad v = A \omega \cos \omega t,$$

$$F_n = f_n A^n \omega^n \cos^n \omega t,$$

$$\delta v = \frac{1}{M} f_n A^n \omega^n \cos^n \omega t dt.$$

$$\frac{\alpha \delta v}{\omega^2 A^2} = \frac{1}{M} f_n A^{n-1} \omega^{n-2} \cos^n \omega t \sin \omega t dt.$$

Enfin,

$$\int \frac{\alpha \delta v}{\omega^2 A^2} = - \frac{f_n}{(n+1)M} A^{n-1} \omega^{n-3} \cos^{n+1} \omega t$$

pour l'intégrale indéfinie.

Nous avons pris implicitement comme origine des temps le passage au point  $B'$  correspondant à la position d'équilibre sous l'influence de la force proportionnelle à l'élongation.

Étendons l'intégrale à un quart d'oscillation; elle a, au signe près, pour valeur

$$\frac{f_n}{(n+1)M} A^{n-1} \omega^{n-3}.$$

Nous pouvons lui donner une autre forme.

Nous avons trouvé pour valeur de l'amortissement produit par la

force  $F_n$ ,

$$\mu_n = \frac{1}{\Gamma} f_n A^{n-1} \omega^n \delta_n.$$

Introduisant cette valeur, il vient pour l'intégrale,

$$\tau = \frac{\mu_n T}{2\pi(n+1)\delta_n}.$$

Le temps nécessaire pour aller de M en B' est  $\frac{T}{4} + \tau$ ; le temps nécessaire pour aller de B' en N est  $\frac{T}{4} - \tau$ . Le temps total MN est resté  $\frac{T}{2}$ ; il est donc invariable à l'ordre d'approximation choisi.

Si l'on compare des oscillations caractérisées par le même amortissement, le point B' ( $\alpha = 0$ ) coupe donc le parcours MB'N en deux portions dont les durées, inégales, ont une différence du même ordre que l'amortissement  $\mu$ . La valeur de cette différence décroît, pour le même amortissement et la même durée, lorsque grandit le nombre  $n$ , c'est-à-dire la puissance positive, mais entière ou fractionnaire, de la vitesse à laquelle la force est proportionnelle; ou, ce qui revient au même, le produit  $(n+1)\delta_n$  augmente avec  $n$ .

#### *Cas particuliers.*

Vérifions les formules précédentes dans les cas où l'on peut traiter le problème directement.

*a. Force proportionnelle à la puissance 0 de la vitesse.* — C'est, si l'on veut, une force constante toujours opposée au mouvement comme le frottement dû aux corps solides. La formule donne  $\tau = \frac{\mu T}{4\pi}$ . Traitons ce cas directement (*fig. 10*).

L'équation du mouvement est

$$M \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \Gamma \alpha + f_0 = 0.$$

L'intégrale est

$$\alpha = -\frac{f_0}{\Gamma} + A \sin \omega t.$$

La durée T n'a pas varié. L'amortissement est mesuré par  $\frac{4BB'}{MR} = \frac{2f_0}{\Gamma A}$  (voir *fig. 10*).

Les deux parcours MB et BR se font dans le temps  $\frac{T}{4}$ . La portion BB' se fait avec la vitesse  $\omega A$ . On a  $BB' = \frac{f_0}{T}$ ; la durée du parcours BB' est

$$\frac{f_0}{T\omega A} = \frac{\mu}{2\omega}.$$

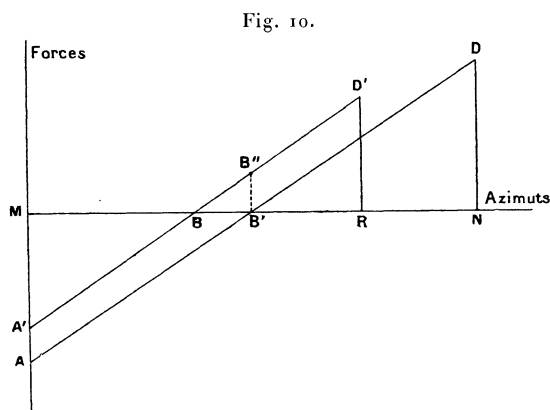
En définitive, le parcours MB' se fait dans le temps

$$\frac{T}{4} + \frac{\mu}{2\omega},$$

et le parcours B'R se fait dans le temps

$$\frac{T}{4} - \frac{\mu}{2\omega}.$$

Or  $\frac{\mu}{2\omega} = \frac{\mu T}{4\pi}$ , résultat de la formule générale.



*b. Force proportionnelle à la première puissance de la vitesse.* — La formule donne  $\tau = \frac{\mu T}{2\pi^2}$ .

L'équation du mouvement est

$$M \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \Gamma \alpha + f_1 \frac{d\alpha}{dt} = 0.$$

Posons  $\lambda = \frac{f_1}{2M}$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{T'}$ ;  $T'$  est la durée avec amortissement.

On a

$$T' = 2\pi M \frac{2}{\sqrt{4\Gamma M - f_1^2}}.$$

L'intégrale est

$$\alpha = \alpha_0 e^{-\lambda t} \sin \omega t;$$

d'où

$$f_1 = \frac{4M}{T} \left( \mu - \frac{\mu^2}{2} \right), \quad \mu = \frac{f_1 T}{4M} + \frac{f_1^2 T^2}{32M^2}.$$

Ici nous avons poussé l'approximation plus loin que page 19; nous avons laissé le terme en  $f_1^2$ . Le premier terme de l'expression de  $\mu$  est donné par la formule générale de la page 19.

On a, de même,

$$\frac{T'}{T} = 1 + \frac{\mu^2}{2\pi^2}.$$

La durée est constante, si l'on néglige les termes en  $\mu^2$ . C'est précisément dans un cas particulier le résultat démontré généralement plus haut.

Le Tableau suivant facilitera des comparaisons ultérieures :

μ = 0,0	T' = 1,000 000	μ = 0,10	T' = 1,000 563
1	5	11	687
2	22	12	827
3	47	13	983
4	84	14	1 153
5	133	15	1 339
6	194	16	1 543
7	267	17	1 766
8	352	18	1 996
9	477	19	2 249
		20	2 522

Les passages en B' (*fig. 9*) sont donnés par la condition  $\alpha = 0$  et se font aux temps  $\frac{nT}{2}$ . Les passages aux vitesses nulles se font aux temps

$$(2n + 1) \frac{T}{4} - \frac{\lambda}{\omega^2} \text{ donnés par l'équation } \tan \omega t = \frac{\omega}{\lambda}.$$

Donc le temps mis pour aller de M en B' est

$$\frac{T}{4} + \frac{\lambda}{\omega^2} = \frac{T}{4} + \frac{\mu T}{2\pi^2},$$

et le temps mis pour aller de B' en N est

$$\frac{T}{4} - \frac{\lambda}{\omega^2} = \frac{T}{4} - \frac{\mu T}{2\pi^2},$$

ce qui est le résultat annoncé.

*Seconde approximation.*

Les calculs précédents ne donnent qu'une première approximation : la durée n'est constante que parce que nous négligeons les termes en  $\mu^2$ , ce qui revient, dans la quadrature, à négliger l'amortissement et à supposer le mouvement rigoureusement sinusoïdal. L'allongement de durée de la première moitié du parcours et la diminution de la seconde moitié sont alors égaux. Si l'on tient compte de la diminution des vitesses pour la seconde moitié, le raccourcissement est un peu plus petit que l'allongement ; la durée du parcours augmente. Les impulsions dues aux forces proportionnelles aux puissances de la vitesse ne sont plus symétriques.

Pour trouver une seconde approximation, il n'est pas nécessaire de connaître exactement la loi d'amortissement ; il suffit de choisir une loi quelconque, pourvu qu'elle donne un amortissement total égal à l'amortissement réel et permette d'effectuer facilement la quadrature. Ces conditions sont satisfaites par la forme

$$\alpha = A e^{-\lambda t} \sin \omega t.$$

On a

$$v = A \omega e^{-\lambda t} \cos \omega t$$

en négligeant un terme qui n'a pas d'influence sur le résultat. Il vient alors

$$F_n = f_n A^n \omega^n e^{-n\lambda t} \cos^n \omega t,$$

$$\frac{\alpha \delta v}{\omega^2 A^2} = \frac{1}{M} f_n A^{n-1} \omega^{n-2} e^{-(n+1)\lambda t} \cos^n \omega t \sin \omega t dt.$$

Par une première intégration par partie, on fait apparaître  $\cos^{n+1} \omega t$  ; on développe, suivant les cosinus des multiples de l'arc  $\omega t$  ; on est ainsi ramené à des intégrales de la forme

$$\int e^{ax} \cos bx dx,$$

que l'on sait intégrer.

Bref, l'intégrale  $\int_0^{\frac{T}{4}} \frac{\alpha \delta v}{\omega^2 A^2}$  se met sous la forme

$$M - N e^{-(n+1)\lambda \frac{T}{4}},$$

et l'intégrale  $\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \frac{\alpha \delta v}{\omega^2 A^2}$  sous la forme

$$\left( M - N e^{-(n+1)\lambda \frac{T}{4}} \right) e^{-(n+1)\lambda \frac{T}{4}}.$$

Ces deux intégrales représentent respectivement l'allongement et le raccourcissement de deux quarts successifs de l'oscillation prise entre vitesses nulles.

La différence est donc de la forme

$$\left( M - N e^{-(n+1)\lambda \frac{T}{4}} \right) \left( 1 - e^{-(n+1)\lambda \frac{T}{4}} \right).$$

Ces deux facteurs sont de l'ordre de  $\mu$ ; le produit est de l'ordre de  $\mu^2$ .

Ainsi l'on peut conclure que les forces proportionnelles à des puissances positives quelconques de la vitesse produisent un changement négligeable sur la durée d'oscillation, tout en modifiant profondément la loi suivant laquelle se fait le mouvement.

3° *Forces qui ne produisent pas d'amortissement et agissent sur la durée.*

PREMIER TYPE : *Force proportionnelle à l'accélération.* — Soit  $g_0 \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$  son expression : la nouvelle durée est donnée par la formule

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{M + g_0}{T}} = 2\pi \sqrt{\frac{M'}{T}},$$

en posant  $m + g_0 = M'$ .

L'allongement de durée est indépendant de l'amplitude.

*Généralisation.* — Supposons que la force soit de la forme

$$(g_0 + g_1 v + g_2 v^2 + \dots) \frac{d^2 \alpha}{dt^2}.$$

L'amortissement est nul parce que toutes les intégrales de la forme

$$\int_{-A}^{+A} g_n v^n \frac{d^2 \alpha}{dt^2} d\alpha$$

sont nulles.

Cherchons l'allongement de la durée.

Le quart de la nouvelle période  $T'$  est donnée par l'intégrale

$$\frac{T'}{4} = \int_0^A \frac{d\alpha}{v}.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} (M' + g_1 v + g_2 v^2 + \dots) &= -\Gamma\alpha, \\ v dv (M' + g_1 v + \dots) &= -\Gamma\alpha d\alpha, \\ M' v^2 + \frac{2g_1}{3} v^3 + g_1 \frac{v^4}{2} + \dots &= \Gamma(A^2 - \alpha^2). \end{aligned}$$

L'équation du mouvement peut toujours s'intégrer une première fois et la recherche de la durée est ramenée à une seule quadrature.

Calculons le résultat en bornant le développement à ses deux premiers termes.

On a

$$\begin{aligned} v^2 \left( 1 + \frac{2g_1}{3M'} v \right) &= \frac{\Gamma}{M'} (A^2 - \alpha^2), \\ \frac{1}{v} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2g_1}{3M'} v}} &= \frac{1}{v} \left( 1 - \frac{g_1 v}{3M'} \right) = \frac{1}{v} - \frac{g_1}{3M'} = \sqrt{\frac{M'}{\Gamma}} \frac{1}{\sqrt{A^2 - \alpha^2}}; \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{T'}{4} = \frac{T_1}{4} + \frac{g_1 A}{3M'}, \quad T' - T_1 = \frac{4g_1 A}{3M'} = \frac{16\pi^2}{3\Gamma} \frac{A}{T_1^2} g_1.$$

Les deux quarts consécutifs de l'oscillation sont évidemment symétriques.

Enfin, au même ordre d'approximation, on a

$$\Delta T = T' - T = \frac{4\pi^2}{\Gamma} \left( \frac{g_0}{2T} + \frac{4g_1 A}{3T^2} \right) = \frac{1}{M} \left( \frac{g_0 T}{2} + 4g_1 A \right).$$

L'allongement a donc une partie constante et une partie proportionnelle à l'élongation. Pour mettre le phénomène en évidence, il faut donner à l'appareil oscillant un faible moment d'inertie.

SECOND TYPE : La force peut se développer suivant une série à coefficients constants de l'élongation. L'équation différentielle générale est

$$M \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \Gamma\alpha + \Gamma'\alpha^2 + \dots = 0.$$

L'oscillation ordinaire du pendule, pour de grandes oscillations, rentre dans ce type.

Pour que l'oscillation soit symétrique, il faut, au passage par la position d'équilibre ( $\alpha = 0$ ), changer brusquement le signe des coefficients de toutes les puissances paires de  $\alpha$ . Sans cette précaution on aurait des oscillations dissymétriques dont Helmholtz a étudié quelques cas dans son Acoustique.

Pour ce second type l'équation du mouvement peut toujours s'intégrer une première fois et la recherche de la durée est immédiatement ramenée à une quadrature.

Soit  $A$  l'amplitude, on a, en effet

$$\begin{aligned} M v dv &= -(\Gamma \alpha + \Gamma' \alpha^2 + \dots) d\alpha, \\ M v^2 &= \Gamma(A^2 - \alpha^2) + \frac{2}{3} \Gamma'(A^3 - \alpha^3) + \dots \end{aligned}$$

*Cas particuliers.*

a. Soit l'équation

$$M \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \Gamma \alpha - b \alpha^2 = 0.$$

Soit  $v_0$  la vitesse maxima, on a

$$\begin{aligned} v_0^2 &= \frac{\Gamma A^2}{M} - \frac{2}{3} \frac{b A^3}{M}, \\ \frac{T'}{4} &= \int_0^A \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{\Gamma}{M}(A^2 - \alpha^2) - \frac{2b}{3M}(A^3 - \alpha^3)}}. \end{aligned}$$

Supposons  $b$  assez petit pour qu'on puisse négliger son carré; posons  $\frac{\alpha}{A} = u$ ,  $u$  varie de 0 à 1,

$$\begin{aligned} \frac{T'}{4} &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\frac{\Gamma}{M}(1-u^2) - \frac{2Ab}{3M}(1-u^3)}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{\frac{\Gamma}{M}(1-u^2)}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2Ab}{3\Gamma} \frac{1-u^3}{1-u^2}}} \\ &= \int_0^1 \sqrt{\frac{M}{\Gamma}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \left( 1 + \frac{Ab}{3\Gamma} \frac{1-u^3}{1-u^2} + \dots \right) \\ &= \sqrt{\frac{M}{\Gamma}} \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{M}{\Gamma}} \frac{b}{3\Gamma} \int_0^1 \frac{1-u^3}{1-u^2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}. \end{aligned}$$

La dernière intégrale définie vaut

$$1,268 \frac{\pi}{2},$$



d'où

$$\frac{T'}{4} = \frac{T}{4} + 1,268 \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M}{\Gamma}} \frac{Ab}{3\Gamma}, \quad T' = T \left( 1 + 0,423 \frac{Ab}{\Gamma} \right).$$

L'accroissement de durée est proportionnel à l'amplitude.

*b.* Si l'oscillation est dissymétrique, c'est-à-dire si l'on ne change pas le signe de  $b$  en passant par la position d'équilibre, le raisonnement précédent reste vrai. Mais les deux quarts successifs de l'oscillation, de part et d'autre de la position d'équilibre, ont des durées inégales,

$$\frac{T'}{4} = \frac{T}{4} \left( 1 + 0,423 \frac{Ab}{\Gamma} \right),$$

$$\frac{T''}{4} = \frac{T}{4} \left( 1 - 0,423 \frac{Ab}{\Gamma} \right).$$

La somme reste constante et égale à  $\frac{T}{2}$  : la variation de durée est de l'ordre de  $b^2$ .

La dissymétrie est donc loin d'augmenter, au point de vue des durées, la différence entre l'oscillation modifiée et l'oscillation harmonique (proposition énoncée par Helmholtz, retrouvée par Cornu et Baille).

*c.* Soit l'équation

$$M \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \Gamma \alpha - c \alpha^3 = 0.$$

C'est l'équation du pendule composé quand on fait  $c = \frac{\Gamma}{6}$  et qu'on évalue  $\alpha$  en radians.

On trouve

$$T' = T \left( 1 + \frac{3A^2 c}{8\Gamma} \right).$$

Faisant  $c = \frac{\Gamma}{6}$ , on retrouve la formule bien connue du pendule

$$T' = T \left( 1 + \frac{A^2}{16} \right).$$

4° *Forces qui produisent un amortissement et agissent sur la durée.*

Nous n'envisagerons que le cas suivant, parce qu'il a une importance extrême dans l'étude de l'élasticité des fils fins.

Supposons que la loi des forces soit représentée par une fonction du

second degré à coefficients constants des azimuts *comptés à partir de l'azimut de départ* (vitesse nulle).

Soient connus les couples  $-C_1$  et  $C_2$  aux extrémités du parcours et l'amplitude totale  $\mathcal{C}$  de la demi-oscillation.

L'équation des forces est

$$C + C_1 = \Gamma\alpha - b\alpha^2.$$

Écrivons qu'à l'extrémité du parcours le travail des forces est nul  $\int_0^{\mathcal{C}} C dx = 0$ ; il vient

$$-C_1\mathcal{C} + \frac{\Gamma\mathcal{C}^2}{2} - \frac{b\mathcal{C}^3}{3} = 0,$$

avec la condition

$$C_2 + C_1 = \Gamma\mathcal{C} - b\mathcal{C}^2;$$

d'où

$$\Gamma = 2 \frac{2C_1 - C_2}{\mathcal{C}}, \quad b = 3 \frac{C_1 - C_2}{\mathcal{C}^2},$$

et sensiblement

$$\mu = \frac{2b\mathcal{C}}{3\Gamma} = \beta\mathcal{C} \quad \text{en posant} \quad \frac{2b}{3\Gamma} = \beta.$$

On vérifierait aisément qu'au même degré d'approximation il est indifférent de déterminer l'amortissement en couples ou en azimuts; mais ces amortissements sont loin d'être constants et, comme première approximation, sont proportionnels à l'amplitude.

Nous reviendrons, dans le Chapitre IV, sur certains détails dont l'utilité ne pourrait être comprise en ce moment.

*Durée d'oscillation.* — La vitesse est dans l'azimut  $\alpha$  donnée par l'intégrale  $v = \sqrt{-2 \int_0^\alpha C d\alpha}$ .

La durée d'un parcours qui va de l'azimut 0 de départ à l'azimut  $\alpha$  est

$$\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{-2 \int_0^\alpha C d\alpha}} = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{2C_1\alpha - \Gamma\alpha^2 + \frac{2b\alpha^3}{3}}}.$$

Soient  $\mathcal{C}$  et R les racines de l'équation

$$2C_1 - \Gamma\alpha + \frac{2b\alpha^2}{3} = 0;$$

$\mathcal{C}$  est l'amplitude du parcours,  $R = \frac{3\Gamma}{2b} - \mathcal{C}$ .

La durée du parcours simple s'obtient donc en prenant l'intégrale ci-dessus entre 0 et  $\mathcal{C}$ .

Posons  $\alpha = z^2$ ,  $z = u\sqrt{\mathcal{C}}$ ; on a

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \int_0^{\mathcal{C}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha(\alpha - \mathcal{C})(\alpha - R)}} = 2 \int_0^{\sqrt{\mathcal{C}}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - \mathcal{C})(z^2 - R)}} \\ &= 2 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(R - \mathcal{C}u^2)}}. \end{aligned}$$

Posons  $\frac{\mathcal{C}}{R} = k^2$ ,

$$\mathfrak{C} = \sqrt{\frac{6}{bR}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}} = \sqrt{\frac{6}{bR}} \mathbf{K}.$$

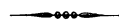
Posons  $\frac{\pi}{\sqrt{\Gamma}} = \mathfrak{C}_0$ , il vient

$$\mathfrak{C} = \frac{2\mathfrak{C}_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta\mathcal{C}}} \mathbf{K}(k^2) \quad \text{avec} \quad k^2 = \frac{\beta\mathcal{C}}{1 - \beta\mathcal{C}} = \frac{\mu}{1 - \mu}.$$

Ces formules se simplifient quand l'amplitude est petite.

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}\sqrt{1 - k^2 u^2}} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4}\right), \\ \mathfrak{C} &= \frac{2\mathfrak{C}_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta\mathcal{C}}} \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4}\right) = \mathfrak{C}_0 \left(1 + \frac{3\beta\mathcal{C}}{4}\right) = \mathfrak{C}_0 \left(1 + \frac{3\mu}{4}\right). \end{aligned}$$

La décroissance de la durée est proportionnelle à l'amplitude et à l'amortissement.



### CHAPITRE III.

#### APPLICATION A LA RÉSISTANCE DE L'AIR.

*Mouvements de translation et de rotation toujours de même sens.*

Pour se rendre compte de la manière suivant laquelle la résistance de l'air intervient dans les oscillations d'un mobile, il est indispensable de résumer nos connaissances générales sur ce sujet. Nous le ferons très succinctement : nous avons tenu à répéter les expériences dont nous parlerons avec tout le soin possible, pour nous rendre compte du degré de confiance qu'on peut avoir dans les méthodes.

Le problème de la résistance de l'air peut s'énoncer ainsi : Un corps a dans un milieu fluide, de nature et de propriétés données, un certain mouvement; déterminer à chaque instant :

- 1° En tous les points du milieu la vitesse;
- 2° La pression;
- 3° En tous les points de la surface du corps la pression;
- 4° Calculer la ou les résultantes des pressions sur le corps, résultantes qui sont, par définition, la résistance du milieu.

Le milieu est donné par ses propriétés élastiques et par certaines conditions de limitation ou de non-limitation suivant qu'il est fini ou indéfini.

1° Déterminer la vitesse en tous les points du milieu revient à déterminer les lignes de vitesse et la grandeur de la vitesse en chacun de leurs points. Imaginons un petit corps, flottant dans le milieu et ayant toujours exactement la densité du milieu. La trajectoire de ce corps est une ligne de vitesse; le tube limité par des lignes de vitesse s'appelle *filet*.

Pour un milieu incompressible le phénomène est complètement représenté autour d'une ligne de vitesse par la forme de cette ligne et les positions des flotteurs toutes les secondes. Il l'est encore complètement par la forme de la ligne et la section du filet dont elle est l'axe; ou, si l'on veut, par la représentation complète du filet. Car le produit  $s\varrho$ , de la section  $s$  par la vitesse linéaire  $\varrho$ , est constant.

Si le milieu est compressible, la connaissance complète du phénomène exige que l'on fournisse les deux éléments  $s$  et  $\varrho$  qui ne sont liés par aucune

relation nécessaire. Les schémas qui sont suffisants pour l'eau ne le sont plus pour l'air, car un grand accroissement de pression peut faire coïncider une diminution et dans la vitesse et dans la section du filet.

Dans un liquide, il est facile de mettre en suspension des poudres qui jouent le rôle de flotteur. Dans l'air on utilise des fumées, des fils légers et souples. On peut aussi employer des bulles de savon ; si elles sont très fines, leur mouvement de descente est lent et elles ont à chaque instant à très peu près la densité du milieu.

2° Déterminer la pression en tous les points du milieu est extrêmement difficile. Théoriquement, il suffirait d'imaginer que nos flotteurs sont petits et élastiques et qu'on peut déterminer à chaque instant leur volume. Les bulles de savon ont l'élasticité désirable ; reste à trouver le moyen d'en mesurer instantanément le volume avec une certaine précision.

Il ne s'agit pas de créer un obstacle fixe qui impose une limitation au milieu ; le problème serait complètement modifié. Il faut que le mouvement relatif entre le milieu et l'appareil de mesure soit nul.

3° La troisième partie du problème semble plus abordable. Elle ne présente pour les liquides aucune difficulté. On remplace des portions de la surface du corps par des lamelles élastiques analogues à des capsules Marey, et on mesure leur déformation. Tous les appareils qui permettent de mesurer la pression du sang dans les artères sont basés sur ce principe.

Malheureusement pour l'air, si les vitesses ne sont pas grandes, supérieures par exemple à une dizaine de mètres par seconde, les pressions à mesurer sont de l'ordre du dixième de millimètre d'eau. Il est illusoire d'étudier un phénomène dans ces limites.

4° C'est donc à la quatrième partie du problème que force a été de s'attacher et, bien que la solution soit relativement facile, il subsiste bien des doutes, des contradictions et des obscurités.

#### *Mouvement uniforme de translation dans un milieu indéfini.*

On a quelquefois voulu distinguer deux problèmes différents :

1° Mouvement uniforme de translation d'un corps dans un milieu indéfini supposé primitivement au repos ; 2° Mouvement uniforme et de translation du milieu, le corps servant d'obstacle fixe et modifiant le mouvement du milieu jusqu'à une certaine distance de lui.

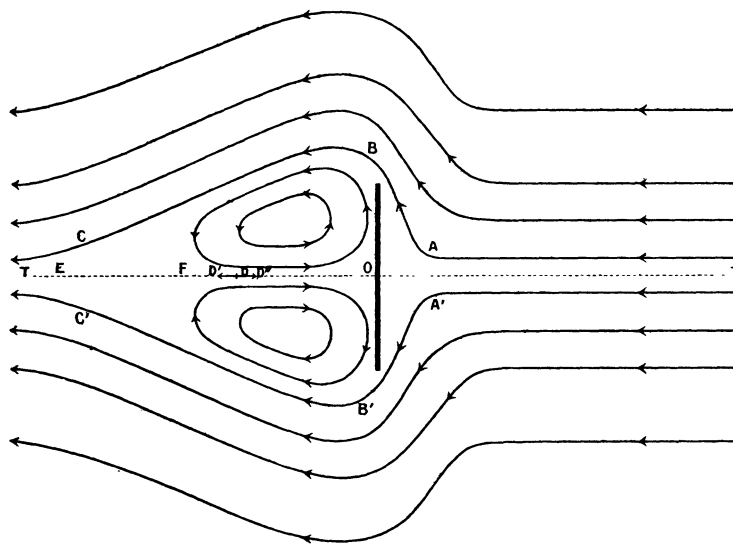
Malgré l'opinion de Poncelet (*Mécanique industrielle*), ces deux pro-

blèmes n'en font qu'un; car, si les résistances dépendent des mouvements absolus du milieu et du corps, les résultats seront différents suivant qu'on opère du nord au sud, de l'est à l'ouest ou de haut en bas, ce qui n'a jamais été constaté.

Il est généralement impossible de déplacer le milieu indéfini avec une vitesse connue. Cependant, dans le cas de l'air, le milieu se déplace de lui-même : c'est le vent. On peut opposer à l'action du vent des plans minces ou tout autre corps et déterminer la résultante des pressions, soit en suspendant le corps à un fil et en déterminant la déviation du fil, soit en attachant le corps à l'extrémité du fléau d'une balance de torsion. Quel que soit le dispositif expérimental, la principale difficulté est la mesure de la vitesse du vent et l'hypothèse de la constance de cette vitesse; or le vent procède toujours par raffales; sa vitesse, même quand il semble le plus régulier, peut varier du simple au double en une fraction de seconde (LANGLEY, *Smithsonian Contrib.*, 1893). Comme on ne peut songer à produire artificiellement la translation uniforme d'un milieu suffisamment indéfini, on a toujours étudié le mouvement des corps dans un milieu primitivement au repos.

S'il est plus facile de déplacer le corps que le milieu, il est plus commode

Fig. 11.



d'énoncer les phénomènes en supposant le corps fixe et le milieu mobile : c'est ce qu'on fait généralement. La *fig.* 11 représente la forme des filets

produits par le mouvement uniforme d'un plan mince circulaire, normalement à lui-même. Nous reproduisons ici cette figure, qui n'est qu'un schéma, parce que Poncelet, dans sa *Mécanique industrielle*, donne des figures où les remous sont représentés par des sortes de spirales logarithmiques (au centre desquelles l'air s'accumulerait indéfiniment) et que le Mémoire de Baille (*J. Éc. Pol.*, Cah. 52) en contient une dont il est impossible de découvrir le sens.

Les phénomènes sont de révolution autour de la normale TT au disque passant par son centre; les tourbillons se produisent en arrière du disque, suivant les méridiennes d'une série de tores; il n'y en a pas à l'avant. Pour déterminer les lignes de vitesse, on use de deux méthodes. Dans la première, on attache à l'écran (mû horizontalement d'un mouvement sensiblement uniforme et rectiligne) des fils supportant des bouts de papier, le tout jouant le rôle d'une girouette; ou bien on lui fait transporter des bougies, et l'on détermine le sens dans lequel la flamme s'incline. Dans la seconde, on détermine les trajectoires de bulles de savon. Mais il faut alors tenir compte de la chute de la bulle sous l'influence de son poids. Une bulle, arrivant suivant AB, n'entre dans le tourbillon que parce qu'elle tombe, autrement elle continuerait suivant BC. Corrélativement, de si près qu'elle rase le disque vers le bas suivant A'B', elle n'entre jamais dans le tourbillon.

Il est très curieux de voir l'appel d'air se produire en arrière du disque, à une distance beaucoup plus grande qu'un diamètre, et les bulles de savon entraînées pendant plusieurs mètres. Strictement, ce devrait être toujours la même matière qui forme les tourbillons; pratiquement ils sont alimentés par les tubes de vitesse voisins et leur restituent constamment du fluide, le phénomène n'ayant pas la régularité théorique qu'on a représentée. Au passage du disque le mouvement se fait sentir latéralement à plusieurs diamètres; la figure n'exagère pas les phénomènes.

Pour compléter ce schéma il faudrait donner, aux flèches qui représentent les vitesses, des longueurs convenables, ce que nous n'avons pas osé faire, tant l'expérience présente d'incertitude.

#### *Résultante des pressions. Terme en $V^2$ .*

L'étude expérimentale des filets est donc très délicate et peu précise. Dubuat a fait sur eux des hypothèses générales qui sont, au moins en gros, d'accord avec l'expérience :

1° Leur forme reste invariable pour un corps donné, quelle que soit la vitesse  $V$  du corps dans le milieu indéfini primitivement au repos.

2° La vitesse en un quelconque de leurs points est dans un rapport invariable avec cette vitesse  $V$ .

3° La forme et la grandeur des filets sont indépendantes de la nature du milieu fluide.

Il résulte des deux premières hypothèses, qui avaient été faites implicitement par Newton, que la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse. Car le corps, qui se meut avec une vitesse  $V$  dans le milieu primitivement au repos, devant créer une force vive proportionnelle à  $V^2$  (hyp. 2°) dans un volume proportionnel à l'espace parcouru en l'unité de temps (hyp. 1°), perd, dans l'unité de temps, une quantité d'énergie proportionnelle à  $V^3$ .

Soit  $R$  la résistance du milieu; son travail dans l'unité de temps est  $RV$ .

On a donc

$$RV = AV^3, \quad R = AV^2.$$

La constante  $A$  dépend de la forme du corps; si l'on change le milieu, elle varie proportionnellement à la densité (hyp. 3°). Les milieux n'interviennent que par leur masse. Newton avait même cherché à déterminer théoriquement la valeur numérique de la constante  $A$ , mais son résultat est erroné.

On s'est efforcé de vérifier ces déductions par l'expérience; or, pour être concluante, elle exige des conditions difficiles à réaliser. On ne peut monter le corps sur lequel on veut étudier la résistance de l'air sur un train ou sur un bateau à vapeur ayant une vitesse connue (comme le proposait Poncelet); car on serait loin d'avoir réalisé le milieu primitivement au repos; la proximité du support changerait le phénomène.

On a recours à la chute libre; mais, pour obtenir un mouvement rapide à peu près uniforme, il faut disposer de chutes très élevées, comme le prouve le calcul suivant. Cherchons quelle hauteur de chute est suffisante pour que la vitesse soit devenue uniforme à une approximation donnée  $\frac{1}{n}$ .

Soient  $M$  la masse du corps,  $P$  son poids. La force à chaque instant est  $P - f_2 v^2$ , au moins approximativement comme on le verra.

L'équation du mouvement est

$$\frac{M dv}{P - f_2 v^2} = dt = \frac{dx}{v}.$$



Soit  $V$  la vitesse limite définie par la relation  $P - f_2 V^2 = 0$ .

On a

$$\frac{v dv}{V^2 - v^2} = \frac{f_2}{M} dx = \frac{P}{M} \frac{dx}{V^2}, \quad -\log\left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right) = \frac{2Px}{MV^2}.$$

Or  $\frac{P}{M} = 980$ ; il vient

$$x = \frac{-V^2}{1960} \log \frac{2}{n}.$$

Donc la hauteur de chute doit être proportionnelle au carré de la vitesse limite pour une approximation donnée. Soit  $n = 300$ ,  $\log \text{nat} \frac{2}{n} = -5$

$$x = V^2 \cdot 2,55 \cdot 10^{-2}.$$

Si l'on veut aller avec cette approximation à des vitesses de  $10^m$  ou de  $20^m$  par seconde, il faut au moins des hauteurs de chute de  $25^m$  ou de  $100^m$ . Encore avons-nous admis que, pendant le mouvement accéléré, la résistance n'est pas plus grande que pour la même vitesse dans le mouvement uniforme, ce qu'on sait être faux.

Les conditions précédentes ont été réalisées par MM. Cailletet et Colardeau qui lâchaient les corps du premier étage de la tour Eiffel. Ils ont ainsi vérifié en chute libre pour le mouvement de translation la proportionnalité de la résistance de l'air au carré de la vitesse entre  $2^m$  et  $25^m$  par seconde. Pour les plans minces horizontaux, les résistances sont proportionnelles aux aires  $S$  de l'écran et représentées en C.G.S. par la formule (*voir* p. 41)

$$R = 0,00069 SV^2.$$

Les auteurs semblent considérer ce coefficient comme sûr à  $\frac{1}{100}$  près; cette approximation serait un immense progrès. Poncelet, discutant toutes les expériences connues en 1841 (et depuis les connaissances expérimentales ne se sont guère étendues), propose le coefficient 0,00084, supérieur au précédent de 22 pour 100.

Dans ces expériences, les corps sont attachés à un fil qu'ils déroulent dans leur chute et qui sert à déterminer leur vitesse. Ce fil agit d'abord par sa résistance au déroulement qui est négligeable, ensuite parce que les portions qui partent du repos doivent acquérir la vitesse générale de chute; leur inertie agit comme une force retardatrice négligeable si le fil est fin et léger. Ces deux causes tendent à augmenter la valeur du coefficient.

La résistance transversale du fil au vent n'est pas négligeable : le fil n'est

pas rectiligne, sa longueur ne mesure pas la hauteur de chute, elle est plus grande. Cette cause d'erreur diminue le coefficient, puisque la vitesse mesurée est plus grande que la vitesse réelle. Mais sur une hauteur de 150<sup>m</sup>, en admettant 10<sup>m</sup> de flèche, il se déroulerait 152<sup>m</sup> de fil; en admettant 20<sup>m</sup> de flèche, il se déroulerait 157<sup>m</sup> de fil.

Donc il ne pourrait au pis résulter de cette cause qu'une erreur de 1 à 2 pour 100.

De toute manière, il semble bien qu'on puisse considérer le coefficient comme connu à 1 pour 100 près. Telles sont les seules expériences qu'on ait réalisées sur le mouvement rectiligne et uniforme dans l'air. Toutes les autres ont été faites à l'aide de manèges où le phénomène est tout différent. Cependant nous pouvons utiliser leurs résultats, car le mouvement de manège, qui change les valeurs absolues des coefficients pour un milieu, respecte à peu près leurs valeurs relatives dans différents milieux.

MM. Cailletet et Colardeau ont montré que la loi du carré de la vitesse reste vraie pour des pressions supérieures à celle de l'atmosphère, que le coefficient est proportionnel à la densité actuelle du gaz par rapport à l'eau et indépendant de sa nature; il faut donc attribuer ce terme proportionnel au carré de la vitesse à une action de la masse, comme d'ailleurs tout le monde l'avait fait depuis Newton. Ces résultats confirment ceux qu'avait publiés Hirn dans un Mémoire paru en 1882 (*Ac. de Belg.*, 43) et qui n'ont pas la portée philosophique qu'il se plaisait à leur attribuer. Le coefficient du terme proportionnel au carré de la vitesse qui, pour des écrans plans de 100<sup>cm</sup> à 1000<sup>cm</sup> et des vitesses de 0<sup>m</sup>, 50 à 10<sup>m</sup> est pratiquement le seul, a été trouvé, par Hirn, proportionnel à la densité du milieu, indépendant de la nature du gaz et, à densité constante, indépendant de la température.

Dubuat avait émis l'hypothèse suivante: « Pour des corps semblables et dirigés semblablement, les dimensions absolues des filets sont seules modifiées, mais non leurs rapports de grandeur et de positions relatives. » D'où résulte qu'au moins pour des plans minces découpés suivant des surfaces semblables, la résistance est proportionnelle aux aires. MM. Cailletet et Colardeau ont trouvé que la restriction est inutile et que le coefficient reste le même quelle que soit la forme des surfaces. Il ne faudrait peut-être pas trop généraliser cette assertion.

En effet, ce qu'on appelle *résistance de l'air sur un corps* est la résultante totale des pressions. Elle ne peut en aucune manière être assimilée à une somme algébrique de pressions à peu près égales, agissant sur les divers

éléments de la surface. *A priori*, et à en juger par la forme des filets, les bords interviennent tout autrement que les parties centrales. Une compensation entre ces pressions, qui permettrait la proportionnalité de la résistance à l'air, existe peut-être approximativement pour toutes les formes qui, à aire donnée, ont un périmètre voisin de celui du cercle. Le cercle, le carré, le triangle équilatéral de même surface, ont leurs périmètres comme les nombres 1,00, 1,13, 1,29, c'est-à-dire assez voisins. La compensation peut avoir lieu approximativement dans ce cas; il est improbable qu'elle se fasse toujours. L'hypothèse de Dubuat présente, au contraire, beaucoup de vraisemblance.

Borda trouve dans ses expériences que « la forme de la partie du corps qui ne reçoit pas le choc de l'air ne fait rien ou très peu de chose à la résistance que ce corps éprouve ». L'assertion est certainement inexacte.

Enfin, dans le cas des surfaces planes, Borda a cherché comment la résistance dépend de l'angle d'incidence, c'est-à-dire de l'angle que font la direction du mouvement et la normale à la surface. Il n'a pas énoncé la loi qui est encore inconnue.

*Cas de la sphère.* — Les expériences de Newton l'ont conduit à une formule qui, transformée en C. G. S., devient

$$R = 0,00101 r^2 V^2,$$

$r$  étant le rayon de la sphère. Le coefficient est beaucoup trop fort. Borda dit que les résistances d'un grand cercle et de la sphère à laquelle il appartient sont entre elles comme 2,44 est à 1. Admettant le coefficient 0,00069 pour le plan, il vient pour la sphère

$$R = 0,00088 r^2 V^2.$$

Les artilleurs, s'appuyant sur des expériences faites avec des vitesses de 50<sup>m</sup> par seconde, admettent (HÉLIE, t. I, p. 179)

$$R = 0,00067 r^2 V^2.$$

On voit que la question n'est guère avancée. Il est cependant probable que le nombre des artilleurs ne convient pas aux petites vitesses.

*Conséquences de la loi du carré des vitesses.*

De la loi du carré des vitesses se déduisent des conséquences importantes sur la chute, dans l'air, des corps animés d'une vitesse horizontale, conséquences qui ont leurs applications dans l'étude du vol des oiseaux. Le point de départ est une expérience de M. Marey. Ayant, d'une part, photographié, à des intervalles de temps réguliers de 0<sup>s</sup>,1, une balle de peau remplie de son, tombant en chute libre, et, d'autre part, la trajectoire de cette balle lancée horizontalement à la main, M. Marey constata, en mesurant les hauteurs de chute successives sur les deux épreuves, que la balle tombait plus vite dans le premier cas que dans le second. Le commandant Uchard (*Revue d'Artillerie*, 1892) donna l'explication de ce fait dans un Mémoire sur l'influence de la vitesse initiale d'un corps sur sa chute dans l'air et montra que les faits observés sont une conséquence immédiate de la loi de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse. Rien de pareil ne se produirait si l'air résistait comme la vitesse ou toute autre puissance de la vitesse inférieure à la première. M. Langley (*Études aérodynamiques : Smithsonian contributions to Knowledge*, 1891, et *Énergie potentielle du vent*, 1893) reprit cette étude expérimentalement et expliqua, par ses expériences et l'étude intime de la constitution du vent, certaines particularités importantes du vol plané. Nous ne faisons que signaler ces travaux, ne cherchant qu'à rassembler les faits qui interviennent dans les oscillations.

*Introduction du terme en V.*

En 1801 (Mémoire de l'Institut, III), Coulomb montra que dans les liquides, pour des mouvements suffisamment lents, quelle que soit la forme des corps soumis à l'expérience, la résistance se compose de deux termes et s'exprime par une formule telle que

$$R = AS(aV + V^2).$$

Le terme en V subsiste pour les grandes vitesses, mais son influence est insensible. La valeur du coefficient  $a$  dépend essentiellement du genre de mouvement qu'on étudie : « Il y a même cas, dit Coulomb, et tel est celui où un plan se meut dans le sens de sa surface avec un mouvement très lent, où la portion de la résistance proportionnelle au carré disparaît presque en

entier et peut être négligée. » Coulomb a donc parfaitement distingué qu'au moins en gros, les deux termes se rapportent à des phénomènes différents : celui du carré à des effets de masse et d'inertie, celui de la première puissance à des effets de viscosité, sans contester d'ailleurs l'influence simultanée des deux causes sur les deux termes.

D'après les travaux de Navier et de Stokes, on a été conduit à définir une constante caractérisant la viscosité, et ainsi définie. Concevons le fluide se mouvant par couches parallèles au plan des  $xy$ , le mouvement ayant lieu dans une direction parallèle à l'axe des  $y$ . Il consiste en une sorte de glissement continu, et  $\frac{dV}{dz}$  peut être pris pour mesure de la vitesse du glissement. La pression totale, rapportée à l'unité de surface, se compose d'une pression normale en rapport avec la densité, et d'une pression tangentielle exprimée par  $\eta \frac{dV}{dz}$ , qui tend à réduire le mouvement relatif. Le coefficient  $\eta$  a pour l'air, en C. G. S., la valeur  $\eta = 0,00018$  suivant Tomlinson; il est indépendant de la raréfaction des gaz et croît avec la température.

Stokes (*Mémoires de la Société de Physique*, t. V), partant des équations de Navier, montre que la résistance opposée au mouvement rectiligne et uniforme d'une sphère de rayon  $r$  est donnée par la formule

$$R = 6\pi\eta rV = 0,00333rV.$$

Nous avons trouvé, d'après Borda, pour le terme en  $V^2$ ,

$$R = 0,00088r^2V^2,$$

d'où, réunissant les deux termes, il vient pour la résistance totale

$$R = 0,00088r^2\left(\frac{3,8V}{r} + V^2\right).$$

Il faut donc que la sphère soit bien petite et le mouvement singulièrement lent pour que le terme en  $V^2$  disparaisse devant le terme en  $V$  : si incertains que soient les coefficients, celui du carré de la vitesse n'est pas négligeable devant celui de la première puissance. Donc, *pour des mouvements rectilignes et uniformes, même lents, la résistance de l'air n'est pas proportionnelle à la vitesse*, quelle que soit la forme du corps. Il s'est établi le préjugé contraire, parce qu'on a confondu les mouvements rectilignes et les mouvements oscillatoires.

La sphère est le seul corps pour lequel le coefficient de  $V$  soit théoriquement déterminé.

Stockes s'occupe aussi du cylindre indéfini mù avec une vitesse rectiligne et uniforme perpendiculaire à ses génératrices. Il démontre (art. 46 et 47) que le mouvement ne tend pas vers un état permanent. A mesure que le cylindre avance, il entraîne avec lui une quantité de plus en plus considérable de fluide; la forme des filets et leur grandeur se modifient; la résistance est variable et ne peut s'exprimer par une formule où n'entrent que la vitesse et le rayon du cylindre. Quelle que soit la confiance que puisse inspirer le Mémoire de Stockes, et bien qu'on ne puisse critiquer ses développements mathématiques, il y a quelque chose dans ce résultat et, par suite implicitement, dans les équations fondamentales qui répugne: on admettra difficilement que le remous à l'arrière du cylindre et le mouvement autour de lui puisse s'étendre indéfiniment. Stockes fait d'ailleurs tant de restriction au début du calcul que l'on peut se méfier du résultat.

Si le terme en  $V$  dépend de la viscosité, il dépendra dans de larges proportions de la température, de la pression et de la nature du gaz, de la forme du mobile et de l'enceinte. Il est ainsi très facile de l'augmenter considérablement, même pour des écrans plans se déplaçant dans un milieu indéfini, en remplaçant le plan opaque par du tulle, de la mousseline, de l'étamine. Ainsi, pour des vitesses variant de 1<sup>m</sup> à 3<sup>m</sup> par seconde, pour lesquelles le terme en  $V$  correspondant à l'écran plan est pratiquement négligeable, on a trouvé

Écran en gros tulle.....	0,00032(14 V + V <sup>2</sup> )
Tulle fin.....	0,00030(20 V + V <sup>2</sup> )
Grosse mousseline.....	(21 V + V <sup>2</sup> )

Avec de tels écrans, même pour d'assez grandes vitesses, la loi du carré est loin d'être rigoureuse; on a exagéré l'influence des bords et créé comme une série de tubes courts; on a aussi singulièrement diminué l'influence des remous qui se forment à l'arrière de l'écran. Ce sont là de nouvelles restrictions à cette proposition, que la résistance d'un écran plan ne dépend que de l'aire et non de l'étendue des bords.

#### *Mouvement de translation rectiligne non uniforme.*

Supposons que, le mouvement étant uniforme depuis un temps assez long, on produise une variation brusque de vitesse: il y a une perturbation dans

la résistance du milieu. Soit  $V_1$  la vitesse uniforme au temps  $t = 0$ ,  $V_2$  la vitesse uniforme au temps  $t = \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  étant petit. La résistance au temps  $0$  peut s'exprimer par  $R_1 = f_1 V_1 + f_2 V_1^2$ . Elle ne deviendra

$$R_2 = f_1 V_2 + f_2 V_2^2$$

qu'après un temps  $\tau$  très supérieur à  $\varepsilon$ ; car le milieu doit passer de l'état qui correspond à la vitesse  $V_1$  à l'état qui correspond à la vitesse  $V_2$  : à cause de l'inertie, le changement ne peut se faire instantanément. Pendant l'état intermédiaire, la résistance est généralement fonction de  $V_1$ , de  $V_2$  et du temps.

D'après la première hypothèse de Dubuat, la forme des filets est indépendante de la vitesse; le changement ne porte pas sur la forme des filets, mais sur la vitesse en chacun de leurs points.

Qu'il faille un temps considérable pour atteindre l'état permanent, c'est ce que l'expérience montre de la façon la plus nette. Qu'on se reporte à la *fig. 11* qui représente la forme des filets et qu'on suppose une bougie placée en D à une distance OD de l'écran. Celui-ci glisse sur un fil horizontal, part du repos et atteint presque instantanément sa vitesse limite (sensiblement  $2^m, 5$  par seconde). Au moment du départ et sur  $4^m$  environ, la flamme s'incline suivant DD'; ensuite elle prend sa direction normale DD". L'expérience montre que, si elle s'éteint, c'est au moment du changement de sa direction. D'après l'hypothèse de Dubuat, tout se passe comme si, aux filets correspondant à la vitesse  $V_1$  (ici  $V_1 = 0$ ), se superposaient les filets correspondant à la vitesse  $V_2 - V_1$  (ici  $V_2$ ). Mais ceux-ci n'ont pas instantanément leur grandeur limite. Tout se passe donc comme si la bougie se trouvait d'abord en E (la direction de la flamme est DD'), puis en F (suivant qu'elle est placée un peu au-dessus ou un peu au-dessous de l'axe TT, le courant d'air est ascendant ou descendant; elle a le plus de chances pour s'éteindre); enfin en D.

M. Marey a cherché à résoudre expérimentalement le problème précédent, pour des plans minces déplacés dans la direction de leurs normales.

« Sur un bâti solide qui peut glisser facilement sur un plan horizontal, on dispose un écran léger dont le plan soit vertical et perpendiculaire au sens du glissement. Cet écran pivote autour d'un axe horizontal et son manche est chargé d'un petit poids additionnel, *pour qu'il y ait équilibre parfait entre le manche et l'écran lui-même*. De cette façon, au moment où l'on

imprime un mouvement de translation à l'appareil, on n'a pas à craindre que l'inertie de l'une ou de l'autre partie du système fasse pivoter l'écran autour de son axe, et, si un pareil pivotement se produit, c'est bien à la résistance de l'air qu'il faut l'attribuer. »

On conçoit qu'un ressort étalonné ramène le plan dans sa position d'équilibre verticale; le déplacement azimuthal du plan permet donc de mesurer la résultante des pressions à chaque instant, à supposer que sa masse, et par conséquent la force d'inertie, soit très faible vis-à-vis de cette résultante.

Pour que l'expérience soit correcte, ce sont donc deux conditions de construction qu'il faut réaliser. Le centre de gravité du système doit être sur l'axe de pivotement qui doit être lui-même l'axe de révolution de l'ellipsoïde d'inertie; il ne semble pas résulter de la description précédente que M. Marey se soit préoccupé de réaliser cette seconde condition. Il n'y a d'ailleurs qu'une seule manière pratique d'y parvenir : c'est d'équilibrer l'écran par un autre identique et identiquement placé par rapport à l'axe de pivotement, mais disposé de champ avec son plan normal à l'axe, de manière que son action sur l'air soit négligeable. Pour éviter toute dissymétrie, il faut que les deux écrans puissent tourner autour du bras qui les supporte et qu'on puisse faire successivement l'expérience en échangeant leur rôle. L'axe de pivotement doit être vertical si le plan de glissement est horizontal, et enfin l'appareil dynamométrique, devant être symétrique par rapport aux deux écrans, ne peut être qu'un ressort à boudin ou spiral dont l'une des extrémités est fixée au support de l'axe, l'autre à l'axe lui-même. Nous reviendrons plus loin sur ces dynamomètres.

Si l'on veut un réglage plus parfait, il faut fixer normalement aux deux plans, supposés légers, deux tiges minces métalliques de poids et de longueurs convenables, dont l'action sur l'air sera dans tous les cas négligeable.

Il est facile de voir en effet que la rotation d'un écran autour d'une droite normale à l'axe de rotation change très peu le moment d'inertie.

Ainsi, soit  $d$  la distance du centre de gravité de l'écran à l'axe,  $m$  sa masse.

Le carré de côté  $l$  placé dans un méridien a pour moment d'inertie

$$m \left( d^2 + \frac{l^2}{12} \right).$$



Le carré de  $l$  placé dans l'équateur a pour moment d'inertie

$$m \left( d^2 + \frac{l^2}{6} \right).$$

La diminution, quand on passe de la seconde à la première position, est  $\frac{ml^2}{12}$ . Si l'on veut que la compensation soit exacte, au moins à très peu près, il suffit de planter normalement une tige de longueur  $l$  et de masse  $m$ .

Le cercle de rayon  $r$  placé dans un méridien a un moment d'inertie

$$m \left( d^2 + \frac{r^2}{4} \right).$$

Le cercle de rayon  $r$  placé dans l'équateur a un moment d'inertie

$$m \left( d^2 + \frac{r^2}{2} \right).$$

La diminution est  $\frac{mr^2}{4}$ ; elle serait à peu près compensée par une tige de masse  $m$  et de longueur  $l = r\sqrt{3}$ . Si l'on connaît le diamètre de la tige métallique employée, on peut aisément obtenir une compensation rigoureuse.

De toute manière, il faut que les écrans soient légers et que l'appareil dynamométrique ne permette que de tous petits mouvements, pour éviter que ses indications ne retardent sur la force à mesurer.

M. Marey n'a pas fait de déterminations numériques : son expérience montre seulement qu'au passage de la vitesse 0 à la vitesse  $V$ , la résistance est plus grande momentanément que pour cette vitesse  $V$ .

Même dans ce cas du passage brusque d'une vitesse  $V_1$  uniforme à une autre vitesse uniforme  $V_2$ , il y a bien des problèmes à résoudre sur la solution desquelles nous ne savons rien : déterminer la résistance en fonction du temps, la manière dont elle dépend de  $\varepsilon$  et de la loi suivant laquelle on passe de  $V_1$  à  $V_2$ , la valeur de l'énergie nécessitée par ce passage, etc.

Il serait peut-être plus facile de résoudre un autre cas particulier du même problème, celui du mouvement rectiligne uniformément accéléré ou retardé (*a priori* le phénomène peut être différent dans les deux cas). Si l'on se reporte à l'analyse de la page 39, on voit que le seul moyen d'obtenir un tel mouvement pendant un temps suffisamment long pour que les expériences soient possibles, est de donner aux écrans une surface assez faible

comparativement à la masse des poids moteurs, et de relier l'appareil sur lequel on doit agir, et qui serait construit suivant les indications précédentes, à une sorte de machine d'Atwood de grandes dimensions et à poids très lourds, dont on aurait, par un montage sur billes, diminué autant que possible les frottements. Il est essentiel d'éviter tout frottement fonction de la vitesse et de pouvoir à volonté changer et mesurer l'accélération supposée constante. Il est évident que les conditions à réaliser sont justement l'inverse de celles qui s'imposent dans les expériences analogues à celles de M. Cailletet.

Outre les résistances proportionnelles aux puissances de la vitesse, il faut faire intervenir une force fonction de l'accélération. L'hypothèse la plus simple est d'admettre qu'elle lui est proportionnelle, ou que tout se passe comme si le corps entraîne, quelle que soit la vitesse, une portion constante du milieu ambiant, qui, invariablement liée au corps, agit comme une augmentation de sa masse propre. Tout changement de vitesse produit une force d'inertie additionnelle due à l'action du milieu.

L'existence d'une force simplement proportionnelle à l'accélération est très improbable, car la masse entraînée dépend nécessairement de la vitesse.

On peut généraliser l'hypothèse et admettre l'existence d'une masse entraînée proportionnelle à un développement suivant certaines puissances de la vitesse

$$g_0 + g_n V^n + g_m V^m + \dots$$

Comme nous le verrons, il semble que les puissances  $n$ ,  $m$ , ... sont fractionnaires. Nous n'avons pas de données expérimentales sur ces phénomènes; M. Boys, par la Photographie, a bien montré qu'une balle de fusil entraîne une proue considérable, mais les déterminations numériques manquent totalement.

*Mouvement de rotation uniforme (dit DE MANÈGE).*

Si l'on pouvait appliquer, à chaque élément d'une surface plane qui tourne autour d'un axe avec une vitesse angulaire constante  $\omega$  et dont le plan passe par l'axe, les lois et les coefficients numériques qui se rapportent au mouvement rectiligne, on pourrait facilement calculer le couple nécessaire à entretenir le mouvement.

Soit  $x$  la distance d'un élément de surface  $dx dy$  à l'axe de rotation pris

pour axe des coordonnées, le couple est pour cet élément

$$dR = k dx dy x^3 \omega^2,$$

et pour la surface entière

$$R = k \omega^2 \iint x^3 dx dy,$$

$k$  étant une certaine constante. Si cette surface est tout entière suffisamment éloignée de l'axe, et si  $d$  représente la distance à l'axe de son centre de gravité, l'expression précédente devient, aux restrictions de la page 41 près,

$$R = k \omega^2 d^3 S.$$

On sait depuis longtemps que le coefficient  $k$  déterminé par ces formules, en plaçant un écran plus ou moins loin de l'axe, n'est pas constant et croît à mesure que la surface se rapproche de l'axe. Dubuat a fait l'hypothèse suivante : « Pour des surfaces semblables et semblablement dirigées, placées à des distances de l'axe proportionnelles à leurs dimensions homologues, le coefficient qui multiplie  $\omega^2 d^3 S$  dans l'expression du couple résistant est le même. »

Soit  $\sigma$  le rapport de similitude, on peut poser

$$R = k \omega^2 d^3 S f\left(\frac{d}{\sigma}\right).$$

$f$  est une fonction à déterminer pour une surface particulière; elle doit satisfaire à la condition  $f(\infty) = 1$ , et peut servir pour toutes les surfaces semblables;  $k$  est une constante qui, d'après les expériences connues, a 0,00069 pour valeur.

L'hypothèse de Dubuat est très naturelle : on pourrait en faire d'autres analogues, mais moins probables. Appelons  $\sigma'$  le rapport d'extension perpendiculairement à l'axe de rotation; on pourrait admettre que la résistance de toutes les surfaces qui s'obtiennent, à partir d'une surface donnée, en multipliant les abscisses par  $\sigma'$  et en maintenant constantes les ordonnées se calcule par la formule

$$R = k \omega^2 d^3 S f\left(\frac{d}{\sigma'}\right),$$

$f$  étant une fonction à déterminer pour une de ces surfaces et servant pour toutes les autres.

Enfin les deux hypothèses précédentes peuvent être vraies simultanément.

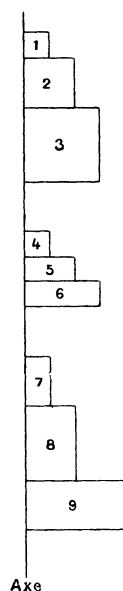
Appelons  $\sigma''$  le rapport d'extension parallèlement à l'axe de rotation (de sorte que l'opération  $\sigma$  revienne à deux opérations  $\sigma'$  et  $\sigma''$  égales). L'hypothèse actuelle revient à admettre que  $f\left(\frac{d}{\sigma'}\right)$  est indépendant de  $\sigma''$  : la résistance d'une surface est proportionnelle à sa dilatation, parallèlement à l'axe de rotation.

L'exemple suivant fait bien comprendre le sens de ces trois hypothèses (*fig. 12*).

D'après Dubuat,  $f\left(\frac{d}{\sigma}\right)$  reste le même pour les trois surfaces 1, 2, 3; les couples résistants sont comme 1, 32, 243.

D'après la seconde hypothèse,  $f\left(\frac{d}{\sigma'}\right)$  est le même pour les surfaces 4, 5, 6; les couples résistants correspondants sont comme 1, 16, 81.

Fig. 12.



D'après la troisième hypothèse,  $f$  est le même pour les surfaces 7, 8, 9, bien que  $\sigma''$  soit différent; les couples résistants sont comme 1, 24, 256.

Il faut déterminer expérimentalement, pour une surface donnée, la loi  $f(d)$ . Elle permettra, si l'une des hypothèses est vérifiée par l'expérience, de calculer les couples résistants pour une infinité d'autres surfaces.

Réciproquement, si l'on est assuré de la vérité de l'une des hypothèses, on peut remplacer la détermination de  $f(d)$  par une même surface, par

celle de  $f\left(\frac{d}{\sigma}\right)$  ou  $f\left(\frac{d}{\sigma'}\right)$ ,  $\sigma$  ou  $\sigma'$  étant seuls variables : ce qui revient à opérer à une distance constante de l'axe, mais avec des écrans différents.

Si la fonction  $f$ , quelle qu'en soit la forme, convergeait assez rapidement vers l'unité quand la variable croît, il suffirait de prendre un manège ayant des bras de longueur médiocre et une surface dont l'aire ne soit pas nécessairement très petite pour déterminer la valeur numérique du coefficient  $k$  correspondant au mouvement de translation. On avait admis cette convergence rapide jusqu'à ces dernières années et l'on en avait déduit comme conséquences erronées :

1° Un coefficient  $k$  trop grand;

2° Un coefficient  $k$  croissant beaucoup avec l'aire de la surface employée.

Malheureusement la convergence rapide vers l'unité n'existe pas. Pour un écran de 20/20, on a trouvé pour  $f(d)$  les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{cccccccc} d = & 50, & 60, & 70, & 80, & 90, & 100, & 110, \\ f = & 1,72, & 1,58, & 1,45, & 1,34, & 1,28, & 1,22, & 1,15. \end{array}$$

Des trois hypothèses précédentes, laquelle faut-il admettre? La détermination de la forme des filets montre que celle de Dubuat a seule quelque chance d'être vérifiée.

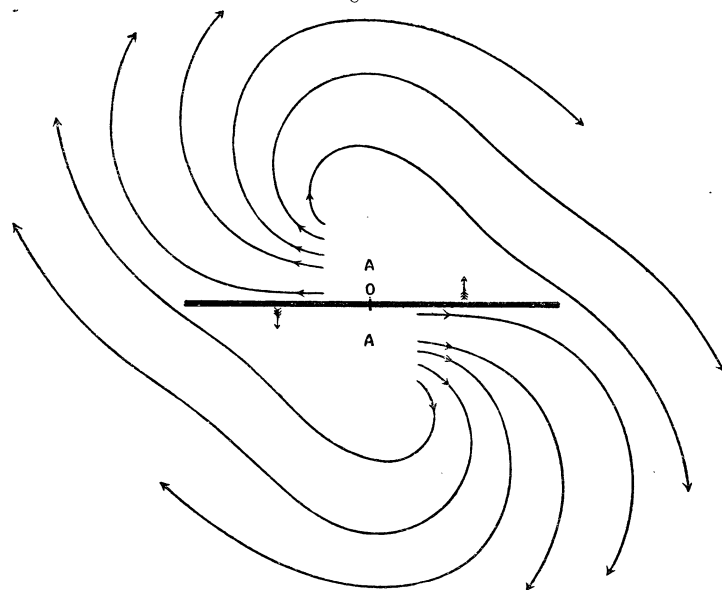
Si le rapport  $\frac{d}{\sigma}$  est petit, en d'autres termes si l'écran a des dimensions considérables par rapport à la distance de son centre de gravité à l'axe de rotation, il faut préciser s'il est seul, ou s'il en existe  $n$  autres identiques placés symétriquement par rapport à l'axe. La résistance des  $n$  écrans n'est pas, *a priori*,  $n$  fois la résistance de l'un d'eux employé seul.

Supposons donc que les écrans soient au nombre de deux situés dans un plan méridien; ce sont des rectangles, dont un des côtés est parallèle à l'axe de révolution.

La *fig.* 13 représente la forme des filets dans l'équateur du phénomène, au cas où les bords intérieurs des rectangles coïncident avec l'axe de rotation dont la trace est en O. Les écrans dont la hauteur est moitié de la longueur tournent dans la direction des flèches empennées; mais on les représente fixes : la figure montre donc les trajectoires d'un flotteur léger ou d'une particule d'air. Un fait frappe tout d'abord : les filets ne se ferment pas dans l'équateur, l'air est constamment pris dans les espaces A, A, lancé en arrière de l'écran et rejeté vers l'extérieur. Il y a corrélativement une aspi-

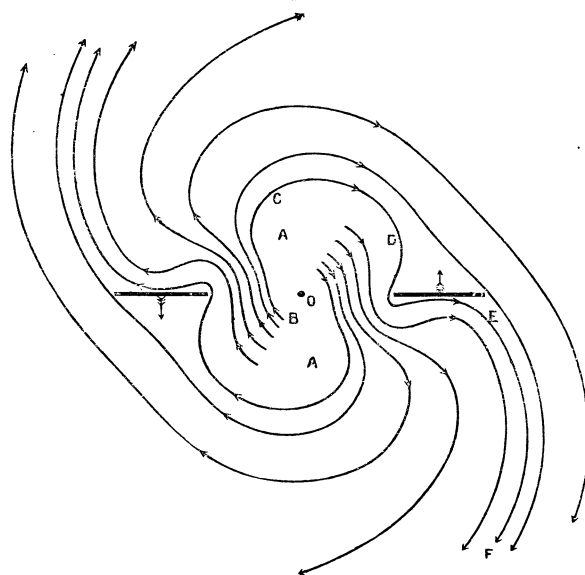
ration axiale, dirigée vers l'équateur du système qui remplace l'air rejeté suivant ce plan.

Fig. 13.



Dans la *fig. 14*, les écrans sont carrés, leurs bords intérieurs ne coïn-

Fig. 14.



cident plus avec l'axe. L'aspiration se produit toujours axialement vers l'équateur, et l'air est rejeté comme le montre la figure. Il ne semble pas qu'il

y ait déjà du remous à l'arrière des écrans. L'air peut ne pas être immédiatement rejeté : suivant la trajectoire BCDEF par exemple, il fait entre les écrans presque un tour complet. On conçoit facilement comment, en éloignant les écrans de plus en plus de l'axe, ce qui revient à augmenter le rapport  $\frac{d}{\sigma}$ , on se rapprocherait indéfiniment, et d'une manière continue, du phénomène représenté *fig. 11*.

Si les filets ont une telle complication, les considérations de la page 42 s'appliquent ici *a fortiori*. La disposition des bords des écrans prend une importance extrême et seule l'hypothèse de Dubuat présente de l'analogie avec les phénomènes à expliquer : peut-être même est-elle encore trop générale.

Même avec la condition que le plan des écrans passe par l'axe et que le centre de gravité reste fixe ( $d = \text{const.}$ ), il y a une infinité de manières de disposer un écran dans son plan ; donc, pour chaque écran, il y a généralement une infinité de fonctions  $f$  à déterminer. Seul le cercle n'en admet qu'une.

Mais, en supprimant ces restrictions, on peut admettre comme cas particuliers :

- 1° Que le plan de l'écran passe par une perpendiculaire à l'axe ;
- 2° Qu'il passe par une parallèle à l'axe.

D'où une infinité de nouveaux problèmes sur la solution expérimentale desquelles nous avons des résultats on ne peut moins sûrs ; ce qui est d'autant plus singulier que les régulateurs à palettes se rapportent à ces types.

Le problème se complique encore si l'on remplace les écrans plans par des solides.

Les méthodes qu'on peut employer pour déterminer toutes ces constantes (car les quelques expériences faites sont à refaire) se rapportent à deux types :

- 1° La méthode de Borda : on impose le couple résistant et l'on détermine la vitesse ; c'est pour un mouvement de rotation l'analogie de la chute libre ;
- 2° La méthode de Hirn ou des dynamomètres de transmission : on impose la vitesse et l'on détermine le couple résistant.

Discutons brièvement leurs avantages et leurs inconvénients.

Hirn dit que dans la méthode de Borda le manège ne prend que lentement sa vitesse limite. Appliquons le calcul à un cas particulier. Un des manèges dont je me suis servi a pour moment d'inertie  $M = 3,29.10^5$ . La

corde qui le fait tourner s'enroule sur un treuil de rayon  $r = 5,76$ . On peut y suspendre des poids de masse  $m$  jusqu'à  $800^{\text{gr}} = 7,84 \cdot 10^5$  dynes. Au delà, le système commençait à avoir de petites flexions. Cherchons dans ces conditions suivant quelle loi s'établit le mouvement.

L'équation est

$$\frac{(M + mr^2) d\omega}{980mr - f'_2 \omega^2} = dt.$$

$f'_2$  est le couple résistant correspondant à la vitesse angulaire unité (1 tour en 6<sup>s</sup>, 28).

Soit  $\Omega$  la vitesse angulaire limite définie par la relation

$$980mr - f'_2 \Omega^2 = 0.$$

Posons  $A = \frac{f'_2}{M + mr^2}$ , il vient, en intégrant,

$$-\log\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right) = 2A\theta = 4\pi Ap,$$

si  $p$  est le nombre de tours par seconde.

Voici le résultat d'une expérience. Avec un poids de  $100^{\text{gr}}$ , la vitesse limite pour l'écran employé était 9. Combien faut-il de tours pour que  $\omega = \Omega$  à  $\frac{1}{300}$  près? Il vient  $p = 22$ , ce qui fait sensiblement  $8^{\text{m}}$  de chute; or, on disposait au plus de  $13^{\text{m}}$ ; ce sont des conditions défavorables. Pour que la méthode soit applicable avec une hauteur de chute ou un nombre  $p$  donné, il faut que  $A$  soit grand; c'est-à-dire  $f'_2$  grand, ou  $M$  petit. D'où l'impossibilité d'employer pour le support des écrans des bras longs. D'ailleurs, si l'on rapproche les écrans de l'axe, la convergence de  $\omega$  vers  $\Omega$  diminue; les expériences sont peu comparables.

Si l'on opère avec des écrans assez grands pour que l'action de leurs supports soit relativement petite, on est conduit à augmenter les dimensions et la masse de ces supports. Heureusement, la résistance des supports à la flexion croît beaucoup plus rapidement que la résistance qu'ils opposent à l'air; de sorte que, malgré tout, il y a avantage à augmenter les dimensions de l'appareil.

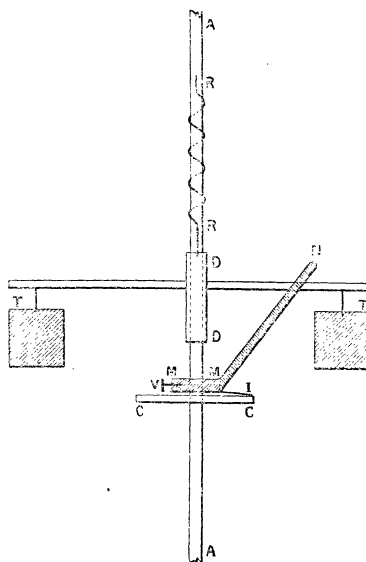
Mais alors, surtout pour les faibles vitesses, le mouvement tend lentement vers son état asymptotique, la correction des supports est difficile.

Pour toutes ces causes, il semble bien que Hirn ait raison de préconiser la méthode des dynamomètres de transmission dont le principe est très simple.



Un axe vertical tourne d'un mouvement uniforme imposé; il passe à frottement doux dans une tige horizontale qui lui est reliée par un système déformable servant de dynamomètre et porte les écrans. Les appareils ne diffèrent que par la nature du système déformable. Ceux de Hirn sont très compliqués et, chose plus grave, ont des frottements multiples et de l'inertie. Le suivant, très simple, satisfait aux conditions du problème (*fig. 15*). L'axe AA est relié à la douille DD par un ressort à boudin

Fig. 15.



d'acier, invariablement fixé à l'axe et à la douille à ses deux extrémités. La douille, qui tourne sans frottement autour de l'axe, porte la tige TT sur laquelle sont attachés les corps à étudier. La pièce MMN est rendue solidaire de l'axe par le moyen de la vis V; son azimuth est déterminé par l'index I sur un cercle gradué CC invariablement fixé à l'axe.

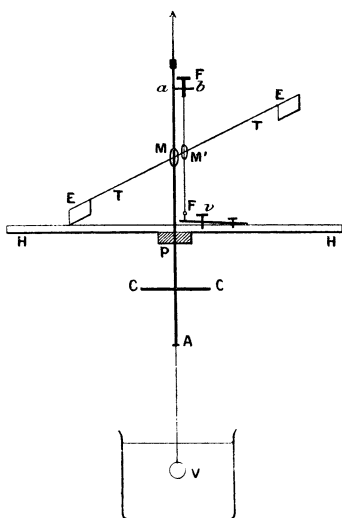
L'expérience consiste : 1° à étalonner en couples le ressort RR; 2° à déterminer au moyen de la pièce MMN l'azimut d'équilibre de la tige TT; 3° à donner à la pièce MMN à partir de cet azimut, dans le sens inverse du mouvement de rotation, un déplacement d'un angle déterminé par l'index I sur le cercle CC; 4° à déterminer la vitesse angulaire pour laquelle la tige TT se détache de la pièce MMN : cet instant est indiqué, par exemple, par la rupture du circuit d'un courant.

Cette disposition ainsi appliquée est une méthode de zéro; on équilibre une force donnée par la résistance de l'air. On peut aussi l'employer comme

méthode d'indication continue. Voici une expérience qui donne une idée de la technique opératoire. Il s'agit de déterminer la résistance de l'air sur des écrans très petits et pour des vitesses de quelques centimètres par seconde.

Comme il est extrêmement difficile d'obtenir un mouvement uniforme très lent, nous avons déterminé la résistance sur les écrans au moment du maximum de vitesse, dans le mouvement sinusoïdal produit par un pendule de torsion, dont le fil d'acier n'a pas moins de 13<sup>m</sup> de hauteur. Il s'attache au grenier, passe à travers deux plafonds et supporte l'axe d'acier  $aA$ ; il est tendu par la masse  $P$ . La résistance de l'air dans un mouvement non uniforme contient bien une petite fonction de l'accélération; mais, outre que pour des oscillations de longue période ce terme est toujours très petit, au maximum de vitesse l'accélération est nulle. La *fig.* 16 montre la dis-

Fig. 16.



position de l'expérience. Les écrans  $EE$  sont supportés par une paille  $TT$ , fixée normalement sur un fil de platine qui joue le rôle de dynamomètre. Le fil fin s'attache en haut à une pièce  $ab$ , en bas à un ressort qui permet de le tendre. Deux miroirs sont collés, l'un  $M$  sur la tige  $aA$ , l'autre  $M'$  sur la paille. Dans la position d'équilibre du fil  $FF$ , ils sont verticaux et parallèles. L'expérience consiste à enregistrer photographiquement leur angle au passage par le maximum de vitesse. La technique est exposée dans tous ses détails au Chapitre premier.

L'obturateur électrique produisant l'éclair est déclenché automatique-

ment au passage du pendule par la position d'équilibre. Quant aux vitesses, on les déduit immédiatement de l'observation des amplitudes lues sur le cercle CC.

L'expérience réussit au delà de toute attente. La vitesse linéaire maxima de l'écran ne dépassait pas  $14^{\text{cm}}$  par seconde; dans les dernières oscillations, elle était à peine de  $2^{\text{cm}}$  ou  $3^{\text{cm}}$ . Dans une des expériences le terme variable était, à un facteur près  $2,1 V + V^2$ . Donc, encore ici, *pour les mouvements de rotation uniforme nous pouvons conclure que même pour de petites vitesses, on ne peut négliger le terme en  $V^2$ ; la résistance n'est pas proportionnelle à la vitesse.*

## CHAPITRE IV.

### APPLICATION A LA RÉSISTANCE DE L'AIR.

#### *Mouvements oscillatoires.*

Dans son Mémoire sur l'effet du frottement intérieur des fluides sur les mouvements des pendules, Stockes (*M. Soc. de Phys.*, t. V) a étudié les oscillations de la sphère et du cylindre dans l'air. Il suppose le mouvement très petit, de sorte que la vitesse du corps oscillant soit toujours telle qu'on puisse négliger les termes qui dépendent de son carré. L'excursion maxima du corps oscillant est toujours très petite vis-à-vis de ses dimensions.

Dans ces conditions

$\rho$  étant la densité du milieu;

$r$  le rayon de la sphère;

$T$  la durée d'une oscillation complète;

$\eta$  le coefficient déjà défini (dont les dimensions sont  $MT^{-1}L^{-1}$ ),

on a pour la sphère

$$g_0 = \frac{2}{3} \pi \rho r^3 + 3 r^2 \sqrt{\pi \rho T \eta},$$

$$f_1 = 6 \pi r \eta + 6 \pi r^2 \sqrt{\frac{\eta \pi \rho}{T}}.$$

Réduits en nombres ces coefficients sont, pour l'air :

$$\rho = 0,001293,$$

$$g_0 = 0,00271 r^3 + 0,00254 r^2 \sqrt{T},$$

$$f_1 = 0,00333 r + 0,016 r \frac{1}{\sqrt{T}}.$$

Stockes les énonce aussi sous une autre forme équivalente;  $M$  étant la masse du fluide déplacé

$$g_0 = kM, \quad k = \frac{1}{2} + 0,470 \frac{\sqrt{T}}{r},$$

$$f_1 = \frac{2\pi}{T} k'M, \quad k' = 0,470 \frac{\sqrt{T}}{r} + 0,0982 \frac{T}{r^3}.$$

D'après Poisson, qui posait implicitement  $\eta = 0$ , on a  $k = \frac{1}{2}$ , résultat qui concorde avec le précédent.

Le Mémoire de Stokes contient de nombreuses vérifications numériques; mais la discussion des expériences de Baily et de Bessel le conduisent à admettre pour  $\eta$  la valeur 0,000 104 plus faible de près de la moitié que la valeur 0,000 177 actuellement admise. Il s'est glissé dans ses calculs une erreur provenant de ce qu'il ignorait comment  $\eta$  est fonction de la pression. Stokes donne aussi les formules pour le cylindre oscillant perpendiculairement à ses génératrices. Si  $M$  est la masse du fluide déplacé, on a toujours

$$g_0 = kM, \quad f_1 = k' M \frac{2\pi}{T}.$$

Mais les coefficients  $k$  et  $k'$  ne peuvent plus s'exprimer immédiatement en fonction du rayon  $r$  du cylindre. Stokes pose  $m = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{2\pi\rho}{\eta T}}$ , et donne, à la fin de la troisième Partie de son Mémoire, une Table qui permet de calculer  $k$  et  $k'$  en fonction de  $m$ , dont la valeur se déduit immédiatement de l'expérience.

Pour l'air on a

$$m = 0,295 \frac{r}{\sqrt{T}}.$$

Les résultats de Stokes suggèrent deux remarques capitales.

Les coefficients qu'il donne ne sont pas constants pour une même forme du système oscillant; ils dépendent de la durée d'oscillation. Ceci n'a rien qui doive nous étonner: le passage du mobile en une certaine position produit un mouvement de l'air qui ne s'éteint pas instantanément. La résistance dépend non seulement de la vitesse et de l'accélération actuelles, mais des vitesses antérieures et d'autant plus que l'oscillation est plus rapide et l'amplitude plus faible.

Cette circonstance n'empêche pas l'application des formules générales que nous avons rappelées dans le Chapitre II: car, un système étant donné, la durée d'oscillation varie très peu avec l'amplitude et peut être considérée comme une constante caractéristique de ce système. Il n'en serait pas de même si les coefficients dépendaient de l'amplitude.

La seconde remarque a trait aux dimensions mêmes de la quantité  $\eta$ , soit  $ML^{-1}T^{-1}$ . Pour avoir une force, il faut la multiplier par une vitesse et une longueur, et non pas par une vitesse et une surface. *A priori*, le

coefficient  $f_1$ , n'est plus proportionnel à la surface des écrans; il est proportionnel à leur périmètre dans les termes indépendants de la durée d'oscillation.

Tomlinson, en s'appuyant sur ces formules, a retrouvé pour  $\eta$  la valeur 0,000177 que l'on connaissait d'après d'autres méthodes.

Mais les formules de Stockes ne résolvent qu'une petite partie du problème que nous allons essayer de poser : on comprendra par cette discussion la nécessité du Chapitre précédent où nous semblions sortir de notre sujet.

*Cas où l'excursion du mobile est considérable par rapport à ses dimensions.*

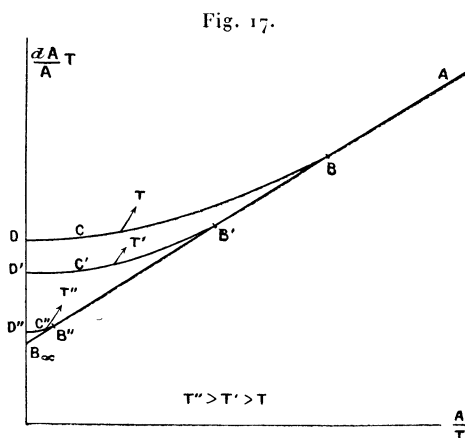
Dans le cas précédent le corps se déplace dans un milieu troublé et la résistance de l'air à chaque instant est fonction des résistances antérieures. Si, au contraire, l'excursion du mobile est considérable par rapport à ses dimensions et si la durée d'oscillation est assez grande, le mobile est à chaque instant dans un milieu moins troublé. La résistance est alors représentée par un développement à coefficients constants des vitesses et des accélérations. La perte d'amplitude  $\Delta A$  est une fonction du rapport  $\frac{A}{T}$ , ne dépendant que de la forme extérieure du système oscillant.

Quand l'excursion du mobile est très petite, les coefficients  $f_0, f_1, \dots$ , peuvent généralement dépendre, non seulement de la durée d'oscillation, mais encore de la manière suivant laquelle se fait l'amortissement. Si, au contraire, les conditions précédentes sont réalisées, ils ne dépendent plus ni de la durée d'oscillation ni de la loi d'amortissement.

En d'autres termes, les diverses parties de l'oscillation sont indépendantes les unes des autres; l'état permanent correspondant à une vitesse et à une accélération données, est pratiquement atteint avant que la vitesse ou l'accélération ne se soient sensiblement modifiées.

La loi générale d'amortissement d'une oscillation doit donc correspondre à deux types bien nets : le premier, pour de grandes amplitudes, caractérisé par des coefficients indépendants de la période et de l'amplitude; le second, pour de très petites amplitudes, caractérisé par des coefficients indépendants de l'amplitude, mais dépendant de la période. Ces deux types extrêmes sont raccordés par un phénomène intermédiaire où les coefficients dépendent de l'amplitude et de la période.

Pour le premier type, nous devons retrouver la résistance fonction de la vitesse qui correspond au mouvement de rotation uniforme. L'expérience montre que le coefficient  $f_0$  est nul et qu'on peut limiter le développement aux deux termes suivants :  $f_1 v + f_2 v^2$ . Donc  $\frac{\Delta A}{A}$  est représenté en fonction de A par une droite AB (fig. 17) inclinée et coupant l'axe des ordonnées



( $A = 0$ ) au point  $B_\infty$ . L'effet de manège intervient ici et les coefficients  $f_1$  et  $f_2$  ne sont pas du tout ceux qui conviennent au mouvement uniforme de translation; ils en peuvent différer par un coefficient très supérieur à l'unité.

Pour le second type, tous les expérimentateurs qui ont étudié les oscillations d'amplitudes petites sont d'accord pour conclure que tout se passe, pour une oscillation de période donnée, comme si la résistance était à chaque instant proportionnelle à la vitesse angulaire. La courbe représentant  $\frac{\Delta A}{A}$  en fonction de A est indépendante de A; c'est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

En prenant pour abscisses, non plus A mais  $\frac{A}{T}$ , et pour ordonnée, non plus  $\frac{\Delta A}{A}$  mais  $\frac{T \Delta A}{A}$ , il résulte des considérations précédentes que la droite AB est unique et indépendante de la période. Elle se raccorde à une droite horizontale CD qui correspond à une ordonnée d'autant plus grande que la période est plus courte. L'amortissement des oscillations, pour un système de forme extérieure donnée, est représenté par un faisceau de courbes telles que DCBA, D'C'B'A, ... Elles aboutissent toutes normalement à l'axe des ordonnées et admettent comme asymptote commune la droite  $B_\infty A$ , à laquelle elles se raccordent pratiquement, d'autant plus près du

point  $B_{\infty}$  que la période est plus longue. Si la période est infiniment longue, le phénomène est représenté jusqu'au bout par la droite  $AB_{\infty}$ , sauf en ce qui regarde la tangente d'aboutissement qui est encore horizontale.

Bien que les courbes se raccordent normalement à l'axe des ordonnées, il est inexact de dire, comme on l'a fait souvent, que « la résistance de l'air pour de petites vitesses est proportionnelle à la vitesse ». Car, sans rien changer à *la forme extérieure* de l'appareil oscillant, on peut modifier la durée d'oscillation, et,  $\nu$  étant la vitesse angulaire,  $f$ , un coefficient constant et déterminé une fois pour toutes, on ne peut pas mettre le couple résistant sous la forme  $f, \nu$ . Le véritable énoncé de la loi est le suivant : *En tous points de l'oscillation sinusoidale petite d'un corps de forme extérieure donnée, la période étant donnée, la résistance de l'air est à chaque instant proportionnelle à la vitesse angulaire, en ne tenant compte, bien entendu, que de la partie de cette résistance qui produit l'amortissement.*

La démonstration expérimentale des propositions énoncées implique que l'on puisse changer aisément le moment d'inertie de l'appareil oscillant sans modifier sa forme extérieure. On y parvient de plusieurs manières. On peut changer la longueur ou le diamètre du fil de suspension; mais ce changement ne peut se faire plusieurs fois sans beaucoup de temps et d'inconvénients. On peut constituer le système oscillant par des corps creux dans lesquels on introduit des masses additionnelles (tubes dans lesquels on glisse plus ou moins des cylindres pleins, sphères dans lesquelles on verse du mercure, etc.). Enfin on peut employer 4 (ou  $4n$ ), écrans identiques de forme extérieure, mais de masses différentes, et les interchanger.

L'expérience montre qu'en modifiant ainsi la durée d'oscillation, sans changer la forme extérieure, les coefficients  $f_1$  et  $f_2$  restent constants, pourvu que l'amplitude et la période soient assez grandes. Elle montre aussi que, pour mettre en évidence l'action de la période, il faut des oscillations petites et des périodes courtes, comme il résulte d'ailleurs des formules de Stokes. Si les périodes sont longues, l'infléchissement se produit bien toujours à l'extrémité de la courbe AB, mais les portions horizontales DC sont très voisines les unes des autres.

Pour que les expériences, dans lesquelles l'amplitude est considérable, soient bien concluantes, il faut s'assurer que le fil se conduit comme un corps parfaitement élastique et conserve une constante de torsion invariable  $\Gamma$ . On recommence la même expérience avec des amplitudes initiales



de plus en plus grandes : tant que les variations d'amplitude  $\Delta A$ , correspondant aux mêmes amplitudes  $A$ , restent les mêmes quelle que soit l'amplitude initiale, il est certain que la condition précédente est réalisée.

Pour que les expériences aient un sens, il faut prendre toutes les précautions dont il est parlé au Chapitre I.

Voici un exemple numérique :

On fait successivement l'expérience avec le fléau chargé de masses de plomb et en ajoutant deux sphères de celluloïd de 5<sup>cm</sup>,4 de diamètre. Leur centre est à 22<sup>cm</sup>,7 du fil de suspension dont la constante  $\Gamma$  est, en C.G.S., 37,9.

La durée d'oscillation avec les sphères est 232<sup>s</sup>,0.

La durée d'oscillation sans les sphères est 217<sup>s</sup>,6.

En réduisant les deux lois d'amortissement obtenues, avec les formules du Chapitre II et prenant leur différence, on trouve pour l'action des deux sphères la résistance suivante exprimée en couples et vitesses angulaires (C.G.S.)

$$23,2v + 301,9v^2.$$

Réduisant en dynes appliquées au centre des sphères et en vitesses linéaires et prenant la moitié, on a pour l'action d'une sphère

$$R = 0,0225V + 0,0119V^2.$$

Comparons ces nombres avec le coefficient de Stokes et celui qu'on déduit des expériences de Borda et de MM. Cailletet et Collardeau.

Stokes donne, pour l'air, la formule

$$f_1 = 0,00333r + 0,0160\frac{r^2}{\sqrt{T}};$$

mais, d'après ce qui précède, nous ne devons pas tenir compte du second terme, puisque les amplitudes sont assez grandes pour que la résistance soit indépendante de l'amplitude; donc

$$f_1 = 0,0090.$$

On trouverait

$$f_2 = 0,00088r^2 = 0,00643,$$

d'où

$$R = 0,0090V + 0,0064V^2,$$

au lieu de

$$R = 0,0225V + 0,0129V^2,$$

que nous avons trouvé.

Ce résultat n'a rien d'étonnant, puisque toutes causes interviennent pour augmenter la résistance et principalement les effets de manège. Les calculs de Stockes sont faits pour des oscillations rectilignes.

*Méthode de Hirn.*

La méthode de Hirn pour déterminer la courbe des  $\Delta A$  en fonction de  $A$  est très ingénieuse, mais n'a pas été appliquée par son auteur avec toute la perfection désirable. Elle consiste à suspendre le système oscillant à un fil de torsion et, au lieu de laisser décroître l'amplitude des oscillations sous l'action de l'air, à restituer à *chaque passage par la vitesse nulle* l'énergie perdue pendant la demi-oscillation précédente.

Soit  $\Gamma$  la constante du fil; l'énergie potentielle correspondant à l'angle  $A$  est  $\frac{\Gamma A^2}{2}$ ; une torsion  $\Delta A$  effectuée à partir de la torsion  $A$  augmente cette énergie de  $\Gamma A \cdot \Delta A$  sensiblement.

Cette torsion est faite à chaque passage par la vitesse nulle; pour que l'amplitude reste constante, il faut qu'il se perde dans la demi-oscillation précédente une quantité d'énergie égale à  $\Gamma A \Delta A$ , ce qui revient à dire que le travail de la résistance de l'air pendant cette demi-oscillation est  $\Gamma A \Delta A$ .

Si la résistance de l'air peut se représenter par un développement à coefficients constants de la vitesse (la portion qui dépend de l'accélération n'intervient pas dans l'amortissement), on a

$$\Delta A = \frac{1}{\Gamma} \left[ 2f_0 + 9,86 \cdot f_1 \frac{A}{T} + 52,6 f_2 \frac{A^2}{T^2} + \dots \right].$$

Nous savons que  $f_0 = 0$ . Hirn conserve seulement le troisième terme, ce qui suppose toujours la vitesse assez grande, et trouve

$$\Delta A = \frac{4f_2}{3} \frac{A^2}{M}.$$

L'angle de torsion  $\Delta A$  (ce qu'il appelle *angle moteur*) est indépendant du fil; pour un appareil caractérisé par un moment  $M$ , il est proportionnel au carré de l'amplitude.

Ce résultat n'est rigoureux que si le coefficient  $f_2$  est indépendant de la période; l'amplitude doit être très grande pour que l'atmosphère soit relativement peu troublée.

Il est difficile de dire jusqu'à quel point ces conditions étaient réalisées

dans les expériences de Hirn. L'amplitude était grande ainsi que la vitesse; mais le mouvement se faisait dans une bombonne de dimensions trop restreintes pour que les différentes parties de l'oscillation soient indépendantes les unes des autres. On lisait les déviations sans précision, « en alignant l'œil avec la direction du pendule arrivé à l'extrémité de sa course ». D'ailleurs, la durée d'oscillation était voisine de quatre secondes, et dans ces conditions, malgré ce que dit Hirn, il est impossible de produire la torsion assez brusquement et assez à propos, pour que la loi suivant laquelle elle se fait par rapport au temps de passage à la vitesse nulle n'influe pas sur l'amplitude.

Toutefois, il serait facile de donner à la méthode toute la précision désirable.

#### *Étude des coefficients g.*

Que l'action de l'air puisse produire un allongement dans la durée d'oscillation, c'est un fait connu depuis longtemps et que l'expérience la plus grossière montre immédiatement. Poisson, Bessel, Baily, Stockes ont cherché à calculer *a priori* ou à mesurer cet allongement dans le cas du pendule à seconde; mais c'est un cas aussi important que défavorable au point de vue expérimental. Aujourd'hui, dans la détermination de la longueur du pendule battant la seconde, on cherche non plus à faire cette correction, mais bien à éliminer l'effet de l'air par le principe de la réversion. La méthode a été proposée par Bessel et appliquée tout récemment par M. Defforges.

Mais il suffit de se reporter au Tableau de la page 27, pour voir que les résistances proportionnelles à la vitesse sont tout à fait incapables de produire les allongements de durée observés, même lorsque le carré de l'amortissement n'est pas négligeable; *a fortiori* il en est de même des forces proportionnelles au carré de la vitesse qui allongent encore moins la durée à amortissement égal. Un amortissement énorme, caractérisé par  $\mu = 0,20$ , produit par les premières de ces forces, n'augmente pas la durée de  $\frac{25}{10000}$  de sa valeur, soit  $\frac{1}{400}$ . Cependant les physiciens sont toujours portés à attribuer à ces forces, fonctions de la vitesse, un effet qui est presque uniquement dû aux forces, fonctions de l'accélération.

Nous ne reproduirons pas ici les considérations qui nous ont amené, à propos des coefficients  $f$ , à distinguer le cas des grandes amplitudes de celui des petites amplitudes. Le phénomène, ici encore, est tout différent, suivant qu'on peut considérer le mouvement se produisant à chaque instant

dans un milieu peu troublé ou dans un milieu très troublé. Si l'amplitude est grande et la durée suffisante pour qu'à chaque instant l'état permanent correspondant à la vitesse actuelle soit atteint, les coefficients  $g$  doivent être constants et ne dépendre que de la forme du corps. Cela veut dire que la masse entraînée est à chaque instant un développement à coefficients constants de la vitesse actuelle. Si, au contraire, l'amplitude est toute petite et la durée assez courte, les diverses parties de l'oscillation influent les unes sur les autres; les coefficients  $g$  ne sont plus constants et peuvent dépendre de l'amplitude et de la période.

Nous représenterons les phénomènes en prenant encore pour abscisses  $\frac{A}{T}$ ; pour ordonnées nous prendrons le quotient  $\frac{\Delta T}{T}$ ;  $T$  représentant la période, à supposer nulle l'action de l'air, ou le mouvement s'effectuant dans le vide;  $\Delta T$  l'allongement de la période, c'est-à-dire la différence de la période observée et de la période qu'on vient de définir.

En se reportant à la page 29 du Chapitre II, on voit que si la masse entraînée est une fonction à coefficients constants de la vitesse, telle que

$$g_0 + g_n v^n + g_m v^m + \dots,$$

$\frac{\Delta T}{T}$  est représenté par un développement à coefficients constants tel que

$$\frac{\Delta T}{T} = \gamma_0 g_0 + \gamma_n g_n \left(\frac{A}{T}\right)^n + \gamma_m g_m \left(\frac{A}{T}\right)^m + \dots,$$

proposition analogue à celle que nous avons rencontrée pour les amortissements; les coefficients  $\gamma$  se calculent approximativement avec la plus grande facilité.

C'est à l'expérience à déterminer le nombre des termes du développement ci-dessus et la valeur de leurs exposants. L'expérience est très difficile, elle doit se faire suivant la technique exposée au Chapitre I et les artifices indiqués au Chapitre III, p. 47, à propos des expériences de Marey. Elle prouve nettement deux points :

1° L'allongement n'est pas indépendant de l'amplitude, en d'autres termes le développement ne se réduit pas au premier terme;

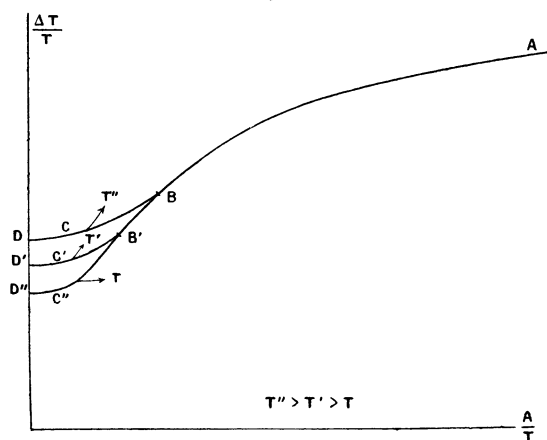
2° Les coefficients  $n, m, \dots$  sont positifs et fractionnaires; la masse entraînée croît d'abord vite avec la vitesse, puis ensuite très lentement.

La courbe unique qui représente les allongements relatifs de durée  $\frac{\Delta T}{T}$

en fonction de  $\frac{A}{T}$  a la forme  $ABB'$  représentée (*fig.* 18). Cette courbe correspond au premier type du phénomène.

On a donné plus haut l'expression du coefficient  $g_0$  calculé par Stokes pour la sphère et pour le cylindre en partant des équations générales de l'Hydrodynamique. Il résulte de ces calculs que l'allongement pour de petites amplitudes est constant et indépendant de l'amplitude. Les courbes

Fig. 18.



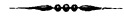
représentatives sont donc de petites droites  $DC$ ,  $D'C'$ , ... qui se raccordent, d'une manière inconnue d'ailleurs, à la courbe unique correspondant aux grandes amplitudes. Mais la disposition de ces droites et des droites analogues de la *fig.* 17 diffère du tout au tout.

En effet, le coefficient  $g_0$  de la sphère contient  $\sqrt{T}$  en facteur dans l'un de ses termes; celui du cylindre dépend aussi de la période et croît avec elle. Ainsi les droites  $CD$  aboutissent à une ordonnée d'autant plus grande que la période est plus grande.

Les conclusions que l'on doit tirer de cette longue discussion sont qu'on ne peut considérer le problème de la résistance de l'air comme expérimentalement résolu, même dans le cas particulièrement net des oscillations; qu'il serait nécessaire d'instituer systématiquement des expériences avec des méthodes analogues à celles que nous avons étudiées au Chapitre I; qu'il faudrait ne pas se borner, comme on l'a toujours fait, *aux oscillations infiniment petites qui représentent un cas relativement complexe*; qu'il est arbitraire de toujours considérer la résistance comme proportionnelle à la vitesse, ce qui résulte au fond de l'attraction qu'ont toujours eue sur les

physiciens les formes simples d'équations différentielles; enfin qu'il sera toujours imprudent de superposer à l'action de l'air un phénomène différent qu'on veut étudier, tant il paraît difficile de tenir compte de cette action.

Nous allons développer cette dernière conclusion par un exemple.



## CHAPITRE V.

APPLICATION A L'ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS ÉLASTIQUES DES FILS.  

---

Les remarques que nous avons présentées, au commencement du Chapitre II, sur l'impossibilité de déduire directement la loi des forces de l'étude complète de la trajectoire s'appliquent ici *a fortiori* pour deux raisons : la première est que, cette loi de forces trouvée, il faudrait faire la part de la résistance de l'air qui est énorme et inconnue dans ses détails et ses coefficients numériques; la seconde est que, dans le cas des fils, la durée d'une oscillation perd expérimentalement toute signification; en effet, comme nous l'avons démontré dans un précédent Mémoire, la position, où la force produite par le fil est nulle, oscille elle-même avec le mobile; la loi des forces est représentée, au moins dans ses grandes lignes, par celle qui est étudiée au 4° du Chapitre II. Il faudrait donc nécessairement compter les durées entre les positions particulières de vitesse nulle ou de vitesse maxima qui conservent une signification, mais sont expérimentalement indéterminées.

Donc, si nous voulons appliquer telle quelle la méthode des oscillations au fil de suspension, il faut nous attacher à déterminer quelque chose de mieux défini.

L'amortissement ou la perte d'énergie dans un parcours conserve une signification nette à la condition

- 1° Qu'on puisse faire la part de l'air;
- 2° Que le parcours soit bien défini.

Étudions les différentes formes sous lesquelles l'expérience est possible *a priori*.

Deux expériences sont ici toujours nécessaires : il faut opérer sur un fil écroui et ensuite sur le même fil dont l'écrouissage a été plus ou moins supprimé. Dans la première expérience, le fil pouvant être considéré comme parfaitement élastique, l'amortissement est dû uniquement à l'air; dans la seconde, il est dû à l'air et au fil. Par comparaison entre leurs résultats, on peut connaître ce qui est dû au fil. L'expérience est rendue possible par ce fait que la constante  $\Gamma$  du fil ne change pas sensiblement quand on modifie son écrouissage.

Pour appliquer cette méthode, il semble donc qu'il suffise de déterminer l'amortissement, par exemple avant et après avoir recuit le fil, pour déterminer l'énergie absorbée par le fil recuit. C'est une erreur; car le parcours suivant lequel cette énergie est absorbée reste expérimentalement indéterminé. Ce parcours est défini par la loi de succession des azimuts dans le temps (on peut l'admettre sinusoïdale) et les couples correspondants. Ces couples ne sont pas immédiatement donnés par l'expérience. Assurément la loi complète d'amortissement pour toute une série d'oscillations ne peut être satisfaite que par des parcours déterminés qu'il semblerait qu'on puisse calculer *a fortiori*; pratiquement, le calcul est tout à fait indéterminé.

On peut rendre la méthode bien meilleure par la détermination directe des couples aux deux extrémités du parcours. La disposition expérimentale est très simple. On colle en haut du fil, à quelques centimètres de son extrémité immobile, un petit miroir. La portion du fil au-dessus du miroir, qui est maintenue écroûie dans les deux expériences, sert de dynamomètre à la partie au-dessous qui est par exemple recuite dans la seconde expérience. La méthode consiste à déterminer aux extrémités des oscillations :

- 1° La position du disque qui permet de déterminer l'amortissement;
- 2° La position du miroir qui donne la valeur des couples.

L'expérience est très aisée si l'on a un aide avec soi; mais on la peut faire seul. On s'arrange de manière à obtenir l'une sur l'autre, dans une même lunette, l'image des divisions du disque et celle d'une échelle vue dans le petit miroir. On arrive, avec quelque habitude, à faire au moment de l'arrêt les deux lectures simultanément, soit à lire deux nombres de quatre chiffres dans une petite fraction de seconde.

Dans ces conditions le parcours est déjà bien mieux déterminé, puisque l'expérience donne non seulement les azimuts d'arrêt, mais les couples ou ordonnées correspondantes. En se reportant à la page 32, on voit que l'expérience fournit  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\varepsilon$ . Si donc l'action de l'air était nulle, et qu'on puisse assimiler le parcours à une parabole, une seule expérience donnerait ses deux coefficients  $\Gamma$  et  $b$ . On verrait aisément que, si le parcours est du troisième degré, l'étude de deux oscillations fournirait tous les coefficients. On pourrait ainsi savoir si les parcours, pour toute une série d'oscillations décroissantes, peuvent être représentés par des courbes du deuxième ou du troisième degré à coefficients indépendants de l'étendue du parcours, ou de la loi d'amortissement, etc., etc.

Malheureusement il faut faire la correction de l'air. Théoriquement elle



ne présente aucune difficulté. La condition d'arrêt n'est plus celle que nous avons écrite page 33. Le travail total des forces est toujours nul à l'arrêt, mais il faut joindre aux forces provenant du fil celles qui résultent de l'action de l'air. On ne peut les calculer ; mais on détermine comme suit leur travail  $\bar{\epsilon}$  par l'expérience.

La condition d'arrêt devient

$$C_1 \epsilon - \frac{\Gamma \epsilon^2}{2} + \frac{b \epsilon^3}{3} = \bar{\epsilon}.$$

En y joignant l'équation des forces  $C_2 + C_1 = \Gamma \epsilon - b \epsilon^2$  pour l'arrêt, on a

$$\Gamma = -\frac{6 \bar{\epsilon}}{\epsilon^2} + 2 \frac{C_1 - C_2}{\epsilon},$$

$$b = -\frac{6 \bar{\epsilon}}{\epsilon^3} + 3 \frac{C_1 - C_2}{\epsilon^2}.$$

Pour déterminer  $\bar{\epsilon}$ , on fait une expérience avec le fil non modifié, pour lequel la parabole des forces se réduit à la droite  $C = \Gamma \alpha$ .

Soit, dans ces conditions,  $\epsilon'$  et  $\epsilon''$ , deux étendues successives.

Posons

$$\epsilon' + \epsilon'' = 2 \epsilon, \quad \epsilon' - \epsilon'' = \delta \epsilon.$$

La perte d'énergie correspondant à cette oscillation complète est

$$\frac{\Gamma \epsilon}{2} \delta \epsilon.$$

Donc

$$\bar{\epsilon} = \frac{\Gamma \epsilon \delta \epsilon}{2}.$$

Il suffit de dresser un Tableau donnant en unités arbitraires, à côté des  $\epsilon$ , les  $\delta \epsilon$  dans l'expérience préliminaire.

Posons

$$\frac{\delta \epsilon}{\epsilon} = \tau,$$

il vient

$$\Gamma = -\frac{3 \Gamma \tau}{2} + 2 \frac{C_1 - C_2}{\epsilon},$$

$$b = -\frac{3 \Gamma \tau}{2 \epsilon} + 3 \frac{C_1 - C_2}{\epsilon^2}.$$

Dans ces dernières équations,  $\epsilon$  est exprimée en radians.

On pouvait donc espérer, malgré la résistance de l'air, tirer de cette

expérience d'utiles enseignements, pourvu du moins que l'effet de l'air soit ou bien assez petit, ou bien assez précis.

L'expérience a montré qu'il n'y avait rien à attendre de cette méthode : elle ne serait applicable que si l'on pouvait opérer dans un air extrêmement raréfié.

Sans rien changer à l'esprit des méthodes précédentes, il est possible de les rendre beaucoup plus précises. Le grand reproche qu'on doit leur adresser est que, une fois le fil modifié, il est impossible de refaire la première des expériences, celle qui doit déterminer l'influence de l'air.

Mais la difficulté n'est pas insoluble et voici comment.

Imaginons un grand pendule de torsion analogue à celui dont nous avons parlé au Chapitre précédent, page 57. On le fait osciller au moyen de torsions effectuées par en haut sur le fil d'acier. En mouvement, il représente une réserve d'énergie, potentielle aux extrémités de l'oscillation, actuelle aux maxima des vitesses. Cette réserve s'épuise pour deux causes; la résistance de l'air, les phénomènes à l'intérieur du fil d'acier. Mais on conçoit qu'une étude préliminaire de ce système oscillant permette, pour les différentes amplitudes et les différentes valeurs de la période, de connaître la perte d'amplitude et, par conséquent, la perte d'énergie. Attachons maintenant le fil fin à étudier, axialement sous le grand pendule, et fixons son extrémité inférieure à un ressort qui détermine exactement sa tension; le ressort est réglé de manière que le fil soit vertical. Nous ajoutons une nouvelle cause de déperdition d'énergie dont il sera possible de déterminer l'effet.

Cette méthode présente de grands avantages :

1° On peut diminuer autant qu'on veut la tension du fil fin, ce qui est impossible quand il supporte un disque et cependant nécessaire si l'on veut le chauffer.

2° On peut, sans changer cette tension et sans crainte d'abîmer le fil, faire varier la période des oscillations dans des limites bien plus larges.

3° Si la méthode actuelle est moins sensible, puisque l'amortissement par oscillation, évalué en degrés, est moindre, on peut mieux définir le parcours au point de vue des azimuts, puisqu'on peut se rapprocher d'un parcours à peu près indéfiniment le même. Ce manque de sensibilité est d'ailleurs tout relatif; car il suffit, pour déterminer l'amortissement, de remplacer l'observation sur un disque par la méthode de Pogendorff.

Ces avantages ne sont pas illusoire à la condition que le phénomène

lui-même de la résistance de l'air soit suffisamment précis. Malheureusement l'expérience montre que l'air produit un amortissement si rapidement croissant, que le principal avantage de la méthode (3°) disparaît, et tellement irrégulier par rapport aux petites absorptions d'énergie à mesurer, qu'on ne peut rien déduire de l'expérience.

On pourrait objecter que si le parcours pour le fil fin est défini pour ses azimuts, les couples ne sont pas donnés par l'expérience. Mais rien n'empêche de la compléter en collant au voisinage de l'extrémité inférieure du fil un miroir, en se servant de la partie du fil qui est au-dessous du miroir et qu'on ne modifiera pas, comme dynamomètre pour la partie qui est au-dessus du miroir; en déterminant les couples directement au bout des oscillations. Même ainsi faite l'expérience ne donne rien, toujours à cause de la résistance de l'air.

Donc, il faut abandonner le principe même de ces méthodes, la considération du système oscillant comme réserve déterminée d'énergie. Il faut *imposer, par un procédé mécanique quelconque* à l'extrémité d'un fil, un parcours sinusoïdal et déterminer à chaque instant l'azimut et le couple de torsion avec un dynamomètre. Au lieu de chercher à conclure quoi que ce soit de la loi de succession des parcours et de leur durée, il faut rendre ces parcours parfaitement déterminés et fixes et ces durées égales. En un mot il faut appliquer aux parcours sinusoïdaux la méthode générale que nous avons employée dans notre Mémoire sur les fils fins.

Il suffit, à ceux qui trouveraient ces conclusions par trop évidentes, de se rappeler qu'autant dire dans tous les Mémoires écrits sur ces questions : les propriétés élastiques des fils fins sont déduites de la loi des oscillations.

Or : 1° l'influence du fil est une faible fraction de celle de l'air; la correction est toujours plus forte que le phénomène étudié, même lorsque les expériences sont le plus correctement faites (*voyez TOMLINSON, Ph. Tr., p. 2; 1886*) : et nous savons, de plus, qu'elle est incertaine.

2° Les parcours sont mal connus et en tous cas déterminés par le phénomène et non choisis au mieux par l'expérimentateur.

3° On ne peut enfin trouver de lois simples que lorsque les corps sont soumis à des parcours indéfiniment répétés; et, pour des raisons purement mathématiques, à des parcours aussi rigoureusement sinusoïdaux qu'il est possible, ce qui n'est pas le cas d'un système oscillant amorti.

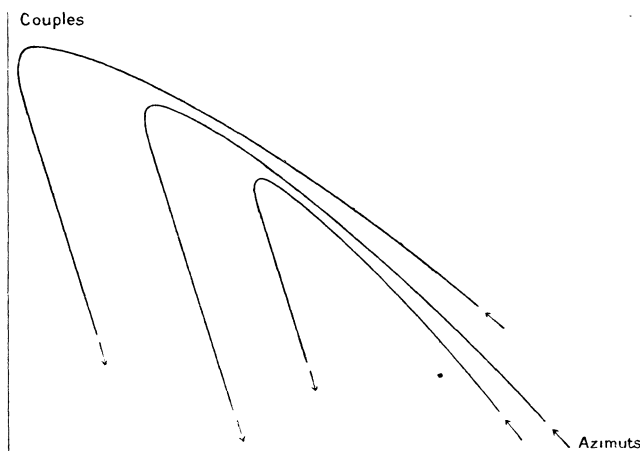
Sans discuter la meilleure manière d'opérer, qu'il nous suffise de donner un exemple de l'application de la méthode.

Avec l'appareil décrit page 73 (grand pendule de torsion, fil fin fixé axialement au-dessous, miroir collé sur le fil, partie inférieure du fil non modifiée servant de dynamomètre à la partie supérieure recuite), enregistrons suivant la technique du Chapitre I :

Toutes les secondes . . . . .  $\left\{ \begin{array}{l} 1^{\circ} \text{ la position azimutale du grand pendule,} \\ 2^{\circ} \text{ la position du miroir.} \end{array} \right.$

Nous aurons, *indépendamment de l'action de l'air*, par ses couples et ses azimuts, le parcours à peu près sinusoïdal décrit par le fil fin. Les éclairs sont fournis par deux obturateurs électriques en série (p. 10); on photographie les positions d'un disque solide du grand pendule sur un cliché (p. 13), et l'on connaît les positions du miroir par celles de l'image d'une fente sur un papier photographique (p. 5). Il n'y a d'intéressant à enregistrer que les bouts de l'oscillation; on ne met donc les obturateurs et le tournbroche en marche que pendant une fraction de la période. Un arc avec des miroirs convenablement disposés fournit les deux lumières exi-

Fig. 19.



gées. La *fig.* 19 donne un fac-similé des résultats : on la comparera à la figure du § 45 de notre précédent Mémoire.

Telle quelle, l'expérience ne satisfait pas à la condition fondamentale que le parcours puisse être obtenu indéfiniment constant; elle est trop compliquée d'ailleurs pour être une méthode d'investigation.

*Conclusions.*

La méthode des oscillations peut servir à l'étude de la résistance de l'air; il est inutile de lui demander des renseignements sur l'élasticité du fil de suspension dans tous les cas où l'amplitude n'est pas extrêmement petite.

