ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

E. CARTAN

Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 12, nº 2 (1898), p. B65-B99
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1898_1_12_2_B65_0>

On peut même voir immédiatement, en considérant les produits $e_{12}\,e_{21}$, $e_{23}\,e_{32}$, que ab est égal à 1 et c réel.

Nous pouvons, par suite, prendre dans Σ les 9 unités suivantes

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{llll} & \varepsilon = e_{11}, & & \\ \alpha = e_{22} + e_{33}, & \beta = ie_{22} - ie_{33}, & \gamma = e_{23} + ce_{32}, & \delta = ie_{23} - ice_{32}, \\ u = e_{12} + ae_{13}, & u' = ie_{12} - iae_{13}, & v = e_{21} + be_{31}, & v' = ie_{21} - ibe_{31}, \end{array}\right.$$

Or, si nous calculons le produit γv, nous trouvons

$$\gamma v = be_{21} + ce_{31};$$

si donc b est égal à $l + im$, on a nécessairement

$$\gamma v = lv + mv' = be_{21} + (l^2 + m^2)\,e_{31},$$

d'où l'on tire

$$c = l^2 + m^2 > 0.$$

Mais alors on a

$$\gamma(\gamma + \alpha\sqrt{c}) = \sqrt{c}(\gamma + \alpha\sqrt{c}),$$
$$\gamma(\gamma - \alpha\sqrt{c}) = -\sqrt{c}(\gamma - \alpha\sqrt{c}).$$

Il en résulte que le nombre

$$\lambda_1 e_{11} + \lambda\gamma + \lambda_4 e_{44} + \ldots$$

admet aussi p racines distinctes, mais il a deux racines imaginaires de moins que le nombre d'où nous sommes partis, ce qui est contraire à l'hypothèse que nous avions le nombre minimum de racines imaginaires.

80. *Il ne reste donc plus comme hypothèse admissible que celle où toutes les racines de l'équation caractéristique sont imaginaires.* Il faut par suite supposer que le nombre entier p est *pair*.

En raisonnant comme dans le numéro précédent, nous pouvons supposer que e_{11} et e_{22}, e_{33} et e_{44}, ..., $e_{p-1,p-1}$ et e_{pp} sont respectivement imaginaires conjuguées. Nous verrons de même que $e_{2i-1,2j-1}$, $e_{2i-1,2j}$, $e_{2i,2j}$ sont imaginaires conjuguées de nombres de la forme $ae_{2i,2j}$, $be_{2i,2j-1}$, $ce_{2i-1,2j-1}$.

Nous pourrons alors introduire les p^2 unités suivantes de Σ

$$(10) \qquad \left\{\begin{aligned} \bar{e}_{ij} &= e_{2i-1,2j-1} + c_{ij}\, e_{2i,2j},\\ \bar{e}'_{ij} &= i e_{2i-1,2j-1} - i c_{ij}\, e_{2i,2j},\\ \bar{e}''_{ij} &= e_{2i-1,2j} \quad - c'_{ij}\, e_{2i,2j-1},\\ \bar{e}'''_{ij} &= i e_{2i-1,2j} \quad + i c'_{ij}\, e_{2i,2j-1}, \end{aligned}\right\} \quad \left(i, j = 1, 2, \ldots, \frac{p}{2}\right),$$

et ces p^2 unités peuvent être prises pour déterminer Σ. Les c_{ij} sont des constantes réelles ou imaginaires, les c_{ii} étant égales à l'unité.

On voit immédiatement que le produit de deux de ces unités est nul, si le second indice inférieur de la première est différent du premier indice inférieur de la seconde. Il ne nous reste donc qu'à étudier les produits de la forme $\bar{e}_{ij}\,\bar{e}_{jl}$, $\bar{e}_{ij}\,\bar{e}'_{jl}$, ...

Pour cela, nous formerons un Tableau carré analogue à la Table de multiplication, les lignes correspondant aux premiers facteurs, les colonnes aux seconds facteurs. Auparavant remarquons qu'en désignant par c^0_{ij} la quantité imaginaire conjuguée de c_{ij}, les nombres $\frac{e_{13}}{c^0_{13}}$, $\frac{e_{15}}{c^0_{15}}$, ... sont respectivement imaginaires conjugués de e_{24}, e_{26}, ... Nous pouvons prendre ces nombres pour nouvelles unités e_{13}, e_{15}, ..., à condition de changer aussi d'une façon convenable, e_{31}, e_{51}, e_{35}, ..., mais sans avoir besoin de changer e_{24}, e_{26}, ... Nous pouvons donc en somme supposer que e_{13}, e_{15}, e_{17}, ... ont pour imaginaires conjugués e_{24}, e_{26}, e_{28}, ..., autrement dit que les constantes c_{1i} sont égales à l'unité.

Or on a

$$\bar{e}_{ij}\,\bar{e}_{jl} = e_{2i-1,2l-1} + c_{ij}\,c_{jl}\,e_{2i,2l};$$

la forme du second membre montre qu'il est égal à $\bar{e}_{il}$, cette unité étant la seule qui contienne $e_{2i-1,2l-1}$ avec un coefficient réel. On a donc

$$c_{ij}\,c_{jl} = c_{il},$$

et si dans cette formule on fait $i = 1$, on trouve $c_{jl} = 1$, c'est-à-dire que toutes les constantes c_{ij} sont égales à l'unité.

De même, la considération des produits $\bar{e}_{ij}\,\bar{e}''_{jl}$ et $\bar{e}''_{ij}\,\bar{e}_{jl}$ montre que c'_{il} est égale à c'_{ij} et c'_{jl}; par suite, toutes les constantes c' sont égales entre elles. Enfin le produit

$$\bar{e}''_{ij}\,\bar{e}''_{jl} = -c'(e_{2i-1,2l-1} + e_{2i,2l})$$

montre que c' doit être réel. Si c' était négatif on verrait, comme dans le numéro précédent, que l'équation caractéristique n'a pas toujours ses racines imaginaires, par exemple pour $u = \bar{e}''_{11}$. Donc c' est positif. En remplaçant alors $\bar{e}''_{ij}$, $\bar{e}'''_{ij}$ par $\frac{\bar{e}''_{ij}}{\sqrt{c'}}$, $\frac{\bar{e}'''_{ij}}{\sqrt{c'}}$, on trouve sans difficulté le Tableau suivant :

(11)

	$\bar{e}_{jl}$	$\bar{e}'_{jl}$	$\bar{e}''_{jl}$	$\bar{e}'''_{jl}$
$\bar{e}_{ij}$	$\bar{e}_{il}$	$\bar{e}'_{il}$	$\bar{e}''_{il}$	$\bar{e}'''_{il}$
$\bar{e}'_{ij}$	$\bar{e}'_{il}$	$-\bar{e}_{il}$	$\bar{e}'''_{il}$	$-\bar{e}''_{il}$
$\bar{e}''_{ij}$	$\bar{e}''_{il}$	$-\bar{e}'''_{il}$	$-\bar{e}_{il}$	$\bar{e}'_{il}$
$\bar{e}'''_{ij}$	$\bar{e}'''_{il}$	$\bar{e}''_{il}$	$-\bar{e}'_{il}$	$-\bar{e}_{il}$

81. En résumé, *si le système prolongé d'un système réel est simple, ce système réel rentre dans l'un des deux types suivants :*

1° *Les systèmes du premier type ont* p^2 *unités indépendantes* $e_{ij}\,(i, j = 1, 2, \ldots, p)$, *et la loi de multiplication est donnée par les formules*

$$e_{ij}\,e_{jl} = e_{il}; \tag{12}$$

2° *Les systèmes du second type ont* $4p^2$ *unités indépendantes* e_{ij}, e'_{ij}, e''_{ij}, e'''_{ij} *et la loi de multiplication est donnée par les formules*

$$\left\{\begin{aligned}
&e_{ij}\,e_{jl} = -e'_{ij}\,e'_{jl} = -e''_{ij}\,e''_{jl} = -e'''_{ij}\,e'''_{jl} = e_{il},\\
&e_{ij}\,e'_{jl} = \quad e'_{ij}\,e_{jl} = e'_{il},\\
&e_{ij}\,e''_{jl} = \quad e''_{ij}\,e_{jl} = e''_{il},\\
&e_{ij}\,e'''_{jl} = \quad e'''_{ij}\,e_{jl} = e'''_{il},\\
&e''_{ij}\,e'''_{jl} = -e'''_{ij}\,e''_{jl} = e'_{il},\\
&e'''_{ij}\,e'_{jl} = -e'_{ij}\,e'''_{jl} = e''_{il},\\
&e'_{ij}\,e''_{jl} = -e''_{ij}\,e'_{jl} = e'''_{il}.
\end{aligned}\right. \tag{13}$$

Il est bien clair que ces systèmes réels sont *simples*, c'est-à-dire n'admettent aucun sous-système invariant réel; sinon le sous-système prolongé de ce sous-système invariant serait lui-même invariant dans le système total prolongé, ce qui est impossible.

Au cas de $p = 1$ correspondent deux systèmes particuliers remarquables : celui du premier type est formé d'une seule unité égale à son carré; celui du second type est formé de quatre unités et a évidemment pour système transformé ce que nous avons appelé *un quaternion*. Ces quatre unités e, e', e'', e''' ont la loi de multiplication indiquée par le Tableau suivant :

(14)

	e	e'	e''	e'''
e	e	e'	e''	e'''
e'	e'	$-e$	e'''	$-e''$
e''	e''	$-e'''$	$-e$	e'
e'''	e'''	e''	$-e'$	$-e$

C'est à ce système réel qu'on réserve d'ordinaire le nom de quaternion, c'est sous cette forme qu'il a été découvert par Hamilton.

On voit que les formules (13) peuvent être résumées symboliquement par la loi de multiplication (14) du quaternion et la loi de multiplication des indices inférieurs

$$[i, j][j, l] = [i, l].$$

82. Le cas des systèmes prolongés simples étant résolu, passons aux cas où le système prolongé Σ' est *semi-simple*.

L'équation caractéristique du système réel Σ, qui provient de l'équation caractéristique du système prolongé, se décompose alors en plusieurs équations irréductibles, qui, si l'on se permet l'usage des nombres imaginaires, proviennent des facteurs irréductibles du premier membre de l'équation caractéristique de Σ'. Si tous ces facteurs irréductibles de Σ' donnent pour Σ des facteurs *réels*, à chacun des systèmes simples qui composent Σ' correspondra un sous-système réel de Σ et, par suite, Σ se décomposera en plusieurs systèmes simples des deux types étudiés dans le numéro précédent.

Supposons maintenant qu'un facteur irréductible P du déterminant caractéristique de Σ' donne pour Σ un facteur imaginaire $A + iB$; alors il devra y avoir un second facteur irréductible Q qui devra fournir la quantité imaginaire conjuguée $A - iB$. Il est bien évident, par suite, que ces deux facteurs devront correspondre à deux systèmes simples σ'_1, σ'_2 de Σ' ayant le même nombre d'unités. De plus, l'ensemble des systèmes σ'_1, σ'_2 est manifestement prolongé d'un sous-système réel σ de Σ.

Les racines de l'équation caractéristique qui correspond au facteur $P = A + iB$ ne peuvent pas être, pour un nombre arbitraire de Σ, réelles, car elles satisferaient à $P = 0$ et $Q = 0$, et, par suite, les deux quantités P et Q auraient un facteur commun. Elles sont donc toutes imaginaires. Mais l'équation $P = 0$ ne peut pas admettre non plus deux racines imaginaires conjuguées, car elles satisferaient aussi à $Q = 0$. Par suite, les deux équations

$$P = 0, \qquad Q = 0$$

admettent des racines toutes imaginaires et les racines conjuguées de celles de la première sont celles de la seconde.

Cela étant, si nous désignons par e_{ij} les unités de σ'_1 et e'_{ij} celles de $\sigma'_2 (i, j = 1, 2, \ldots, p)$, un nombre arbitraire de Σ peut être supposé de la forme

$$\lambda_1 e_{11} + \ldots + \lambda_p e_{pp} + \lambda'_1 e'_{11} + \ldots + \lambda'_p e'_{pp} + \ldots;$$

les termes non écrits se rapportent aux autres systèmes simples qui composent Σ' : les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les racines de P, et les quantités $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_p$ sont celles de Q. Par suite, tout nombre de σ'_1 est imaginaire et admet pour imaginaire conjugué un nombre de σ'_2.

83. Il en résulte qu'aux unités e_{ij} de σ'_1, satisfaisant aux relations

$$e_{ij} e_{jl} = e_{il},$$

correspondent dans σ'_2 des nombres satisfaisant aux mêmes relations et, par suite, qu'on peut identifier avec les unités e'_{ij}.

Nous pouvons donc poser

$$(15) \qquad \begin{cases} \bar{e}_{ij} = e_{ij} + e'_{ij}, \\ \bar{e}'_{ij} = i e_{ij} - i e'_{ij}, \end{cases}$$

et les $2p^2$ unités $\bar{e}_{ij}$, $\bar{e}'_{ij}$ peuvent être prises pour déterminer le sous-système réel σ de Σ.

La loi de multiplication de ce système réel σ à $2p^2$ unités est alors fournie par le Tableau suivant :

(16)

	$\bar{e}_{jl}$	$\bar{e}'_{jl}$
$\bar{e}_{ij}$	$\bar{e}_{il}$	$\bar{e}'_{il}$
$\bar{e}'_{ij}$	$\bar{e}'_{il}$	$-\bar{e}_{il}$

Ce système réel σ est *simple*, c'est-à-dire n'admet aucun sous-système invariant réel. Si, en effet, le nombre

$$u = \sum \lambda_{ij}\bar{e}_{ij} + \lambda'_{ij}\bar{e}'_{ij}$$

faisait partie d'un sous-groupe invariant, il en serait de même des deux nombres

$$\bar{e}_{\alpha i}\, u\, \bar{e}_{j\beta} = \lambda_{ij}\bar{e}_{\alpha\beta} + \lambda'_{ij}\bar{e}'_{\alpha\beta},$$
$$\bar{e}_{\alpha i}\, u\, \bar{e}'_{j\beta} = \lambda_{ij}\bar{e}'_{\alpha\beta} - \lambda'_{ij}\bar{e}_{\alpha\beta}.$$

Si donc l'un des nombres λ_{ij}, λ'_{ij} n'est pas nul, le sous-système invariant contient toutes les unités $\bar{e}_{\alpha\beta}$, $\bar{e}'_{\alpha\beta}$, puisque le déterminant des coefficients de $\bar{e}_{\alpha\beta}$, $\bar{e}'_{\alpha\beta}$ dans les deux expressions précédentes est $\lambda^2_{ij} + \lambda'^2_{ij} \neq 0$. Le sous-système invariant se confondrait donc avec le système total.

Il est bien clair alors que tout système réel Σ, admettant pour système prolongé un système semi-simple, s'obtient par la composition de systèmes réels rentrant dans le type précédent ou dans l'un des deux types du n° 81.

84. Il est facile maintenant de voir qu'on obtient ainsi tous les systèmes réels simples et semi-simples. En effet, si un système réel Σ a pour système prolongé un système Σ' qui n'est ni simple ni semi-simple, ce système Σ' admet un système invariant pseudo-nul, et ce système invariant s'obtient en égalant à zéro les dérivées partielles du coefficient de ω^{r-2} dans l'équa-

tion caractéristique. Mais si l'on prend pour unités de Σ' les unités de Σ, ce coefficient de ω^{r-2} est *réel et, par suite, le plus grand sous-système invariant pseudo-nul de Σ' est prolongé d'un sous-système invariant pseudo-nul de* Σ.

Donc Σ et Σ' sont en même temps semi-simples ou non.

Nous énoncerons donc le théorème suivant :

85. *Tout système réel simple rentre dans un des trois types suivants :*

1° *Les systèmes du premier type sont à p^2 unités e_{ij} avec la loi de multiplication*

$$e_{ij} e_{jl} = e_{il};$$

2° *Les systèmes du second type sont à $2p^2$ unités e_{ij}, e'_{ij} avec la loi de multiplication symbolique*

	e	e'
e	e	e'
e'	e'	$-e$

, $[i, j][j, l] = [i, l]$;

3° *Les systèmes du troisième type sont à $4p^2$ unités e_{ij}, e'_{ij}, e''_{ij}, e'''_{ij} avec la loi de multiplication symbolique*

	e	e'	e''	e'''
e	e	e'	e''	e'''
e'	e'	$-e$	e'''	$-e''$
e''	e''	$-e'''$	$-e$	e'
e'''	e'''	e''	$-e'$	$-e$

, $[i, j][j, l] = [i, l]$.

Tout système réel semi-simple est, par définition, formé par la composition de plusieurs systèmes réels simples.

Aux cas de $p = 1$ correspondent :

Pour le premier type, un système à une seule unité qu'on peut identifier avec le système des nombres réels ordinaires;

Pour le second type, un système à deux unités, e, e', qu'on peut identifier avec le système des nombres imaginaires ordinaires, e étant l'unité réelle et e' l'unité imaginaire i;

Pour le troisième type, un système à quatre unités qui n'est autre que le système des quaternions d'Hamilton.

Le cas général se ramène d'ailleurs à ce cas particulier de $p = 1$, à la condition de regarder les coefficients de e, e', e'', e''' (ou de e, e'; ou de e) comme des nombres complexes d'un p^2-ion. Cela revient, dans le troisième type, par exemple, à poser

$$e_{ij} = e\,\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}\,e, \qquad e_{ij} = e'\,\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}\,e', \qquad e''_{j} = e''\,\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}\,e'', \qquad e'''_{ij} = e'''\,\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}\,e''',$$

et le nombre le plus général du système est alors

$$\left(\sum x_{ij}\,\varepsilon_{ij}\right)e + \left(\sum x'_{ij}\,\varepsilon_{ij}\right)e' + \left(\sum x''_{ij}\,\varepsilon_{ij}\right)e'' + \left(\sum x'''_{ij}\,\varepsilon_{ij}\right)e'''.$$

On peut encore ramener les systèmes du second et du troisième type à ceux du premier, à la condition de regarder les coefficients des unités e_{ij} comme des nombres imaginaires (2^e^ *type*) *ou comme des quaternions* (3^e^ *type*).

86. Étudions maintenant les systèmes réels Σ qui ne sont ni simples ni semi-simples. Ils admettent alors (84) un plus grand sous-système invariant pseudo-nul σ qui, prolongé, donne le plus grand sous-système invariant pseudo-nul σ' du système Σ', prolongé de Σ. *Je dis d'abord qu'on peut choisir les unités de Σ et les partager en deux séries de telle façon que les premières déterminent un sous-système simple ou semi-simple et les dernières le sous-système invariant pseudo-nul σ.*

Pour cela, reportons-nous au système prolongé Σ' de Σ. Pour ce système, qui n'est plus réel, le théorème est vrai (72). Imaginons que nous ayons pris les unités canoniques indiquées au n° 60 et obtenues en partant d'un nombre arbitraire de Σ'. Supposons enfin que ce nombre arbitraire appartienne à Σ.

Les Hp^2–ions de Σ', si l'on fait abstraction des nombres pseudo-nuls, fournissent alors, soit un par un, soit par couple de deux, des systèmes réels simples de l'un des trois types possibles.

Supposons d'abord qu'un p^2–ion (e_{ij}) de Σ' fournisse, toujours en faisant abstraction des nombres du système pseudo-nul, un système simple de Σ du premier type. Alors les unités $e_{11}, e_{22}, \ldots, e_{pp}$ sont nécessairement réelles. On peut choisir arbitrairement e_{12} appartenant au caractère $(1, 2)$ relativement aux modules partiels $e_{11}, e_{22}, \ldots, e_{pp}$; or, l'ensemble des nombres de caractère $(1, 2)$ se déduit de nombres réels; on peut donc supposer e_{12} réel, de même $e_{13}, \ldots, e_{1p}$. Alors e_{21} sera réel, car il n'y a qu'un nombre qui satisfasse à la relation

$$e_{12}\, e_{21} = e_{11};$$

e_{12} étant donné et, par suite, e_{12} et e_{11} étant réels, ce nombre ne peut être que réel ; de même pour $e_{31}, e_{41}, \ldots, e_{p1}$. On en déduit

$$e_{ij} = e_{i1}\, e_{1j},$$

formule qui donne pour e_{ij} un nombre réel, puisque c'est le produit de deux nombres réels, et l'on démontre alors immédiatement que ces p^2 unités réelles forment un système. C.Q.F.D

87. Supposons, en second lieu, que deux des p^2–ions de Σ' donnent, dans Σ, en faisant abstraction des nombres du système invariant pseudo-nul, un système simple du second type. Alors les unités e_{ij} du premier p^2–ion de Σ' sont imaginaires et il n'y a qu'à prendre leurs imaginaires conjuguées pour avoir d'autres unités qui forment un p^2–ion qu'on peut supposer être le second p^2–ion considéré de Σ'. On en déduit, comme au n° 83, l'existence de $2p^2$ unités réelles formant dans Σ un *sous-système* simple du deuxième type.

88. Enfin, supposons qu'un p^2–ion (e_{ij}) de Σ' donne dans Σ, en faisant toujours abstraction des nombres du système invariant pseudo-nul σ, un système simple du troisième type. Alors nous montrerons, comme au n° 80, que, abstraction faite de nombres de σ, on peut supposer que

$$\begin{array}{lll} e_{2i-1,2j-1} & \text{et} \quad e_{2i,2j} & \text{d'une part,} \\ e_{2i-1,2j} & \text{et} \quad -e_{2i,2j-1} & \text{d'autre part,} \end{array}$$

sont imaginaires conjuguées. Nous allons d'abord traiter le problème dans le cas où *tous les produits de deux nombres quelconques de σ sont nuls.*

Remarquons d'abord qu'en désignant par η_{ij} un nombre de σ' appartenant au caractère (i, j) par rapport aux modules partiels e_{11}, e_{22}, ..., tout nombre $\eta_{2i-1,2j-1}$ est imaginaire conjugué d'un nombre $\eta_{2i,2j}$ et tout nombre $\eta_{2i-1,2j}$ d'un nombre $\eta_{2i,2j-1}$.

Cela étant, l'unité $e_{2i-1,2i-1}$ est imaginaire; l'unité imaginaire conjuguée est de la forme $e_{2i,2i} + \eta_{2i,2i}$; en écrivant qu'elle est égale à son carré, on voit manifestement que $\eta_{2i,2i}$ est nul. Donc d'abord $e_{2i-1,2i-1}$ et $e_{2i,2i}$ sont imaginaires conjuguées.

Prenons maintenant les unités e_{13}, e_{15}, ... et les unités e_{31}, e_{51}, ... On a

$$e_{1,2i-1}\, e_{2i-1,1} = e_{1,1} \qquad \text{et} \qquad e_{2i-1,1}\, e_{1,2i-1} = e_{2i-1,2i-1}.$$

Les nombres imaginaires conjugués de ces unités peuvent être pris pour unités e_{24}, e_{26}, ... et e_{42}, e_{62}, ... On a bien, en effet, en remplaçant dans les égalités précédentes chaque nombre par son imaginaire conjugué,

$$e_{2,2i}\, e_{2i,2} = e_{2,2} \qquad \text{et} \qquad e_{2i,2}\, e_{2,2i} = e_{2i,2i}.$$

Enfin, considérons l'unité e_{12}; elle a pour imaginaire conjugué un nombre de la forme $-e_{21} + \eta_{21}$. Supposons que le nombre η_{21} ne soit pas nul. Alors, si l'on désigne par $-\eta_{12}$ son imaginaire conjugué, le nombre e_{21} est conjugué de $-(e_{12} + \eta_{12})$. Or, des relations

$$e_{12}\, e_{21} = e_{11}, \qquad e_{21}\, e_{12} = e_{22}$$

on tire, en prenant les conjugués,

$$(e_{21} - \eta_{21})(e_{12} + \eta_{12}) = e_{22},$$
$$(e_{12} + \eta_{12})(e_{21} - \eta_{21}) = e_{11},$$

d'où, comme les produits de deux nombres η sont supposés nuls,

$$e_{21}\, \eta_{12} = \eta_{21}\, e_{12},$$
$$e_{12}\, \eta_{21} = \eta_{12}\, e_{21}.$$

Prenons alors les deux nombres

$$e'_{12} = e_{12} + \tfrac{1}{2}\eta_{12}, \qquad -e'_{21} = -e_{21} + \tfrac{1}{2}\eta_{21};$$

on voit facilement qu'ils sont imaginaires conjugués; mais ils satisfont à

la relation
$$e'_{12}\,e'_{21} = e_{12}\,e_{21} + \tfrac{1}{2}(\eta_{12}\,e_{21} - e_{12}\,\eta_{21}) = e_{11}.$$

Par suite, on peut supposer que e_{12} et $-e_{21}$ sont imaginaires conjugués.

Cela étant, nous nous sommes donné les nombres
$$e_{1,2i-1},\quad e_{2i-1,1},\quad e_{2,2i},\quad e_{2i,2},\quad e_{12},\quad e_{21};$$
prenons alors
$$\begin{aligned} e_{2i-1,2j-1} &= e_{2i-1,1}\,e_{1,2j-1},\\ e_{2i-1,2j} &= e_{2i-1,1}\,e_{1,2}\,e_{2,2j},\\ e_{2i,2j-1} &= e_{2i,2}\,e_{2,1}\,e_{1,2j-1},\\ e_{2i,2j} &= e_{2i,2}\,e_{2,2j}.\end{aligned}$$

Nous obtiendrons p^2 unités, qui formeront encore un p^2-ion; mais maintenant nous voyons facilement que les nombres
$$\begin{array}{llll} e_{2i-1,2j-1} & \text{et} & e_{2i,2j} & \text{d'une part,}\\ e_{2i-1,2j} & \text{et} & -e_{2i,2j-1} & \text{d'autre part,}\end{array}$$
sont imaginaires conjugués; les deux premiers, par exemple, s'obtiennent par deux formules dont les seconds membres sont imaginaires conjugués; de même pour les deux autres.

En introduisant alors les unités réelles $\bar{e}_{ij}$, $\bar{e}'_{ij}$, $\bar{e}''_{ij}$, $\bar{e}'''_{ij}$ comme au n° 80, nous arrivons à un *sous-système* simple réel.

89. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que le produit de deux nombres quelconques de σ était constamment nul. Il est facile de lever cette restriction. Désignons par η_1, η_2, ... l'ensemble des nombres de σ dont les deux produits avec un autre nombre quelconque de σ sont nuls; désignons de même par ζ_1, ζ_2, ... l'ensemble des nombres de σ dont les deux produits avec un autre nombre quelconque de σ ne dépendent que de η_1, η_2, ...; ensuite appelons θ_1, θ_2, ... l'ensemble des nombres de σ dont les produits avec un autre nombre quelconque de σ ne dépendent que des ζ et des η, et ainsi de suite. Il est facile de voir que le produit d'un nombre quelconque de Σ par un nombre η donne encore un nombre η, par un nombre ζ donne une combinaison des ζ et des η, et ainsi de suite. Désignons par λ_1, λ_2, ... la dernière série de nombres de σ ainsi obtenue, et par $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ... l'avant-dernière.

Cela étant, on peut déterminer dans Σ $4p^2$ unités, e_{ij}, e'_{ij}, e''_{ij} et e'''_{ij}, telles que les produits deux à deux de ces unités s'expriment, à part des nombres de σ qui pourront être au second membre, comme dans la loi de multiplication des systèmes réels simples du troisième type. Commençons d'abord par faire abstraction des nombres $\varkappa, \ldots, \theta, \zeta, \eta$; si, dans les formules qui donnent la loi de multiplication de Σ, on supprime tous ces termes, on obtient des formules qui peuvent être regardées comme définissant la loi de multiplication d'un nouveau système; le raisonnement est le même qu'au numéro 35. Mais ce nouveau système a pour plus grand sous-système invariant pseudo-nul les nombres qui correspondent aux λ, c'est-à-dire *des nombres dont les produits deux à deux sont tous nuls*, puisqu'ils ne dépendaient primitivement que des $\varkappa, \ldots, \theta, \zeta, \eta$. Mais, d'après le numéro précédent, on peut supposer choisies les unités e_{ij}, e'_{ij}, e''_{ij}, e'''_{ij}, de façon qu'elles forment un sous-système. Donc, en revenant au système Σ lui-même, nous voyons que nous pouvons faire en sorte que les produits des e_{ij}, e'_{ij}, e''_{ij}, e'''_{ij} ne dépendent pas des nombres λ.

L'ensemble des nombres obtenus en supprimant les unités λ forme encore alors un système sur lequel on peut répéter le raisonnement précédent, les λ étant ici remplacés par les $\varkappa$. Et ainsi de suite, de proche en proche. A chaque opération, nous ajoutons donc aux unités e, e', e'', e''' des nombres de σ tels que les produits de ces unités deux à deux ne dépendent plus des λ, des $\varkappa, \ldots$, des θ, des ζ et enfin des η.

Par suite, on peut supposer que ces $4p^2$ unités forment un sous-système.

90. En résumé, les résultats précédents peuvent s'énoncer de la façon suivante :

Tout système réel qui n'est ni simple ni semi-simple est formé d'un sous-système simple ou semi-simple et d'un sous-système invariant pseudo-nul. De plus, la nature du sous-système simple ou semi-simple est parfaitement déterminée.

Nous allons maintenant étudier d'un peu plus près la loi de multiplication de ces systèmes réels généraux et notamment la loi de multiplication de deux facteurs, dont l'un appartient au sous-système simple ou semi-simple et l'autre au sous-système invariant pseudo-nul.

Nous commencerons par supposer que le plus grand sous-système semi-simple se compose de systèmes simples pour lesquels l'entier caractéristique p est égal à l'unité, c'est-à-dire de systèmes analogues au système des nombres réels ordinaires, à celui des nombres imaginaires ordinaires et à celui des quaternions d'Hamilton.

91. Dans cette hypothèse, si le système semi-simple se compose de h systèmes simples, on peut appeler e_i, e'_i, e''_i, e'''_i les unités de ce sous-système, l'indice i parcourant la suite $1, \ldots, h$, mais pour certains nombres de cette suite les unités e'', e''' ou encore les unités e', e'', e''' devant être supprimées.

On peut, comme au n° 20, déterminer les unités de σ, de telle façon qu'à chacune d'elles correspondent deux indices α, β, constituant le *caractère* de cette unité, de telle sorte qu'on ait

$$(17) \qquad e_\alpha \eta = \eta e_\beta = \eta, \qquad e_i \eta = \eta e_j = 0 \qquad (i \neq \alpha, j \neq \beta).$$

Alors on a manifestement, pour les mêmes valeurs de i et de j,

$$e'_i \eta = (e'_i e_\alpha)\eta = 0, \qquad \eta e'_j = \eta(e_\beta e'_j) = 0,$$

de même

$$e''_i \eta = \eta e''_j = e'''_i \eta = \eta e'''_j = 0;$$

au contraire, les produits $e'_\alpha \eta$, $e''_\alpha \eta$, $e'''_\alpha \eta$, si les unités e'_α, e''_α, e'''_α existent, appartiennent au caractère (α, β); de plus, ces quatre nombres η, $e'_\alpha \eta$, $e''_\alpha \eta$, $e'''_\alpha \eta$ sont indépendants; si, en effet, ils étaient liés par une relation

$$\lambda \eta + \lambda' e'_\alpha \eta + \lambda'' e''_\alpha \eta + \lambda''' e'''_\alpha \eta = 0,$$

où les λ sont des constantes réelles, on aurait, par multiplication à gauche successivement avec e'_α, e''_α, e'''_α,

$$\begin{aligned}
-\lambda' \eta + \lambda\ e'_\alpha \eta - \lambda''' e''_\alpha \eta + \lambda'' e'''_\alpha \eta &= 0,\\
-\lambda'' \eta + \lambda''' e'_\alpha \eta + \lambda\ e''_\alpha \eta - \lambda' e'''_\alpha \eta &= 0,\\
-\lambda''' \eta + \lambda'' e'_\alpha \eta - \lambda' e''_\alpha \eta + \lambda\ e'''_\alpha \eta &= 0;
\end{aligned}$$

et ces quatre équations ont pour déterminant $(\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \lambda'''^2)^2$ qui est essentiellement différent de zéro. Si e_α et e'_α seules existaient, on démontrerait, de la même façon, que η et $e'_\alpha \eta$ sont deux nombres indépendants.

92. On peut particulariser davantage les unités η et séparer, dans certains cas, celles qui appartiennent à un caractère déterminé en plusieurs

catégories. Mais nous n'entrerons pas dans ces détails et nous nous contenterons de remarquer que le produit d'une unité de caractère (α, β) par une unité de caractère (γ, δ) est nul si β est différent de γ et ne dépend que des unités de caractère (α, δ) si β est égal à γ.

Enfin, on peut faire en sorte aussi que, les unités η conservant chacune un caractère déterminé, on puisse les affecter d'indices tels que le produit de deux unités η_i, η_j ne dépende que des unités η dont l'indice est supérieur à i et j.

Nous exprimerons tous ces résultats dans le théorème suivant :

93. *Étant donné un système réel dont le plus grand sous-système semi-simple se compose de h systèmes simples pour chacun desquels l'entier caractéristique p est égal à l'unité, c'est-à-dire de systèmes analogues au système des nombres réels ordinaires, au système des nombres imaginaires ordinaires et au système des quaternions d'Hamilton, on peut choisir les unités $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ du plus grand sous-système invariant pseudo-nul du système donné, de façon que les conditions suivantes soient réalisées :*

1° *A chaque unité η correspond un système de deux nombres α, β de la suite $1, 2, \ldots, h$ constituant le caractère de cette unité et tels que l'on ait*

$$e_\alpha \eta = \eta e_\beta = \eta,$$

tous les produits $e_i\eta$, $e'_i\eta$, $e''_i\eta$, $e'''_i\eta$, ηe_j, $\eta e'_j$, $\eta e''_j$, $\eta e'''_j$ étant nuls pour i différent de α et j différent de β ; e_i, e'_i, e''_i, e'''_i désignant, conformément aux notations du n° 85, les unités du $i^{\text{ième}}$ système simple, à condition de ne pas tenir compte, suivant les cas, des deux dernières ou des trois dernières de ces unités ;

2° *Suivant les cas, le produit $e'_\alpha\eta$ ou les trois produits $e'_\alpha\eta$, $e''_\alpha\eta$, $e'''_\alpha\eta$ donnent un ou trois nombres de même caractère (α, β) que η et indépendants entre eux et de η ;*

3° *Le produit d'une unité η de caractère (α, β) par une unité η de caractère (γ, δ) est nul si β est différent de γ et ne dépend que des unités de caractère (α, δ) si β est égal à γ ;*

4° *Le produit de deux unités η_i, η_j ne dépend que des unités dont l'indice est supérieur à chacun des indices i et j.*

Nous dirons que toutes les fois que les conditions qui viennent d'être énoncées seront réalisées, les unités e, e', ..., η seront *canoniques,* ce qui n'implique naturellement pas l'existence d'un *seul* choix d'unités canoniques.

94. Si nous appelons *systèmes réels* de la première classe les systèmes que nous venons d'étudier, nous passerons de ces systèmes à ceux de la deuxième classe absolument de la même façon que dans le cas des systèmes quelconques.

Tout système réel Σ de deuxième classe se réduit d'un système réel Σ' de première classe, de la façon suivante :

Imaginons que nous ayons choisi des unités canoniques pour ce système

$$E^{(1)}, \quad E^{(2)}, \quad \ldots, \quad E^{(H)};$$

chacune d'elles appartient à un certain caractère (α, β), où α, β sont deux des indices de la suite $1, 2, \ldots, H$, en supposant que le plus grand sous-système semi-simple de Σ' se décompose en H systèmes simples.

Nous ferons correspondre à chaque unité $E^{(\rho)}$ de caractère (α, β) un certain nombre $p_\alpha p_\beta$ d'unités $e_{ij}^{(\rho)}$, où i parcourt la série $1, 2, \ldots, p_\alpha$ et j la série $1, 2, \ldots, p_\beta$, les nombres $p_1, p_2, \ldots, p_H$ étant H nombres entiers.

Si alors les formules qui donnent le produit de deux unités de Σ' sont

$$E^{(\rho)}E^{(\sigma)} = \sum_{\tau=1}^{\tau=H} \alpha_{\rho\sigma\tau} E^{(\tau)},$$

les formules qui donnent le produit de deux unités de Σ sont

$$e_{ij}^{(\rho)} e_{jl}^{(\sigma)} = \sum_{\tau=1}^{\tau=H} \alpha_{\rho\sigma\tau} e_{il}^{(\tau)},$$

i, j, l parcourant respectivement les séries $1, 2, \ldots, p_\alpha$; $1, 2, \ldots, p_\beta$; $1, 2, \ldots, p_\gamma$, si les caractères de $E^{(\rho)}$ et de $E^{(\sigma)}$ sont respectivement (α, β) et (β, γ). Les produits non écrits sont tous nuls.

On peut faire la même remarque qu'au n° 60 et regarder les nombres du second système comme des nombres du premier système, les coefficients des unités étant des nombres complexes.

Nous dirons encore que, dans ce cas, les unités choisies sont canoniques.

95. Reprenons comme application le problème de trouver tous les systèmes réels à multiplication commutative. Nous verrons, comme au n° 74, qu'un système de cette nature, *qui ne se décompose pas,* est formé d'un sous-système simple et d'un sous-système invariant pseudo-nul. De plus, le sous-système simple est à une ou deux unités.

Tous les systèmes réels non décomposables à multiplication commutative rentrent dans un des deux cas suivants :

Dans le premier cas, on peut prendre pour définir le système des unités $e, \eta_1, \ldots,$ *telles que l'on ait*

$$e^2 = e, \qquad e\eta_i = \eta_i e = \eta_i, \qquad \eta_i\eta_j = \sum \alpha_{ijs}\eta_s,$$

les constantes α_{ijs} *étant égales à* α_{jis} *et nulles toutes les fois que* s *ne dépasse pas à la fois les deux indices* i *et* j.

Dans le second cas, le sous-système simple est formé de deux unités e, e' *et l'on voit facilement que les unités* η, *qui sont en nombre pair, peuvent être partagées en deux séries* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ *d'une part,* $\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_k$, *d'autre part, de telle façon qu'on ait les relations*

$$e^2 = -e'^2 = e, \qquad ee' = e'e = e',$$

$$e\eta_i = \eta_i e = \eta_i, \qquad e\eta'_i = \eta'_i e = \eta'_i,$$
$$e'\eta_i = \eta_i e' = \eta'_i, \qquad e'\eta'_i = \eta'_i e' = -\eta_i,$$

$$\eta_i\eta_j = -\eta'_i\eta'_j = \sum(\alpha_{ijs}\eta_s + \beta_{ijs}\eta'_s),$$

$$\eta_i\eta'_j = \eta'_i\eta_j = \sum(\alpha_{ijs}\eta'_s - \beta_{ijs}\eta_s);$$

les constantes α_{ijs} *et* α_{jis} *étant égales et nulles toutes les fois que* s *ne dépasse pas à la fois les deux indices* i *et* j; *de même pour les* β.

En particulier, on retrouve le système des nombres réels ordinaires et le système des nombres imaginaires ordinaires dans le cas particulier où le système est simple.

96. Enfin, un dernier problème intéressant qu'on peut se poser au sujet des systèmes réels est le suivant :

En général, il existe dans un système des nombres qui, multipliés par des facteurs convenables, donnent des produits nuls. On appelle ces nombres les *diviseurs de zéro*. Pour un système non réel, c'est-à-dire qui contient tous les nombres qui se déduisent linéairement de r unités avec des coefficients réels ou *imaginaires* quelconques, il y a toujours des diviseurs de zéro autres que zéro lui même, sauf dans le cas d'un système à une seule unité ; si, en effet, le système n'est pas semi-simple, c'est évident, puisqu'il admet un sous-système pseudo-nul dont toutes les unités sont des diviseurs de zéro ; s'il est semi-simple, il en est de même ; il suffit de prendre, dans un système simple e_{ij}, les deux unités e_{11} et e_{22} dont le produit est nul.

Pour un système réel, au contraire, il y a d'autres systèmes que celui à une seule unité qui n'admettent aucun diviseur de zéro. Tout d'abord, un tel système doit être simple, pour les raisons qui viennent d'être exposées. De plus, le nombre p, caractéristique de ce système simple, doit être égal à l'unité, sinon on aurait, comme tout à l'heure, deux unités e_{11}, e_{22} de produit nul.

Il reste donc seulement les trois systèmes simples à 1, 2, 4 unités, c'est-à-dire le système des nombres réels ordinaires, celui des nombres imaginaires ordinaires et celui des quaternions d'Hamilton.

Réciproquement pour les deux premiers de ces systèmes, la propriété n'a pas besoin d'être démontrée ; quant au troisième, on la démontre en considérant directement le produit de deux nombres

$$(xe + x'e' + x''e'' + x'''e''')(ye + y'e' + y''e'' + y'''e''');$$

les coefficients de e, e', e'', e''' dans le produit sont des formes bilinéaires des x et des y, et le déterminant des coefficients des x dans ces formes est $(y^2 + y'^2 + y''^2 + y'''^2)^2$, d'où l'on déduit que les quatre formes ne peuvent être nulles que si l'on a à la fois tous les x nuls ou tous les y nuls.

97. Nous avons donc le théorème suivant :

Étant donné un système réel de nombres complexes à multiplication associative, si l'on veut que la multiplication satisfasse à la loi que le produit de deux facteurs ne puisse être nul sans que l'un des facteurs soit nul, ce système est :

Ou bien le système des nombres réels ordinaires ;

Ou bien le système des nombres imaginaires ordinaires ;

Ou bien le système des quaternions d'Hamilton.

Si l'on veut, en outre, que la multiplication soit commutative, il ne reste que le système des nombres réels ordinaires et celui des nombres imaginaires ordinaires.

D'ailleurs, ce théorème aurait pu se démontrer avant tout développement sur les systèmes *réels* de nombres complexes, la condition pour qu'un système n'admette pas de diviseur de zéro étant que le terme indépendant de ω dans le premier membre de l'équation caractéristique ne puisse s'annuler pour aucun nombre du système. Cela étant, ce terme indépendant de ω est un produit de déterminants de degrés $p_1, p_2, \ldots$. L'un de ces déterminants peut s'annuler en annulant, par exemple, tous les p éléments d'une même ligne, ce qui fait au *plus* $2p$ équations linéaires *réelles*. Il faut donc que r ne dépasse pas $2p$, ce qui exige déjà que p ne dépasse pas 2. On a alors ou bien un quaternion, ou bien un système de première classe à deux unités ou une unité.

VIII.

LES GROUPES BILINÉAIRES SIMPLEMENT TRANSITIFS.

98. Nous avons vu (11) qu'on pouvait toujours choisir les paramètres d'un groupe bilinéaire simplement transitif, de façon que ce groupe devînt son propre groupe des paramètres. Alors on peut faire en sorte qu'on ait en même temps

$$\mathrm{X}_i f = \sum_{k,1} \alpha_{kis} x_k \frac{\partial f}{\partial x_s} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{1}$$

et

$$\mathrm{X}_i(\mathrm{X}_k f) = \sum_s \alpha_{iks} \mathrm{X}_s f. \tag{2}$$

Il correspond (13) à ce groupe un système Σ de nombres complexes à r unités indépendantes $e_1, e_2, \ldots, e_r$, dont la loi de multiplication est fournie par les relations

$$e_i e_k = \sum_s \alpha_{iks} e_s. \tag{3}$$

Réciproquement, si l'on part d'un système de nombres complexes défini par les formules (3), il lui correspond un groupe simplement transitif dont les transformations infinitésimales $X_i f$ ont la forme (1).

Enfin, les équations finies du groupe correspondant à la transformation *finie* $a_1 X_1 f + \ldots + a_r X_r f$ sont

$$x'_s = \sum_{k,1} \alpha_{kis} a_i x_k; \tag{4}$$

elles expriment tout simplement que $x'_1 e_1 + \ldots + x'_r e_r$ est le produit des deux nombres $x_1 e_1 + \ldots + x_r e_r$ et $a_1 e_1 + \ldots + a_r e_r$. En particulier, la transformation *finie* $X_1 f$ donne le produit du nombre $x_1 e_1 + \ldots + x_r e_r$ par l'unité e_1. Le nombre complexe $a_1 e_1 + \ldots + a_r e_r$ symbolise donc la transformation finie de paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_r$, et la transformation résultant de la succession de deux transformations particulières $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_r)$ est symbolisée, d'une part, par

$$a_1 X_1 \left(\sum b_i X_i f\right) + a_2 X_2 \left(\sum b_i X_i f\right) + \ldots + a_r X_r \left(\sum b_i X_i f\right),$$

d'autre part, par le nombre complexe produit des deux nombres

$$a_1 e_1 + \ldots + a_r e_r, \quad b_1 e_1 + \ldots + b_r e_r.$$

99. A tout sous-système de Σ correspond un sous-groupe de G, et ce sous-groupe est encore bilinéaire. A tout sous-système *invariant* de Σ correspond un sous-groupe g : $Y_1 f, \ldots, Y_m f$ de G tel que l'on ait, quelles que soient les transformations infinitésimales Xf de G, Yf de g,

$$X(Yf) = \lambda_1 Y_1 f + \ldots + \lambda_m Y_m f, \qquad Y(Xf) = \mu_1 Y_1 f + \ldots + \mu_m Y_m f;$$

a fortiori le crochet

$$(XY) = X(Yf) - Y(Xf)$$

aura une expression de même forme. Il en résulte, d'après une terminologie bien connue, que g est un sous-groupe *invariant* de G.

Donc à tout sous-système invariant σ de Σ correspond un sous-groupe invariant g de G. Il n'est même pas nécessaire que σ soit un sous-système proprement dit; il peut n'avoir pas de module, il ne lui en correspond pas moins un sous-groupe invariant de G; mais naturellement ce sous-groupe invariant n'est plus bilinéaire.

En particulier à un sous-groupe invariant *pseudo-nul*

$$y_1\eta_1 + y_2\eta_2 + \ldots + y_k\eta_k$$

correspond un sous-groupe invariant g, $Y_1 f$, ..., $Y_k f$, tel que l'on ne puisse jamais avoir

$$Y(Xf) = \omega Xf \qquad \omega \neq 0,$$

ou

$$X(Yf) = \omega' Xf \qquad \omega' \neq 0$$

pour aucune des transformations Yf de ce sous groupe et Xf du groupe G. On ne pourra non plus jamais avoir

$$(5) \qquad (YX) = Y(Xf) - X(Yf) = \omega Xf,$$

car on aurait de même

$$(6) \qquad \eta e - e\eta = \omega e,$$

η appartenant à σ et e à Σ. Mais on sait qu'il existe un entier m tel que $\eta^m e$ soit nul; si m désigne le plus petit des entiers satisfaisant à cette condition, on a, en multipliant à gauche par η^{m-1} les deux membres de (6),

$$-\eta^{m-1}e.\eta = \omega\eta^{m-1}e,$$

ce qui est impossible, puisque η est pseudo-nul.

Le sous-groupe invariant g qui correspond au sous-système invariant pseudo-nul σ est donc, d'après une dénomination due à Killing, de rang zéro : son équation caractéristique n'admet que des racines nulles.

100. Si le système Σ se décompose en deux systèmes Σ_1, Σ_2, on voit facilement que le groupe G est formé de deux groupes G_1 et G_2 qui n'ont aucune variable ni aucun paramètre en commun et qui sont chacun bilinéaires. Au point de vue du groupe G, il n'y a donc intérêt à considérer que les systèmes qui ne se décomposent pas.

Prenons d'abord les systèmes simples. Ils sont définis par p unités e_{ij} satisfaisant aux relations

$$(7) \qquad e_{ij}e_{jl} = e_{il}.$$

Il correspond à un tel système le groupe

$$X_{ij}f = x_{1i}\frac{\partial f}{\partial x_{1j}} + x_{2i}\frac{\partial f}{\partial x_{2j}} + \ldots + x_{pi}\frac{\partial f}{\partial x_{pj}}, \tag{8}$$

dont les équations finies sont

$$x'_{ij} = a_{1j}x_{i1} + a_{2j}x_{i2} + \ldots + a_{pj}x_{ip}. \tag{9}$$

On voit que ce groupe transforme entre elles les variables $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1p}$ par exemple, et à la façon du groupe linéaire et homogène général. Comme le groupe (9) est son propre groupe des paramètres, nous voyons qu'il n'est autre que le groupe des paramètres du groupe linéaire et homogène général de p variables.

A tout système simple de p^2 unités correspond, comme groupe bilinéaire simplement transitif, le groupe des paramètres du groupe linéaire et homogène général de p variables.

101. Prenons maintenant les systèmes de la première classe. On sait que l'on peut prendre des unités canoniques $e_1, e_2, \ldots, e_h$; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ telles que l'on ait

$$e_i^2 = e_i, \qquad e_ie_j = 0, \qquad e_\alpha\eta_i = \eta_ie_\beta = \eta_i, \qquad \eta_i\eta_j = \sum_s^{s>i, s>j} \alpha_{ijs}\eta_s, \tag{10}$$

les indices α, β qui entrent dans ces formules constituant le caractère de l'unité η_i considérée.

En désignant par

$$x_1e_1 + \ldots + x_he_h + y_1\eta_1 + \ldots + y_k\eta_k$$

un nombre quelconque du système Σ, et en appelant (α_i, β_i) le caractère de l'unité η_i, on voit, en passant au groupe simplement transitif G, que l'on peut prendre

$$\left\{\begin{aligned} X_if &= x_i\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_\rho y_\rho\frac{\partial f}{\partial y_\rho} \qquad (\beta_\rho = i), \\ Y_if &= x_{\alpha_i}\frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{j,s}\alpha_{jis}y_j\frac{\partial f}{\partial y_s} \qquad (s > i,\ s > j); \end{aligned}\right. \tag{11}$$

les constantes α_{jis} ne pouvant être différentes de zéro que si l'on a

$$\beta_j = \alpha_i, \qquad \alpha_s = \alpha_j, \qquad \beta_s = \beta_i.$$

De plus les équations finies de ce groupe sont

$$(12) \qquad \begin{cases} x'_i = a_i x_i, \\ y'_i = a_{\beta_i} y_i + b_i x_{\alpha_i} + \sum_{\lambda,\mu} \alpha_{\lambda\mu i} b_\mu y_\lambda \qquad (\lambda < i, \mu < i). \end{cases}$$

Nous dirons que les formules (11) ou (12) fournissent une représentation canonique du groupe G.

On voit qu'en rangeant les variables dans l'ordre $x_1, x_2, \ldots, x_h, y_1, y_2, \ldots, y_k$, les expressions d'une quelconque de ces variables transformées ne dépendent pas des variables qui la suivent. Par suite, d'après une dénomination à M. Lie, le groupe G est *intégrable*. Il laisse invariante chacune des multiplicités planes

$$x_{i+1} = x_{i+2} = \ldots = x_h = y_1 = \ldots = y_k = 0,$$
$$y_{i+1} = y_{i+2} = \ldots = y_k = 0.$$

A tout système de nombres complexes de la première classe correspond donc un groupe bilinéaire simplement transitif et intégrable dont les transformations infinitésimales peuvent être supposées avoir la forme (11) *et les équations finies la forme* (12).

102. Nous avons vu (60) comment on pouvait trouver tous les systèmes de nombres complexes de la deuxième classe au moyen de ceux de la première. A chaque unité de caractère (α, β) d'une de ces dernières nous avons fait correspondre $p_\alpha p_\beta$ unités dans le système de la deuxième classe correspondant. En passant des systèmes aux groupes simplement transitifs, nous voyons que nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Tout groupe simplement transitif se déduit d'un groupe de la forme (11) *ou* (12)

$$(11)' \qquad \begin{cases} X^{(i)}f = X^{(i)} \dfrac{\partial f}{\partial X^{(i)}} + \sum_\rho Y^{(\rho)} \dfrac{\partial f}{\partial Y^{(\rho)}} \qquad (\beta_\rho = i), \\ Y^{(i)}f = X^{(\alpha_i)} \dfrac{\partial f}{\partial Y^{(i)}} + \sum_{j,s} \alpha_{jis} Y^{(j)} \dfrac{\partial f}{\partial Y^{(s)}} \qquad \begin{pmatrix} s > i, s > j;\ \beta_j = \alpha_i \\ \alpha_s = \alpha_j,\ \beta_s = \beta_i \end{pmatrix} \end{cases}$$

ou

$$(12)' \quad \left\{ \begin{aligned} & X'^{(i)} = A^{(i)} X^{(i)}, \\ & Y'^{(i)} = A^{(\beta_i)} Y^{(i)} + B^{(i)} X^{(\alpha_i)} + \sum_{\lambda, \mu} \alpha_{\lambda \mu i} B^{(\mu)} Y^{(\lambda)} \qquad (\lambda < i, \mu < i), \end{aligned} \right.$$

en faisant correspondre à chaque variable $X^{(\rho)}$ *ou* $Y^{(\rho)}$ *de caractère* (α, β) $p_\alpha p_\beta$ *nouvelles variables* $x_{ij}^{(\rho)}$, $y_{ij}^{(\rho)}$, *où* i, j *sont respectivement deux quelconques des nombres des séries* $1, 2, \ldots, p_\alpha$ *et* $1, 2, \ldots, p_\beta$. *On fait de même correspondre à chaque paramètre* $A^{(\rho)}$, $B^{(\rho)}$ *de caractère* (α, β) $p_\alpha p_\beta$ *nouveaux paramètres* $a_{ij}^{(\rho)}$, $b_{ij}^{(\rho)}$.

Le groupe simplement transitif considéré est alors défini soit par les transformations infinitésimales

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & X_{\alpha\beta}^{(i)} f = \sum_{\lambda}^{1, 2, \ldots, p_i} x_{\lambda\alpha}^{(i)} \frac{\partial f}{\partial x_{\lambda\beta}^{(i)}} + \sum_{\rho, \lambda}^{\lambda = 1, 2, \ldots, p_{\alpha_\rho}} y_{\lambda\alpha}^{(\rho)} \frac{\partial f}{\partial y_{\lambda\beta}^{(\rho)}} \qquad \left(\begin{matrix} \beta_\rho = i \\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p_i \end{matrix} \right), \\ & Y_{\alpha\beta}^{(i)} f = \sum_{\lambda} x_{\lambda\alpha}^{(\alpha_i)} \frac{\partial f}{\partial y_{\lambda\beta}^{(i)}} + \sum_{j, s, \lambda}^{\lambda = 1, 2, \ldots, p_{\alpha_\rho}} \alpha_{jis} y_{\lambda\alpha}^{(j)} \frac{\partial f}{\partial y_{\lambda\beta}^{(s)}}, \end{aligned} \right.$$

soit par les équations finies

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & x'^{(i)}_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda}^{1, 2, \ldots, p_i} a_{\lambda\beta}^{(i)} x_{\alpha\lambda}^{(i)}, \\ & y'^{(i)}_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda} a_{\lambda\beta}^{(\beta_i)} y_{\alpha\lambda}^{(i)} + \sum_{\lambda} b_{\lambda\beta}^{(i)} x_{\alpha\lambda}^{(\alpha_i)} + \sum_{\rho, \sigma, \lambda} \alpha_{\rho\sigma i} b_{\lambda\beta}^{(\sigma)} y_{\alpha\lambda}^{(\rho)}. \end{aligned} \right.$$

103. *Tout groupe bilinéaire simplement transitif* G *est formé d'un sous-groupe* Γ *de rang zéro et d'un sous-groupe* g *se décomposant en* h *groupes* $g_1, g_2, \ldots, g_h$ *respectivement isomorphes aux groupes linéaires et homogènes généraux de* $p_1, p_2, \ldots, p_h$ *variables. De plus on peut choisir les variables de façon que les* p_1^2 *premières soient échangées entre elles par le premier* g_1 *de ces* h *groupes à la façon des paramètres du groupe linéaire et homogène général de* p_1 *variables et ne soient altérées par aucun des* $h - 1$ *autres groupes; de même pour les* $p_2^2, \ldots, p_h^2$ *variables suivantes; enfin de façon que ces* $p_1^2 + \ldots + p_h^2$ *variables ne soient pas altérées par le sous-groupe invariant* Γ *de rang zéro.*

Ce théorème résulte manifestement des formules (13) et (14).

On voit enfin que tous les groupes bilinéaires simplement transitifs seront connus dès que l'on saura déterminer tous les groupes bilinéaires simplement transitifs intégrables de la forme (11) *ou* (12).

104. Ce qui précède s'applique aux groupes bilinéaires pour lesquels les variables et les paramètres peuvent prendre des valeurs quelconques réelles ou imaginaires. Occupons-nous maintenant des groupes réels, c'est-à-dire dont les variables et les paramètres sont essentiellement réels.

Tout groupe bilinéaire réel simplement transitif G *est formé d'un sous-groupe invariant* Γ *de rang zéro et d'un sous-groupe g se décomposant en h groupes $g_1, g_2, \ldots, g_h$ rentrant tous dans l'un des trois types suivants :*

1° *Les groupes du premier type sont à p^2 variables x_{ij} et sont donnés par les formules*

$$\mathrm{X}_{ij}f = x_{1i}\frac{\partial f}{\partial x_{1j}} + x_{2i}\frac{\partial f}{\partial x_{2j}} + \ldots + x_{pi}\frac{\partial f}{\partial x_{pj}} \tag{15}$$

ou

$$x'_{ij} = a_{1j}x_{i1} + a_{2j}x_{i2} + \ldots + \alpha_{pj}x_{ip}; \tag{16}$$

on obtient ainsi le groupe des paramètres du groupe linéaire et homogène général à p variables;

2° *Les groupes du second type sont à $2p^2$ variables x_{ij}, y_{ij} et sont donnés par les formules*

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{X}_{ij}f &= x_{1i}\frac{\partial f}{\partial x_{1j}} + \ldots + x_{pi}\frac{\partial f}{\partial x_{pj}} + y_{1i}\frac{\partial f}{\partial y_{1j}} + \ldots + y_{pi}\frac{\partial f}{\partial y_{pj}}, \\ \mathrm{Y}_{ij}f &= x_{1i}\frac{\partial f}{\partial y_{1j}} + \ldots + x_{pi}\frac{\partial f}{\partial y_{pj}} - y_{1i}\frac{\partial f}{\partial x_{1j}} - \ldots - y_{pi}\frac{\partial f}{\partial x_{pj}} \end{aligned}\right. \tag{17}$$

ou

$$\left\{\begin{aligned} x'_{ij} &= a_{1j}x_{i1} + \ldots + a_{pj}x_{ip} - b_{1j}y_{i1} - \ldots - b_{pj}y_{ip}, \\ y'_{ij} &= a_{1j}y_{i1} + \ldots + a_{pj}y_{ip} + b_{1j}x_{i1} + \ldots + b_{pj}x_{ip}; \end{aligned}\right. \tag{18}$$

3° *Les groupes du troisième type sont à $4p^2$ variables x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}, t_{ij}*

et sont donnés par les formules

$$
(19)\quad
\left\{
\begin{aligned}
X_{ij}f &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p}\left(x_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial x_{\lambda j}} + y_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial y_{\lambda j}} + z_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial z_{\lambda j}} + t_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial t_{\lambda j}}\right),\\
Y_{ij}f &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p}\left(x_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial y_{\lambda j}} - y_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial x_{\lambda j}} - z_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial t_{\lambda j}} + t_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial z_{\lambda j}}\right),\\
Z_{ij}f &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p}\left(x_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial z_{\lambda j}} + y_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial t_{\lambda j}} - z_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial x_{\lambda j}} - t_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial y_{\lambda j}}\right),\\
T_{ij}f &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p}\left(x_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial t_{\lambda j}} - y_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial z_{\lambda j}} + z_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial y_{\lambda j}} - t_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial x_{\lambda j}}\right)
\end{aligned}
\right.
$$

ou

$$
(20)\quad
\left\{
\begin{aligned}
x'_{ij} &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p}(a_{\lambda j}x_{i\lambda} - b_{\lambda j}y_{i\lambda} - c_{\lambda j}z_{i\lambda} - d_{\lambda j}t_{i\lambda}),\\
y'_{ij} &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p}(a_{\lambda j}y_{i\lambda} + b_{\lambda j}x_{i\lambda} - c_{\lambda j}t_{i\lambda} - d_{\lambda j}z_{i\lambda}),\\
z'_{ij} &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p}(a_{\lambda j}z_{i\lambda} + b_{\lambda j}t_{i\lambda} + c_{\lambda j}x_{i\lambda} - d_{\lambda j}y_{i\lambda}),\\
t'_{ij} &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p}(a_{\lambda j}t_{i\lambda} - b_{\lambda j}z_{i\lambda} + c_{\lambda j}y_{i\lambda} + d_{\lambda j}x_{i\lambda}),
\end{aligned}
\right.
$$

A chacun de ces groupes à p^2 ($2p^2$ *ou* $4p^2$) *variables on peut faire correspondre* p^2 ($2p^2$ *ou* $4p^2$) *variables qui soient échangées entre elles suivant les formules* (16), (18) ou (20), *sans être altérées par aucun des autres groupes qui composent* g *ni par le sous-groupe invariant* Γ. *De plus, toutes ces variables sont indépendantes entre elles.*

105. Rappelons que l'on appelle groupe *simple* un groupe qui n'admet aucun sous-groupe invariant.

Les groupes (16), (18) et (20) *ne sont pas simples, mais ils se composent d'un sous-groupe invariant à un paramètre et d'un sous-groupe invariant simple à* p^2-1 ($2p^2-1$ *ou* $4p^2-1$) *paramètres.*

Prenons, par exemple, le groupe (19) ou (20) et prenons d'abord le cas particulier où p est égal à 1. Rappelons que la transformation

$aXf + bYf + cZf + dTf$ étant symbolisée par $ae + be' + ce'' + de'''$, le crochet de deux transformations infinitésimales symbolisées par les nombres complexes u et v est symbolisé par le nombre $uv - vu$. Supposons donc qu'un sous-groupe invariant contienne la transformation

$$aXf + bYf + cZf + dTf;$$

en prenant le crochet de cette transformation avec Yf, Zf, Tf, on obtient successivement

$$dZf - cTf, \quad bTf - dYf, \quad cYf - bZf$$

transformations qui doivent aussi faire partie du sous-groupe invariant. Le même procédé, appliqué à ces nouvelles transformations, donne

$$cZf + dTf, \quad dTf + bYf, \quad bYf + cZf,$$

d'où l'on déduit l'existence, dans le sous-groupe, de aXf, bYf, cZf, dTf. Si b, par exemple, n'est pas nul, le sous-groupe invariant contient Yf et par suite $(YZ) = 2Tf$, $(YT) = -2Zf$; il contient donc les trois transformations Yf, Zf, Tf qui effectivement forment un sous-groupe invariant. Il en est de même si c et d ne sont pas nuls tous les deux. Si enfin b, c, d sont nuls tous les trois, il reste la transformation Xf qui engendre un sous-groupe invariant à un paramètre. Ces deux sous-groupes sont *échangeables* entre eux, c'est-à-dire que le crochet d'une transformation de l'un et d'une transformation de l'autre est toujours nul. Il en résulte que le groupe à trois paramètres (Xf, Zf, Tf) est *simple*, car, s'il admettait un sous-groupe invariant, il serait aussi invariant dans le groupe total, ce qui n'est pas.

Passons au cas où p est plus grand que 1. Supposons qu'un sous-groupe invariant du groupe (19) ou (20) contienne la transformation

$$Uf = \sum (a_{ij} X_{ij} f + b_{ij} Y_{ij} f + c_{ij} Z_{ij} f + d_{ij} T_{ij} f); \tag{21}$$

il contiendra alors

$$\begin{aligned}(X_{\alpha\beta} U) = & \sum_j (a_{\beta j} X_{\alpha j} f + b_{\beta j} Y_{\alpha j} f + c_{\beta j} Z_{\alpha j} f + d_{\beta j} T_{\alpha j} f) \\ & - \sum_i (a_{i\alpha} X_{i\beta} f + b_{i\alpha} Y_{i\beta} f + c_{i\alpha} Z_{i\beta} f + d_{i\alpha} T_{i\beta} f).\end{aligned}$$

Si l'on fait subir à la transformation du second membre la même opération qu'à la transformation Uf, on trouve une nouvelle transformation

$$-2(a_{\beta\alpha}X_{\alpha\beta}f + b_{\beta\alpha}Y_{\alpha\beta}f + c_{\beta\alpha}Z_{\alpha\beta}f + d_{\beta\alpha}T_{\alpha\beta}f),$$

en supposant α différent de β. En combinant successivement avec $Y_{\alpha\alpha}f$, $Z_{\alpha\alpha}f$, $T_{\alpha\alpha}f$, on en déduit trois autres transformations, combinaisons linéaires de $X_{\alpha\beta}f$, $Y_{\alpha\beta}f$, $Z_{\alpha\beta}f$, $T_{\alpha\beta}f$, et le déterminant des coefficients est $(a^2_{\beta\alpha} + b^2_{\beta\alpha} + c^2_{\beta\alpha} + d^2_{\beta\alpha})^2$. Par suite, si l'un des nombres $a_{\beta\alpha}$, $b_{\beta\alpha}$, $c_{\beta\alpha}$, $d_{\beta\alpha}$ est différent de zéro, le sous-groupe invariant contient les quatre transformations $X_{\alpha\beta}f$, $Y_{\alpha\beta}f$, $Z_{\alpha\beta}f$, $T_{\alpha\beta}f$. En combinant avec $X_{i\alpha}f$, on en déduit tous les $X_{i\beta}f$, $Y_{i\beta}f$, $Z_{i\beta}f$, $T_{i\beta}f$ $(i \neq \beta)$ et, par suite, aussi tous les $X_{ij}f, \ldots, T_{ij}f$, pour i différent de j. Les formules

$$(X_{ij}Y_{ji}) = Y_{ii}f - Y_{jj}f,$$
$$(Z_{ij}\,T_{ji}) = Y_{ii}f + Y_{jj}f$$

montrent alors que le sous-groupe invariant contient tous les Yf et, de même, tous les Zf et tous les Tf. Enfin de

$$(X_{ij}X_{ji}) = X_{ii}f - X_{jj}f$$

on déduit l'existence de tous les $X_{ii}f - X_{pp}f$. Si donc un sous-groupe invariant contient une transformation Uf pour laquelle les coefficients a, b, c, d qui ont deux indices différents ne sont pas tous nuls, ce sous-groupe invariant contient, au moins, $4p^2 - 1$ transformations infinitésimales indépendantes

$$X_{ii}f - X_{pp}f,\quad X_{ij}f,\quad Y_{ii}f,\quad Y_{ij}f,\quad Z_{ii}f,\quad Z_{ij}f,\quad T_{ii}f,\quad T_{ij}f.$$

Réciproquement, d'ailleurs, ces transformations forment bien un sous-groupe invariant; c'est le plus grand sous-groupe du groupe donné qui fasse partie du groupe linéaire et homogène *spécial* des $4p^2$ variables x, y, z, t.

Si, maintenant, les coefficients a, b, c, d de Uf sont tous nuls à l'exception des a_{ii}, b_{ii}, c_{ii}, d_{ii}, il en doit être de même pour la transformation $(X_{\alpha\beta}U)$, sans quoi on tomberait sur le cas précédent; par suite, en considérant les coefficients de $X_{\alpha\beta}f$, $Y_{\alpha\beta}f$, $Z_{\alpha\beta}f$, $T_{\alpha\beta}f$, on voit que tous les a_{ii} sont égaux, de même tous les b_{ii}, tous les c_{ii}, tous les d_{ii}. Si, maintenant, les b ne sont pas nuls, le crochet $(Z_{\alpha\beta}U)$ contiendrait un terme en $T_{\alpha\beta}f$, ce qui est impossible. Il reste donc seulement l'hypothèse où Uf est, à un facteur constant près,

$$Uf = X_{11}f + X_{22}f + \ldots + X_{pp}f;$$

cette transformation engendre bien un sous-groupe invariant, puisqu'elle est échangeable avec toutes les autres transformations du groupe.

Il en résulte, comme tout à l'heure, que le premier sous-groupe invariant à $4p^2 - 1$ paramètres est *simple*.

Le même raisonnement s'appliquerait évidemment *a fortiori* aux groupes du premier et du second type.

106. *Enfin, les résultats du n° 94 montrent que tous les groupes bilinéaires, simplement transitifs, sont déterminés dès qu'on connaît ceux pour lesquels les entiers $p_1, p_2, \ldots, p_h$ (n° 104) sont égaux à l'unité.*

107. A un système à multiplication commutative correspond un groupe bilinéaire simplement transitif, dont toutes les transformations sont échangeables entre elles, autrement dit un groupe en *involution*, et réciproquement.

Cela étant, les résultats du n° 95 nous permettent de donner la forme générale des groupes bilinéaires simplement transitifs en involution qui ne se décomposent pas. S'ils sont réels, ils rentrent dans deux types distincts.

Ceux du premier type sont définis par les formules

$$(21)\qquad \begin{cases} Xf = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + \displaystyle\sum_i y_i \dfrac{\partial f}{\partial y_i}, \\ Y_i f = x\dfrac{\partial f}{\partial y_i} + \displaystyle\sum_{\lambda, s} \alpha_{\lambda i s} y_\lambda \dfrac{\partial f}{\partial y_s} \\ (i = 1, 2, \ldots, r-1;\ \alpha_{\lambda i s} = 0, \text{ pour } s \leqq i \text{ ou } s \leqq \lambda), \end{cases}$$

ou

$$(22)\qquad \begin{cases} x' = ax, \\ y'_i = ay_i + b_i x + \displaystyle\sum_{\lambda, \mu} \alpha_{\lambda\mu i} b_\mu y_\lambda. \end{cases}$$

Ceux du second type sont définis par les formules

$$
(23)\quad \left\{
\begin{aligned}
Xf &= x\frac{\partial f}{\partial x} + z\frac{\partial f}{\partial z} + \sum_i \left(y_i\frac{\partial f}{\partial y_i} + t_i\frac{\partial f}{\partial t_i}\right),\\
Zf &= x\frac{\partial f}{\partial z} + z\frac{\partial f}{\partial x} + \sum_i \left(y_i\frac{\partial f}{\partial t_i} + t_i\frac{\partial f}{\partial y_i}\right),\\
Y_i f &= x\frac{\partial f}{\partial y_i} + z\frac{\partial f}{\partial t_i} + \sum_{\lambda, s} (\alpha_{\lambda is} y_\lambda - \beta_{\lambda is} t_\lambda)\frac{\partial f}{\partial y_s} + \sum_{\lambda, s} (\beta_{\lambda is} y_\lambda + \alpha_{\lambda is} t_\lambda)\frac{\partial f}{\partial t_s},\\
T_i f &= x\frac{\partial f}{\partial t_i} + z\frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{\lambda, s} (\beta_{\lambda is} y_\lambda + \alpha_{\lambda is} t_\lambda)\frac{\partial f}{\partial y_s} + \sum_{\lambda, s} (\alpha_{\lambda is} y_\lambda - \beta_{\lambda is} t_\lambda)\frac{\partial f}{\partial t_s},
\end{aligned}
\right.
$$

ou

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
x' &= ax - cz,\\
z' &= az + cx,\\
y'_i &= ay_i - ct_i + b_i x - d_i z + \sum \alpha_{\lambda\mu i}(b_\mu y_\lambda - d_\mu t_\lambda) - \sum \beta_{\lambda\mu i}(b_\mu t_\lambda + d_\mu y_\lambda),\\
t'_i &= at_i + cy_i + b_i z + d_i x + \sum \alpha_{\lambda\mu i}(b_\mu t_\lambda + d_\mu y_\lambda) + \sum \beta_{\lambda\mu i}(b_\mu y_\lambda - d_\mu t_\lambda).
\end{aligned}
\right.
$$

IX.

LES GROUPES BILINÉAIRES QUELCONQUES.

108. La structure d'un groupe bilinéaire quelconque étant la même que celle de son groupe des paramètres, nous pouvons appliquer les résultats du paragraphe précédent.

Tout groupe bilinéaire G *se compose d'un sous-groupe invariant* Γ *de rang zéro et d'un sous-groupe g qui se décompose en un certain nombre h de groupes qui sont respectivement isomorphes avec les groupes linéaires et homogènes généraux de* $p_1, p_2, \ldots, p_h$ *variables.*

Tout groupe bilinéaire réel G *se compose d'un sous-groupe invariant réel* Γ *de rang zéro et d'un sous-groupe g qui se décompose en un certain nombre h de groupes, dont chacun est isomorphe à un des trois groupes suivants :*

1° *Le groupe linéaire et homogène général de p variables;*

2° *Le groupe à* $2p^2$ *paramètres et* $2p$ *variables* x_i, y_i

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
x'_i &= a_{1i}x_1 + \ldots + a_{pi}x_p - b_{1i}y_1 - \ldots - b_{pi}y_p,\\
y'_i &= a_{1i}y_1 + \ldots + a_{pi}y_p + b_{1i}x_1 + \ldots + b_{pi}x_p.
\end{aligned}
\right.
$$

3° *Le groupe à $4p^2$ paramètres et $4p$ variables x_i, y_i, z_i, t_i*

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
x'_i &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} (a_{\lambda i} x_\lambda - b_{\lambda i} y_\lambda - c_{\lambda i} z_\lambda - d_{\lambda i} t_\lambda),\\
y'_i &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (a_{\lambda i} y_\lambda + b_{\lambda i} x_\lambda + c_{\lambda i} t_\lambda + d_{\lambda i} z_\lambda),\\
z'_i &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (a_{\lambda i} z_\lambda + b_{\lambda i} t_\lambda + c_{\lambda i} x_\lambda + d_{\lambda i} y_\lambda),\\
t'_i &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (a_{\lambda i} t_\lambda + b_{\lambda i} z_\lambda + c_{\lambda i} y_\lambda + d_{\lambda i} x_\lambda).
\end{aligned}
\right.
$$

Chacun de ces groupes est formé d'un sous-groupe invariant simple à $p^2(2p^2-1$ ou $4p^2-1)$ paramètres et d'un sous-groupe invariant à un paramètre.

109. Voyons, d'une manière plus précise, la forme effective de ces groupes $g_1, g_2, \ldots, g_h$ qui correspondent aux sous-systèmes simples des systèmes de nombres complexes.

Rappelons que nous faisons correspondre une transformation finie (ou infinitésimale) Xf à un nombre u du système, de telle façon que, si u et v sont les deux nombres qui correspondent aux transformations Xf, Yf, le produit uv correspond à la transformation $X(Yf)$.

Cela étant, prenons, par exemple, le sous-groupe g. Il lui correspond un sous-système simple. Supposons, pour fixer les idées, que ce sous-système soit du troisième type. Il est alors formé de $4p^2$ unités e_{ij}, e'_{ij}, e''_{ij}, e'''_{ij} auxquelles correspondront, dans G, $4p^2$ transformations $X_{ij}f$, $Y_{ij}f$, $Z_{ij}f$, $T_{ij}f$. Si l'on désigne par f une fonction linéaire des variables que transforme le groupe, on a

$$X_{11}[X_{11}(f)] = X_{11}(f),$$

ou

$$(3)\qquad X_{11}[X_{11}(f) - f] = 0.$$

Cela étant, si $X_{11}(\varphi)$ est égal à $f+\varphi$, φ étant une certaine forme linéaire, il est clair que l'on a

$$(4)\qquad X_{11}(f+\varphi) = f+\varphi,$$

puisque l'équation (3) exprime simplement que $X_{11}(\varphi)$ est nul. *Par suite, on peut toujours choisir les variables x du groupe de telle façon que, pour chacune d'elles, $X_{11}(x)$ soit égal à x ou à zéro.*

Cela étant, partons d'une variable x_1 telle que l'on ait

$$X_{11}(x_1) = x_1; \tag{5}$$

posons

$$Y_{11}(x_1) = -y_1, \qquad Z_{11}(x_1) = -z_1, \qquad T_{11}(x_1) = -t_1;$$

il est facile de se rendre compte que ces quatre variables sont indépendantes; car, si l'on avait

$$\varphi = a x_1 - a' y_1 - a'' z_1 - a''' t_1 = 0,$$

les expressions de $Y_{11}(\varphi)$, $Z_{11}(\varphi)$, $T_{11}(\varphi)$, qui devront être aussi identiquement nulles, montrent que a, a', a'', a''' doivent être tous nuls.

En calculant $X_{11}(f)$, $Y_{11}(f)$, $Z_{11}(f)$, $T_{11}(f)$ pour chacune des variables x_1, y_1, z_1, t_1, on trouve, en se servant des valeurs des produits des unités e_{11}, e'_{11}, e''_{11}, e'''_{11}, que l'on a

$$\begin{aligned}
X_{11} f &= x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + t_1 \frac{\partial f}{\partial t_1} + \ldots,\\
Y_{11} f &= -y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + t_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial f}{\partial t_1} + \ldots,\\
Z_{11} f &= -z_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - t_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + y_1 \frac{\partial f}{\partial t_1} + \ldots,\\
T_{11} f &= -t_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial t_1} + \ldots.
\end{aligned}$$

En partant de même d'une variable x'_1 telle que $X_{11}(x'_1)$ soit égal à x'_1 indépendante de x_1, y_1, z_1, t_1, on en déduira trois nouvelles variables y'_1, z'_1, t'_1 qu'on vérifiera facilement former avec les précédentes huit variables indépendantes; et ainsi de suite. Nous obtiendrons, par exemple, m systèmes de quatre variables, que nous écrirons désormais

$$x_1^{(i)}, \quad y_1^{(i)}, \quad z_1^{(i)}, \quad t_1^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

et alors on a

$$
(6)\qquad \begin{cases}
X_{11}f = \sum\limits_i \left(x_1^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial x_1^{(i)}} + y_1^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial y_1^{(i)}} + z_1^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial z_1^{(i)}} + t_1^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial t_1^{(i)}}\right),\\
Y_{11}f = \sum\limits_i \left(- y_1^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial x_1^{(i)}} + x_1^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial y_1^{(i)}} + t_1^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial z_1^{(i)}} - z_1^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial t_1^{(i)}}\right),\\
Z_{11}f = \sum\limits_i \left(- z_1^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial x_1^{(i)}} - t_1^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial x_1^{(i)}} + x_1^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial z_1^{(i)}} + y_1^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial t_1^{(i)}}\right),\\
T_{11}f = \sum\limits_i \left(- t_1^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial x_1^{(i)}} + z_1^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial y_1^{(i)}} - y_1^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial z_1^{(i)}} + x_1^{(i)}\dfrac{\partial f}{\partial t_1^{(i)}}\right).
\end{cases}
$$

110. Introduisons maintenant $4m$ nouvelles variables $x_2^{(i)}$, $y_2^{(i)}$, $z_2^{(i)}$, $t_2^{(i)}$ en posant

$$
(7)\qquad x_2^{(i)} = X_{21}(x_1^{(i)}),\qquad y_2^{(i)} = X_{21}(y_1^{(i)}),\qquad z_2^{(i)} = X_{21}(z_1^{(i)}),\qquad t_2^{(i)} = X_{21}(t_1^{(i)}).
$$

Ces $4m$ variables sont indépendantes entre elles et des $4m$ premières; sinon, en effet, on aurait une relation de la forme

$$\sum [a_i X_{21}(x_1^{(i)}) + \ldots + d_i X_{21}(t_1^{(i)}) + \alpha_i X_{11}(x_1^{(i)}) + \ldots + \delta_i X_{11}(t_1^{(i)})] = 0.$$

Mais, en appelant f le premier membre de cette identité et formant $X_{12}(f)$, on en déduirait

$$\sum (a_1 x_1^{(i)} + b_i y_1^{(i)} + c_i z_1^{(i)} + d_i t_1^{(i)}) = 0,$$

ce qui est impossible.

De plus, comme nous avons supposé les variables choisies de manière que $X_{11}(x)$ fût égal à x ou à zéro, les expressions $X_{11}(x)$ et $X_{21}(x)$ sont en même temps nulles; car on a

$$X_{21}[X_{11}(x)] = X_{21}(x);$$

on voit bien que, pour toutes les variables x pour lesquelles $X_{11}(x)$ est nul, X_{21} est aussi nul.

Par suite, on a l'expression définitive de $X_{21}f$ et aussi celles de $Y_{21}f$,

$Z_{21}f$, $T_{21}f$:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
X_{21}f &= \sum\left(x_2^{(i)}\frac{\partial f}{\partial x_1^{(i)}} + y_2^{(i)}\frac{\partial f}{\partial y_1^{(i)}} + z_2^{(i)}\frac{\partial f}{\partial z_1^{(i)}} + t_2^{(i)}\frac{\partial f}{\partial t_1^{(i)}}\right),\\
Y_{21}f &= \sum\left(-y_2^{(i)}\frac{\partial f}{\partial x_1^{(i)}} + x_2^{(i)}\frac{\partial f}{\partial y_1^{(i)}} + t_2^{(i)}\frac{\partial f}{\partial z_1^{(i)}} - z_2^{(i)}\frac{\partial f}{\partial t_1^{(i)}}\right),\\
Z_{21}f &= \sum\left(-z_2^{(i)}\frac{\partial f}{\partial x_1^{(i)}} - t_2^{(i)}\frac{\partial f}{\partial y_1^{(i)}} + x_2^{(i)}\frac{\partial f}{\partial z_1^{(i)}} + y_2^{(i)}\frac{\partial f}{\partial t_1^{(i)}}\right),\\
T_{21}f &= \sum\left(-t_2^{(i)}\frac{\partial f}{\partial x_1^{(i)}} + z_2^{(i)}\frac{\partial f}{\partial y_1^{(i)}} - y_2^{(i)}\frac{\partial f}{\partial z_1^{(i)}} + x_2^{(i)}\frac{\partial f}{\partial s_1^{(i)}}\right).
\end{aligned}\right.$$

On définira de même $x_3^{(i)}, \ldots, t_3^{(i)}, \ldots, x_p^{(i)}, \ldots, t_p^{(i)}$ par la considération des transformations $X_{31}f, \ldots, X_{p1}f$. Nous avons ainsi $4mp$ variables toutes indépendantes entre elles en fonction desquelles s'expriment simplement toutes ces transformations. On en déduit immédiatement les expressions de $X_{1\beta}f$, $Y_{1\beta}$, $Z_{1\beta}f$, $T_{1\beta}f$ par la considération des identités

$$X_{1\beta}(X_{\beta 1}f) = X_{11}f, \qquad X_{1\beta}(X_{\alpha 1}f) = 0$$

qui donnent

$$X_{1\beta}x_\beta^{(i)} = x_1^{(i)}, \qquad \ldots, \qquad X_{1\beta}t_\beta^{(i)} = t_1^{(i)}, \qquad X_{1\beta}x_\alpha^{(i)} = 0, \qquad \ldots, \qquad X_{1\beta}t_\alpha^{(i)} = 0.$$

Enfin on déduit de là

$$X_{\alpha\beta}f = X_{\alpha 1}(X_{1\beta}f), \qquad \ldots, \qquad T_{\alpha\beta}f = T_{\alpha 1}(X_{1\beta}f).$$

111. En faisant les calculs qui viennent d'être indiqués on trouve ainsi, pour les douze groupes considérés, les formules suivantes

$$(0)\quad \left\{\begin{aligned}
X_{\alpha\beta}f &= \sum_{i=1}^{i=m}\left(x_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial x_\beta^{(i)}} + y_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial y_\beta^{(i)}} + z_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial z_\beta^{(i)}} + t_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial t_\beta^{(i)}}\right),\\
Y_{\alpha\beta}f &= \sum_{i=1}^{i=m}\left(-y_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial x_\beta^{(i)}} + x_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial y_\beta^{(i)}} + t_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial z_\beta^{(i)}} - z_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial t_\beta^{(i)}}\right),\\
Z_{\alpha\beta}f &= \sum_{i=1}^{i=m}\left(-z_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial x_\beta^{(i)}} - t_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial y_\beta^{(i)}} + x_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial z_\beta^{(i)}} + y_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial t_\beta^{(i)}}\right),\\
T_{\alpha\beta}f &= \sum_{i=1}^{i=m}\left(-t_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial x_\beta^{(i)}} + z_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial y_\beta^{(i)}} + y_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial z_\beta^{(i)}} + x_\alpha^{(i)}\frac{\partial f}{\partial t_\beta^{(i)}}\right)
\end{aligned}\right.$$

ou

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} x_\alpha^{(i)\prime} &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (a_{\lambda\alpha} x_\lambda^{(i)} - b_{\lambda\alpha} y_\lambda^{(i)} - c_{\lambda\alpha} z_\lambda^{(i)} - d_{\lambda\alpha} t_\lambda^{(i)}),\\ y_\alpha^{(i)\prime} &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (a_{\lambda\alpha} y_\lambda^{(i)} + b_{\lambda\alpha} x_\lambda^{(i)} - c_{\lambda\alpha} t_\lambda^{(i)} + d_{\lambda\alpha} z_\lambda^{(i)}),\\ z_\alpha^{(i)\prime} &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (a_{\lambda\alpha} z_\lambda^{(i)} + b_{\lambda\alpha} t_\lambda^{(i)} + c_{\lambda\alpha} x_\lambda^{(i)} - d_{\lambda\alpha} y_\lambda^{(i)}),\\ t_\lambda^{(i)\prime} &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (a_{\lambda\alpha} t_\lambda^{(i)} - b_{\lambda\alpha} z_\lambda^{(i)} + c_{\lambda\alpha} y_\lambda^{(i)} + d_{\lambda\alpha} x_\lambda^{(i)}).\end{aligned}\right.$$

On voit que ces formules ne sont autres que les formules (2) appliquées à m systèmes de quatre variables.

Bien évidemment si le système simple considéré appartenait au second et au premier type, il n'y aurait qu'à supprimer les variables z et t dans le premier cas, y, z et t dans le second cas, ainsi que les transformations Zf et Tf, ou bien Yf, Zf et Tf, suivant les cas.

Nous pouvons faire rentrer tous ces cas dans une seule formule; posons, en effet,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} x_\alpha^{(i)} e + y_\alpha^{(i)} e' + z_\alpha^{(i)} e'' + t_\alpha^{(i)} e''' &= \mathrm{X}_\alpha^{(i)},\\ a_{\lambda\alpha} e + b_{\lambda\alpha} e' + c_{\lambda\alpha} e'' + d_{\lambda\alpha} e''' &= \mathrm{A}_{\lambda\alpha},\end{aligned}\right.$$

e, e', e'', e''' désignant les unités d'un système de quaternions d'Hamilton; alors les formules (9) s'écriront

$$(11)\quad \mathrm{X}_\alpha^{(i)\prime} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} \mathrm{X}_\lambda^{(i)} . \mathrm{A}_{\lambda\alpha}.$$

Ces formules conviennent encore au cas des systèmes simples du second type en regardant les $\mathrm{X}_\lambda^{(i)}$ et les $\mathrm{A}_{\lambda\alpha}$ comme des variables (ou paramètres) imaginaires et au cas des systèmes simples du premier type en regardant les X et les A comme des quantités réelles.

112. D'après cela, nous énoncerons le théorème suivant :

Tout groupe bilinéaire G *est formé d'un sous-groupe invariant de rang zéro* Γ *et d'un ou plusieurs groupes* g_1, g_2, …, *dont chacun* g *est, symboliquement, le groupe linéaire et homogène général d'un certain* *nombre de séries de p variables* $X_1, X_2, \ldots, X_p$, *ces variables étant, suivant les cas, réelles, imaginaires ou des quaternions, et les* p^2 *paramètres ayant la même nature*

$$(12) \qquad X_\alpha^{(i)\prime} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} X_\lambda^{(i)} A_{\lambda\alpha} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Si les variables et les paramètres du groupe bilinéaire G *sont des quantités imaginaires quelconques, le groupe est formé d'un sous-groupe invariant de rang zéro* Γ *et d'un ou plusieurs sous-groupes* g_1, g_2, ..., *dont chacun g est le groupe linéaire et homogène général d'un certain nombre de séries de p variables, naturellement imaginaires.*

S'il y a plusieurs groupes g, les variables transformées par l'un d'eux ne le sont pas par les autres: cela tient à ce que, si l'on considère les systèmes simples correspondants, le produit de deux nombres quelconques appartenant à deux de ces systèmes est nul. Par suite, toutes les variables introduites pour chacun des sous-gronpes $g_1, g_2, \ldots$, sont indépendantes entre elles et de plus elles fournissent toutes les variables du groupe comme on s'en rend compte en considérant la transformation du groupe qui correspond au module du système de nombres complexes et qui est la somme des transformations telles que $X_{ii}f$; cette transformation est

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant *toutes* les variables du groupe.