ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

HENRY BOURGET

Sur une classe particulière de groupes hyperabéliens

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 12, nº 3 (1898), p. D49-D90

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1898_1_12_3_D49_0>

toutes les autres conditions de la réduction ne dépendent que des variables

$$\xi_1, \qquad \eta_1, \qquad \zeta = \frac{\xi_2}{\eta_2},$$

car on a

$$\frac{\mu_3}{\mu_2} = 4D\frac{\zeta^2}{(1+\zeta^2)^2},$$

$$\varepsilon_4 = +\sqrt{D}\,\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2},$$

$$\varepsilon_5 = -\frac{\eta_1\zeta^2+\xi_1}{1+\zeta^2}.$$

Il résulte de là la conséquence importante que, si nous réduisons la forme en supposant les conditions

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} \geqq \tfrac{1}{2}, \qquad \frac{\mu_4}{\mu_3} \geqq \tfrac{1}{2},$$

toujours satisfaites pour le point variable $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$, nous n'avons en définitive que trois paramètres ξ_1, η_1, ζ^2; fait analytique qui nous dispense d'employer l'espace à quatre dimensions comme espace représentatif de la réduction continuelle et nous permet de rester dans un espace à trois dimensions.

C'est un fait analogue au fait qui se passe dans le groupe modulaire. Si l'on est en dehors du cercle $x^2+y^2-1=0$ suffisamment loin de l'origine, le domaine fondamental est une bande parallèle à Oy et, par suite, les limitations de ce domaine ne dépendent pas de la variable y.

32. Toutes ces remarques étant faites, voici comment nous allons faire la réduction continuelle.

Nous allons supposer que ξ_2 et η_2 sont infiniment grands et de telle sorte que leur rapport $\frac{\xi_2}{\eta_2} = \zeta$ et elles-mêmes satisfassent toujours aux conditions

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} > \tfrac{1}{2}, \qquad \frac{\mu_3}{\mu_2} > \tfrac{1}{2}, \qquad \frac{\mu_4}{\mu_3} > \tfrac{1}{2},$$

et nous allons faire varier ξ_1, η_1, ζ de toutes les manières possibles. En d'autres termes, nous ne réduisons la forme que pour les valeurs de $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ avoisinant le point à l'infini du domaine S, et nous allons chercher toutes les réduites dont les domaines de réduction admettent ce point.

Nous donnerons une valeur fixe à ζ et nous réduirons la forme pour toutes les valeurs de ξ_1 et η_1. Nous obtiendrons ainsi une division régulière du plan des ξ_1 et η_1. Nous ferons ensuite varier ζ dans les limites où il peut varier et nous verrons comment se déforme cette division régulière dans l'espace à trois dimensions (ξ_1, η_1, ζ).

33. Commençons par le cas très simple où $\zeta^2 = 1$; on a alors comme conditions de réduction de la forme

$$f_0 = x_2^2 - Dx_3^2 - x_1 x_4,$$

$$\begin{array}{ll} -\frac{1}{2} < -(\xi_1 + \eta_1) & < \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} < \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) & < \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} < \xi_1 \eta_1 & < \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} < -\dfrac{\xi_1 + \eta_1}{2} & < \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} < -\dfrac{\xi_1 - \eta_1}{2\sqrt{D}} & < \frac{1}{2}, \end{array}$$

qui nous montrent que la forme est réduite dans le rectangle dont les côtés ont pour équations

$$\xi_1 + \eta_1 = \pm \tfrac{1}{2}, \qquad \xi_1 - \eta_1 = \pm \frac{1}{2\sqrt{D}},$$

domaine que nous désignerons par d_0.

Sortons de d_0 par le côté

$$\xi_1 + \eta_1 = \tfrac{1}{2},$$

on a

$$\varepsilon_1 < 0, \qquad |\varepsilon_1| > \tfrac{1}{2}.$$

La substitution

$$(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1 + x_2, x_2, x_3, x_4),$$

qui remplace ε_1 par $\varepsilon_1 + 1$, réduit la forme et donne

$$f_1 = x_2^2 - Dx_3^2 - (x_1 + x_2)x_4,$$

avec les conditions de réduction

$$\begin{array}{ll} -\frac{1}{2} < -(\xi_1 + \eta_1) + 1 & < \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} < \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) & < \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} < \xi_1 \eta_1 & < \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} < -\dfrac{\xi_1 + \eta_1}{2} & < \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} < -\dfrac{\xi_1 - \eta_1}{2\sqrt{D}} & < \frac{1}{2}, \end{array}$$

qui nous montrent que la forme est réduite dans le rectangle formé par les droites

$$\xi_1+\eta_1=\tfrac{1}{2},\ 1,\qquad \xi_1-\eta_1=\pm\frac{1}{2\sqrt{D}},$$

domaine d_1.

Sortons de d_1 par le côté $\xi_1+\eta_1=1$; nous avons, dans le voisinage de côté

$$\varepsilon_5<0,\qquad |\varepsilon_5|>\tfrac{1}{2},$$

la substitution

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4;\ x_1,\ x_2+x_4,\ x_3,\ x_4),$$

remplace ε_5 par ε_5+1, mais aussi ε_3 par $\varepsilon_3+\varepsilon_1$.

Si cette quantité est, en valeur absolue, inférieure à $\frac{1}{2}$, la substitution considérée réduit la forme.

Or on a

$$\varepsilon_3+\varepsilon_1=\xi_1\eta_1-(\xi_1+\eta_1)+1;$$

il n'est pas difficile de voir qu'au voisinage du côté traversé elle est positive et inférieure à $\frac{1}{2}$.

Donc, on obtient la forme

$$f_{1^2}=(x_2+x_4)^2-Dx_3^2-(x_1+x_2+x_4)x_4=x_2^2-Dx_3^2-(x_1-x_2)x_4.$$

Arrêtons-nous et revenons au domaine primitif d_0.

Sortons de d_0 par le côté

$$\xi_1+\eta_1=-\tfrac{1}{2};$$

on a

$$\varepsilon_1>0,\qquad |\varepsilon_1|>\tfrac{1}{2},$$

la substitution

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4;\ x_1-x_2,\ x_2,\ x_3,\ x_4),$$

qui remplace ε_1 par ε_1-1, réduit la forme qui devient

$$f_{1'}=x_2^2-Dx_3^2-(x_1-x_2)x_4,$$

qui est réduite dans le rectangle $d_{1'}$,

$$\xi_1+\eta_1=-\tfrac{1}{2},\ -1,\qquad \xi_1-\eta_1=\pm\frac{1}{2\sqrt{D}}.$$

Or, cette forme $f_{1'}$ coïncide avec f_{1^2}; donc, il est inutile de pousser plus avant la réduction dans la bande du plan, limitée par les droites

$$\xi_1-\eta_1=\pm\frac{1}{2\sqrt{D}}.$$

Si nous partons de d_0 dans le sens des ξ_1 positifs, nous rencontrons successivement les formes $f_0,\ f_1,\ f_{1'},\ f_0,\ f_1,\ f_{1'},\ \ldots,$ et dans le sens des ξ_1

négatifs f_0, $f_{1'}$, f_1, f_0, $f_{1'}$, f_1, ...; de sorte que, si nous considérons le domaine formé par la réunion des domaines $d_{1'}$, d_0, d_1, nous voyons que ce domaine se reproduit à l'infini et nous donne une division régulière de la bande du plan considérée.

Revenons maintenant au domaine d_0 et réduisons la forme initiale en faisant varier le point (ξ_1, η_1) dans la bande du plan limitée par les droites

$$\xi_1 + \eta_1 = \pm \tfrac{1}{2}.$$

Nous donnons la Table du calcul; ce que nous venons de dire nous permet d'abréger les explications

(α) $$f_0 = x_2^2 - D x_3^2 - x_1 x_4.$$

Côté de sortie..... $\xi_1 - \eta_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{D}}$, $\varepsilon_2 > 0$, $|\varepsilon_2| > \frac{1}{2}$.

Substitution....... $(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1 - x_3, x_2, x_3, x_4)$.

$$f_2 = x_2^2 - D x_3^2 - (x_1 - x_3) x_4.$$

$$\varepsilon_1 = -(\xi_1 + \eta_1),$$
$$\varepsilon_2 = \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) - 1,$$
$$\varepsilon_3 = \xi_1 \eta_1,$$
$$\varepsilon_5 = -\frac{\xi_1 + \eta_1}{2},$$
$$\varepsilon_6 = -\frac{\xi_1 - \eta_1}{2\sqrt{D}}.$$

Domaine d_2..... $\xi_1 + \eta_1 = \pm \frac{1}{2}$, $\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$.

Si l'on sort de d_0 symétriquement par rapport à l'origine, on trouve

$$f_{2'} = x_2^2 - D x_3^2 - (x_1 + x_3) x_4.$$

(β) Côté de sortie de d_2.... $\xi_1 - \eta_1 = \dfrac{3}{2\sqrt{D}}$, $\varepsilon_2 > 0$, $|\varepsilon_2| > \frac{1}{2}$.

Substitution.......... $(x_1, x_2, x_3\, x_4;\ x_1 - x_3, x_2, x_3, x_4)$.

$$f_{2''} = x_2^2 - D x_3^2 - (x_1 - 2x_3) x_4.$$

$$\varepsilon_1 = -(\xi_1 + \eta_1),$$
$$\varepsilon_2 = \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) - 2,$$
$$\varepsilon_3 = \xi_1 \eta_1,$$
$$\varepsilon_5 = -\frac{\xi_1 + \eta_1}{2},$$
$$\varepsilon_6 = -\frac{\xi_1 - \eta_1}{2\sqrt{D}}.$$

Domaine $d_{2''}$..... $\xi_1 + \eta_1 = \pm \frac{1}{2}$, $\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$.

Si l'on sort de d_2, symétriquement, on trouve

$$f_{2^2} = x_2^2 - \mathrm{D}x_3^2 - (x_1 x_3)x_4.$$

(γ) Côté de sortie de d_{2^2}.... $\xi_1 - \eta_1 = \dfrac{5}{2\sqrt{\mathrm{D}}}$, $\varepsilon_2 > 0$, $|\varepsilon| > \frac{1}{2}$.

Substitution........... $(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1 - x_3, x_2, x_3, x_4)$.

$$f_{2^3} = x_2^2 - \mathrm{D}x_3^2 - (x_1 - 3x_3)x_4,$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= -(\xi_1 + \eta_1),\\
\varepsilon_1 &= \sqrt{\mathrm{D}}(\xi_1 - \eta_1) - 3,\\
\varepsilon_3 &= \xi_1\eta_1,\\
\varepsilon_5 &= -\frac{\xi_1 + \eta_1}{2},\\
\varepsilon_6 &= \frac{\xi_1 - \eta_1}{2\sqrt{\mathrm{D}}}.
\end{aligned}$$

Domaine d_{2^3}.... $\xi_1 + \eta_1 = \pm\frac{1}{2}$, $\sqrt{\mathrm{D}}(\xi_1 - \eta_1) = \dfrac{5}{2\sqrt{\mathrm{D}}}$,

et, comme quatrième côté, la droite

$$\sqrt{\mathrm{D}}(\xi_1 - \eta_1) = \frac{7}{2\sqrt{\mathrm{D}}},$$

ou l'hyperbole équilatère

$$\xi_1\eta_1 + \tfrac{1}{2} = 0,$$

suivant la valeur de D. Si c'est la droite

$$\sqrt{\mathrm{D}}(\xi_1 - \eta_1) = \frac{5}{2\sqrt{\mathrm{D}}},$$

on continuera à réduire de la même manière jusqu'à ce qu'on rencontre cette hyperbole équilatère, ce qui arrivera d'autant plus tard que D sera plus grand. Si nous supposons $\mathrm{D} = 5$, cette circonstance se présente maintenant. Plaçons-nous dans ce cas pour fixer les idées; le domaine d_{2^3} est donc limité par

$$\xi_1 + \eta_1 = \pm\tfrac{1}{2}, \qquad \sqrt{\mathrm{D}}(\xi_1 - \eta_1) = \frac{5}{2\sqrt{\mathrm{D}}}, \qquad \xi_1\eta_1 = -\tfrac{1}{2}.$$

(δ) Côté de sortie de d_{2^3}. $\xi_1 - \eta_1 + \frac{1}{2} = 0$, $\varepsilon_3 < 0$, $|\varepsilon_3| > \frac{1}{2}$.

Substitution....... $(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1 + x_4, x_2, x_3, x_4)$.

$$f_{2^4} = x_2^2 - \mathrm{D}x_3^2 - (x_1 - 3x_3 + x_4)x_4.$$

$$\varepsilon_1 = -(\xi_1 + \eta_1),$$
$$\varepsilon_2 = \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) - 3,$$
$$\varepsilon_3 = \xi_1\eta_1 + 1,$$
$$\varepsilon_5 = -\frac{\xi_1 + \eta_1}{2},$$
$$\varepsilon_6 = -\frac{\xi_1 - \eta_1}{2\sqrt{D}}.$$

Domaine d_{2^4}...... $\xi_1 + \eta_1 = \pm\frac{1}{2}$, $\xi_1\eta_1 + \frac{1}{2} = 0$, $\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \frac{7}{2}$.

On aurait de même, symétriquement,

$$f_{2'^4} = x_2^2 - D x_3^2 - (x_1 + 3x_3 + x_4)x_4.$$

(ε) Côté de sortie de d_{2^4}. $\xi_1 - \eta_1 = \frac{7}{2\sqrt{D}}$, $\varepsilon_2 > 0$, $|\varepsilon_2| > \frac{1}{2}$.

Substitution....... $(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1 - x_3, x_2, x_3, x_4)$.

$$f_{2^5} = x_2^2 - D x_3^2 - (x_1 - 4x_3 + x_4)x_4.$$
$$\varepsilon_1 = -(\xi_1 + \eta_1),$$
$$\varepsilon_2 = \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) - 4,$$
$$\varepsilon_3 = \xi_1\eta_1 + 1,$$
$$\varepsilon_5 = -\frac{\xi_1 + \eta_1}{2},$$
$$\varepsilon_6 = -\frac{\xi_1 - \eta_1}{2\sqrt{D}}.$$

Domaine d_{2^5}...... $\xi_1 + \eta_1 = \pm\frac{1}{2}$, $\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$.

On aurait, symétriquement,

$$f_{2'^5} = x_2^2 - D x_3^2 - (x_1 + 4x_3 + x_4)x_4.$$

(ζ) Côté de sortie de d_{2^5}.... $\xi_1 - \eta_1 = \frac{9}{2\sqrt{D}}$, $\varepsilon_2 > 0$, $|\varepsilon_2| > \frac{1}{2}$,

Substitution........... $(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1 - x_3, x_2, x_3, x_4)$,

$$f_{2^6} = x_2^2 - D x_3^2 - (x_1 - 5x_3 + x_4)x_4,$$
$$\varepsilon_1 = -(\xi_1 + \eta_1),$$
$$\varepsilon_2 = \sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) - 5,$$
$$\varepsilon_3 = \xi_1\eta_1 + 1,$$
$$\varepsilon_5 = -\frac{\xi_1 + \eta_1}{2},$$
$$\varepsilon_6 = -\frac{\xi_1 - \eta_1}{2\sqrt{D}}.$$

Domaine d_{2^6}..... $\xi_1 + \eta_1 = \pm\frac{1}{2}$, $\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) = \frac{9}{2}$, et la droite

$$\sqrt{D}\,(\xi_1 - \eta_1) = \tfrac{11}{2},$$

ou la droite

$$\sqrt{D}\,(\xi_1 - \eta_1) = \frac{2D}{2};$$

si l'on se place toujours dans le cas de $D = 5$, cette circonstance se présente ici, car $2D = 10$.

(η) Côté de sortie de d_{2^6}. $\quad (\xi_1 - \eta_1) = \dfrac{2D}{2\sqrt{D}}\left(\dfrac{10}{2\sqrt{D}}\right), \quad \varepsilon_6 < 0, \quad |\varepsilon_6| > \tfrac{1}{2}.$

La substitution $(x_3\,;\, x_3 + x_4)$ remplace ε_6 par $\varepsilon_6 + 1$, ce qui réduit ε_6, mais aussi ε_3 par $\varepsilon_3 + \varepsilon_2$.

Or, au voisinage du côté de sortie, $\varepsilon_3 + \varepsilon_2$ est > 0 et de valeur plus grande que $\frac{1}{2}$. Il faut donc, en outre, poser $(x_1\,;\, x_1 - x_4)$ pour achever de réduire la forme. La substitution réductrice est donc en définitive

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4;\ \ x_1 - x_4,\ x_2,\ x_3 + x_4,\ x_4),$$

$$f_{2^7} = x_2^2 - D(x_3 + x_4)^2 - (x_1 - 5x_3 - 5x_4 - x_4 + x_4)x_4 = x_2^2 - Dx_3^2 - x_1x_4 = f_0.$$

Il sera donc inutile d'aller plus loin et l'on voit que dans la bande limitée par les droites

$$\xi_1 + \eta_1 = \pm\tfrac{1}{2},$$

si l'on s'avance dans le sens des ξ_1 positifs, on rencontre successivement les formes

$$f_0,\quad f_2,\quad f_{2^2},\quad f_{2^3},\quad f_{2^4},\quad f_{2^5},\quad f_{2^6},\quad f_0,\quad f_2,\quad f_{2^2},\quad \ldots,$$

et, dans le sens des ξ_1 négatifs,

$$\ldots,\quad f_0,\quad f_{2'^6},\quad f_{2'^5},\quad f_{2'^4},\quad f_{2'^3},\quad f_{2'^2},\quad f_{2'},\quad f_0.$$

Ce qui se passe pour $D = 5$ est général et l'on a un nombre de formes distinctes d'autant plus grand que D est lui-même plus grand.

Si donc on réunit ensemble les domaines

$$d_{2'^6},\quad d_{2'^5},\quad d_{2'^4},\quad d_{2'^3},\quad d_{2'^2},\quad d_{2'},\quad d_0,\quad d_2,\quad d_{2^2},\quad d_{2^3},\quad d_{2^4},\quad d_{2^5},\quad d_{2^6},$$

on obtient un domaine qui se reproduit à l'infini et donne une division régulière de la portion de plan limitée par les droites

$$\xi_1 + \eta_1 = \pm\tfrac{1}{2}.$$

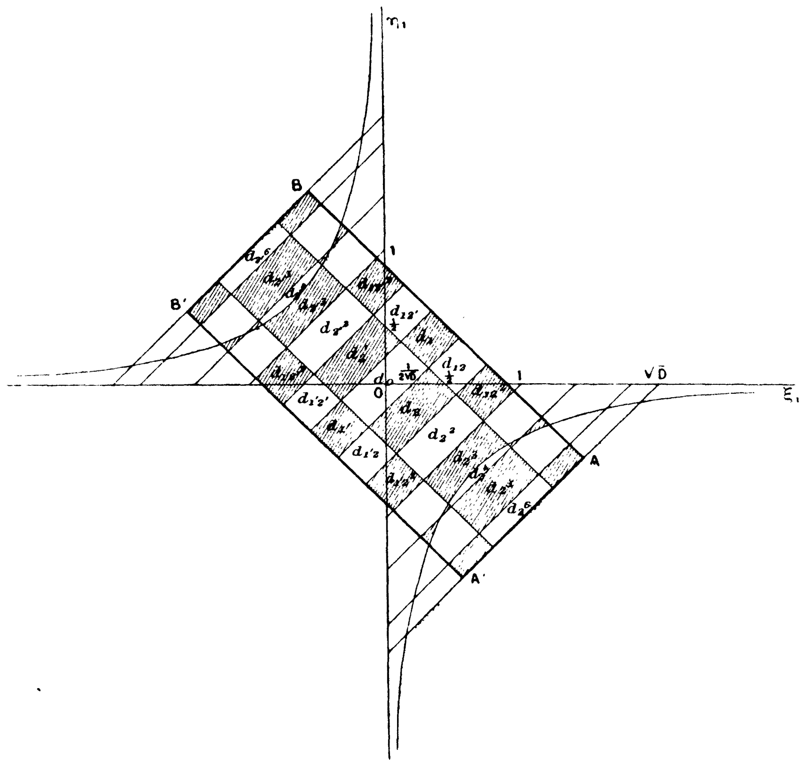
En tenant compte de ce que nous avons déjà trouvé, nous en concluons l'existence, dans le plan des ξ_1, η_1, d'un domaine fondamental qui est le rectangle ayant pour côtés

$$\xi_1 - \eta_1 = \pm 1, \qquad \xi_1 - \eta_1 = \pm\sqrt{D}.$$

La *fig.* 1, qui correspond au cas de $D = 5$, montre clairement tout ce que nous venons de dire.

Nous obtiendrons des substitutions semblables de la forme f_0, en prenant

Fig. 1.



les substitutions qui nous permettent de passer du domaine d_0 à tout domaine correspondant à la même réduite f_0.

On retrouve ainsi les substitutions qui correspondent aux substitutions hyperabéliennes

$$(\xi_1, \eta_1;\ \xi_1 + 1, \quad \eta_1 - 1),$$
$$(\xi_1, \eta_1;\ \xi_1 - \sqrt{D}, \ \eta_1 - \sqrt{D});$$

elles laissent d'ailleurs invariable le point à l'infini des domaines D, situé sur la limite du domaine S.

34. Revenons maintenant aux conditions de réduction et considérons-les dans toute leur généralité sans supposer $\zeta^2 = 1$. Les quantités ε_4 et ε_5 ont seules changé dans ce nouveau cas; on a

$$\varepsilon_4 = \sqrt{D}\,\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}$$

et

$$\varepsilon_5 = -\frac{\xi_1+\zeta^2\eta_1}{1+\zeta^2}.$$

Si l'on écrit les conditions

$$-\tfrac{1}{2} < -\frac{\xi_1+\zeta^2\eta_1}{1+\zeta^2} < \tfrac{1}{2},$$

les droites limites obtenues en prenant le signe d'égalité ne sont plus parallèles à $\xi_1+\eta_1=0$, comme dans le cas précédent, mais ont un coefficient angulaire égal à $-\zeta^2$.

Nous allons construire ces droites limites pour les valeurs limites de ζ^2, c'est-à-dire pour les quatre valeurs

$$4D-1-2\sqrt{2D(2D-1)},\quad \frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1},\quad \frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1},\quad 4D-1+2\sqrt{2D(2D-1)}.$$

Les droites

$$2\left(\xi_1+\frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1}\eta_1\right) = 1+\frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1},$$

$$2\left(\xi_1+\frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1}\eta_1\right) = -1-\frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1},$$

passent respectivement par les points $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, et par les points d'intersection des droites

$$\xi_1+\eta_1=\tfrac{1}{2},\qquad \xi_1+\eta_1=-\tfrac{1}{2},$$

$$\xi_1-\eta_1=-\sqrt{D},\qquad \xi_1-\eta_1=+\sqrt{D};$$

de même, les droites

$$2\left(\xi_1+\frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1}\eta_1\right) = 1+\frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1},$$

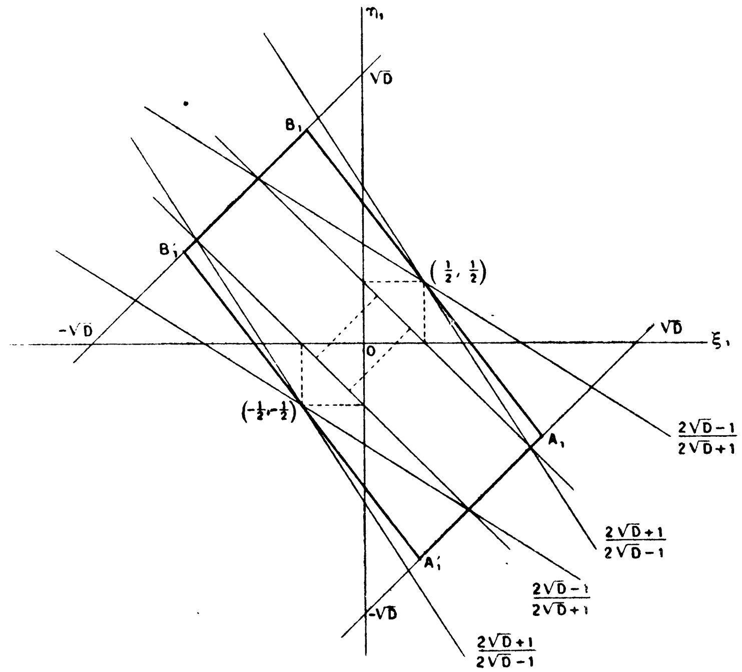
$$2\left(\xi_1+\frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1}\eta_1\right) = -1-\frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1},$$

passent par les points $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, et par les points d'intersection des droites

$$\xi_1+\eta_1=\tfrac{1}{2},\qquad \xi_1+\eta_1=-\tfrac{1}{2},$$
$$\xi_1-\eta_1=+\sqrt{D},\qquad \xi_1-\eta_1=-\sqrt{D}.$$

Les quatre autres droites limites correspondant aux racines de l'équation en X du n° 31, passent également par les points $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, et comprennent dans leur angle les droites que nous venons de construire; par

Fig. 2.



suite, deux d'entre elles, parallèles, coupent le domaine fondamental, les deux autres ne le traversent pas.

Nous voyons donc que, si ζ^2 est compris entre les nombres

$$\frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1},\quad \frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1},$$

ε_4 est positif ou négatif, suivant que ζ^2 est plus petit ou plus grand que 1, et il n'y a de changé que la forme du domaine fondamental qui est un parallélogramme $A_1 A'_1 B_1 B'_1$ ayant pour côtés

$$\xi_1-\eta_1=\pm\sqrt{D},\qquad \xi_1+\zeta^2\eta_1=\pm(1+\zeta^2).$$

Nous pouvons résumer les résultats obtenus jusqu'ici et leur donner une forme géométrique en considérant ζ^2 comme une troisième coordonnée dans un système de coordonnées rectangulaires (ξ_1, η_1, ζ^2).

ζ^2 variant de $\frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1}$ à $\frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1}$, nous avons une division régulière de la portion d'espace limitée par les deux plans

$$\zeta^2 = \frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1}, \qquad \zeta^2 = \frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1},$$

qui résulte de la répétition d'un même domaine fondamental formé par la portion d'espace comprise entre les deux plans $\xi_1 - \eta_1 \pm \sqrt{D}$ et les deux hélicoïdes gauches $\xi_1 + \zeta^2\eta_1 = \pm(1+\zeta^2)$.

35. Si ζ^2 est en dehors de l'intervalle $\frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1}, \frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1}$, une étude complémentaire s'impose.

Dans ce cas, en effet, on a

$$\varepsilon_4 \lesssim 0, \qquad |\varepsilon_4| > \tfrac{1}{2},$$

et la forme f_0 ne peut être réduite pour aucune valeur de (ξ_1, η_1). C'est dire que le domaine d_0 de réduction de f_0 ne s'étend ni au-dessus, ni au-dessous des deux plans précédents.

Considérons les plans

$$\zeta^2 = \frac{2\sqrt{D}-p}{2\sqrt{D}+p}, \qquad \zeta^2 = \frac{2\sqrt{D}+p}{2\sqrt{D}-p},$$

p étant un nombre entier positif impair. Les premiers coupent l'axe des ζ^2 entre l'origine et le point $\frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1}$, si $p \leqq 2\sqrt{D}$, les seconds entre le point $\frac{2\sqrt{D}+1}{2\sqrt{D}-1}$ et l'∞. Ne considérons de ces plans que ceux compris entre les racines de l'équation en X, de manière à avoir toujours pour les valeurs correspondantes de ζ^2

$$\frac{\mu_3}{\mu_2} \geqq \frac{1}{2}.$$

Cela étant, si ζ^2 est compris entre

$$\frac{2\sqrt{D}-(p+2)}{2\sqrt{D}+(p+2)} \quad \text{et} \quad \frac{2\sqrt{D}-p}{2\sqrt{D}+p},$$

la substitution

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4;\ x_1,\ x_2 - px_3,\ x_3,\ x_4)$$

réduira la forme, à condition qu'il y ait des valeurs de (ξ_1, η_1) satisfaisant aux conditions

$$|\varepsilon_2 - p\varepsilon_1| = |\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) + p(\xi_1 + \eta_1)| < \tfrac{1}{2},$$

et, si ζ^2 est compris entre

$$\frac{2\sqrt{D} + p}{2\sqrt{D} - p} \quad \text{et} \quad \frac{2\sqrt{D} + (p+2)}{2\sqrt{D} - (p+2)},$$

il faudra prendre, pour réduire la forme, la substitution

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4;\ x_1,\ x_2 + px_3,\ x_3,\ x_4),$$

pourvu qu'il existe des valeurs de (ξ_1, η_1) satisfaisant aux inégalités

$$|\varepsilon_2 + p\varepsilon_1| = |\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) - p(\xi_1 + \eta_1)| < \tfrac{1}{2},$$

car, par exemple, la première substitution remplace

$$\varepsilon_4 \ \text{par}\ \varepsilon_4 - p \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_2 \ \text{par}\ \varepsilon_2 - p\varepsilon_1.$$

Or, $\varepsilon_4 = \sqrt{D}\,\frac{1 - \zeta^2}{1 + \zeta^2}$ est plus petit que $\frac{p+1}{2}$ et plus grand que p. Pour s'assurer si la condition auxiliaire peut être satisfaite, construisons dans le premier cas les droites

$$\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) + p(\xi_1 + \eta_1) - \tfrac{1}{2} = 0,$$
$$\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) + p(\xi_1 + \eta_1) + \tfrac{1}{2} = 0;$$

ces droites sont parallèles et passent respectivement par les points

$$\left(\frac{1}{4p},\ \frac{1}{4p}\right),\quad \left(\frac{1}{4\sqrt{D}},\ -\frac{1}{4\sqrt{D}}\right),$$
$$\left(-\frac{1}{4p},\ -\frac{1}{4p}\right),\quad \left(-\frac{1}{4\sqrt{D}},\ \frac{1}{4\sqrt{D}}\right),$$

et les points de la portion de plan comprise entre ces droites satisfont à la condition exigée pour la réduction.

Il en est de même dans le second cas.

36. Appliquons ces substitutions à la forme f_0; nous trouvons

$$(x_2 - px_3)^2 - Dx_3^2 - x_1x_4, \qquad \text{si} \quad \varepsilon_4 > 0,$$
$$(x_2 + px_3)^2 - Dx_3^2 - x_1x_4, \qquad \text{si} \quad \varepsilon_4 < 0.$$

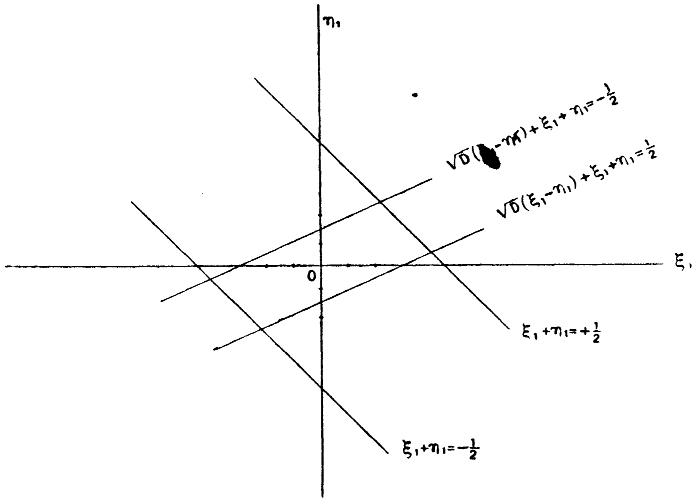
Si, en outre, nous supposons fixe la valeur de ζ^2, nous voyons que ces formes seront réduites dans les parallélogrammes limités par les droites

$$\sqrt{D}(\xi_1 - \eta_1) + p(\xi_1 + \eta_1) \pm \tfrac{1}{2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \xi_1 + \eta_1 = \pm \tfrac{1}{2}.$$

La réduction continuelle de chacune des deux formes dans les plans correspondant aux valeurs de ζ^2 se fera sans plus de peine que dans l'exemple traité plus haut, et l'on rencontrera encore ici les deux mêmes substitutions semblables.

La *fig.* 3 ci-dessous montre le parallélogramme dans lequel est réduite

Fig. 3.



la forme de départ et correspond au cas où ζ^2 est compris entre

$$\frac{2\sqrt{D}-3}{2\sqrt{D}+3} \quad \text{et} \quad \frac{2\sqrt{D}-1}{2\sqrt{D}+1} \qquad \text{et} \qquad D = 5.$$

Dans ce qui précède, nous avons retrouvé deux de nos substitutions fondamentales; ce sont celles qui correspondent aux substitutions semblables,

$$(\xi, \eta;\ \xi + 1, \eta - 1), \qquad (\xi, \eta;\ \xi - \sqrt{D}, \eta - \sqrt{D}).$$

Elles laissent d'ailleurs invariable le point de la limite du domaine S commun à tous les domaines de réduction.

Abandonnons maintenant l'hypothèse faite jusqu'à présent

$$\frac{\mu_3}{\mu_2} \leq \frac{1}{2},$$

et faisons varier le plan $\zeta^2 = \text{const.}$ en dehors des limites qui lui étaient imposées par les racines de l'équation en X. Il est clair que pour réduire de nouveau la forme, on pourra employer une substitution de la forme

$$(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1, \alpha x_2 + \beta x_3, \gamma x_2 + \delta x_3, x_4)$$

avec

$$\alpha\gamma - \beta\delta = 1,$$

à condition de supposer (ξ_1, η_1) choisis de manière à satisfaire aux inégalités

$$-\tfrac{1}{2} < \alpha\varepsilon_1 + \gamma\varepsilon_2 < \tfrac{1}{2},$$
$$-\tfrac{1}{2} < \beta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2 < \tfrac{1}{2},$$

ce qui est toujours possible, car il suffit de supposer (ξ_1, η_1) à l'intérieur du parallélogramme ayant pour côtés

$$\alpha\varepsilon_1 + \gamma\varepsilon_2 = \pm \tfrac{1}{2}, \qquad \beta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2 = \pm \tfrac{1}{2}.$$

Il suffira même que la substitution choisie réduise la forme binaire

$$\mu_2(x_2 + \varepsilon_1 x_3)^2 + \mu_3 x_3^2,$$

les conditions relatives à (ξ_1, η_1) étant conservées.

Or, le calcul de la réduction de cette forme binaire définie est forcément limité, comme on sait. On finira par retomber sur des réduites obtenues et l'on déduira par conséquent, de ce calcul, des substitutions semblables pour la forme donnée. Elles ne contiendront que x_2 et x_3; donc elles seront aussi des substitutions semblables de $x_2^2 - D x_3^2$, c'est-à-dire seront telles que l'on ait

$$\alpha^2 - D\gamma^2 = 1.$$

Ce seront donc les substitutions qui correspondent aux puissances de la substitution

$$|\xi, \eta;\ (a - c\sqrt{D})\xi, (a + c\sqrt{D})\eta|,$$

a et c étant des solutions de l'équation de Pell

$$x^2 - D y^2 = 1.$$

Cette substitution laisse aussi invariable le point de la limite du domaine S commun aux domaines de réduction.

En résumé, ce calcul de réduction continuelle nous a fait retrouver les trois substitutions désignées par α, β, δ au début de cette seconde Partie, et nous montre que ces substitutions laissent invariable un point de la limite du domaine S.

Sur une classe de sous-groupes.

37. On connaît l'importance spéciale, dans la théorie des fonctions modulaires, des sous-groupes à congruences, c'est-à-dire des sous-groupes dont les substitutions

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

satisfont aux congruences

$$\left.\begin{aligned} \alpha \equiv \delta &\equiv \pm 1 \\ \gamma \equiv \beta &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod{n}.$$

M. Klein les a pris comme base d'une classification, dans laquelle il a divisé les fonctions modulaires en degrés (Stufen) suivant la valeur de l'entier n. Il existe, dans le groupe découvert par M. Picard, des sous-groupes tout à fait analogues.

Si nous prenons, par exemple, les substitutions du type A

$$\xi_1 = \frac{(a_0 - a_2\sqrt{D})\xi - (a_1 + a_3\sqrt{D})}{-(b_0 - b_2\sqrt{D})\xi + (b_1 + b_3\sqrt{D})}, \qquad \eta_1 = \frac{(a_0 + a_2\sqrt{D})\eta + (a_1 - a_3\sqrt{D})}{(b_0 + b_2\sqrt{D})\eta + (b_1 - b_3\sqrt{D})},$$

et, si l'on désigne par n un nombre entier, les substitutions satisfaisant aux congruences

$$\left.\begin{aligned} a_0 - a_2\sqrt{D} &\equiv \pm 1, & a_1 + a_3\sqrt{D} &\equiv 0 \\ b_0 - b_2\sqrt{D} &\equiv 0, & b_1 + b_3\sqrt{D} &\equiv \pm 1 \\ a_0 + a_2\sqrt{D} &\equiv \pm 1, & a_1 - a_3\sqrt{D} &\equiv 0 \\ b_0 + b_2\sqrt{D} &\equiv 0, & b_1 - b_3\sqrt{D} &\equiv \pm 1 \end{aligned}\right\} \pmod{n}$$

forment un groupe qui, ainsi qu'il est aisé de le voir, est un sous-groupe d'indice fini du groupe que nous étudions.

TROISIÈME PARTIE.

FONCTIONS DU GROUPE.

Fonctions ϑ et modules.

38. Nous allons nous occuper, dans ce Chapitre, des fonctions que laissent invariables les substitutions du groupe que nous considérons ou d'un de ses sous-groupes.

Avant d'aborder cette question, nous allons considérer un cas particulier important.

On sait quel grand intérêt offre, dans le cas du groupe modulaire, l'étude des fonctions ϑ, dans lesquelles on suppose l'argument nul et où l'on considère comme variable le rapport $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$ des périodes. M. Hermite a rencontré ainsi le premier exemple de fonctions modulaires.

Nous allons considérer de même ici les fonctions ϑ à deux arguments, et nous donnerons à ces arguments les valeurs o.

39. On sait qu'il y a seize fonctions ϑ à deux arguments; six d'entre elles sont des fonctions impaires; les dix autres sont des fonctions paires. Si donc on y suppose les arguments nuls, les six fonctions impaires seront identiquement nulles et nous aurons seulement à considérer dix fonctions ϑ.

En prenant comme notations celles de MM. Weierstrass et Weber, nos fonctions auront la forme

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}(0, 0)$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\left[\left(m_1+\frac{g_1}{2}\right)^2\tau_{11}+2\left(m_1+\frac{g_1}{2}\right)\left(m_2+\frac{g_2}{2}\right)\tau_{12}+\left(m_2+\frac{g_2}{2}\right)^2\tau_{22}\right]+\pi i\left[\left(m_1+\frac{g_1}{2}\right)h_1+\left(m_2+\frac{g_2}{2}\right)h_2\right]},$$

τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} désignent les modules de périodicité.

$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}$ se nomme la *caractéristique;* les nombres g et h sont égaux à o ou 1 ; de plus, la fonction étant paire, on a

$$g_1 h_1 + g_2 h_2 = 0 \pmod 2.$$

De plus, nous conviendrons de représenter les dix fonctions $\mathfrak{Z}$ paires par l'une ou l'autre des notations

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{Z}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathfrak{Z}_5, \qquad && \mathfrak{Z}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathfrak{Z}_{14},\\
&\mathfrak{Z}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathfrak{Z}_{01}, && \mathfrak{Z}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathfrak{Z}_{12},\\
&\mathfrak{Z}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathfrak{Z}_4, && \mathfrak{Z}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathfrak{Z}_{03},\\
&\mathfrak{Z}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathfrak{Z}_{23}, && \mathfrak{Z}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathfrak{Z}_{34},\\
&\mathfrak{Z}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathfrak{Z}_0, && \mathfrak{Z}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathfrak{Z}_2.
\end{aligned}$$

Nous rappellerons que les éléments du Tableau suivant

$$\begin{vmatrix}
\dfrac{\mathfrak{Z}_4^2}{\mathfrak{Z}_5^2} & \dfrac{\mathfrak{Z}_0^2}{\mathfrak{Z}_5^2} & -\dfrac{\mathfrak{Z}_2^2}{\mathfrak{Z}_5^2}\\[2ex]
-\dfrac{\mathfrak{Z}_{14}^2}{\mathfrak{Z}_5^2} & \dfrac{\mathfrak{Z}_{01}^2}{\mathfrak{Z}_5^2} & \dfrac{\mathfrak{Z}_{12}^2}{\mathfrak{Z}_5^2}\\[2ex]
\dfrac{\mathfrak{Z}_{34}^2}{\mathfrak{Z}_5^2} & -\dfrac{\mathfrak{Z}_{03}^2}{\mathfrak{Z}_5^2} & \dfrac{\mathfrak{Z}_{23}^2}{\mathfrak{Z}_5^2}
\end{vmatrix}$$

sont les coefficients d'une substitution orthogonale.

40. Nous avons posé, d'après M. Picard,

$$\tau_{11} = -\frac{2\sqrt{D}}{\xi+\eta}, \qquad \tau_{12} = \sqrt{D}\,\frac{\xi-\eta}{\xi+\eta}, \qquad \tau_{22} = \frac{2\sqrt{D}\,\xi\eta}{\xi+\eta}.$$

Si l'on fait cette substitution dans les fonctions $\mathfrak{Z}$, elles deviennent des fonctions des deux variables indépendantes ξ et η et du nombre entier D (¹).

Pour voir ce que deviennent ces fonctions quand on effectue sur les variables ξ, η les substitutions du groupe, il est nécessaire de chercher les

(¹) On voit qu'une particularité des fonctions que nous étudions est de dépendre de *deux* variables et d'*un* nombre entier, tandis que, dans le cas des fonctions modulaires, on ne rencontre que la variable $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$.

substitutions sur τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} qui correspondent aux substitutions fondamentales de notre groupe.

Nous trouvons sans difficulté :

A la substitution α correspond ..... $\left\{\begin{array}{l|l} \tau_{11} & \tau_{11} \\ \tau_{12} & \tau_{12}-\tau_{11}, \\ \tau_{22} & \tau_{11}-2\tau_{12}+\tau_{22}, \end{array}\right.$

A la substitution β correspond ..... $\left\{\begin{array}{l|l} \tau_{11} & \dfrac{\tau_{11}}{1+\tau_{11}}, \\ \tau_{12} & \dfrac{\tau_{12}}{1+\tau_{11}}, \\ \tau_{22} & \dfrac{-\mathrm{D}\tau_{11}+\tau_{22}-2\mathrm{D}}{1+\tau_{11}}, \end{array}\right.$

A la substitution γ correspond ..... $\left\{\begin{array}{l|l} \tau_{11} & \tau_{22}, \\ \tau_{12} & -\tau_{12}, \\ \tau_{22} & \tau_{11}, \end{array}\right.$

A la substitution δ correspond ..... $\left\{\begin{array}{l|l} \tau_{11} & \dfrac{-\tau_{11}}{c\tau_{12}-a}, \\ \tau_{12} & \dfrac{\mathrm{D}c-a\tau_{12}}{c\tau_{12}-a}, \\ \tau_{22} & \dfrac{-\tau_{22}}{c\tau_{12}-a}, \end{array}\right.$

A la substitution ε correspond...... $\left\{\begin{array}{l|l} \tau_{11} & \tau_{11}, \\ \tau_{12} & -\tau_{12}, \\ \tau_{22} & \tau_{22}. \end{array}\right.$

Cela étant il faut appliquer, à chacune des dix fonctions $\mathfrak{S}$, ces cinq transformations linéaires sur les τ.

Rappelons, à cet effet, la formule de la transformation linéaire des fonctions $\mathfrak{S}$ à arguments nuls

$$\mathfrak{S}\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}(\tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22})$$
$$= \mathrm{C}\, e^{\frac{i\pi}{2}[(g_1h_1+g_2h_2)-(g'_1h'_1+g'_2h'_2)]-\frac{i\pi}{4}\omega'}\,\mathfrak{S}\begin{bmatrix} g'_1 & g'_2 \\ h'_1 & h'_2 \end{bmatrix}(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}),$$

dans laquelle on a posé

$$\begin{aligned} \omega' = {} & g_1^2(a_0d_0+b_0c_0)+g_2^2(a_1d_1+b_1c_1)+h_2^2(a_2d_2+b_2c_2)+h_1^2(a_3d_3+b_3c_3) \\ & +2g_1g_2(c_0b_1+d_0a_1)+2g_1h_2(c_0b_2+d_0a_2)+2g_1h_1(c_0b_3+d_0a_3) \\ & +2g_2h_2(c_1b_2+d_1a_2)+2g_2h_1(c_1b_3+d_1a_3)+2h_1h_2(c_2b_3+d_2a_3) \\ & +2g_1(c_0b+d_0a)+2g_2(c_1b+d_1a)+2h_2(c_2b+d_2a)+2h_1(c_3b+d_3a), \end{aligned}$$

$$a = a_0 a_3 + a_1 a_2, \qquad b = b_0 b_3 + b_1 b_2,$$

$$\begin{aligned}
g'_1 &= g_1 a_0 + g_2 a_1 + h_2 a_2 + h_1 a_3 + a_0 a_3 + a_1 a_2,\\
g'_2 &= g_1 b_0 + g_2 b_1 + h_2 b_2 + h_1 b_3 + b_0 b_3 + b_1 b_2,\\
h'_2 &= g_1 c_0 + g_2 c_1 + h_2 c_2 + h_1 c_3 + c_0 c_3 + c_1 c_2,\\
h'_1 &= g_1 d_0 + g_2 d_1 + h_2 d_2 + h_1 d_3 + d_0 d_3 + d_1 d_2,
\end{aligned}$$

la transformation étant

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \quad (^1),$$

τ'_{11}, τ'_{12}, τ'_{22} étant des fonctions de τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} et enfin c désignant une constante qui ne dépend que des coefficients de la transformation et qui est la même pour les dix fonctions $\mathfrak{S}$.

Remarquons aussi, avant d'appliquer cette formule, que deux transformations dont les éléments sont égaux et de signes contraires donnent le même résultat dans la formule de transformation.

41. Appliquons maintenant ces résultats généraux à nos cinq transformations.

Transformation α.

L'une des deux transformations linéaires à quatre variables correspondant à α est

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

d'où

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad \omega' = 0,$$

$$\begin{aligned}
g'_1 &= g_1 - g_2,\\
g'_2 &= g_2, & g'_1 h'_1 + g'_2 h'_2 = g_1 h_1 + g_2 h_2,\\
h'_2 &= h_1 + h_2,\\
h'_1 &= h_1;
\end{aligned}$$

(1) *Voir* le Livre de M. Krause *Sur la transformation des fonctions hyperelliptiques du premier ordre*.

la formule de transformation devient

$$\mathfrak{S}\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}(\tau') = \mathfrak{C}_1\mathfrak{S}\begin{bmatrix} g'_1 & g'_2 \\ h'_1 & h'_2 \end{bmatrix}(\tau);$$

appliquée aux dix fonctions $\mathfrak{S}$, elle donne, en désignant par $\mathfrak{S}'_\alpha$ la fonction $\mathfrak{S}_\alpha$ relative aux modules transformés τ',

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}'_5 &= \mathfrak{C}_1\mathfrak{S}_5, & \mathfrak{S}'_{14} &= \mathfrak{C}_1\mathfrak{S}_{03},\\
\mathfrak{S}'_{01} &= \mathfrak{C}_1\mathfrak{S}_{01}, & \mathfrak{S}'_{12} &= \mathfrak{C}_1\mathfrak{S}_{0},\\
\mathfrak{S}'_4 &= \mathfrak{C}_1\mathfrak{S}_{23}, & \mathfrak{S}'_{03} &= \mathfrak{C}_1\mathfrak{S}_{14},\\
\mathfrak{S}'_{23} &= \mathfrak{C}_1\mathfrak{S}_4, & \mathfrak{S}'_{34} &= \mathfrak{C}_1\mathfrak{S}_{34},\\
\mathfrak{S}'_0 &= \mathfrak{C}_1\mathfrak{S}_{12}, & \mathfrak{S}'_2 &= \mathfrak{C}_1\mathfrak{S}_2.
\end{aligned}$$

En outre, si l'on développe l'identité

$$\mathfrak{S}'_5 = \mathfrak{C}_1\mathfrak{S}_5,$$

on voit que la transformation sur les τ équivaut à la substitution suivante sur les indices de la série

$$(m_1, m_2;\ m_1 - m_2, m_2);$$

donc, elle ne fait que changer l'ordre des termes de la série, ce qui n'a aucun effet sur sa valeur, la série étant absolument convergente. On a donc

$$\mathfrak{C}_1 = +1,$$

et l'on peut écrire le Tableau ci-dessus sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}'_5 &= \mathfrak{S}_5, & \mathfrak{S}'_{23} &= \mathfrak{S}_4,\\
\mathfrak{S}'_{01} &= \mathfrak{S}_{01}, & \mathfrak{S}'_0 &= \mathfrak{S}_{12},\\
\mathfrak{S}'_{34} &= \mathfrak{S}_{34}, & \mathfrak{S}'_{12} &= \mathfrak{S}_0,\\
\mathfrak{S}'_2 &= \mathfrak{S}_2, & \mathfrak{S}'_{14} &= \mathfrak{S}_{03},\\
\mathfrak{S}'_4 &= \mathfrak{S}_{23}, & \mathfrak{S}'_{03} &= \mathfrak{S}_{14}.
\end{aligned}$$

Transformation β.

L'une des transformations linéaires correspondantes est

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -D & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

d'où

$$
\begin{aligned}
&a = 1, \qquad b = 0, \qquad \omega' = -\,\mathrm{D} g_2^2 + h_1^2 + 2h_1,\\
&\qquad\qquad g'_1 = g_1 + h_1 + 1,\\
&\qquad\qquad g'_2 = g_2,\\
&\qquad\qquad h'_2 = -\,\mathrm{D} g_2 + h_2 - \mathrm{D},\\
&\qquad\qquad h'_1 = h_1.
\end{aligned}
$$

On n'obtient pas les mêmes résultats en appliquant la formule de transformation, suivant que D est impair ou pair. On doit donc distinguer deux cas. On a, dans le cas où D est impair,

$$
\begin{aligned}
\vartheta'_5 &= \mathcal{E}_2 \vartheta_2, & \vartheta'_0 &= e^{\frac{i\pi}{4}} \mathcal{E}_2 \vartheta_{12},\\
\vartheta'_2 &= \mathcal{E}_2 \vartheta_5, & \vartheta'_4 &= -\,e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{D}} \mathcal{E}_2 \vartheta_{23},\\
\vartheta'_{01} &= \mathcal{E}_2 \vartheta_{34}, & \vartheta'_{23} &= -\,e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{D}} \mathcal{E}_2 \vartheta_4,\\
\vartheta'_{34} &= \mathcal{E}_2 \vartheta_{01}, & \vartheta'_{14} &= -\,e^{\frac{i\pi}{4}(\mathrm{D}+1)} \mathcal{E}_2 \vartheta_{14},\\
\vartheta'_{12} &= e^{\frac{i\pi}{4}} \mathcal{E}_2 \vartheta_0, & \vartheta'_{03} &= -\,e^{\frac{i\pi}{4}(\mathrm{D}+1)} \mathcal{E}_2 \vartheta_{03},
\end{aligned}
$$

et, dans le cas où D est pair,

$$
\begin{aligned}
\vartheta'_5 &= \mathcal{E}_2 \vartheta_{01}, & \vartheta'_{14} &= -\,e^{\frac{i\pi}{4}(\mathrm{D}-1)} \mathcal{E}_2 \vartheta_{14},\\
\vartheta'_{01} &= \mathcal{E}_2 \vartheta_5, & \vartheta'_{03} &= -\,e^{-\frac{i\pi}{4}(\mathrm{D}-1)} \mathcal{E}_2 \vartheta_{03},\\
\vartheta'_{34} &= \mathcal{E}_2 \vartheta_2, & \vartheta'_{12} &= e^{\frac{i\pi}{4}} \mathcal{E}_2 \vartheta_{12},\\
\vartheta'_2 &= \mathcal{E}_2 \vartheta_{34}, & \vartheta'_4 &= e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{D}} \mathcal{E}_2 \vartheta_{23},\\
\vartheta'_0 &= e^{\frac{i\pi}{4}} \mathcal{E}_2 \vartheta_0, & \vartheta'_{23} &= e^{\frac{i\pi}{4}\mathrm{D}} \mathcal{E}_2 \vartheta_4.
\end{aligned}
$$

Nous réservons, pour le moment, la détermination de la constante $\mathcal{E}_2$.

Transformation γ.

L'une des transformations linéaires est

$$
\begin{vmatrix}
0 & -1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & -1 & 0
\end{vmatrix},
$$

d'où

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad \omega' = 0,$$
$$g'_1 = -g_2,$$
$$g'_2 = g_1,$$
$$h'_2 = h_1,$$
$$h'_1 = -h_2.$$

On obtient le Tableau suivant, après avoir déterminé la constante $\varepsilon_3 = +1$, comme dans le premier cas,

$$\begin{array}{ll}
\vartheta'_5 = \vartheta_5, & \vartheta'_4 = \vartheta_{01}, \\
\vartheta'_{23} = \vartheta_{23}, & \vartheta'_{12} = \vartheta_{34}, \\
\vartheta'_0 = \vartheta_0, & \vartheta'_{34} = \vartheta_{12}, \\
\vartheta'_{14} = \vartheta_{14}, & \vartheta'_{03} = \vartheta_2, \\
\vartheta'_{01} = \vartheta_4, & \vartheta'_2 = \vartheta_{03}.
\end{array}$$

Transformation δ.

L'une des deux transformations linéaires est

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & \alpha_2 & 0 \\
0 & \alpha_0 & 0 & \alpha_2 \\
D\alpha_2 & 0 & \alpha_0 & 0 \\
0 & D\alpha_2 & 0 & \alpha_0
\end{vmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \alpha_0^2 - D\alpha_2^2 = 1, \qquad \left.\begin{array}{l}\alpha_0 \equiv 1 \\ \alpha_2 \equiv 0\end{array}\right\} \qquad (\text{mod } 2),$$

d'où

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad \omega' = 2D\alpha_0\alpha_2 + 2\alpha_0\alpha_2 + 4D\alpha_2^2 \equiv 0 \qquad (\text{mod } 8).$$

On obtient le Tableau suivant :

$$\begin{array}{ll}
\vartheta'_5 = \varepsilon_4\vartheta_5, & \vartheta'_{14} = \varepsilon_4\vartheta_{14}, \\
\vartheta'_{01} = \varepsilon_4\vartheta_{01}, & \vartheta'_{12} = \varepsilon_4\vartheta_{12}, \\
\vartheta'_4 = \varepsilon_4\vartheta_4, & \vartheta'_{03} = \varepsilon_4\vartheta_{03}, \\
\vartheta'_{23} = \varepsilon_4\vartheta_{23}, & \vartheta'_{34} = \varepsilon_4\vartheta_{34}, \\
\vartheta'_0 = \varepsilon_4\vartheta_0, & \vartheta'_2 = \varepsilon_4\vartheta_2.
\end{array}$$

Si $D \equiv 0$ (mod 2), il s'introduit en outre, dans le second membre, un facteur $e^{i\pi\frac{3\alpha_0\alpha_2}{2}}$ qui est égal à $+1$ si $\alpha_2 \equiv 0$, -1 si $\alpha_2 \not\equiv 0$ (mod 4). Nous réservons également la détermination de la constante ε_4.

Transformation ε.

L'une des deux transformations est

$$\begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{vmatrix},$$

d'où

$$a = d, \qquad b = 0, \qquad \omega' = 0,$$

$$g'_1 = + g_1,$$
$$g'_2 = - g_2,$$
$$h'_2 = - h_2,$$
$$h'_1 = + h_1.$$

Si l'on détermine la constante $\mathfrak{C}_5$ comme plus haut, on trouve $\mathfrak{C}_5 = +1$ et l'on trouve le Tableau

$$\begin{array}{ll} \vartheta'_5 = \vartheta_5, & \vartheta'_{14} = \vartheta_{14}, \\ \vartheta'_{01} = \vartheta_{01}, & \vartheta'_{12} = \vartheta_{12}, \\ \vartheta'_4 = \vartheta_4, & \vartheta'_{03} = \vartheta_{03}, \\ \vartheta'_{23} = \vartheta_{23}, & \vartheta'_{34} = \vartheta_{34}, \\ \vartheta'_0 = \vartheta_0, & \vartheta'_2 = \vartheta_2. \end{array}$$

42. Il resterait maintenant, pour compléter ce que nous venons de dire, à déterminer les constantes $\mathfrak{C}_2$ et $\mathfrak{C}_4$. Remarquons toutefois que, les fonctions ϑ n'intervenant que par leurs rapports dans ce qui va suivre, les valeurs de ces constantes ne nous sont d'aucune utilité.

Pourtant, nous avons appliqué à cette détermination une méthode bien connue, donnée jadis par M. Hermite dans le *Journal de Liouville* (année 1858), pour les fonctions ϑ à un seul argument et étendue aux fonctions ϑ à p arguments par M. Weber (¹).

Nous n'avons rien trouvé de particulièrement remarquable. On peut vérifier les résultats en cherchant, par une méthode donnée par M. Krause dans son Livre *Sur la transformation des fonctions hyperelliptiques du*

(¹) WEBER, *Journal de Crelle*, t. 74.

premier ordre, le carré de ces constantes. On trouve

$$\mathfrak{C}_2^2 = \frac{1}{1 + \tau'_{11}},$$

$$\mathfrak{C}_4^2 = \frac{1}{\mathrm{D}\alpha_2^2 + 2\alpha_0\alpha_2\tau'_{12} + \alpha_0^2} = \frac{1}{c\tau_{12} - a}.$$

Nous avons résumé dans deux Tableaux à double entrée l'effet produit sur les dix fonctions ϑ paires à arguments par les substitutions fondamentales du groupe. Le premier Tableau est relatif à $\mathrm{D} \not\equiv 1 \pmod 2$, le second à $\mathrm{D} \equiv 0 \pmod 2$. Dans ces Tableaux, l'entrée verticale est relative aux substitutions, l'entrée horizontale aux fonctions ϑ; nous n'y avons désigné les fonctions ϑ que par leurs indices.

43. Ces Tableaux nous montrent immédiatement que les fonctions ϑ se séparent en deux groupes, les fonctions de chaque groupe ne faisant que se permuter, à des constantes près, par les substitutions α, β, γ, δ.

Quand $\mathrm{D} \equiv 1 \pmod 2$, ces groupements sont

$$(\vartheta_5, \vartheta_2, \vartheta_{03}, \vartheta_{14}) \quad \text{et} \quad (\vartheta_4, \vartheta_{01}, \vartheta_{23}, \vartheta_{12}, \vartheta_{34}, \vartheta_0).$$

Quand $\mathrm{D} \equiv 0 \pmod 2$, ce sont

$$(\vartheta_5, \vartheta_{01}, \vartheta_4, \vartheta_{23}) \quad \text{et} \quad (\vartheta_0, \vartheta_{14}, \vartheta_{12}, \vartheta_{03}, \vartheta_{34}, \vartheta_2).$$

Les groupements

$$(\vartheta_5, \vartheta_2, \vartheta_{03}, \vartheta_{14}) \quad \text{et} \quad (\vartheta_5, \vartheta_{01}, \vartheta_4, \vartheta_{23})$$

sont des groupements connus dans la théorie des fonctions ϑ.

Il n'y a pas de relation linéaire entre les quatre fonctions ϑ d'un même groupe et le carré de toute fonction ϑ peut s'exprimer linéairement en fonction des carrés des quatre fonctions de chacun de ces groupements.

Les groupements de cette nature, qui sont au nombre de soixante dans la théorie générale, portent le nom de *quadruplets pairs*. Ce sont aussi les fonctions ϑ contenues dans de tels groupements qui donnent lieu à la célèbre relation biquadratique de Göpel.

$D \not\equiv 1 \pmod 2$.

SUBSTITUTION.	5.	01.	4.	23.	0.	14.	12.	03.	34.	2.	CONST.
α...........	5	01	23	4	12	03	0	14	34	2	1
β...........	2	34	$-e^{\frac{i\pi}{4}D}\,23$	$-e^{\frac{i\pi}{4}D}\,4$	$e^{\frac{i\pi}{4}}\,12$	$-e^{\frac{i\pi}{4}(D+1)}\,14$	$e^{\frac{i\pi}{4}}\,0$	$-e^{\frac{i\pi}{4}(D+1)}\,03$	01	5	Θ_2
γ...........	5	4	01	23	0	14	34	2	12	03	1
δ...........	5	01	4	23	0	14	12	03	34	2	Θ_4
ε...........	5	01	4	23	0	14	12	03	34	2	1

$D \equiv 0 \pmod 2$.

SUBSTITUTION.	5.	01.	4.	23.	0.	14.	12.	03.	34.	2.	CONST.
α...........	5	01	23	4	12	03	0	14	34	2	1
β...........	01	5	$e^{\frac{i\pi}{4}D}\,23$	$e^{\frac{i\pi}{4}D}\,4$	$e^{\frac{i\pi}{4}}\,0$	$-e^{-\frac{i\pi}{4}(D-1)}\,14$	$e^{\frac{i\pi}{4}}\,12$	$-e^{-\frac{i\pi}{4}(D-1)}\,03$	2	34	Θ_2
γ...........	5	4	01	23	0	14	34	2	12	03	1
δ...........	5	01	4	23	0	14	12	03	34	2	$\pm\Theta_4$
ε...........	5	01	4	23	0	14	12	03	34	2	1

14. Ces Tableaux nous permettent également de former autant de fonctions invariables par les substitutions du groupe que nous le désirons.

Remarquons d'abord que les exponentielles qui interviennent comme facteurs dans les fonctions ϑ sont toutes des racines huitièmes de l'unité.

Il en résulte que toute fonction symétrique des puissances huitièmes des fonctions ϑ contenues soit dans le premier groupement, soit dans le second, soit dans les deux groupements, se reproduit à une constante près, qui est le produit $\mathcal{E}_2^{8p}\,\mathcal{E}_4^{8q}$ élevé à la puissance marquée par le degré de la fonction symétrique.

En conséquence :

Si l'on prend deux pareilles fonctions symétriques, si on les élève à des puissances convenables et si l'on en prend le rapport, les constantes disparaîtront et l'on obtiendra une fonction qui sera invariable par toutes les substitutions du groupe.

Telles sont, par exemple, les fonctions

$$\left.\begin{array}{c}
\dfrac{(\vartheta_5^8+\vartheta_2^8+\vartheta_{03}^8+\vartheta_{14}^8)^2}{\vartheta_5^8\vartheta_2^8+\vartheta_5^8\vartheta_{03}^8+\vartheta_5^8\vartheta_{14}^8+\vartheta_2^8\vartheta_{03}^8+\vartheta_2^8\vartheta_{14}^8+\vartheta_{03}^8\vartheta_{14}^8}\\[2ex]
\dfrac{(\vartheta_{01}^8+\vartheta_{34}^8+\vartheta_4^8+\vartheta_{12}^8+\vartheta_{23}^8+\vartheta_0^8)^6}{\vartheta_{01}^8\vartheta_{34}^8\vartheta_4^8\vartheta_{12}^8\vartheta_{23}^8\vartheta_0^8}\\[2ex]
\dfrac{\vartheta_5^8+\vartheta_2^8+\vartheta_{03}^8+\vartheta_{14}^8}{\vartheta_{01}^8+\vartheta_{34}^8+\vartheta_4^8+\vartheta_{12}^8+\vartheta_{23}^8+\vartheta_0^8}
\end{array}\right\}\quad D\equiv 1 \pmod 2.$$

Voici un cas où ce procédé se simplifie et l'on obtient une fonction remarquable du groupe.

Posons

$$\Phi=\vartheta_5\vartheta_2\vartheta_{03}\vartheta_{14},$$

$$\Psi=\vartheta_4\vartheta_{01}\vartheta_{23}\vartheta_{12}\vartheta_{34}\vartheta_0.$$

La substitution α....... les reproduit

» β....... les multiplie respectivement par $\pm\mathcal{E}_2^4$, $\pm\mathcal{E}_2^6$

» γ....... les reproduit

» δ....... les multiplie respectivement par $\mathcal{E}_4^4$, $\mathcal{E}_4^6$

» ε....... les reproduit.

Donc, une substitution quelconque du groupe les multiplie respectivement par

$$\pm\,\mathcal{E}_2^{4p}\mathcal{E}_4^{4q},\qquad \pm\,\mathcal{E}_2^{6p}\mathcal{E}_4^{6q}.$$

Donc, la fonction

$$\frac{\Phi^6}{\Psi^4}$$

est une fonction du groupe.

45. Comme autres fonctions particulières, considérons les modules; d'abord un système de modules de Borchardt ([1]).

Posons

$$\sqrt{x_1} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_5}, \qquad \sqrt{x_2} = \frac{\vartheta_{03}}{\vartheta_5}, \qquad \sqrt{x_3} = \frac{\vartheta_{14}}{\vartheta_5},$$

et supposons par exemple $D \equiv 1 \pmod 2$.

On voit, sans qu'il soit utile d'insister, en se reportant aux Tableaux donnés plus haut, que les cinq substitutions

$$\alpha, \quad \beta^2, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon$$

ne font que permuter ou changer le signe de ces trois modules. Donc, le sous-groupe ayant pour substitutions fondamentales

$$\alpha, \quad \beta^4, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \varepsilon$$

laisse invariable le système considéré des modules de Borchardt.

46. Si nous recherchons quelles sont les substitutions de notre groupe qui laissent invariables les modules de Richelot, il suffit de considérer un seul système de tels modules, tous les autres modules s'exprimant rationnellement à l'aide des premiers. Prenons, par exemple, les modules $\varkappa$, λ, μ définis par les formules

$$\varkappa = \frac{\vartheta_{23}\vartheta_{01}}{\vartheta_4\vartheta_5}, \qquad \lambda = \frac{\vartheta_2\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}\vartheta_4}, \qquad \mu = \frac{\vartheta_2\vartheta_{01}}{\vartheta_5\vartheta_{34}},$$

les fonctions ϑ qui y entrent étant supposées à arguments nuls.

En désignant par θ les fonctions ϑ transformées par une quelconque des substitutions cherchées, on a nécessairement

$$\frac{\vartheta_{23}\vartheta_{01}}{\vartheta_4\vartheta_5} = \frac{\theta_{23}\theta_{01}}{\theta_4\theta_5}, \qquad \frac{\vartheta_2\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}\vartheta_4} = \frac{\theta_2\theta_{23}}{\theta_{34}\theta_4}, \qquad \frac{\vartheta_2\vartheta_{01}}{\vartheta_5\vartheta_{34}} = \frac{\theta_2\theta_{01}}{\theta_5\theta_{34}},$$

([1]) BORCHARDT, *Sur le choix des modules dans les intégrales hyperelliptiques* (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII; 1879).

d'où l'on déduit sans peine

$$\frac{\vartheta_{01}^2}{\vartheta_5^2} = \frac{\theta_{01}^2}{\theta_5^2}, \qquad \frac{\vartheta_{23}^2}{\vartheta_4^2} = \frac{\theta_{23}^2}{\theta_4^2}, \qquad \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_{34}^2} = \frac{\theta_2^2}{\theta_{34}^2},$$

ce qui montre que toute substitution cherchée doit, avant tout, reproduire les caractéristiques

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

correspondant aux fonctions ϑ,

$$\vartheta_5, \quad \vartheta_{23}, \quad \vartheta_4, \quad \vartheta_{01}, \quad \vartheta_2, \quad \vartheta_{34}.$$

Développons ces conditions.

On sait que les éléments de la caractéristique transformée $\begin{bmatrix} g'_1 & g'_2 \\ h'_1 & h'_2 \end{bmatrix}$ en fonction des éléments de l'ancienne caractéristique $\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{bmatrix}$ sont donnés par les formules

$$\begin{aligned} g'_1 &= g_1 a_0 + g_2 a_1 + h_2 a_2 + h_1 a_3 + a & \text{où} \quad a &= a_0 a_3 + a_1 a_2, \\ g'_2 &= g_1 b_0 + g_2 b_1 + h_2 b_2 + h_1 b_3 + b & b &= b_0 b_3 + b_1 b_2, \\ h'_2 &= g_1 c_0 + g_2 c_1 + h_2 c_2 + h_1 c_3 + c & c &= c_0 c_3 + c_1 c_2, \\ h'_1 &= g_1 d_0 + g_2 d_1 + h_2 d_2 + h_1 d_3 + d & d &= d_0 d_3 + d_1 d_2; \end{aligned}$$

en exprimant les conditions trouvées plus haut, on a

$$\begin{array}{lllll} a \equiv 0, & a_0 + a_1 + a \equiv 1, & a_1 + a \equiv 0, & a_0 + a \equiv 1, & a_2 + a \equiv 0, \\ b \equiv 0, & b_0 + b_1 + b \equiv 1, & b_1 + b \equiv 1, & b_0 + b \equiv 0, & b_2 + b \equiv 0, \\ c \equiv 0, & c_0 + c_1 + c \equiv 0, & c_1 + c \equiv 0, & c_0 + c \equiv 0, & c_2 + c \equiv 1, \\ d \equiv 0, & d_0 + d_1 + d \equiv 0, & d_1 + d \equiv 0, & d_0 + d \equiv 0, & d_2 + d \equiv 0, \end{array}$$

$$\begin{aligned} a_0 + a_2 + a &\equiv 1, \\ b_0 + b_2 + b &\equiv 0, \\ c_0 + c_2 + c &\equiv 1, \\ d_0 + d_2 + d &\equiv 0, \end{aligned}$$

toutes ces congruences étant prises selon le mod 2. On en tire immédiatement

$$\begin{array}{llll} a_0 \equiv 1, & a_1 \equiv 0, & a_2 \equiv 0, & a_3 \equiv 0, \\ b_0 \equiv 0, & b_1 \equiv 1, & b_2 \equiv 0, & b_3 \equiv 0, 1, \\ c_0 \equiv 0, & c_1 \equiv 0, & c_2 \equiv 1, & c_3 \equiv 0, 1, \\ d_0 \equiv 0, & d_1 \equiv 0, & d_2 \equiv 0, & d_3 \equiv 0, 1. \end{array}$$

De plus, comme les substitutions doivent appartenir à la classe de celles que nous étudions, nous avons

$$\begin{aligned} c_0 &\equiv \mathrm{D}\,a_2, & d_0 &\equiv \mathrm{D}\,b_2, \\ c_1 &\equiv \mathrm{D}\,a_3, & d_1 &\equiv \mathrm{D}\,b_3, \\ c_2 &\equiv a_0, & d_2 &\equiv b_0, \\ c_3 &\equiv a_1, & d_3 &\equiv b_1, \end{aligned}$$

et, par suite, nous avons, soit

$$(\mathrm{I})\qquad \left|\begin{matrix} a_0\equiv 1 & a_1\equiv 0 & a_2\equiv 0 & a_3\equiv 0 \\ b_0\equiv 0 & b_1\equiv 1 & b_2\equiv 0 & b_3\equiv 0 \\ c_0\equiv 0 & c_1\equiv 0 & c_2\equiv 1 & c_3\equiv 0 \\ d_0\equiv 0 & d_1\equiv 0 & d_2\equiv 0 & d_3\equiv 1 \end{matrix}\right| \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D}\ \text{quelconque},$$

soit

$$(\mathrm{II})\qquad \left|\begin{matrix} a_0\equiv 1 & a_1\equiv 0 & a_2\equiv 0 & a_3\equiv 0 \\ b_0\equiv 0 & b_1\equiv 1 & b_2\equiv 0 & b_3\equiv 1 \\ c_0\equiv 0 & c_1\equiv 0 & c_2\equiv 1 & c_3\equiv 0 \\ d_0\equiv 0 & d_1\equiv 0 & d_2\equiv 0 & d_3\equiv 1 \end{matrix}\right| \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D}\ \text{pair}.$$

Remarquons, en outre, que les conditions

$$\begin{aligned} (ab)_{01} - \mathrm{D}\,(ab)_{23} &= \pm 1, \\ (ab)_{12} + (ab)_{03} &= 0 \end{aligned}$$

doivent être satisfaites. Or, dans les substitutions (II), la seconde condition ne peut être satisfaite. On doit donc rejeter les substitutions de ce type.

Pour savoir si les conditions trouvées (I) sont suffisantes, il suffit d'examiner ce que deviennent $\varkappa$, λ, μ quand on leur applique une telle substitution.

On sait par la théorie de la transformation linéaire que chaque fonction $\mathfrak{I}$ se reproduit, multipliée par un facteur de la forme

$$\mathfrak{S}\, e^{-\frac{i\pi}{4}\omega'},$$

ω' étant un nombre entier dont l'expression générale a été donnée au début de cette Partie; $\mathfrak{S}$ une constante commune à toutes les fonctions $\mathfrak{I}$ et que, par suite, on peut laisser de côté.

En calculant les facteurs qui s'introduisent, de ce chef, dans les nouvelles expressions de $\varkappa$, λ, μ, on trouve respectivement, en n'écrivant que le résidu de leur exposant suivant le mod 8,

$$+ i\pi D \frac{a_0 b_2 - a_2 b_1}{2},$$

$$+ i\pi D \frac{a_0 b_2 - a_2 b_1}{2},$$

$$+ i\pi D \frac{b_2}{2},$$

si D est pair, $\varkappa$, λ, μ se reproduisent; donc, les conditions (I) caractérisent entièrement, dans ce cas, le sous-groupe qui laisse les modules de Richelot invariables.

Si D est impair, pour que $\varkappa$, λ, μ soient invariables, il faut que l'on ait en plus

$$a_2 \equiv 0, \qquad b_2 \equiv 0 \qquad (\bmod 4).$$

De plus, ces deux classes de substitutions forment des groupes.

47. On peut également voir ce que deviennent, par les substitutions du groupe, les invariants de la forme binaire du sixième ordre qui intervient en dénominateur dans les intégrales de notre système de fonctions hyperelliptiques. On déduit de cette étude trois nouvelles fonctions particulières du groupe, qui s'expriment ainsi au moyen de ces invariants.

Fonctions du groupe en général.

48. Mais arrivons aux fonctions du groupe, considérées en général, et en suivant la méthode de formation indiquée par M. Picard dans son Mémoire *Sur la théorie des fonctions hyperabéliennes.*

Il sera commode, dans ce qui va suivre, d'avoir à la place des deux demi-plans positifs pour ξ et η deux cercles c et c' décrits de l'origine comme centre avec des rayons égaux à l'unité, c dans le plan des ξ, c' dans le plan des η. A cet effet, effectuons sur toutes nos substitutions la substitution suivante

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{array}{c||c} \xi & \dfrac{i}{2}\,\dfrac{\xi_1 + i}{\xi_1 - i}, \\[2ex] \eta & \dfrac{i}{2}\,\dfrac{\eta_1 + i}{\eta_1 - i}. \end{array}$$

Comme son déterminant est égal à 1, les déterminants

$$ad - bc, \quad lq - mp$$

resteront égaux à 1 et les conditions $\xi'' > 0$, $\eta'' > 0$ seront remplacées par les suivantes

$$\xi_1'^2 + \xi_1''^2 - 1 < 0 \qquad \text{et} \qquad \eta_1'^2 + \eta_1''^2 - 1 < 0,$$

c'est-à-dire que les points ξ et η devront être à l'intérieur des cercles désignés par c et c'.

Les cinq substitutions fondamentales deviennent

$$\mathrm{T}^{-1}\alpha\mathrm{T} = \left(\frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i},\ \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i};\ \frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i}+1,\ \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i}-1\right),$$

$$\mathrm{T}^{-1}\beta\mathrm{T} = \left(\frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i},\ \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i};\ \frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i}-\sqrt{\mathrm{D}},\ \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i}-\sqrt{\mathrm{D}}\right),$$

$$\mathrm{T}^{-1}\gamma\mathrm{T} = \left(\frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i},\ \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i};\ -\frac{1}{\frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i}},\ -\frac{1}{\frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i}}\right),$$

$$\mathrm{T}^{-1}\delta\mathrm{T} = \left(\frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i},\ \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i};\ h_0\frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i},\ h\frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i}\right),$$

$$\mathrm{T}^{-1}\varepsilon\mathrm{T} = \left(\frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i},\ \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i};\ \frac{i}{2}\frac{\eta_1+i}{\eta_1-i},\ \frac{i}{2}\frac{\xi_1+i}{\xi_1-i}\right),$$

où l'on a posé

$$h_0 = a - c\sqrt{\mathrm{D}}, \qquad h = a + c\sqrt{\mathrm{D}}.$$

49. Cela étant, considérons, avec M. Picard, une fonction de deux variables

$$\mathrm{R}(\xi_1, \eta_1),$$

rationnelle et holomorphe, tant que ξ et η sont à l'intérieur ou sur la circonférence des cercles c et c'.

Formons, pour toutes les substitutions de notre groupe qui sont du type (A), l'expression

$$\mathrm{R}\left(\frac{a\xi_1+b}{c\xi_1+d},\ \frac{a'\eta_1+b'}{c'\eta_1+d'}\right)(c\xi_1+d)^{-2m}(c'\eta_1+d')^{-2m},$$

qui peut s'écrire

$$\mathrm{R}[f(\xi_1), \mathrm{F}(\eta_1)]\left[\frac{\mathrm{D}(f, \mathrm{F})}{\mathrm{D}(\xi_1, \eta_1)}\right]^m.$$

Formons de même, pour les substitutions du type (B), l'expression

$$\mathrm{R}\left(\frac{\alpha'\eta_1+\beta'}{\gamma'\eta_1+\delta'},\ \frac{\alpha\xi_1+\beta}{\gamma\xi_1+\delta}\right)(\gamma\eta_1+\delta)^{-2m}(\gamma'\xi_1+\delta')^{-2m},$$

qui peut s'écrire

$$\mathrm{R}[\mathrm{F}(\eta_1), f(\xi_1)]\left[\frac{\mathrm{D}(\mathrm{F}, f)}{\mathrm{D}(\xi, \eta)}\right]^m.$$

Dans ces expressions, m désigne un nombre entier supérieur à l'unité. Faisons la somme de toutes ces expressions pour les substitutions du groupe. Nous obtenons une série

$$\sum \mathrm{R}(f, \mathrm{F})\left[\frac{\mathrm{D}(f, \mathrm{F})}{\mathrm{D}(\xi_1, \eta_1)}\right]^m + \sum \mathrm{R}(\mathrm{F}, f)\left[\frac{\mathrm{D}(\mathrm{F}, f)}{\mathrm{D}(\xi_1, \eta_1)}\right]^m.$$

Nous allons montrer qu'elle est absolument convergente pour les valeurs de ξ_1 et η_1 situées à l'intérieur des cercles c et c'.

Commençons par remarquer qu'on peut trouver, en vertu des hypothèses faites sur $\mathrm{R}(\xi_1, \eta_1)$, un nombre positif M, tel que l'on ait, quelle que soit la substitution $(\xi_1, \eta_1; f, \mathrm{F})$,

$$|\mathrm{R}[f(\xi_1), \mathrm{F}(\eta_1)]| < \mathrm{M}$$

et aussi

$$|\mathrm{R}[\mathrm{F}(\eta_1), f(\xi_1)]| < \mathrm{M}.$$

Il en résulte que les modules des termes de la série considérée sont respectivement inférieurs à

$$\mathrm{M}\,|(c\xi_1 + d)^{-2m}(c'\eta_1 + d')^{-2m}|,$$
$$\mathrm{M}\,|(\gamma\eta_1 + \delta)^{-2m}(\gamma'\xi_1 + \delta')^{-2m}|,$$

et que, pour établir la convergence de la série considérée, il suffit de montrer que la suivante

$$\sum |(c\xi_1 + d)^{-2m}(c'\eta_1 + d')^{-2m}| + \sum |(\gamma\eta_1 + \delta)^{-2m}(\gamma'\xi_1 + \delta')^{-2m}|$$

est convergente.

A cet effet, considérons un système de valeurs (ξ, η), ξ étant à l'intérieur de c, η à l'intérieur de c'.

Puisque le groupe est discontinu, on peut considérer, autour de (ξ, η), un domaine δ assez petit pour que tous les domaines transformés de δ par les substitutions du groupe n'aient aucun point commun entre eux et avec δ.

Posons alors

$$\xi_1 = \xi'_1 + i\xi''_1, \qquad \eta_1 = \eta'_1 + \eta''_1,$$

et envisageons l'intégrale quadruple

$$\int\int\int\int d\xi_1' \, d\xi_1'' \, d\eta_1' \, d\eta_1''$$

étendue à chacun de ces domaines transformés de δ.

La somme de ces intégrales est finie, car ces intégrales sont toutes positives comme exprimant des produits d'aires et, en outre, leur somme est moindre que le produit des aires des deux cercles c et c'.

Or, comme chacun des domaines correspond au domaine δ par une des substitutions du groupe, on peut n'avoir, comme somme de toutes ces intégrales, qu'une intégrale étendue au seul domaine δ. On trouve ainsi

$$\int\int\int\int_{(\delta)} \Big\{ \sum [\mathfrak{M}(c\xi_1 + d)(c'\eta_1 + d')]^{-2} + \sum [\mathfrak{M}(\gamma\eta_1 + \delta)(\gamma'\xi_1 + \delta')]^{-2} \Big\} d\xi_1' \, d\xi_1'' \, d\eta_1' \, d\eta_1'';$$

comme cette intégrale est comprise entre des limites finies, on en conclut que la série considérée est convergente pour $m \geqq 2$ et que la convergence est absolue.

50. La fonction Θ_1, dont nous venons de démontrer l'existence, est holomorphe pour toutes les valeurs des variables ξ_1 et η_1 comprises à l'intérieur des cercles c et c'. De plus, si l'on effectue sur les variables ξ_1, η_1 une substitution quelconque du groupe, chaque terme de la série se change en un autre terme de la même série, multiplié par

$$(c\xi_1 + d)^{2m}(c'\eta_1 + d)^{2m}$$

ou

$$(\gamma\eta_1 + \delta)^{2m}(\gamma'\xi_1 + \delta')^{2m},$$

suivant que la substitution opérée est du type (A) ou du type (B). On a donc, suivant les cas :

$$\Theta_1\left(\frac{a\xi_1 + b}{c\xi_1 + d}, \frac{a'\eta_1 + b'}{c'\eta_1 + d'}\right) = (c\xi_1 + d)^{2m}(c'\eta_1 + d)^{2m}\Theta_1(\xi, \eta),$$

$$\Theta_1\left(\frac{\alpha\eta_1 + \beta}{\gamma\eta_1 + \delta}, \frac{\alpha'\xi_1 + \beta'}{\gamma'\xi_1 + \delta'}\right) = (\gamma\eta_1 + \delta)^{2m}(\gamma'\xi_1 + \delta')^{2m}\Theta_1(\xi, \eta).$$

51. On pourrait craindre que les fonctions Θ_1 fussent identiquement nulles. C'est un point que M. Picard a examiné en détail dans le cas ana-

logue des fonctions hyperfuchsiennes (*Act. math.*, t. V) et sa méthode s'applique également au cas présent.

Considérons, en effet, le point $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$ et supposons, en premier lieu, qu'il n'y ait que la substitution unité qui transforme ce point en lui-même. Nous pourrons construire, autour du point ($\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$), un domaine assez petit pour qu'à tout point de ce domaine corresponde des points (ξ'_1, η'_1), tels qu'on ait

$$(\eta'_1 - \eta'_{10})(\xi'_{10} - \xi'_1) < (\eta_1 - \eta_{10})(\xi_{10} - \xi_1),$$

en posant

$$\xi'_1 = \frac{a\xi_1 + b}{c\xi_1 + d}, \qquad \eta' = \frac{a'\eta_1 + b'}{c'\eta_1 + d'};$$

comme on a

$$(\eta'_1 - \eta'_{10})(\xi'_{10} - \xi'_1) = \frac{1}{|(c\xi_1 + d)^2(c'\eta_1 + d')^2|}(\eta_1 - \eta_{10})(\xi_{10} - \xi_1),$$

on en conclura

$$|(c\xi_1 + d)^2(c'\eta_1 + d')^2| > 1,$$

et la série définissant Θ_1 pourra s'écrire

$$\begin{aligned} R(\xi_1, \eta_1) &+ \sum R(\xi'_1, \eta'_1)\frac{1}{(c\xi_1 + d)^{2m}(c'\eta_1 + d')^{2m}} \\ &+ \sum R(\xi'_1, \eta'_1)\frac{1}{(\gamma\eta_1 + \delta)^{2m}(\gamma'\xi_1 + \delta')^{2m}}, \end{aligned}$$

car on a une conclusion analogue pour les substitutions du type (B); les Σ de la formule précédente portant sur toutes les substitutions sauf la substitution unité. Si m est assez grand, l'expression précédente différera peu de $R(\xi, \eta)$ et ne sera donc pas identiquement nulle.

S'il y a N substitutions changeant le point ($\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$) en lui-même, la même conclusion s'impose. On peut, en effet, dans la série, mettre à part les termes correspondant à ces substitutions. On obtient

$$\sum R(\xi'_1, \eta'_1)\frac{1}{(c\xi_1 + d)^{2m}(c'\eta_1 + d')^{2m}} + \sum R(\xi'_1, \eta'_1)\frac{1}{(\gamma\eta_1 + \delta)^{2m}(\gamma'\xi_1 + \delta')^{2m}}.$$

On a

$$|dd'| = 1, \qquad |\delta\delta'| = 1,$$

et, pour $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$, ces termes deviennent

$$R(0, 0)\left[\sum \frac{1}{(dd')^{2m}} + \sum \frac{1}{(\delta\delta')^{2m}}\right],$$

quantité qui pourra toujours être considérée comme non identiquement nulle, puisque $R(o, o)$ et m sont arbitraires.

52. On peut également démontrer que, m étant suffisamment grand, on peut toujours trouver deux fonctions Θ_1 et Θ_2 dont le rapport ne soit pas constant.

A cet effet, formons l'expression

$$\Theta_1(\xi_1, \eta_1)\,\Theta'_1(\xi'_1, \eta'_1) - \Theta_1(\xi'_1, \eta'_1)\,\Theta'_1(\xi_1, \eta_1),$$

(ξ_1, η_1), (ξ'_1, η'_1) étant deux points arbitraires.

En supposant, comme tout à l'heure, que le point $(\xi_1 = o, \eta_1 = o)$ ne soit altéré que par la substitution unité, on voit que (ξ_1, η_1), (ξ'_1, η'_1) étant dans le domaine construit autour de $(\xi_1 = o, \eta_1 = o)$, on a, pour l'expression ci-dessus, une valeur peu différente de

$$R_1(\xi_1, \eta_1)\,R'_1(\xi'_1, \eta'_1) - R_1(\xi'_1, \eta'_1)\,R'_1(\xi_1, \eta_1),$$

si m est assez grand. Si donc, R_1 et R'_1 sont arbitraires, cette valeur n'est pas identiquement nulle.

On arrive à la même conclusion, si l'on suppose qu'il y ait N substitutions conservant le point $(\xi_1 = o, \eta_1 = o)$.

Enfin, en examinant de la même manière le déterminant fonctionnel de deux fonctions

$$F_1(\xi_1, \eta_1) = \frac{\Theta_1(\xi_1, \eta_1)}{\Theta'_1(\xi_1, \eta_1)}, \qquad F_2(\xi_1, \eta_1) = \frac{\Theta_2(\xi_1, \eta_1)}{\Theta'_2(\xi_1, \eta_1)},$$

on établit que toutes les fonctions F ne sont pas fonctions de l'une d'entre elles, si les fonctions rationnelles R sont arbitraires.

En résumé, nous voyons donc qu'il existe sûrement des fonctions

$$F(\xi_1, \eta_1) = \frac{\Theta_1(\xi_1, \eta_1)}{\Theta'_1(\xi_1, \eta_1)}$$

invariables par toutes les substitutions du groupe. Il suffit que Θ_1 et Θ'_1 correspondent à la même valeur du nombre entier m.

53. Exprimons la fonction Θ, au moyen des anciennes variables ξ et η. Posons

$$\frac{i}{2}\,\frac{f_j(\xi_1) + i}{f_j(\xi_1) - i} = \varphi_j(\xi_1),$$

$$\frac{i}{2}\,\frac{F_j(\eta_1) + i}{F_j(\eta_1) - i} = \Phi_j(\eta_1),$$

la substitution $[\xi_1, \eta_1, f_j(\xi_1), F_j(\eta_1)]$ étant une substitution quelconque du groupe et du type A.

On a

$$\frac{D(f_j, F_j)}{D(\xi_1, \eta_1)} = \frac{D(f_j, F_j)}{D(\varphi_j, \Phi_j)} \frac{D(\varphi_j, \Phi_j)}{D(\xi, \eta)} \frac{D(\xi, \eta)}{D(\xi_1, \eta_1)},$$

mais

$$\frac{D(f_j, F_j)}{D(\varphi_j, \Phi_j)} = \frac{1}{\left(-\varphi_j + \frac{i}{2}\right)^2 \left(-\Phi_j + \frac{i}{2}\right)^2},$$

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(\xi_1, \eta_1)} = \frac{1}{(\xi_1 - i)^2} \frac{1}{(\eta_1 - i)^2} = \left(-\xi + \frac{i}{2}\right)^2 \left(-\eta + \frac{i}{2}\right)^2,$$

et l'on aura des résultats analogues pour les substitutions du type B. Il en résulte que l'on aura

$$\Theta_1(\xi_1, \eta_1) = \left(-\xi + \frac{i}{2}\right)^{2m} \left(-\eta + \frac{i}{2}\right)^{2m} \Theta(\xi, \eta),$$

où l'on a posé

$$\Theta(\xi, \eta) = \sum R(f_j, F_j) \frac{1}{\left(-\varphi_j + \frac{i}{2}\right)^{2m} \left(-\Phi_j + \frac{i}{2}\right)^{2m}} \left[\frac{D(\varphi_j, \Phi_j)}{D(\xi, \eta)}\right]^m$$
$$+ \sum R(F_k, f_k) \frac{1}{\left(-\Phi_k + \frac{i}{2}\right)^{2m} \left(-\varphi_k + \frac{i}{2}\right)^{2m}} \left[\frac{D(\Phi_k, \varphi_k)}{D(\xi, \eta)}\right]^m.$$

$\Theta(\xi, \eta)$ est manifestement une fonction de la même nature que $\Theta_1(\xi_1, \eta_1)$ c'est-à-dire qui se reproduit, multipliée par $\left[\frac{D(\varphi_i, \Phi_i)}{D(\xi, \eta)}\right]^m$, quand on y remplace ξ et η respectivement par φ_i et Φ_i.

Comme on a, de plus,

$$\Theta(\xi, \eta) = \sum R(f_j, F_j) \left[\frac{D(f_j, F_j)}{D(\xi_1, \eta_1)}\right]^m \frac{1}{\left(-\xi + \frac{i}{2}\right)^{2m} \left(-\eta + \frac{i}{2}\right)^{2m}}$$
$$+ \sum R(F_k, f_k) \left[\frac{D(F_k, f_k)}{D(\xi_1, \eta_1)}\right]^m \frac{1}{\left(-\xi + \frac{i}{2}\right)^{2m} \left(-\eta + \frac{i}{2}\right)^{2m}}.$$

On voit que $\Theta(\xi, \eta)$ tend vers o quand ξ et η croissent sans limite, car la série est convergente, et chaque terme tend vers zéro.

54. Ainsi que nous l'avons vu, il y a trois substitutions du groupe laissant invariable le point à l'infini A du domaine fondamental. Ce sont les

substitutions

$$(\xi, \eta; \xi + 1, \quad \eta - 1),$$
$$(\xi, \eta; \xi - \sqrt{D}, \eta - \sqrt{D}),$$
$$(\xi, \eta; h_0\xi, h\eta).$$

Il en résulte que l'on doit avoir

$$\Theta(\xi + 1, \eta - 1) \qquad = \Theta(\xi, \eta),$$
$$\Theta(\xi - \sqrt{D}, \eta - \sqrt{D}) = \Theta(\xi, \eta),$$
$$\Theta(h_0\xi, h\eta) \qquad = \Theta(\xi, \eta).$$

Prenant comme variables $\xi + \eta = u$, $\xi - \eta = v$, les trois substitutions relatives au sommet A deviennent

$$(u, v; u, v + 2),$$
$$(u, v; u - 2\sqrt{D}, v),$$
$$(u, v; au - c\sqrt{D}\, v, -c\sqrt{D}\, u + av),$$

et les trois équations fonctionnelles correspondantes sont

$$\Theta(u, v) = \Theta(u, v + 2),$$
$$\Theta(u, v) = \Theta(u - 2\sqrt{D}, v),$$
$$\Theta(u, v) = \Theta(au - c\sqrt{D}\, v, -c\sqrt{D}\, u + av).$$

Rappelons de plus qu'au sommet A on a

$$\zeta_1, \eta_1 \text{ comprises entre des limites finies,}$$
$$\lim \xi_2 = \infty, \qquad \lim \eta_2 = \infty$$

et

$$\frac{\xi_2}{\eta_2} = \zeta \text{ comprise entre deux limites finies, comprenant entre elles l'unité.}$$

Il en résulte que l'on a

$$u_1 \text{ et } v_1 \text{ comprises entre des limites finies,}$$
$$\lim u_2 = \lim \eta_2(\zeta + 1) = \infty,$$
$$\lim v_2 = \lim \eta_2(\zeta - 1) = \infty.$$

Le signe de u_2 est toujours le même, mais celui de v_2 peut varier.

Il importe donc de considérer autour du point A trois régions

$$\begin{array}{ll} 1^{\circ}\ \text{région}\ldots\ldots & \zeta - 1 > \delta, \\ 2^{\circ}\ldots\ldots\ldots\ldots & \zeta - 1 < -\delta, \\ 3^{\circ}\ldots\ldots\ldots\ldots & -\delta < \zeta - 1 < \delta, \end{array}$$

δ étant une quantité positive déterminée, aussi petite que l'on veut.

Si un point variable s'approche du point A, en restant dans la première région, v_2 finit toujours par demeurer positive; en restant dans la seconde région, v_2 est toujours négative si l'on est assez voisin de A; et, si le point variable est dans la troisième région, v_2 est soit positive soit négative.

Posons

$$e^{i\pi v} = y.$$

Dans le voisinage du point A et dans la première région, comme la partie réelle de $i\pi v$ est $-\pi\eta_2(\zeta - 1)$, y tend dans ces conditions vers zéro et l'on en conclut que la fonction holomorphe Θ est développable en série convergente suivant les puissances positives de y, c'est-à-dire de $e^{i\pi v} = e^{i\pi(\xi-\eta)}$. On a donc

$$\Theta(u, v) = \Theta_0(u) + \Theta_1(u)\, e^{i\pi v} + \ldots + \Theta_n(u)\, e^{ni\pi v} + \ldots,$$

$\Theta_n(u)$ étant une fonction holomorphe en u, qui satisfait, d'après la seconde équation fonctionnelle, à la condition

$$\Theta_n(u) = \Theta_n(u - 2\sqrt{D}),$$

et comme, au voisinage du point A, le coefficient de u_2 a toujours le même signe $+1$, on en conclut, comme plus haut,

$$\Theta_n(u) = A_{0n} + A_{1n}\, e^{\frac{i\pi}{\sqrt{D}}u} + A_{2n}\, e^{\frac{2i\pi}{\sqrt{D}}u} + \ldots + A_{m,n}\, e^{\frac{mi\pi}{\sqrt{D}}u} + \ldots.$$

On a donc, en définitive, au voisinage du point A, dans la première région, un développement de la forme

$$\Theta(\xi, \eta) = \sum_{0}^{\infty}{}_{m} \sum_{0}^{\infty}{}_{n} A_{m,n}\, e^{\frac{mi\pi}{\sqrt{D}}(\xi+\eta)}\, e^{ni\pi(\xi-\eta)}, \tag{1}$$

$\sqrt{D}$ ayant sa valeur arithmétique et les coefficients $A_{m,n}$ possédant la propriété que nous allons indiquer.

Le terme général de cette série peut s'écrire

$$\mathrm{A}_{m,n}\, e^{\frac{mi\pi}{\sqrt{\mathrm{D}}}u + ni\pi v}.$$

Si nous effectuons, dans ce terme, la troisième substitution relative au point A, nous obtenons

$$\mathrm{A}_{m,n}\, e^{\frac{i\pi}{\sqrt{\mathrm{D}}}(ma - nc\mathrm{D})u + i\pi(-mc + na)v}.$$

Si nous écrivons maintenant que la troisième équation fonctionnelle est satisfaite, il faut écrire que les coefficients des mêmes puissances de e sont égales. Or, prenons le terme d'indices m et n dans le premier développement et le terme d'indices m' et n' dans le développement transformé. Pour que les puissances de e soient les mêmes, on devra avoir

$$\begin{aligned} m &= m'a - n'c\mathrm{D}, \\ n &= -m'c + n'a \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} m' &= ma + nc\mathrm{D}, \\ n' &= na + mc, \end{aligned}$$

ce qui montre qu'à un terme du second développement ne correspond un terme du premier, de même exposant de e que si l'on a entre les indices m', n' les relations

$$m'a - n'c\mathrm{D} > 0, \quad -m'c + n'a > 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{c\mathrm{D}}{a} < \frac{m'}{n'} < \frac{a}{c}.$$

Comme, d'autre part, à tout terme du premier développement correspond un terme dans le second développement, on en conclut que tout coefficient $\mathrm{A}_{m,n}$ dans lequel les indices ne satisfont pas aux inégalités

$$\frac{c\mathrm{D}}{a} < \frac{m}{n} < \frac{a}{c}$$

est nul.

Comme toute fraction de la forme

$$\frac{\lambda c\mathrm{D} + \mu a}{\lambda a + \mu c},$$

λ et μ étant des entiers positifs, est comprise entre $\frac{c\mathrm{D}}{a}$ et $\frac{a}{c}$, on s'assure qu'il y a une infinité de coefficients $A_{m,n}$ non nuls et une infinité de tels coefficients nuls et, de plus, que les plus petites valeurs de m et n pour lesquelles le coefficient correspondant n'est pas nul, sont

$$m = c\mathrm{D} \qquad \text{et} \qquad n = a;$$

par exemple, si $\mathrm{D} = 5$, on a

$$m = 72, \qquad n = 161,$$

de telle sorte que la série Θ a un facteur qui est, dans ce cas particulier de $\mathrm{D} = 5$,

$$e^{\frac{72 i\pi}{\sqrt{\mathrm{D}}}(\xi+\eta)+161 i\pi(\xi-\eta)}.$$

Dans la seconde région, des considérations tout à fait identiques nous montrent que l'on a le développement analogue,

$$\Theta(\xi, \eta) = \sum_{0}^{\infty}{}_{m} \sum_{0}^{\infty}{}_{n} A_{m,n}\, e^{\frac{m i\pi}{\sqrt{\mathrm{D}}}(\xi+\eta)} e^{-n i\pi(\xi-\eta)}, \tag{2}$$

les coefficients $A_{m,n}$ jouissant des mêmes propriétés que dans le développement (1).

55. Reste la troisième région. Dans sa *Théorie des fonctions fuchsiennes,* M. Poincaré a démontré qu'on pouvait modifier le domaine fondamental R_0 de la manière suivante : On en retranche une région S_0 et l'on ajoute, par compensation, la transformée $S_{0,p}$ de S_0 par une substitution déterminée $[z, f_p(z)]$, choisie arbitrairement dans le groupe.

Nous pouvons appliquer ici autour du point A le même procédé, en prenant pour S_0 la troisième région définie par

$$-\delta < \xi - 1 < \delta,$$

et en choisissant la substitution

$$[\xi, \eta;\ (a - c\sqrt{\mathrm{D}})^p \xi,\ (a + c\sqrt{\mathrm{D}})^p \eta],$$

de manière que la région $S_{0,p}$ n'empiète pas sur les deux premières régions définies plus haut.

La région $S_{0,p}$ est définie par les inégalités

$$(1-\delta)\left(\frac{a+c\sqrt{\mathrm{D}}}{a-c\sqrt{\mathrm{D}}}\right)^p < \xi < (1+\delta)\left(\frac{a+c\sqrt{\mathrm{D}}}{a+c\sqrt{\mathrm{D}}}\right)^p$$

ou

$$\frac{(1-\delta)(a+c\sqrt{D})^p-(a-c\sqrt{D})^p}{(a-c\sqrt{D})^p}<\zeta-1<\frac{(1+\delta)(a+c\sqrt{D})^p-(a-c\sqrt{D})^p}{(a-c\sqrt{D})^p}.$$

On voit que, si l'on choisit δ assez petit d'une part, et p assez grand d'autre part, $\zeta-1$ aura dans la région $S_{0,p}$ un signe constant, et cette région n'aura aucune partie commune avec les régions utilisées plus haut

$$\zeta-1>\delta \quad \text{et} \quad \zeta-1<-\delta.$$

Dans le cas particulier considéré plus haut où $D=5$, on a

$$(a+c\sqrt{D})^p=(9+4\sqrt{5})^{2p}=(321,992\ldots)^p,$$
$$(a-c\sqrt{D})^p=(9-4\sqrt{5})^{2p}=(\quad 0,008\ldots)^p,$$

car 9 et 4 sont les plus petites solutions de l'équation de Pell

$$x^2-5y^2=1,$$

et l'on a

$$a+c\sqrt{D}=(9+4\sqrt{5})^2, \qquad a-c\sqrt{D}=(9-4\sqrt{5})^2;$$

$S_{0,p}$ est donc définie par

$$(40249)^p-1-\delta(40249)^p<\zeta-1<(40249)^p-1+\delta(40249)^p,$$

inégalités qui montrent bien que l'on peut faire pour δ et p le choix indiqué.

On aura donc, autour de A, une région où $\zeta-1$ gardera un signe constant et dans laquelle on pourra représenter $\Theta(\xi,\eta)$ par un développement de la forme (1) ou de la forme (2).

56. Cela étant, considérons deux fonctions $\Theta(\xi,\eta)$, $\Theta'(\xi,\eta)$ correspondant à deux fonctions rationnelles R et R′ indépendantes l'une de l'autre et à un même nombre entier m.

Nous allons démontrer que, dans le domaine fondamental du groupe, elles ne peuvent avoir qu'un nombre fini de racines communes, ne formant pas un *continuum*.

Il ne peut y avoir de doutes sur cette proposition qu'au voisinage du point A où les racines pourraient peut-être se condenser en un nombre infini.

Mais considérons la première région $\zeta-1>\delta$. Pour des points (ξ,η)

situés dans cette région, on a

$$\Theta\,(\xi,\eta) = e^{\frac{pi\pi}{\sqrt{D}}(\xi+\eta)+qi\pi(\xi-\eta)}\left(A_{p,q} + A_{p_1 q_1}\, e^{\frac{p_1 \pi i}{\sqrt{D}}(\xi+\eta)+q_1 i\pi(\xi-\eta)} + \ldots\right),$$

$$\Theta'(\xi,\eta) = e^{\frac{pi\pi}{\sqrt{D}}(\xi+\eta)+qi\pi(\xi-\eta)}\left(A'_{p,q} + A'_{p'_1 q'_1}\, e^{\frac{p'_1 \pi i}{\sqrt{D}}(\xi+\eta)+q'_1 i\pi(\xi-\eta)} + \ldots\right),$$

le facteur étant le même dans les deux développements, car il ne dépend que du nombre entier D.

Ces fonctions admettent d'abord les racines communes qu'on obtient en égalant ce facteur à o. On trouve ainsi le point A. Ce facteur mis de côté, comme il ne peut y en avoir d'autres, puisque $A_{p,q}$, $A'_{p,q}$ sont des constantes différentes de zéro, les développements en série, contenus entre crochets, ne peuvent avoir qu'un nombre fini de racines communes, dans lesquelles ξ et η ont des valeurs aussi voisines qu'on veut de celles qui correspondent au point A.

Si l'on considère les développements correspondant à la seconde région ou à la région transformée de la troisième, les conclusions restent les mêmes.

57. En répétant, sans y rien changer, un raisonnement fait par M. Picard dans sa *Théorie des fonctions hyperfuchsiennes* (*A. M.*, t. V, p. 175), on voit que ce nombre fini de racines est indépendant des fonctions rationnelles R et R′ et ne dépend que du groupe considéré et du nombre m.

58. On conclut de là que *trois* quelconques des fonctions du groupe sont liées algébriquement, car les valeurs de deux de ces fonctions étant fixées, il en résulte pour la troisième un nombre limité de valeurs.

On démontre également sans peine qu'on peut exprimer rationnellement toutes les fonctions du groupe à l'aide de trois d'entre elles, liées par une relation algébrique. Former effectivement de telles relations algébriques, même dans les cas les plus particuliers, paraît un problème difficile. On voit, en effet, que les fonctions que nous considérons, les fonctions dérivées des fonctions ϑ par exemple, ne sont fonctions de deux variables que par l'intermédiaire du nombre entier D, et l'on conçoit que la présence de cet entier rende impossible, d'une manière générale, les éliminations qu'il faudrait effectuer pour obtenir la relation algébrique.

Le théorème qui précède montre, en outre, l'importance de l'étude de quelques fonctions particulières du groupe, puisqu'à l'aide d'entre elles, on peut exprimer toutes les autres.