ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

VICTOR ROUQUET

Recherche des courbes dont le lieu des centres de courbure est une courbe donnée

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2^e^ série, tome 1, n° 1 (1899), p. 79-115
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1899_2_1_1_79_0>

RECHERCHE DES COURBES

DONT

LE LIEU DES CENTRES DE COURBURE

EST UNE COURBE DONNÉE,

PAR M. VICTOR ROUQUET,

Professeur honoraire de Mathématiques spéciales au Lycée de Toulouse.

1. Le problème dont je me propose d'examiner la solution est le suivant :

Trouver une courbe (M), *connaissant le lieu* (O) *de ses centres de courbure.*

D'après cet énoncé, on doit regarder la courbe donnée (O) et la courbe cherchée (M) comme se correspondant, point par point, de telle sorte qu'au point M de (M) corresponde le point O de (O), qui est le centre de courbure de (M) en M.

J'appliquerai à la solution de ce problème les méthodes de la périmorphie curviligne en prenant la courbe donnée (O) pour courbe de référence. En conséquence, les inconnues seront les coordonnées x, y, z, par rapport au trièdre fondamental de (O) en O (1), du point M de (M) qui correspond à O. Il est clair que le problème sera résolu, si l'on parvient à déterminer x, y, z en fonction de la variable définissant individuellement les points de (O). Cette variable indépendante sera, comme d'habitude, l'arc s de (O) compté à partir d'une origine arbitraire.

Pour obtenir les équations du problème, il suffira évidemment d'exprimer : 1° que le plan normal à (M) en M passe par le point O ; 2° que la caractéristique de ce plan normal, qui est la droite polaire de (M) en M, contient aussi le point O ; 3° que cette droite polaire est perpendiculaire à OM. S'il en est ainsi, le point O sera le centre de courbure de (M) en M, et le rayon de courbure de (M), en ce point, aura pour longueur la distance OM.

(1) Ce trièdre est formé, comme on sait, par la tangente Ox à (O), par la normale principale Oy et la bi-normale Oz au même point O de la courbe.

La solution dépend, comme on le verra bientôt, d'une équation différentielle non linéaire du troisième ordre dont l'intégration, sous forme finie et explicite, paraît présenter des difficultés insurmontables, même dans les cas les plus simples. C'est aussi le résultat auquel sont arrivés les auteurs qui, à ma connaissance, ont traité la même question; savoir : J.-A. Serret (*Journal de Liouville,* t. XVIII, p. 33-40; 1853) et M. Pirondini (*Annali di Matematica,* II, t. XVII, p. 59-79). Cependant, l'examen de l'équation différentielle ou, plutôt, du système des trois équations différentielles qui y conduit permet d'établir directement quelques propriétés générales des courbes cherchées (M). C'est à cette étude qu'est consacrée la partie principale du présent travail que je termine, à l'exemple de M. Pirondini, par la discussion de cas particuliers dans lesquels certaines conditions sont imposées à la solution demandée.

I. — *Recherche des équations du problème.*

2. Les projections, sur les axes mobiles, du déplacement que subit le point M, quand O vient occuper, sur (O), la position infiniment voisine O', telle que $OO' = ds$, sont données par les formules générales que j'écrirai comme il suit :

$$\Delta \text{ de M} \begin{cases} \Delta X = A\,ds, \\ \Delta Y = B\,ds, \\ \Delta Z = C\,ds, \end{cases}$$

en posant, pour abréger,

$$A = \frac{dx}{ds} + \left(1 - \frac{y}{\rho}\right),$$

$$B = \frac{dy}{ds} + \left(\frac{x}{\rho} - \frac{z}{\tau}\right),$$

$$C = \frac{dz}{ds} + \frac{y}{\tau} \quad (^1).$$

Les cas où l'une des quantités ρ ou τ est nulle sont naturellement mis de côté, car la courbe (O) se réduit alors à un point et la courbe (M), dont le centre de courbure est un point fixe, est un cercle quelconque ayant ce point pour centre. Par contre, la méthode employée convient aux cas où l'une des courbures $\frac{1}{\rho}$ ou $\frac{1}{\tau}$ est nulle. Si la courbure $\frac{1}{\rho}$ est nulle, la courbe donnée (O) est une ligne droite, auquel cas les courbes (M) sont des cercles ayant pour axe cette droite, comme d'ailleurs, on le verra plus loin. Dans le cas où la torsion $\frac{1}{\tau}$ est nulle, la courbe

(1) *Voir* les *Leçons* de M. Darboux, t. I, p. 8 et 10.

donnée (O) est plane et l'on connaît une solution du problème formée par les développantes de (O).

Ceci posé, le plan normal à (M) en M a pour équation

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

et, puisqu'il doit passer par l'origine, on a cette première relation

$$Ax+By+Cz=0,$$

qui, par la substitution des valeurs de A, B, C, devient

$$(1)\qquad x\frac{dx}{ds}+y\frac{dy}{ds}+z\frac{dz}{ds}+x=0.$$

En la supposant satisfaite, l'équation du plan normal prend la forme

$$AX+BY+CZ=0.$$

La caractéristique du plan normal, ou la droite polaire de (M) en M, est la droite d'intersection du plan représenté par l'équation précédente et de celui qui a pour équation

$$A\,\delta X+B\,\delta Y+C\,\delta Z+X\,dA+Y\,dB+Z\,dC=0.$$

En remplaçant par leurs valeurs, dans cette dernière, les variations δX, δY, δZ que subissent les coordonnées d'un point fixe arbitraire (X, Y, Z) quand on passe d'un trièdre au trièdre infiniment voisin, on trouve [1]

$$A\left(\frac{Y}{\rho}-1\right)+B\left(\frac{Z}{\tau}-\frac{X}{\rho}\right)-\frac{CY}{\tau}+X\frac{dA}{ds}+Y\frac{dB}{ds}+Z\frac{dC}{ds}=0,$$

pour la seconde équation de la droite polaire. La condition qui exprime que cette droite passe par O est donc

$$A=0$$

ou

$$(2)\qquad \frac{dx}{ds}+\left(1-\frac{y}{\rho}\right)=0.$$

Cette équation est la seconde équation du problème. Si elle est vérifiée, les

---

[1] Ces valeurs sont, d'après les formules donnant ΔX, ΔY, ΔZ,

$$\delta X=\left(\frac{X}{\rho}-1\right)ds,\qquad \delta Y=\left(\frac{Z}{\tau}-\frac{X}{\rho}\right)ds,\qquad \delta Z=-\frac{Y}{\tau}\,ds.$$

équations de la droite polaire OK sont

$$BY + CZ = 0,$$

$$-\frac{B}{\rho}X + \left(\frac{dB}{ds} - \frac{C}{\tau}\right)Y + \left(\frac{dC}{ds} + \frac{B}{\tau}\right)Z = 0,$$

en remarquant que l'hypothèse $A = 0$ entraîne $\frac{dA}{ds} = 0$.

Ces équations mises sous forme de rapports égaux peuvent s'écrire

$$\frac{X}{C\frac{dB}{ds} - B\frac{dC}{ds} - \frac{B^2 + C^2}{\tau}} = \frac{Y}{\frac{BC}{\rho}} = -\frac{Z}{\frac{B^2}{\rho}}.$$

Il reste maintenant à exprimer que la droite représentée par les équations précédentes est perpendiculaire à la droite OM dont les équations sont

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}.$$

La troisième condition est donc exprimée par l'équation

$$x\left(C\frac{dB}{ds} - B\frac{dC}{ds} - \frac{B^2 + C^2}{\tau}\right) + \frac{B}{\rho}(Cy - Bz) = 0, \tag{3}$$

dans laquelle on devra remplacer B et C par leurs valeurs.

Avant d'opérer la substitution, il importe d'observer que les trois relations obtenues admettent le système de solutions

$$A = B = C = 0,$$

qui correspondent au cas où le point M est fixe, puisque ces équations signifient que le déplacement de M est nul pour tout déplacement de O, quand ce dernier point parcourt (O). On supprimera cette solution, évidemment étrangère au problème proposé, en dirigeant, comme il suit, la substitution dont on vient de parler.

3. Je remarque que la condition $A = 0$ réduit la seconde à

$$By + Cz = 0.$$

On y satisfait en posant

$$\left\{\begin{aligned} B &= \mu z, \\ C &= -\mu y, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

μ désignant une nouvelle inconnue, à condition toutefois que les valeurs de y et de z ne soient pas nulles simultanément.

Portant ces valeurs et celles de leurs dérivées dans (3), puis supprimant le facteur μ^2, on met cette équation sous la forme

$$x\left(z\frac{dy}{ds} - y\frac{dz}{ds} - \frac{y^2+z^2}{\tau}\right) = \frac{z}{\rho}(y^2+z^2), \tag{5}$$

qui peut s'écrire

$$\frac{z\dfrac{dy}{ds} - y\dfrac{dz}{ds}}{y^2+z^2} = \frac{1}{\tau} + \frac{z}{\rho x}, \tag{5)'$$

ou encore

$$\frac{d}{ds}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{z}\right) = \frac{1}{\tau} + \frac{z}{\rho x}, \tag{5)''$$

en réservant les cas, examinés plus loin, où l'une des quantités x ou y^2+z^2 est nulle. La division par μ^2 a supprimé la solution $\mu = 0$ qui, avec $A = 0$, fournit les points fixes de l'espace.

En résumé, les équations du problème sont celles du système suivant :

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} x\dfrac{dx}{ds} + y\dfrac{dy}{ds} + z\dfrac{dz}{ds} + x = 0, \\[2mm] \dfrac{dx}{ds} + \left(1 - \dfrac{y}{\rho}\right) = 0, \\[2mm] \dfrac{z\dfrac{dy}{ds} - y\dfrac{dz}{ds}}{y^2+z^2} = \dfrac{1}{\tau} + \dfrac{z}{\rho x}, \end{cases}$$

cette dernière pouvant aussi s'écrire

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\tau} + \frac{z}{\rho x}, \tag{5)'''$$

après avoir posé

$$\frac{y}{z} = \operatorname{tang}\varphi \quad (^1).$$

Si ces équations sont satisfaites, les équations de la droite polaire de (M) en M, où l'on remplacera B et C par leurs valeurs et où l'on tiendra compte de la troisième équation (5)', deviendront

$$\frac{X}{\dfrac{y^2+z^2}{x}} = \frac{Y}{-y} = \frac{Z}{-z}. \tag{6}$$

---

(1) Cet angle φ est celui que M. Pirondini désigne par θ. A l'aide des équations (I) et (5)'', il serait facile de former l'équation différentielle dont φ dépend (*loc. cit.*, p. 69).

Elles conduisent à la proposition suivante, d'ailleurs connue :

Le plan normal à une courbe (M) *en l'un de ses points* M *contient la tangente au lieu des centres de courbure de* (M), *au point* O *qui correspond à* M, *d'où il suit que les tangentes aux deux courbes* (M) *et* (O), *en leurs points correspondants, sont rectangulaires.*

D'après les équations (6), la première conclusion résulte de ce que la droite polaire et le point M sont dans un même plan avec Ox, et la seconde, de la valeur nulle de A.

On trouvera enfin la valeur de l'inconnue auxiliaire μ en partant des équations (4), que l'on ajoutera membre à membre, après avoir multiplié la première par z, la seconde par $-y$.

En tenant compte ensuite de $(5)'$, on obtiendra, après des réductions faciles, la valeur suivante

$$\mu = \frac{(x^2+y^2+z^2)z}{\rho x(y^2+z^2)}. \tag{7}$$

II. — *Formation de l'équation différentielle caractéristique.*

4. Au point de vue analytique, la question est ramenée à la résolution d'un système de trois équations différentielles du premier ordre entre les trois fonctions x, y, z de la variable s.

On peut former, par élimination, l'équation différentielle du troisième ordre qui détermine, soit l'une des coordonnées x, y, z, soit l'inconnue auxiliaire μ.

Par exemple, l'équation qui définit μ s'obtient en différentiant trois fois de suite l'équation (7) et en remplaçant, à chaque opération, les dérivées $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, par leurs valeurs déduites du système (I). On aura ainsi, en y comprenant (7), quatre équations, entre lesquelles il suffira d'éliminer x, y, z, pour parvenir à l'équation cherchée.

Mais le procédé le plus rapide me semble être celui qui consiste à prendre, pour inconnue principale, la quantité λ définie par la relation

$$2\lambda = x^2+y^2+z^2, \tag{8}$$

de laquelle on déduit que 2λ est le carré de la distance OM, ou bien encore, le carré du rayon de courbure de (M) au point M.

En différentiant l'équation (7), il vient

$$\frac{d\lambda}{ds} = x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds} + z\frac{dz}{ds};$$

d'où l'on tire, par comparaison avec la première des équations (I),

$$x = -\frac{d\lambda}{ds}. \tag{9}$$

Cette valeur, substituée dans la seconde équation du même système, donne ensuite

$$y = \rho\left(1 + \frac{dx}{ds}\right) = \rho\left(1 - \frac{d^2\lambda}{ds^2}\right). \tag{10}$$

Quant à la valeur de z, elle est fournie par (8), savoir

$$z = \sqrt{2\lambda - x^2 - y^2} = \sqrt{2\lambda - \frac{d\lambda^2}{ds^2} - \rho^2\left(1 - \frac{d^2\lambda}{ds^2}\right)^2}. \tag{11}$$

On parviendra à l'équation différentielle à laquelle satisfait λ, en portant ces valeurs dans la troisième des équations (I). Cette substitution ne présente aucune difficulté si l'on fait usage de la valeur (7) de μ, qui, par l'introduction de λ, prend la forme

$$\mu = \frac{2\lambda z}{\rho x(y^2 + z^2)} = -\frac{2\lambda\sqrt{2\lambda - \frac{d\lambda^2}{ds^2} - \rho^2\left(1 - \frac{d^2\lambda}{ds^2}\right)^2}}{\rho\frac{d\lambda}{ds}\left(2\lambda - \frac{d\lambda^2}{ds^2}\right)}, \tag{12}$$

et si l'on porte cette valeur dans la première des équations (4), savoir

$$\frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho} - \frac{z}{\tau} = \mu z = \frac{2\lambda z^2}{\rho x(y^2 + z^2)}.$$

C'est dans cette dernière équation que l'on remplacera x, y, z par leurs valeurs en fonction de λ.

On trouve ainsi que l'équation différentielle cherchée est

$$\tag{13} \left\{ \begin{aligned} &\left(2\lambda - \frac{d\lambda^2}{ds^2}\right)^2 + \rho\frac{d\lambda}{ds}\left(2\lambda - \frac{d\lambda^2}{ds^2}\right)\left[\frac{d\rho}{ds}\left(1 - \frac{d^2\lambda}{ds^2}\right) - \rho\frac{d^3\lambda}{ds^3}\right] - 2\lambda\rho^2\left(1 - \frac{d^2\lambda}{ds^2}\right)^2 \\ &\quad = \frac{\rho}{\tau}\frac{d\lambda}{ds}\left(2\lambda - \frac{d\lambda^2}{ds^2}\right)\sqrt{2\lambda - \frac{d\lambda^2}{ds^2} - \rho^2\left(1 - \frac{d^2\lambda}{ds^2}\right)^2} \quad (^1). \end{aligned} \right.$$

Comme on devait s'y attendre, l'équation différentielle dont dépend la résolution du système (I), et, par suite, la solution du problème proposé, est du troisième ordre. Donc, ρ et τ étant des fonctions connues de s, puisque la courbe (O) est

(1) L'inconnue de J.-A. Serret (*loc. cit.*, p. 38) est le rayon de courbure $\sqrt{2\lambda}$ de la courbe (M). L'équation à laquelle il parvient est encore plus compliquée que (13).

donnée, l'intégrale générale contiendra trois constantes arbitraires. Une fois la valeur de λ connue, les formules (9), (10) et (11) fourniront celles de x, y, z.

Je dis maintenant que, si la courbe (O) *est gauche, une seule courbe* (M) *correspond à chaque détermination de* λ.

Car les équations (9) et (10) donnent, sans ambiguïté, x et y et, d'autre part, le signe du radical qui représente la valeur (11) de z est fixé par l'équation différentielle (13) elle-même.

Au contraire, si la courbe est plane, la torsion $\frac{1}{\tau}$ est identiquement nulle, le second membre disparaît, et l'équation différentielle prenant la forme plus simple

$$\left(2\lambda - \frac{d\lambda^2}{ds^2}\right)^2 + \rho\frac{d\lambda}{ds}\left(2\lambda - \frac{d\lambda^2}{ds^2}\right)\left[\frac{d\rho}{ds}\left(1 - \frac{d^2\lambda}{ds^2}\right) - \rho\frac{d^3\lambda}{ds^3}\right] - 2\lambda\rho^2\left(1 - \frac{d^2\lambda}{ds^2}\right)^2 = 0,$$

on voit que les deux valeurs du radical conviennent. A toute détermination de λ, correspondent, dans ce cas, deux courbes (M) symétriques par rapport au plan de la courbe (O), comme cela doit être.

5. L'équation différentielle (13) admet, dans tous les cas, la solution de l'équation

$$2\lambda - \frac{d\lambda^2}{ds^2} = 0,$$

à laquelle on peut satisfaire, soit en faisant

$$2\lambda = (s-a)^2,$$

a désignant une constante arbitraire, soit par la solution singulière

$$\lambda = 0.$$

Considérons d'abord la première, d'où l'on déduit

$$\frac{d\lambda}{ds} = s - a,$$

$$\frac{d^2\lambda}{ds^2} = 1.$$

On voit que cette solution vérifie (13), puisque, par la substitution, tous les termes s'annulent. A cette solution correspondent les valeurs

$$y = z = 0,$$

$$x = a - s.$$

Je dis que, sauf le cas où la courbe (O) est plane, la solution précédente est étrangère au problème proposé et doit être rejetée ([1]).

On est placé effectivement dans l'un des cas expressément réservés, savoir celui où les valeurs y et z sont nulles en même temps, et dans lesquels il faut revenir aux équations primitives. Or les équations (1) et (2) sont bien vérifiées, mais la condition d'orthogonalité (3) devenant

$$\frac{(a-s)^3}{\tau\rho^2} = 0,$$

on doit avoir, soit

$$\frac{1}{\rho} = 0,$$

auquel cas (O) est une ligne droite, soit

$$\frac{1}{\tau} = 0,$$

auquel cas cette courbe est plane.

Si l'on suppose d'abord que (O) soit une ligne droite, la courbure $\frac{1}{\rho}$ est nulle, et l'équation (2) donnant

$$\frac{dx}{ds} + 1 = 0,$$

on a

$$x = a - s,$$

a désignant une constante. La courbe (M) est donc dans un plan fixe perpendiculairement à la droite (O) au point A de cette droite dont la distance, à l'origine des arcs, est égale à a. D'autre part, l'équation (1) devient

$$y\frac{dy}{ds} + z\frac{dz}{ds} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{ds}(y^2 + z^2) = 0,$$

d'où l'on déduit

$$y^2 + z^2 = \text{const.}$$

La courbe (M) dont le lieu des centres de courbure est la droite donnée (O) est, comme je l'ai annoncé au début, un cercle quelconque dont le plan est perpendiculaire à cette droite et dont le centre appartient à la droite considérée.

Si l'on suppose, en second lieu, que (O) soit une courbe plane, $\frac{1}{\tau}$ a une valeur

([1]) Cette remarque se trouve dans Serret (*loc. cit.*, p. 39).

nulle et la solution obtenue convient, puisqu'elle fournit visiblement les développantes de (O).

Ainsi la solution $2\lambda = (s-a)^2$, déduite de l'équation

$$2\lambda - \frac{d\lambda^2}{ds^2} = 0,$$

convient lorsque la courbe est plane et ne convient que dans ce cas.

On pouvait le prévoir sans calcul, attendu que le point M fourni par cette solution est situé constamment sur la tangente à (O) et, par suite, la courbe (M), lieu de ce point, est une développante de (O). Or on sait que la développée d'une courbe n'est le lieu de ses centres de courbure que si la courbe est plane, auquel cas la développée est pareillement plane.

6. Il reste maintenant à étudier la solution $\lambda = 0$, d'où l'on déduit, à l'aide de (9),

$$x = 0,$$

puis de (10),

$$y = \rho,$$

et ensuite de (11),

$$z = \pm \rho i.$$

La courbe correspondante est imaginaire, mais elle n'en est pas moins utile à considérer.

On voit immédiatement que les valeurs obtenues vérifient les conditions écrites en premier lieu, savoir (1), (2), (3). Cette courbe particulière satisfait donc aux conditions du problème.

Au point O de (O) correspondent deux points ω et ω', situés sur la droite polaire de (O) en O et sur les droites isotropes issues de O dans le plan normal à (O) en ce point. Les tangentes en ω et ω' aux courbes (ω) et (ω') décrites par ces points, quand O parcourt (O), sont les droites $O\omega$ et $O\omega'$ elles-mêmes; car, en vertu des relations vérifiées,

$$A = 0,$$

$$By + Cz = 0,$$

les équations de l'une quelconque de ces tangentes sont

$$X = 0,$$

$$\frac{X}{B} = \frac{Z}{C}$$

ou

$$\frac{Y}{z} = -\frac{Z}{y}.$$

Pour la tangente au point $\omega(x = 0, y = \rho, z = \rho i)$, les équations sont

$$X = 0,$$
$$Z = -\frac{y}{z}Y = iY,$$

ce qui prouve que cette tangente se confond avec $O\omega$. On vérifierait, de la même manière, que la tangente à (ω') en ω' est $O\omega'$.

Il résulte de là que les courbes (ω) et (ω') correspondant à la solution $\lambda = 0$ sont les *développées isotropes* de la courbe donnée (O), car d'abord leurs tangentes sont isotropes et, en second lieu, ces tangentes sont normales à (O), puisqu'elles rencontrent (O) et sont contenues dans les plans normaux de cette courbe aux points de rencontre.

Les développées isotropes de la courbe (O) *sont aussi les arêtes de rebroussement des développables isotropes passant par cette courbe.*

Voici comment on peut établir, par la périmorphie, cette propriété générale des courbes.

La développable isotrope d'une courbe (O) est l'enveloppe des plans isotropes menés par les tangentes de cette courbe.

Or, l'équation instantanée d'un plan isotrope passant par la tangente Ox à (O) au point O étant

$$Z - iY = 0,$$

la caractéristique de ce plan résultera de son intersection avec le plan représenté par l'équation

$$\delta Z - i\,\delta Y = 0,$$

qui, par l'application des formules générales, devient

$$-\frac{Y}{\tau} - i\left(\frac{Z}{\tau} - \frac{X}{\rho}\right) = 0$$

ou

$$\frac{X}{\rho} - \frac{1}{\tau}(Z - iY) = 0.$$

Cette caractéristique est donc représentée par les équations

$$X = 0,$$
$$Z - iY = 0,$$

ce qui prouve qu'elle se confond avec l'une des normales isotropes de (O), c'est-à-dire avec l'une des droites $O\omega$ ou $O\omega'$. L'arête de rebroussement de la développable isotrope complète qui passe par (O) est donc formée de l'ensemble des courbes (ω) et (ω'), développées isotropes de (O).

En résumé, la solution $\lambda = 0$ fournit, pour (M), les développées isotropes de (O) ou, ce qui revient au même, les arêtes de rebroussement des développables isotropes qui passent par (O).

III. — *Interprétations géométriques.*

7. L'intégration de l'équation (13) ne pouvant s'effectuer tant qu'on ne particularise pas les fonctions ρ et τ de s, je me bornerai, en restant toujours dans les généralités, à donner quelques interprétatious géométriques qui feront connaître un certain nombre de propriétés des courbes (M) correspondant à une même courbe (O).

La première de ces interprétations est déduite de la signification de λ. Elle conduit, comme on va le voir, à une construction géométrique de la courbe (M) et à la formation de ses équations dans un système d'axes fixes, quand on suppose connue la détermination de λ qui lui correspond. On y parvient en mettant d'abord de côté la troisième condition, pour ne retenir que les deux premières, qui expriment que la droite polaire de (M) en M passe par O. Ceci posé, on a le théorème suivant :

Étant données deux courbes (O) *et* (M) *dont les points se correspondent deux à deux, pour que la droite polaire de* (M), *en l'un quelconque* M *de ses points, passe constamment par le point correspondant* O *de* (O), *il faut et il suffit que* (M) *soit l'arête de rebroussement d'une surface enveloppe de sphères ayant pour centres les points de* (O).

En effet, la courbe (O) étant prise pour une courbe de référence, l'équation instantanée d'une sphère ayant pour centre le point (O) de O est

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 2\lambda, \tag{14}$$

en désignant par 2λ le carré du rayon qui, pour le moment, est une fonction arbitraire de s.

Le cercle de courbure, qui est la caractéristique de cette sphère, résulte de son intersection avec la surface représentée par l'équation

$$X\,\delta X + Y\,\delta Y + Z\,\delta Z = d\lambda,$$

qui devient celle d'un plan perpendiculaire à Ox, savoir :

$$X = -\frac{d\lambda}{ds}. \tag{15}$$

L'arête de rebroussement, enveloppe de la caractéristique, est le lieu des points dont les coordonnées satisfont aux équations (14), (15) et à la suivante

$$\delta X = - d^2 \lambda$$

ou

$$\frac{Y}{\rho} - 1 = - \frac{d^2 \lambda}{ds^2}. \tag{16}$$

La comparaison des équations (14), (15), (16) avec les équations (8), (9), (10), qui expriment que la droite polaire de (M) en M passe par O, établit la proposition, puisque les valeurs que l'on déduit des deux systèmes, pour les coordonnées inconnues, sont les mêmes.

Il est utile de remarquer que les coordonnées instantanées du point mobile de l'arête de rebroussement sont indépendantes de la torsion de la courbe lieu des centres, et ne dépendent que de la courbure de cette courbe. Donc, si l'on déforme la courbe (O) en une autre courbe (O_1) correspondant à la première par égalité des arcs et des rayons de courbure, les coordonnées instantanées des points des arêtes de rebroussement de deux surfaces enveloppes de sphères ayant les mêmes rayons et pour centres les points correspondants de (O) et de (O_1) seront identiques.

Ceci posé, la solution du problème qui fait l'objet de la présente étude exige que la valeur de λ, au lieu d'être prise arbitrairement, satisfasse à l'équation (13) obtenue en adjoignant la troisième condition aux deux premières. Elle exprime, comme on sait, que la droite polaire de (M) en M est perpendiculaire à OM. Cela revient à dire que, en tout point de la courbe (M), le plan osculateur passe par le centre de la sphère correspondante; que, dès lors, ce plan osculateur est normal à la sphère et, par suite, à la surface enveloppe; ou, enfin, que la courbe (M), arête de rebroussement de l'enveloppe, est une de ses lignes géodésiques. On peut donc énoncer la propositionsuivante :

Les courbes (M) *qui admettent une ligne donnée* (O) *pour lieu de leurs centres de courbure sont les arêtes de rebroussement des surfaces enveloppes de sphères ayant pour centres les points de* (O) *et dont les rayons* $\sqrt{2\lambda}$ *sont déterminés par l'équation différentielle* (13), *qui exprime aussi que les courbes* (M) *sont des géodésiques de ces surfaces enveloppes.*

Chacune des arêtes de rebroussement est formée de deux branches dont les points sont symétriquement placés, deux à deux, par rapport aux plans osculateurs de (O). D'après ce qui a été dit au n° 4, une seule de ces branches est une courbe (M) proprement dite, excepté lorsque la courbe (O) est plane, auquel cas les deux branches répondent à la question.

Lorsque la valeur de λ est connue, l'énoncé précédent fournit évidemment une construction géométrique de la courbe (M), ainsi que le moyen de trouver ses équations dans un système d'axes fixes.

8. D'autres interprétations géométriques peuvent se déduire de la considération de l'inconnue auxiliaire μ et donnent, en même temps, les éléments de courbure de (M).

Soient dS l'élément linéaire de (M), R et T les rayons de courbure et de torsion de cette courbe. On aura d'abord

$$dS^2 = \Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2 = (A^2 + B^2 + C^2)\, ds^2.$$

Conséquemment, puisque la valeur de A est nulle et que celles de B et de C sont respectivement égales à μz et $-\mu y$, on aura

$$dS^2 = \mu^2 (y^2 + z^2)\, ds^2,$$

ou

$$dS = \mu \sqrt{y^2 + z^2}\, ds = \frac{2\lambda z}{\rho x \sqrt{y^2 + z^2}}\, ds. \tag{17}$$

Soit P le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur la tangente Ox à (O). On a

$$MP = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

De plus, si l'on désigne par $d\varepsilon$ l'angle infiniment petit MPM', on a, puisque l'élément MM' est, en direction, perpendiculaire à Ox,

$$d\varepsilon = \frac{dS}{MP} = \frac{dS}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Il vient donc, finalement,

$$d\varepsilon = \mu\, ds \tag{18}$$

pour la mesure de l'angle dont il suffit de faire tourner le point M autour de Ox afin de l'amener en coïncidence avec le point infiniment voisin M'.

La courbe (M), qui correspond à une certaine détermination de λ, est ainsi engendrée par une suite de rotations infiniment petites et successives autour des diverses tangentes de (O), la grandeur de chaque rotation étant fournie par la formule (18).

Il s'agit maintenant de trouver R et T. D'abord on a

$$R = \sqrt{2\lambda}. \tag{19}$$

D'autre part, afin de déterminer T, prenons la courbe (M) pour courbe de référence. Le point O, centre de courbure de (M) en M, aura pour coordonnées instantanées $x=0$, $y=\mathrm{R}$, $z=0$. Par suite, les projections du déplacement infiniment petit de O sur les axes mobiles, qui sont les arêtes du trièdre fondamental de (M) en M, seront données par les formules

$$\Delta \text{ de O} \left\{ \begin{aligned} \Delta\mathrm{X} &= 0, \\ \Delta\mathrm{Y} &= d\mathrm{R}, \\ \Delta\mathrm{Z} &= \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{T}}\, d\mathrm{S}. \end{aligned} \right.$$

On aura donc, ds étant l'élément d'arc de (O),

$$ds^2 = d\mathrm{R}^2 + \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{T}^2}\, d\mathrm{S}^2 = \frac{d\mathrm{R}^2}{ds^2}\, ds^2 + \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{T}^2}\, d\mathrm{S}^2,$$

d'où l'on déduira

$$\frac{\mathrm{T}^2}{\mathrm{R}^2} = \frac{d\mathrm{S}^2}{ds^2}\, \frac{1}{1 - \dfrac{d\mathrm{R}^2}{ds^2}}.$$

D'ailleurs,

$$\frac{d\mathrm{S}^2}{ds^2} = \mu^2(y^2+z^2),$$

$$\frac{d\mathrm{R}}{ds} = \frac{d}{ds}(\sqrt{2\lambda}) = \frac{\dfrac{d\lambda}{ds}}{\sqrt{2\lambda}}.$$

Substituant et remarquant que

$$2\lambda - \frac{d\lambda^2}{ds^2} = y^2 + z^2,$$

on trouve, après des réductions faciles, la formule définitive

$$\mathrm{T} = 2\lambda\mu = \mathrm{R}^2\mu, \tag{19}$$

d'où l'on tire la conclusion suivante :

L'inconnue auxiliaire μ représente le rapport du rayon de torsion de (M) *au carré du rayon de courbure de cette courbe.*

9. Aux considérations précédentes qui fournissent diverses significations géométriques de μ, j'ajouterai encore ce qui suit :

Les deux premières des conditions exprimées au n° 2 conduisent aux équations

$$\left\{ \begin{aligned} &\mathrm{A} = 0, \\ &\mathrm{B}y + \mathrm{C}z = 0, \end{aligned} \right.$$

qui, par l'introduction de l'inconnue auxiliaire μ, égale à la valeur commune des rapports $\frac{B}{z}$ et $-\frac{C}{y}$, donnent le système

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{ds} + \left(1 - \frac{y}{\rho}\right) = 0,\\ &\frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho} - z\left(\mu + \frac{1}{\tau}\right) = 0,\\ &\frac{dz}{ds} + y\left(\mu + \frac{1}{\tau}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on pose

$$(21)\qquad \frac{1}{\tau_1} = \mu + \frac{1}{\tau},$$

ces équations deviennent

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{ds} + 1 - \frac{y}{\rho} = 0,\\ &\frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho} - \frac{z}{\tau_1} = 0,\\ &\frac{dz}{ds} + \frac{x}{\rho} = 0, \end{aligned}\right.$$

et, sous cette nouvelle forme, elles expriment que le point A, dont les cordonnées sont x, y, z, par rapport au trièdre fondamental d'une courbe (O_1), ayant même élément linéaire que (O) et pour éléments de courbure ρ et τ_1, est un point fixe dans l'espace, puisque les projections de son déplacement sont constamment nulles. Or les équations (20) expriment que la droite polaire de (M), en chacun de ses points, passe par le point correspondant O de (O), ou bien encore (n° 7), que (M) est l'arête de rebroussement d'une surface enveloppe de sphères dont les centres sont les points de (O). Il résulte de ce qui précède qu'une pareille courbe étant donnée on peut construire une courbe (O_1) correspondant à (O) *par égalité des arcs et des rayons de courbure*, telle que le point qui, par rapport au trièdre fondamental de (O_1), a les mêmes coordonnées que le point de la courbe (M) considérée, par rapport au trièdre fondamental de (O), soit fixe dans l'espace [1].

La réciproque est vraie, car les équations (22) peuvent être écrites sous la forme (20), en posant

$$(23)\qquad \mu = \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau},$$

et l'on voit que le point qui, par rapport au trièdre fondamental d'une courbe (O), a les mêmes coordonnées qu'un point fixe arbitraire A par rapport au trièdre fon-

[1] On peut rapprocher ce résultat d'une remarque faite au n° 7.

damental d'une courbe (O_1) correspondant à la première par égalité des arcs et rayons de courbure, décrit une courbe dont la droite polaire, en chacun de ses points, passe par le point correspondant de (O).

Les courbes (M) qui répondent au problème proposé sont des cas particuliers de celles dont on vient de parler. Pour ces courbes (M), la fonction μ a une valeur déterminée par la formule (7). Il résulte de là cette proposition :

A chaque courbe (M) *ayant pour lieu de ses centres de courbure une courbe* (O), *on peut faire correspondre une courbe* (O_1) *correspondant aussi à* (O) *par égalité des arcs et des rayons de courbure, telle que le point* A, *dont les coordonnées par rapport au trièdre fondamental de* (O_1) *sont les valeurs de* x, y, z *données par les formules* (9), (10) *et* (11), *reste fixe dans l'espace, quand le sommet du trièdre décrit* (O_1). *Les sphères décrites des points de* (O_1) *comme centres, avec des rayons égaux aux valeurs correspondantes de* $\sqrt{2\lambda}$, *passent par ce point fixe* A, *qui est ainsi l'une des branches de l'arête de rebroussement de la surface enveloppe de ces sphères* [1].

10. On peut, sans intégrer l'équation différentielle (13) qui régit le problème, se rendre compte de la distribution, dans l'espace, des courbes (M) qui admettent une courbe donnée (O) pour lieu de leurs centres de courbure. Je remarque d'abord que la présence de trois constantes arbitraires dans l'intégrale générale de cette équation montre qu'il existe une ∞^3 courbes (M) et que ces courbes remplissent l'espace en y formant un complexe, puisque celles d'entre elles qui passent par un point donné dépendent d'un seul paramètre et forment, dès lors, une surface. Toutefois il est nécessaire d'approfondir la recherche des courbes (M) qui passent par un point donné, et c'est ce que je me propose de faire au moyen des équations différentielles du système (I) que j'écris sous la forme

$$(\mathrm{I})' \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{ds} = \frac{y}{\rho} - 1,\\ &y\frac{dy}{ds} + z\frac{dz}{ds} = -x\left(1 + \frac{dx}{ds}\right) = -\frac{xy}{\rho},\\ &z\frac{dy}{dz} - y\frac{dz}{ds} = (y^2 + z^2)\left(\frac{1}{\tau} + \frac{z}{\rho x}\right). \end{aligned}\right.$$

Au point donné M faisons correspondre un point déterminé, d'ailleurs quelconque, O de (O), ce qui signifie que O est le centre de courbure en M de la courbe cherchée. Les coordonnées instantanées x, y, z de M par rapport au trièdre fondamental de (O) en O sont connues, et il s'agit de calculer les variations

---

[1] On retrouvera plus loin les courbes (O_1) (*voir* n° 15).

de ces coordonnées quand le point O vient occuper, sur (O), la position infiniment voisine O′, telle que $OO' = ds$. Ce calcul fera connaître le point M′ infiniment voisin de M sur la courbe cherchée, c'est-à-dire l'élément d'arc de cette courbe. En répétant ensuite cette opération de proche en proche, on obtiendra la courbe demandée par une construction infinitésimale.

Dans le système (I′), x, y, z ont des valeurs données et les inconnues sont $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ d'où l'on tirera ensuite dx, dy, dz. Le déterminant de ces équations du premier degré est $-(y^2+z^2)$. Il s'annule, quand M est réel, seulement dans le cas où les valeurs de y et de z sont simultanément nulles, et, quand le point M est imaginaire, lorsqu'on a

$$z = \pm yi,$$

ce qui signifie que le point M appartient aux plans isotropes menés par la tangente Ox à (O).

En supposant d'abord que le point donné M soit réel, on n'aura que deux cas à examiner.

Premier cas. — Le point M n'est pas situé sur la tangente Ox; en d'autres termes, les coordonnées y et z ne sont pas nulles à la fois. Les équations du système (I′) fournissent alors un système de valeurs, et un seul, pour les trois dérivées. Les différentielles dx, dy, dz seront complètement déterminées, et il en sera de même du point M′ infiniment voisin de M, attendu que ses coordonnées $x+dx, y+dy, z+dz$, par rapport au trièdre fondamental de (O) en O′, sont connues sans ambiguïté. Il est donc établi que, dans le cas examiné, l'élément d'arc de la courbe (M) qui satisfait à la condition de passer par le point M, considéré comme le correspondant du point O, est complètement déterminé. C'est d'ailleurs ce que l'on peut voir, d'une autre manière, en se rappelant (n° 8) que la rotation infiniment petite, autour de Ox, qui amène M en M′, a pour valeur $\mu\, ds$ et en remarquant que, dans le cas actuel, μ a une valeur finie et déterminée.

Deuxième cas. — Le point M est situé sur la tangente Ox, c'est-à-dire $y = z = 0$. Les deux dernières équations du système (I′) sont des identités, en sorte qu'il reste une seule équation, d'où l'on tire

$$dx = -ds,$$

et qui exprime que la tangente à (M) en M est perpendiculaire à Ox, puisque la quantité désignée par A est nulle.

On peut donc prendre arbitrairement la direction de l'élément MM′, à condition cependant que cette direction soit perpendiculaire à Ox. Je me propose d'établir que, cette direction étant choisie conformément à la condition précédente, l'élément MM' est déterminé.

Cela résulte de la formule générale qui fait connaître l'arc infiniment petit de (M), savoir :

$$dS = \mu\sqrt{y^2 + z^2}\,ds = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)z}{\rho x\sqrt{y^2 + z^2}}\,ds.$$

On doit supposer ici que y et z tendent vers zéro, de manière que leur rapport ait une limite égale à la tangente de l'angle que fait, avec Oz, la perpendiculaire MP abaissée de M sur Ox. Or cette droite MP est perpendiculaire à la tangente MM' à l'élément. Donc, si l'on désigne par ψ l'angle que fait, avec Oz, la tangente considérée, qui, de même que MP, est parallèle au plan yOz, on aura

$$\lim \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} = \sin\psi$$

et, par suite,

$$dS = \frac{x}{\rho}\sin\psi\,ds,$$

ce qui démontre la proposition.

Ainsi, lorsque le point M est situé sur la droite Ox, il existe une infinité de courbes (M) satisfaisant aux conditions données. Toutes ces courbes ont, en M, leurs tangentes perpendiculaires à Ox, et à chaque tangente ne correspond qu'un seul élément d'arc.

On doit observer que le cas dont on vient de s'occuper ne peut se présenter que lorsque le point M appartient à la développable ayant (O) pour arête de rebroussement, et que je désignerai par (D). Ceci posé, on est conduit, pour la suite de la discussion, à envisager seulement deux hypothèses.

I. Je supposerai d'abord que le point M n'appartient pas à (D). Je vais démontrer qu'alors il existe une seule courbe (M) passant par le point M considéré comme le correspondant d'un point O de (O) choisi à volonté.

Car, on vient de prouver que le point M' infiniment voisin de M sur la courbe cherchée est complètement déterminé. A son tour, le point M' déterminera le point infiniment voisin M'', qui correspond au point O'' de (O), tel que $O'O'' = ds$, et ainsi de suite.

D'ailleurs, il ne pourrait y avoir exception que si l'un des points obtenus M_k se trouvait sur la tangente au point correspondant O_k de (O). Mais, encore dans ce cas, le point consécutif M_{k+1} est déterminé, puisque la tangente en M_k l'est ellemême.

Si, maintenant, on change le point de (O) qui correspond à M, on trouve une autre courbe évidemment distincte de la première. Il en résulte, conformément à ce qui avait été dit en commençant, que par tout point M n'appartenant pas à (D), passent une infinité de courbes (M) dont le lieu est une surface (S), puisque chacune de ces courbes correspond à un point d'une courbe donnée. On voit immédiatement que les tangentes en M à toutes les courbes (M) qui passent par ce point sont les génératrices du *cône supplémentaire* (K) de celui qui, ayant M pour sommet, passe par (O). On peut dire aussi que le cône (K) est le cône tangent en M à la surface (S) formée par les courbes (M) du complexe, qui passent par ce point.

II. En second lieu, je supposerai que le point M appartient à (D). Si le point O qu'on fait correspondre à M n'est pas situé sur la génératrice de (D) qui contient M, la courbe (M) est complètement déterminée, comme on le voit en reprenant le raisonnement fait précédemment. Les différents points de (O) considérés successivement comme les correspondants de M fournissent ainsi des courbes (M) distinctes entre elles et dont le lieu est une surface (S) analogue à celle du cas général [1]. Mais, dans le cas présent, il y a une infinité d'autres courbes (M) qui sont relatives au point de contact avec (O) de la génératrice de (D) qui contient M. Ces nouvelles courbes appartiennent à une surface (Σ) qui est tangente en M au plan mené par ce point perpendiculairement à la génératrice considérée de (D). On peut donc dire que, pour les points de la développable (D), la surface du complexe est formée des surfaces (S) et (Σ).

Mais il y a plus, car je me propose de faire voir que ces surfaces (S) et (Σ) ont en commun une courbe (M).

En effet, lorsque le point O′ de (O) que l'on fait correspondre à M se rapproche du point de contact O de la tangente de (O) sur laquelle est situé M, la courbe (M) ainsi obtenue appartient toujours à la surface générale (S) et admet pour tangente en M la perpendiculaire au plan $MO'x'$. A la limite, c'est-à-dire lorsque le point O′ se confond avec O, la courbe limite (M) a pour tangente en M la perpendiculaire élevée de ce point sur le plan limite de $MO'x'$ qui est le plan osculateur en O à (O). D'autre part, cette courbe limite appartient à (Σ), puisque le point que l'on fait correspondre à M est O. Les surfaces (S) et (Σ) ont donc une courbe (M) commune. Il en résulte que, lorsque le point M est sur (D), la surface du complexe admet une ligne double commune aux deux surfaces (S) et (Σ) dont elle se compose. (D) est donc une nappe de la surface des singularités du complexe, et même la seule, quand on se borne aux éléments réels.

11. Il reste à considérer le cas dans lequel le point M est imaginaire, afin de compléter la discussion précédente et de connaître en totalité la surface des singularités du complexe que forment les courbes (M).

---

[1] Toutefois, si la courbe (O) est algébrique, le cône (K) est de degré inférieur à celui du cas général.

En premier lieu, si les coordonnées de M par rapport au trièdre fondamental de (O) au point O correspondant à M n'annulent pas l'expression y^2+z^2, l'élément d'arc MM' est déterminé, en mettant de côté le cas discuté, et dont les conclusions s'appliquent aux points imaginaires, où M est sur (D). Je supposerai donc que y^2+z^2 a une valeur nulle, c'est-à-dire que le point M appartient à l'un des plans isotropes passant par Ox, par exemple à celui que représente l'équation

$$z = iy.$$

Les équations du système (I') deviennent alors

$$\begin{gathered}\frac{dx}{ds} = \frac{y}{\rho} - 1,\\ y\left(\frac{dy}{ds} + i\frac{dz}{ds}\right) = -\frac{xy}{\rho},\\ y\left(i\frac{dy}{ds} - \frac{dz}{ds}\right) = 0.\end{gathered}$$

Or on peut supposer $y \neq 0$, sans quoi l'on aurait aussi $z = 0$, et l'on retomberait sur le cas, précédemment examiné, où le point M est situé sur Ox. La dernière équation donne donc

$$\frac{dz}{ds} = i\frac{dy}{ds},$$

et la précédente entraîne la condition préalable

$$x = 0,$$

car le premier membre $\frac{dy}{ds} + i\frac{dz}{ds} = -i\left(i\frac{dy}{ds} - \frac{dz}{ds}\right)$ dont la valeur est nulle. Ceci nous montre, en particulier, que les courbes (M) ne peuvent pénétrer dans les plans isotropes menés par les tangentes de (O) que par les normales isotropes de cette courbe.

Si cette condition est satisfaite, les deux dernières équations se réduisent à une seule. Il y a donc une infinité d'éléments d'arc pour la courbe (M) passant par le point considéré, c'est-à-dire une infinité de courbes (M) répondant à la question.

Je dis que *toutes ces courbes* (M) *sont tangentes à celle des normales isotropes* $O\omega$ *ou* $O\omega'$ *qui contient le point* M.

En effet, la quantité désignée par A étant nulle, les équations de la tangente en M à une courbe (M) sont, en supposant, pour fixer les idées, $z = iy$,

$$X = 0,$$

$$\frac{Z}{Y} = \frac{B}{C} = \frac{\dfrac{dy}{ds} - i\dfrac{y}{\tau}}{\dfrac{dz}{ds} + \dfrac{y}{\tau}} = \frac{\dfrac{dy}{ds} - \dfrac{iy}{\tau}}{i\dfrac{dy}{ds} + \dfrac{y}{\tau}} = i.$$

Chacune de ces courbes (M) sera déterminée si l'on se donne l'une des variations dy ou dz, ou bien une condition géométrique déterminant cette variation : telle, par exemple, que le plan osculateur de la courbe au point M.

La circonstance à laquelle se rapporte le cas particulier que l'on vient d'examiner ne peut se présenter que si le point M est situé sur la développable isotrope contenant la courbe (O) et que je désignerai par (Δ). On n'aura donc, comme dans le cas où M est réel, que deux hypothèses à envisager, le cas, déjà traité, où M appartient à (D) étant mis de côté.

Si le point M n'est pas situé sur (Δ), il n'existe qu'une seule courbe (M) passant par ce point considéré comme le correspondant d'un point donné quelconque O de (O). Car, le premier élément MM′ est déterminé, et il en est de même des autres éléments consécutifs, puisque le seul cas où il pourrait y avoir exception est celui dans lequel un des points M_k appartiendrait à l'une des normales isotropes au point correspondant O_k de (O). Mais, dans ce cas, d'après une remarque faite ci-dessus, le point consécutif M_{k+1} serait encore déterminé puisque l'on connaît en M_k le plan osculateur de la courbe qui, par continuité, se déduit du plan osculateur au point M_{k-1}, ou bien encore la variation de l'une des coordonnées y ou z. Le lieu des courbes (M) passant par le point M se réduit à une surface (S) analogue à celle que l'on a déjà obtenue.

Si le point M appartient à (Δ), les courbes (M), qui passent par ce point considéré comme le correspondant des points de (O) autres que le point O qui est situé sur la génératrice de (Δ) contenant M, sont déterminées, ainsi qu'on le reconnaît aisément en reprenant le raisonnement fait pour le cas précédent. Le lieu de toutes ces courbes est une surface (S). Mais, outre ces courbes, il y en a une infinité d'autres qui touchent en M la génératrice de Δ sur laquelle ce point est situé, et qui ont, par suite, pour lieu une surface Θ tangente à la génératrice considérée.

On démontrerait, comme on l'a fait pour les surfaces (S) et (Σ), que les surfaces (S) et (Θ) ont en commun une courbe (M) qui est, par suite, une ligne double de la surface du complexe relative à un point M de Δ.

Donc, *la surface des singularités du complexe formé par les courbes* (M) *dont le lieu des centres de courbure est une courbe* (O) *est composée de la développable dont* (O) *est l'arête de rebroussement et de la développable isotrope passant par cette courbe.*

Car ce n'est que dans le cas où le point M est sur l'une des développables que la surface du complexe offre une ligne double autre que celles qui proviennent des points doubles de (O) et qui appartiennent à toutes les surfaces (S).

12. Je terminerai cet exposé par des considérations de Géométrie pure qui, non seulement fourniront de nouvelles transformations du problème proposé, mais encore montreront les relations qui l'unissent à la théorie des lignes de longueur nulle ou lignes minima et, partant, à celle des surfaces minima. Ce rapprochement

m'a été suggéré principalement par la lecture du beau Mémoire que Ribaucour a présenté à l'Académie de Belgique, et dans lequel ce profond et regretté géomètre a donné un certain nombre de propriétés nouvelles des surfaces minima inscrites à la développable polaire d'une courbe suivant le lieu de ses centres de courbure. J'établirai directement ces propriétés, ce qui me permettra de définir, d'une façon plus précise, le rôle des courbes (O_1) qui correspondent à la fois aux courbes (O) et (M), comme on l'a vu au n° 9.

Soient (M) une courbe dont le lieu des centres de courbure est la courbe donnée (O), (H) la développable polaire de (M), et (A) l'arête de rebroussement de (H). Déroulons (H) sur un plan, en supposant que les points de (M) soient entraînés dans les plans tangents de (H) qui leur correspondent, lorsque ces plans tournent successivement autour de leurs génératrices de contact. On sait que, dans ce déroulement, tous les points de (M) coïncident avec un point fixe m, qui est le point de concours des droites dans lesquelles se transforment les développées de (M). On en déduit que la courbe (O) se transforme en une courbe (o) qui est la podaire de m, par rapport à la transformée (a) de l'arête de rebroussement (A). D'ailleurs, les perpendiculaires mo, abaissées de m sur les tangentes de (a) qui sont les transformées des génératrices de (H), sont égales aux rayons de courbure MO de M.

Inversement, si l'on peut construire une développable (H) passant par la courbe (O), telle qu'après le déroulement de cette développable sur un plan la transformée (o) de (O) soit la podaire d'un point fixe m, par rapport à la transformée (a) de l'arête de rebroussement de H, il est manifeste que le lieu décrit par le point m, quand on reconstitue la développable et que l'on suppose le point m entraîné dans les différents plans tangents, est une courbe (M), normale à ces plans, dont (H) est la surface polaire et qui admet (O) pour lieu de ses centres de courbure.

On déduit de là une première transformation, sur laquelle il est inutile d'insister, de l'énoncé du problème.

13. Reprenons maintenant la surface (H), développable polaire de (M), ainsi que son rabattement sur un plan, et portons notre attention sur l'ensemble des perpendiculaires mo aux tangentes de (a). Faisons tourner de 90° le système de ces droites autour de m dans le plan de transformation. La courbe (o) sera remplacée par une courbe (o') égale à la première, mais dont les tangentes seront perpendiculaires aux tangentes correspondantes de (o), pendant que les droites mo sont devenues parallèles à ces mêmes tangentes. Toutes les développables, dont les génératrices ont pour transformées les droites mo', sont des cônes auxquels on peut donner pour sommet un point quelconque A. Il est clair que l'on pourra choisir l'un de ces cônes de manière que ses plans tangents et ses génératrices

soient parallèles aux plans tangents et aux génératrices de (H), puisque ce parallélisme existe dans le plan de transformation. Soient (H′) ce cône particulier et (O′) la courbe de ce cône dont (o') est la transformée sur le plan.

Je dis que (O′) correspond au lieu (O) des centres de courbure de (M), par égalité et orthogonalité des éléments linéaires, avec conservation des rayons de courbure aux points correspondants. Ces propriétés ont lieu, en effet, dans le plan de transformation et elles persisteront pour les développables (H) et (H′), parce que les rotations infiniment petites à l'aide desquelles on les reconstitue ont les mêmes valeurs et sont effectuées autour d'axes parallèles.

On remarquera, enfin, que les droites AO′ sont parallèles aux génératrices de (H), c'est-à-dire aux droites polaires de (M), et qu'elles sont égales aux rayons de courbure de cette courbe, puisqu'elles sont égales aux segments mo' et, par suite, aux segments MO. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Le lieu des extrémités des segments qui, passant par un point fixe A, *sont égaux aux rayons de courbure d'une courbe* (M) *et dirigés parallèlement aux droites polaires correspondantes de cette courbe est une courbe* (O′) *qui correspond à la courbe* (O), *lieu des centres de courbure de* (M), *par égalité et orthogonalité des éléments linéaires, avec conservation des rayons de courbure. De plus, les plans tangents au cône* [A, (O′)] *sont parallèles aux plans tangents de la surface polaire de* (M) *et, par suite, aux tangentes de* (O).

14. Avant d'énoncer la réciproque, on doit observer que trois des quatre conditions auxquelles est assujettie la courbe (O′) entraînent la quatrième. En conséquence, je formulerai, comme il suit, cette proposition réciproque :

Lorsqu'une courbe (O′) *correspond à une courbe* (O) *par égalité et orthogonalité des éléments linéaires, et que, de plus, les plans menés par les tangentes de* (O′) *parallèlement aux tangentes de* (O) *passent par un point fixe* A, *les droites* AO′ *sont parallèles aux droites polaires d'une courbe* (M) *admettant* (O) *pour lieu de ses centres de courbure. Cette courbe* (M) *elle-même est l'une des branches de l'arête de rebroussement d'une surface enveloppe de sphères ayant pour centres les points de* (O) *et pour rayons les longueurs des segments correspondants* AO′.

Pour le démontrer, menons par les tangentes de (O) des plans parallèles aux tangentes correspondantes de (O′). En vertu de l'hypothèse, ces plans sont parallèles aux plans tangents du cône [A, (O′)] que je désignerai par (H′), et envelopperont une développable (H) contenant (O).

Déroulons, sur un plan, les développables (H) et (H′). A cause du parallélisme de leurs plans tangents, on pourra faire le développement de manière que les transformées des génératrices soient parallèles deux à deux et, dans cette position, les transformées (o) et (o') des courbes (O) et (O′) auront encore leurs éléments linéaires égaux et orthogonaux. Elles auront donc mêmes rayons de courbure aux points correspondants et seront, par suite, superposables. Par une rotation de 90° effectuée, dans le plan de transformation, autour d'un point convenablement choisi, on pourra faire coïncider ces deux courbes. Soit m la position qu'occupe le sommet du cône après la superposition de (o) et de (o'). Les transformées mo' des génératrices du cône (H′) sont maintenant perpendiculaires aux transformées des génératrices de (H), ce qui signifie que (o) est la podaire du point m par rapport à l'arête de rebroussement de (H). On peut, dès lors, appliquer la réciproque du n° **12**, et dire que (H) est la développable polaire d'une courbe (M) admettant (O) pour lieu de ses centres de courbure.

Cette courbe (M) est le lieu que décrit le proint m entraîné dans les plans tangents de H. Mais le théorème du n° **7** permet de l'obtenir autrement, puisque les rayons de courbure MO de (M) sont égaux aux segments mo' et, par suite, aux segments AO′. On parvient ainsi à établir la dernière partie de l'énoncé.

Si, maintenant, l'on applique la proposition directe, il résulte encore de ce qui précède qu'en passant de la courbe (O) à la courbe (O′) les rayons de courbure sont conservés. Telle est donc la propriété qui doit être regardée comme une conséquence des trois autres.

15. Ribaucour appelle *contours conjugués* ceux des courbes qui se correspondent par égalité et orthogonalité des éléments linéaires, et il en donne plusieurs exemples (*loc. cit.,* p. 111-118). Il résulte de ce qui précède que la recherche des courbes (M) qui ont pour lieu de leurs centres de courbure une courbe donnée (O) est ramenée à la recherche des courbes qui lui sont conjuguées et satisfont à cette condition complémentaire que, sur les deux développables (H) et (H′) à plans tangents parallèles que l'on peut faire passer par les deux courbes, celle qui passe par la courbe cherchée soit un cône. Cette courbe conjuguée est alors une courbe (O′).

Avant de poursuivre ces considérations, je dois revenir aux courbes (O_1) du n° **9**, afin de montrer leur identité avec les courbes (O′) définies ci-dessus.

On a vu, en effet, qu'à toute courbe (M) correspond une courbe (O_1), qui elle-même correspond à (O) par égalité des éléments linéaires et des rayons de courbure, telle que le point dont les coordonnées instantanées par rapport au trièdre fondamental de (O_1) sont les mêmes que celles du point M par rapport au trièdre fondamental de (O), soit un point fixe A, d'où il résulte que les distances AO sont égales aux rayons de courbure OM de (M). Cette courbe (O_1) est donc égale, ou égale à la symétrie près, à la courbe (O′) que l'on déduit de (O) au moyen de la même courbe (M), puisque leurs éléments linéaires et leurs rayons de courbure correspondants sont égaux, et que les distances de leurs points correspondant à deux points fixes, que l'on peut supposer confondus, sont les mêmes, attendu que ces distances représentent, de part et d'autre, les rayons de courbure de (M).

Ainsi les courbes (O′) dont les contours sont conjugués de celui de (O) et satisfont, en même temps, à la condition complémentaire indiquée, ne sont autres que les courbes (O_1), en quelque sorte mises en place pour la construction des courbes (M).

16. Voici maintenant de quelle manière s'introduisent les lignes de longueur nulles, ou lignes isotropes, ou lignes minima ainsi que les surfaces minima elles-mêmes.

Reportons-nous encore au n° **12**. La courbe (o) étant la podaire du point m par rapport à la transformée (a) de l'arête de rebroussement de la surface polaire, il s'ensuit que les droites isotropes issues de m, dans le plan du rabattement, coupent chacune des tangentes de (a) en deux points γ et γ' dont le milieu est le point o de (o), projection de m sur la tangente considérée. Après la reconstitution de la développable, les lignes (γ) et (γ') se transforment en lignes minima imaginaires conjuguées (Γ), (Γ') de cette développable. Les milieux des couples de points situés sur les génératrices seront les points de (O), et ces courbes seront les développées isotropes de (M), car leurs tangentes se couperont toujours sur la courbe (M), dans laquelle se transforme le point m, et formeront deux droites isotropes conjuguées dans chacun des plans normaux de cette courbe.

Il n'est pas moins évident que si, inversement, on construit une développable (H) passant par (O), telle que deux de ses lignes isotropes imaginairement conjuguées (Γ), (Γ') se correspondent de façon que les points situés sur les mêmes génératrices soient toujours symétriquement placés par rapport aux points de (O), cette développable sera la surface polaire de la courbe (M), lieu du point de rencontre des tangentes aux deux lignes (Γ), (Γ') en leurs points correspondants, et la courbe (O) sera le lieu des centres de courbure de la courbe (M).

Le problème proposé peut donc encore être transformé dans la recherche des développables définies par la condition résultant de la proposition précédente, ou, ce qui est encore équivalent, dans la détermination des couples de lignes minima (Γ), (Γ') imaginaires conjuguées, dont les points sont symétriques deux à deux par rapport aux points de (O), de façon que les tangentes en ces points se rencontrent, auquel cas le lieu de ces points de rencontre est l'une des courbes cherchées (M).

17. Ces courbes (Γ), (Γ') sont les lignes génératrices d'une surface minima (R), lieu des milieux des cordes joignant les points de l'une des courbes aux points de l'autre. La courbe (O) appartient donc à (R). De plus, le plan tangent à (R), en un point quelconque de (O), est, comme on sait, parallèle aux tangentes des courbes (Γ) et (Γ') aux points de ces lignes dont le milieu est le point considéré de (O). Ce plan tangent est, dès lors, confondu avec le plan tangent, au même point, de la surface polaire (H), puisque ces deux plans ont deux droites communes. De là résulte le théorème suivant donné par Ribaucour (*loc. cit.,* p. 56) :

La surface minima inscrite à la développable polaire d'une courbe (M), *suivant le lieu* (O) *de ses centres de courbure, a pour lignes minima génératrices les développées isotropes de* (M).

Aux courbes (M) admettant une ligne (O) pour lieu de leurs centres de courbure, correspond ainsi une famille de surfaces minima (R) caractérisées par cette double condition de contenir (O) et d'avoir chacune un couple de lignes minima génératrices situées sur les développables qui leur sont circonscrites suivant cette ligne (O).

Or toute surface minima (R) possède une surface minima adjointe (*voir* les *Leçons* de M. Darboux, t. I, p. 322). On sait que deux de ces surfaces se correspondent par parallélisme des plans tangents, par égalité et orthogonalité des éléments linéaires. On sait, de plus, que deux surfaces minima passant par deux contours conjugués (n° 15) et inscrites, le long de ces contours, à deux développables dont les plans tangents correspondants sont parallèles, sont adjointes l'une de l'autre.

Ceci posé, considérons la courbe (O) et l'une des courbes (O'). Ces deux courbes se correspondent par égalité et orthogonalité des éléments linéaires. En outre, les développables à plans tangents parallèles qui les contiennent sont, d'une part, la développable polaire (H) de (M) et, d'autre part, le cône (H') de sommet A. Conséquemment :

La surface minima circonscrite à (H) *suivant* (O) *a pour adjointe la surface minima circonscrite au cône* (H') *suivant* (O').

On peut aussi énoncer, avec Ribaucour (*loc. cit.,* p. 95), ce résultat comme il suit :

Les développables circonscrites aux surfaces (R') *adjointes des surfaces minima* (R) [1], *suivant les courbes* (O'), *sont des cônes.*

Ce qui précède montre quelle serait l'utilité de la considération des contours

[1] Ribaucour appelle *élassoïdes conjugués* deux surfaces minima adjointes l'une de l'autre.

conjugués (O′) pour la solution du problème actuel, si la troisième condition qui leur est imposée ne venait augmenter la difficulté de leur recherche *directe*. C'est pourquoi je ne poursuivrai pas davantage ici l'étude de ces contours, tout en engageant le lecteur désireux d'approfondir la théorie des courbes conjuguées à consulter le remarquable travail de Ribaucour.

IV. — *Cas particuliers.*

18. L'intégration de l'équation différentielle (13), sous forme finie et explicite, ne pouvant être réalisée dans le cas général où ρ et τ sont des fonctions quelconques de s, on est conduit, tout d'abord, à faire des hypothèses sur la forme de ces fonctions; mais, dans les cas les plus simples, il paraît impossible de donner l'intégrale générale. Ainsi, par exemple, lorsque la courbe donnée (O) est un cercle, la valeur de $\frac{1}{\tau}$ est nulle et celle de ρ est constante. L'équation qui définit les valeurs de λ relatives aux courbes (M) qui admettent un cercle donné (O) pour lieu de leurs centres de courbure est donc

$$\left(2\lambda - \frac{d\lambda^2}{ds^2}\right)^2 - \rho^2 \frac{d\lambda}{ds}\frac{d^3\lambda}{ds^3}\left(2\lambda - \frac{d\lambda^2}{ds^2}\right) - 2\lambda\rho^2\left(1 - \frac{d^2\lambda}{ds^2}\right)^2 = 0.$$

Serret (*loc. cit.*, p. 40) a démontré que, par un changement de fonction et de variable, cette équation peut être abaissée au second ordre; mais, quelque intéressant que soit ce résultat, on peut dire qu'il ne fournit pas encore la solution de la question.

C'est pourquoi, dans les cas particuliers que je me propose d'étudier, au lieu de se donner la forme de (O), on cherchera, au contraire, cette forme, de manière que l'une des courbes (M) satisfasse à des conditions données d'avance. Je traiterai ainsi des conditions qui doivent être satisfaites pour que les points de l'une des courbes (M) soient constamment situés dans l'une des faces du trièdre fondamental de (O) et, finalement, le cas dans lequel les droites OM sont invariablement liées à ce trièdre.

19. *Dans quel cas les points de l'une des courbes* (M) *qui correspondent à une courbe donnée* (O) *sont-ils constamment situés dans les plans normaux de cette courbe aux points correspondants?*

Cela revient à trouver la condition pour que le système (I) admette la solution $x = 0$, ou, ce qui revient au même, dans quel cas l'équation (13) est vérifiée par une valeur constante de λ, ce qui exprime aussi que la courbe correspondante (M) a un rayon de courbure constant.

La seconde équation du système (I) donne $y = \rho$; la troisième donne $z = 0$. Il faut écrire que la première équation de ce système est vérifiée, c'est-à-dire que la valeur de $\rho \frac{d\rho}{ds}$ est nulle et, par suite, que celle de ρ est constante. On aura, d'ailleurs,

$$2\lambda = x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2.$$

Le résultat que l'on vient d'obtenir et qui est conforme à un théorème bien connu, dû à Monge, peut être énoncé ainsi qu'il suit :

Pour que les points d'une courbe (M) *soient constamment situés dans les plans normaux du lieu* (O) *de ses centres de courbure dans les points correspondants, il est nécessaire et suffisant que la courbe* (O) *soit à courbure constante et, dans ce cas, la courbe* (M) *aura une courbure constante et égale à celle de* (O).

Le rôle des deux courbes étant évidemment réciproque, la courbe (M) sera le lieu des centres de courbure de (O) [1].

20. *Dans quel cas les points de l'une des courbes* (M) *qui correspondent à une courbe donnée* (O) *sont-ils situés dans les plans osculateurs de* (O) *aux points correspondants?*

On demande la condition pour que le système (I) admette la solution $z = 0$. Or la troisième équation du système donne immédiatement la condition cherchée qui est $\frac{1}{\tau} = 0$, et qui exprime que (O) est une courbe plane. Les courbes (M) qui correspondent à cette solution sont évidemment les développantes de (O).

21. *Dans quel cas les points de l'une des courbes* (M) *qui correspondent à une courbe donnée* (O) *sont-ils constamment situés dans les plans rectifiants de* (O) *aux points correspondants?*

Le plan rectifiant d'une courbe (O), en l'un quelconque de ses points, étant le plan des xz du trièdre fondamental, on voit que le cas particulier qui est actuellement considéré et que M. Pirondini a traité de son côté (*loc. cit.*, p. 74) est celui dans lequel le système (I) admet la solution $y = 0$.

D'après la valeur (10) de y, cela revient à trouver la condition pour que l'on ait

$$\frac{d^2\lambda}{ds^2} = 1$$

[1] Ces conclusions peuvent être établies à l'aide des propriétés exposées au n° 12.

ou

$$2\lambda = s^2 + 2as + b,$$

a et b désignant des constantes.

En supposant qu'il en soit ainsi, on aura

$$x = -\frac{d\lambda}{ds} = -(s+a),$$

$$z = \sqrt{2\lambda - x^2 - y^2} = \sqrt{b - a^2} = k.$$

La troisième équation du système (I) donne alors la condition cherchée

$$\frac{\tau}{\rho} = -\frac{x}{s} = \frac{s+a}{k},$$

puisque le premier membre de cette équation est nul. Cette équation exprime que, pour la courbe (O), le rapport des rayons de torsion et de courbure est une fonction linéaire de l'arc.

Pour construire les courbes (O) qui satisfont à cette définition, concevons que, l'une de ces courbes étant donnée, on déroule, sur un plan, la développable enveloppe de son plan rectifiant. On sait que la caractéristique de ce plan passe par le point correspondant de (O) et fait, avec la tangente Ox en ce point, un angle θ tel que

$$\tang\theta = \frac{\tau}{\rho},$$

d'où il s'ensuit que, dans le cas présent,

$$\tang\theta = \frac{s+a}{k}.$$

D'autre part, dans le déroulement dont il est question ci-dessus, la courbe (O) se transforme en une droite L.

La caractéristique du plan rectifiant au point O de (O) a donc pour transformée une droite passant par le point o de L qui correspond à O et qui se trouve, dès lors, à une distance s de celui qui correspond à l'origine des arcs.

Dans le plan de transformation, prenons la droite L pour axe des x et, pour axe des z, la perpendiculaire menée à cette droite par le point a, qui correspond à l'origine A des arcs de (O).

L'équation de la droite transformée de la caractéristique du plan rectifiant de (O) en O, sera

$$Z = (X - s)\tang\theta$$

ou

$$Z = (X - s)\frac{s+a}{k}.$$

On voit immédiatement que, lorsque s varie, l'enveloppe de cette droite est la parabole (p) représentée par l'équation

$$(p) \qquad (X + a)^2 = 4kZ.$$

Cette parabole est tangente à l'axe des x, c'est-à-dire à L, en un point qui est le sommet de la courbe et dont l'abscisse est égale à $-a$. Le foyer de cette parabole a pour coordonnées

$$X = -a, \qquad Z = k,$$

comme l'on s'en rend compte immédiatement en remarquant que l'équation de la courbe peut s'écrire

$$(X + a)^2 + (Z - k)^2 = (Z + k)^2.$$

De plus, si l'on suppose que tous les points de la courbe (M) $[x = -(s + a),$ $z = k,\ y = 0]$ soient successivement entraînés dans les rotations infiniment petites auxquelles donne lieu le déroulement de la développable, tous ces points viennent coïncider avec le foyer F de la parabole (p), car, dans cette hypothèse, les coordonnées instantanées d'un point de (M) ne changent pas, de telle sorte qu'après le rabattement les coordonnées de m, par rapport aux axes fixes, sont $X = -a$, $z = k$, comme celles du foyer F de (p), qui est dès lors la transformée de la courbe (M).

Inversement, si l'on considère, dans un plan, une parabole quelconque (p), son foyer F, ainsi que l'ensemble de ses tangentes, et si, par des rotations successives, on construit une développable dont les génératrices soient les transformées de ces tangentes, la tangente au sommet, dont les différents points sont supposés entraînés avec les tangentes auxquelles ils appartiennent, sera transformée en une courbe (O), telle que le rapport $\frac{\tau}{\rho}$ sera une fonction linéaire de l'arc, savoir :

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{s + a}{k},$$

a désignant une longueur égale et de signe contraire à l'abscisse du sommet de la courbe, et k l'ordonnée du foyer. Cela résulte de ce que la transformée de la tangente au sommet est une géodésique de la développable et, par suite, une courbe dont les plans osculateurs sont normaux à la développable ainsi formée. Les bi-normales de cette transformée sont donc contenues dans les plans tangents de la développable et les génératrices de contact de ces plans tangents sont les caractéristiques des plans rectifiants de (O).

D'autre part, le foyer de (p), entraîné dans les rotations successives, décrira une courbe telle que les coordonnées instantanées de l'un quelconque de ses points, savoir :

$$x = -(s + a), \qquad y = 0, \qquad z = k,$$

vérifieront constamment le système (I). Cette courbe est donc, pour (O), une courbe (M) dont les points sont situés dans les plans rectifiants de (O) aux points correspondants.

On peut résumer, dans l'énoncé suivant, ces résultats, trouvés par M. Pirondini :

1° *Les courbes* (O) *telles que, en chacun de leurs points, le rapport du rayon de torsion au rayon de courbure soit une fonction linéaire de l'arc, sont les transformées de la tangente au sommet d'une parabole* (p) *dans toute surface développable dont les génératrices sont les transformées des tangentes de cette parabole.*

2° *La courbe que décrit le foyer de la parabole* (p) *entraîné dans les rotations successives qui amènent la construction de la développable est la courbe* (M) *la plus générale dont les points soient situés dans les plans rectifiants du lieu de ses centres de courbure, et ce dernier lieu est la courbe* (O) *transformée de la tangente au sommet de* (p).

Le raisonnement exposé à la fin du n° **12** conduit aussi à ces conclusions. La surface polaire de (M) est en effet, d'après l'énoncé, la surface rectifiante de (O). Il est clair, dès lors, que le point m auquel se réduit (M) dans le déroulement de cette développable sur un plan doit avoir pour podaire, par rapport à la transformée (p) de l'arête de rebroussement, la transformée de (O) qui, dans le cas présent, est une ligne droite. La courbe (p) est donc une parabole ayant pour foyer le point m et, pour tangente au sommet, la transformée de (O). C'est précisément le résultat auquel est parvenu M. Pirondini et qui s'est aussi présenté comme conséquence des équations (I).

22. *Dans quel cas la droite* OM *qui joint les points correspondants d'une courbe* (M) *et du lieu* (O) *de ses centres de courbure est-elle invariablement liée au trièdre fondamental de* (O)?

Cet énoncé montre qu'il s'agit de rechercher dans quel cas le système (1) admet le système de solutions

$$x = \alpha\sqrt{2\lambda}, \qquad y = \beta\sqrt{2\lambda}, \qquad z = \sqrt{2\lambda},$$

dans lesquelles α, β, γ sont des constantes égales aux cosinus directeurs de la droite L, que l'on suppose invariablement liée au trièdre fondamental de (O), et sur laquelle se trouve le point correspondant M de (M) dont la distance au sommet O du trièdre est la longueur variable $\sqrt{2\lambda}$ (1).

La comparaison des deux valeurs de x donne d'abord

$$\alpha\sqrt{2\lambda} = -\frac{d\lambda}{ds},$$

d'où l'on tire, par une intégration facile (en dehors de la solution $\lambda = 0$),

$$\sqrt{2\lambda} = \alpha(a - s),$$

a désignant une constante arbitraire, et par suite

$$2\lambda = \alpha^2 (a - s)^2.$$

On a donc, pour les coordonnées x, y, z,

$$\begin{aligned} x &= \alpha^2 (a - s), \\ y &= \alpha\beta(a - s), \\ z &= \alpha\gamma(a - s). \end{aligned}$$

Il reste à exprimer que ces valeurs vérifient les deux dernières équations du système (I). La comparaison des valeurs de y donne

$$\rho = \frac{\alpha\beta(a - s)}{(1 - \alpha^2)},$$

ce qui prouve que le rayon de courbure de (O) est une fonction linéaire de l'arc.

La troisième équation du système, prise sous la forme (5''), donne ensuite

$$\frac{\tau}{\rho} = -\frac{x}{z} = -\frac{\alpha}{\gamma},$$

parce que le rapport $\frac{y}{z}$ est constant.

Le rapport des courbures de la courbe étant une quantité constante, cette courbe est, comme on sait, une hélice cylindrique dont les tangentes coupent les génératrices du cylindre sous l'angle θ donné par la formule

$$\tang\theta = \frac{\tau}{\rho} = -\frac{\alpha}{\gamma}.$$

Pour déterminer géométriquement cette courbe dont les valeurs de ρ et de τ sont

(1) Le cas où $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$ est naturellement excepté, comme ayant été traité au n° 5.

données par les formules précédentes, je vais chercher à définir la section droite du cylindre dont elle est une hélice.

Au point O, le plan normal à la section droite passe par Oy et par la caractéristique du plan rectifiant de (O) qui est la génératrice du cylindre. Ce plan normal a donc pour équation

$$\frac{Z}{X} = \frac{\tau}{\rho}$$

ou

$$\alpha X + \gamma Z = 0.$$

Sa caractéristique est la droite suivant laquelle il coupe le plan représenté par l'équation

$$\alpha\,\delta X + \gamma\,\delta Z = 0,$$

qui, par l'application des formules donnant δX et δZ, devient

$$\alpha\left(\frac{Y}{\rho} - 1\right) - \gamma\frac{Y}{\tau} = 0,$$

ou, en substituant la valeur de τ,

$$Y = \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\gamma}{\tau}} = \frac{\alpha^2\rho}{\alpha^2 + \gamma^2}.$$

La caractéristique est, dès lors, une droite parallèle à la génératrice du cylindre, ce qui devait être, et le rayon de courbure r de la section droite est égal à la distance de O à cette caractéristique, savoir

$$r = \frac{\alpha^2\rho}{\alpha^2 + \gamma^2} = \frac{\alpha^2\beta(a - s)}{(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)}.$$

D'autre part, l'arc σ de la section droite est dans un rapport constant avec l'arc de l'hélice (O); car, visiblement,

$$\sigma = s\sin\theta.$$

Il résulte de là que la section droite du cylindre dont (O) est une hélice est une courbe telle qu'en l'un quelconque de ses points le rayon de courbure est une fonction linéaire de l'arc de cette section droite. Cette propriété caractérisant la spirale logarithmique, on en conclut que les courbes (O) satisfaisant à l'énoncé sont des hélices tracées sur des cylindres ayant pour sections droites des spirales logarithmiques.

Je dis maintenant que, réciproquement, à toute courbe (O) répondant à la définition précédente correspondent deux courbes (M) admettant (O) pour lieu de leurs centres de courbure, et telle que les droites OM joignant deux points correspondants quelconques soient invariablement liées au trièdre fondamental de (O).

D'abord, les éléments τ et ρ de (O) vérifient les équations

$$\rho = hs + k,$$

$$\frac{\tau}{\rho} = l,$$

h, k, l désignant des constantes bien déterminées.

Pour démontrer la réciproque, il suffit donc de faire voir que l'on peut trouver, pour a, α, β, γ, des valeurs constantes propres à identifier les valeurs données de ρ et de $\frac{\tau}{\rho}$ avec celles qui sont fournies par la proposition directe. Les relations d'identification sont les suivantes :

$$h = -\frac{\alpha\beta}{1-\alpha^2},$$

$$k = \frac{a\alpha\beta}{1-\alpha^2} = -ah,$$

$$l = -\frac{\alpha}{\gamma},$$

auxquelles il faut joindre celle-ci

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

La seconde équation détermine la valeur de a, savoir

$$a = -\frac{k}{h}.$$

La première et la troisième donnent, en fonction de α, les valeurs de β et de γ qui, portées dans la dernière, conduisent, pour α, à une équation bi-carrée, que la substitution bien naturelle

$$\alpha = \cos\omega$$

transforme dans l'équation

$$h^2 \operatorname{tang}^4\omega - \operatorname{tang}^2\omega + \frac{1}{l^2} = 0.$$

On trouve ainsi, pour $\operatorname{tang}\omega$, quatre valeurs égales deux à deux, mais de signes contraires, qui seront réelles à la fois, pourvu que l'on ait

$$\frac{h^2}{l^2} \leqq \frac{1}{4}.$$

Si cette condition est satisfaite, on voit aisément qu'il existe seulement deux directions distinctes pour la droite cherchée L. Ces deux directions sont, en chaque point de (O), perpendiculaires à la génératrice du cylindre dont cette courbe est une hélice. C'est ce que montre la troisième équation du groupe écrit ci-dessus.

Il y aura deux courbes (M) répondant à la question. Ces courbes, d'après la construction générale déduite du n° 7, appartiennent aux arêtes de rebroussement des surfaces enveloppes de sphères ayant leurs centres sur (O), et dont les rayons sont, en chaque centre, déterminés par les valeurs de l'expression

$$\sqrt{2\lambda} = \alpha(a - s).$$

Je dis que ces courbes (M) ont la même définition que (O).

D'abord, les arcs correspondants de (O) et de l'une de ces courbes sont proportionnels, à condition, bien entendu, que les origines se correspondent; car (n° 8)

$$\frac{dS}{ds} = \frac{2\lambda z}{\rho x \sqrt{y^2 + z^2}},$$

et, dans ce cas, la substitution montre que l'on a

$$\frac{dS}{ds} = \frac{\gamma\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha\beta} = \text{const.}$$

Dès lors $\sqrt{2\lambda}$, rayon de courbure de (M), égal à une fonction linéaire $\alpha(a - s)$ de l'arc de (O), est aussi une fonction linéaire de l'arc de (M).

D'autre part, le rayon de torsion T de (M) est donné par la formule (n° 8)

$$T = 2\lambda\mu,$$

d'où l'on tire

$$\frac{T}{\sqrt{2\lambda}} = \frac{T}{R} = \mu\sqrt{2\lambda} = \frac{\beta\gamma}{\alpha} = \text{const.}$$

Cette courbe (M) est donc caractérisée par les mêmes relations entre les courbures que (O). Par suite, (M) est encore une hélice tracée sur un cylindre dont la section droite est une spirale logarithmique ([1]).

Ces résultats sont résumés dans l'énoncé suivant :

Pour que la droite joignant un point M *d'une courbe* (M) *au point corres-*

([1]) Il serait aisé de démontrer que les courbes (O') correspondant aux courbes (M) satisfaisant à ces conditions particulières sont aussi des hélices tracées sur des cylindres ayant pour sections droites des spirales logarithmiques.

pondant O *du lieu* (O) *de ses centres de courbure, soit invariablement liée au trièdre fondamental de la courbe* (O), *il faut et il suffit que celle-ci soit une hélice tracée sur un cylindre ayant pour section droite une spirale logarithmique. Dans ce cas, il existe, pour chaque courbe* (O) *répondant à la définition précédente, deux courbes* (M) *admettant la même définition et satisfaisant aux conditions de l'énoncé.*