Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Émile Cotton

Mouvement de la chaleur sur la surface d'un tétraèdre dont les arrêtes opposées sont égales

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 2, no 3 (1900), p. 305-316

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1900_2_2_3_305_0>

MOUVEMENT DE LA CHALEUR

SUR LA SURFACE D'UN TÉTRAÈDRE

DONT LES ARÊTES OPPOSÉES SONT ÉGALES,

PAR M. ÉMILE COTTON,

Professeur au Lycée de Toulouse.

1. La représentation conforme des polyèdres, obtenue par M. Schwarz (¹), est particulièrement intéressante au point de vue de l'intégration de l'équation de Laplace. On a ainsi, en effet, un exemple d'un domaine d'intégration présentant des arêtes; ce domaine n'est pas régulièrement analytique en tous ses points.

On peut dire que les travaux de M. Schwarz résolvent le problème de l'*équilibre des températures* pour une surface polyédrale conductrice (²), la chaleur entrant ou sortant, suivant une loi déterminée, par un nombre fini de points.

Au début de cette Note (nº 2), je donne un énoncé analytique du problème du *mouvement de la chaleur* sur une surface polyédrale conductrice fermée, généralisation naturelle de la question précédente. J'établis (nº 3) que le problème ainsi posé admet au plus une solution.

Je démontre ensuite l'existence d'une solution lorsque la surface conductrice est celle d'un tétraèdre dont les arêtes opposées sont égales. La nature particulière de ce polyèdre permet alors de ramener la question à l'étude du mouvement de la chaleur sur un plan conducteur indéfini, la température étant assujettie constamment à certaines conditions de symétrie (nᵒˢ 4 et 5). Je détermine d'abord des fonctions, indépendantes du temps, analogues aux fonctions harmoniques fondamentales de M. Poincaré (nᵒˢ 6-8); ces fonctions servent à développer en série la fonction représentant la température initiale (nᵒˢ 9 et 10). On déduit de là (nº 11) la solution du problème, par une série analogue à celle donnée par Fourier pour le problème de l'Armille.

(¹) *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, I, p. 84-101 et 167-170.

(²) *Voir* KLEIN, *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen*.

2. Je donnerai d'abord un *Énoncé analytique du problème du mouvement de la chaleur* sur une surface polyédrale sans insister sur les hypothèses physiques et le choix des unités qui conduisent à cet énoncé (¹).

Considérons un domaine fermé (²) D, à deux dimensions, simplement connexe, constitué par un certain nombre de faces, unies deux à deux suivant des arêtes. Les faces sont des morceaux de surfaces régulièrement analytiques, d'ailleurs quelconques. Nous pouvons de plus imaginer que plusieurs arêtes aboutissent en un même point; autrement dit, que D présente un certain nombre de sommets.

Soit M un point arbitraire de ce domaine. On se propose de déterminer une fonction U du point M et du temps t ($t \geqq 0$) satisfaisant aux conditions suivantes :

1° U est fonction continue et finie du point M.

2° U admet en tous les points intérieurs de chaque face des dérivées partielles des deux premiers ordres finies.

3° U admet en tout point d'une arête quelconque, autre qu'un sommet, et pour les deux faces adjacentes, des dérivées finies $\frac{dU}{dn}$, $\frac{dU}{dn'}$, suivant les normales intérieures à ces faces.

4° Pour $t \geqq 0$, U est fonction continue de t, et, pour $t > 0$ admet une dérivée par rapport à t.

5° Pour tout point intérieur à une face, et pour toute valeur de $t > 0$, U satisfait à l'équation

$$\Delta_2 U = \frac{\partial U}{\partial t},$$

$\Delta_2 U$ désignant le paramètre différentiel du second ordre attaché à l'élément linéaire de la face considérée.

6° Pour tout point d'une arête, non sommet,

$$\frac{dU}{dn} + \frac{dU}{dn'} = 0.$$

7° Pour $t = 0$, U se réduit à une fonction U_0, donnée à l'avance.

3. *Le problème précédent admet au plus une solution.* — Nous l'établirons par une méthode due à M. Poincaré (³).

Supposons en effet qu'il existe deux solutions U, U'; leur différence V satisfait aux conditions précédentes, la valeur initiale V_0 de V étant nulle.

(¹) *Voir*, à ce sujet, un Mémoire de M. Poincaré (*Journal de Liouville*, 1898; p. 153).

(²) On supprime ainsi les conditions relatives à la frontière.

(³) *Théorie de la chaleur*, p. 28.

Envisageons alors l'intégrale double

$$J = \int_{D'} \frac{V^2}{2} \, d\sigma,$$

$d\sigma$ étant l'élément superficiel, l'intégration étant étendue au domaine D' constitué par toutes les faces de D isolées les unes des autres par des coupures pratiquées suivant les arêtes.

On a évidemment

$$J \geqq 0. \tag{1}$$

Considérons la dérivée $\frac{dJ}{dt}$ et transformons-la, en tenant compte de la condition 5°,

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{D'} V \frac{\partial V}{\partial t} \, d\sigma = \int_{D'} V \Delta_2 V \, d\sigma.$$

Appliquons à chacune des faces constituant D' le théorème de Green, sous la forme que lui a donnée M. Beltrami [1],

$$\frac{dJ}{dt} = -\int_{L} V \frac{dV}{dn} \, ds - \int_{D'} \Delta V \, d\sigma,$$

ds désignant l'élément linéaire d'une arête, ΔV le paramètre différentiel du premier ordre de V. La première intégrale doit être étendue à l'ensemble L des arêtes limitant les faces de D'. Chaque arête figure deux fois dans L, puisqu'elle limite deux faces, et, à cause de la condition 6°, la première intégrale est nulle. Dans la seconde, ΔV est positif ou nul. Donc

$$\frac{dJ}{dt} \leqq 0,$$

et comme, pour $t = 0$, $J = 0$,

$$J \leqq 0. \tag{2}$$

En comparant (1) et (2), on voit que J est nul, ce qui démontre la proposition énoncée plus haut.

4. Transformons maintenant le problème du n° 2, en supposant d'abord le domaine D constitué par la surface d'un tétraèdre T à faces planes.

Soient A_0, A_1, A_2, A_3 les sommets de ce tétraèdre. Pratiquons des coupures suivant les arêtes issues de A_0 et rabattons les faces adjacentes autour des arêtes A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, sur le plan de la face opposée à A_0, et à l'extérieur de cette face. Soient α_1, α_2, α_3 les rabattements de A_0.

---

(1) *Voir* DARBOUX, *Leçons sur la Théorie des surfaces*, t III, p. 200.

La figure ainsi obtenue est un hexagone H, dont les sommets sont A_1, α_3, A_2, α_1, A_3, α_2. Les côtés de cet hexagone sont deux à deux égaux.

Tout point M de la surface T coïncide, soit dès le début, soit après le rabattement, avec un point *homologue* m, intérieur à H. Un point M a, en général, un seul homologue; il y a exception : 1° pour les points P appartenant à l'une des arêtes issues de A_0, qui ont deux homologues p', p'' sur le périmètre de H (nous dirons que p', p'' sont des points *correspondants* du contour); 2° pour A_0 lui-même.

Supposons que l'on sache déterminer une fonction $U(m, t)$ possédant les propriétés suivantes :

1° $U(m, t)$ satisfait à l'intérieur de H aux mêmes conditions que $U(M, t)$ (n° 2) à l'intérieur des faces de D; 2° $U(m, t)$ est finie, admet une dérivée finie suivant la normale intérieure à H en tous les points du contour de H (les sommets exceptés); 3° en deux points correspondants du contour, les valeurs de $U(m, t)$ sont égales, les dérivées suivant les normales intérieures ont une somme nulle.

Appelons *fonctions homologues* relatives au tétraèdre T et à l'hexagone H deux fonctions définies, l'une pour T, l'autre pour H, et prenant les mêmes valeurs aux points homologues. Si l'on prend pour valeur initiale $U_0(m) = U(m, 0)$ de $U(m, t)$ la fonction homologue de $U_0(M)$ (n° 2), la fonction $U(M, t)$ homologue de la fonction $U(m, t)$ résoudra, pour le tétraèdre T, le problème du n° 2.

Nous avons transformé, en définitive, les conditions relatives à $U(M, t)$. La condition 1° du numéro actuel, imposée à $U(m, t)$, entraîne les conditions 3° et 6° du n° 2 pour la fonction homologue $U(M, t)$ et pour les arêtes A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2. Pour les arêtes issues de A_0, les conditions 3° et 6° du n° 2 sont une conséquence des conditions 2° et 3° du numéro actuel.

5. Nous pouvons transformer de même les conditions relatives au contour de H lorsque le tétraèdre a ses arêtes opposées égales. Nous supposerons désormais cette condition remplie.

Dans ce cas, deux côtés égaux quelconques de l'hexagone H sont dans le prolongement l'un de l'autre et l'hexagone se réduit au triangle $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$. Les points A_1, A_2, A_3 sont les milieux des côtés de ce triangle, et deux points correspondants du périmètre du triangle sont symétriques par rapport à l'un des points A_1, A_2, A_3.

Par une ou plusieurs symétries par rapport aux points A_1, A_2, A_3, on peut toujours faire correspondre à tout point $\mathcal{M}$ du plan un point m et un seul à l'intérieur du triangle H. A un point m correspondra d'ailleurs une infinité de points $\mathcal{M}$ formant les sommets de deux réseaux parallélogrammes.

Nous dirons qu'*une fonction définie dans le plan du triangle* H *admet les* *points* A_1, A_2, A_3 *comme centres de symétrie* si elle prend la même valeur en deux points symétriques par rapport à l'un des points A_1, A_2, A_3. Il est clair qu'une pareille fonction admet comme centres de symétrie tous les sommets du réseau de parallélogrammes construits sur le parallélogramme élémentaire $\alpha_1 A_2 A_1 A_3$.

De toute fonction $F(m)$ définie à l'intérieur de H, on peut déduire, par ces symétries, une fonction $F(\mathfrak{M})$ définie dans le plan tout entier, uniforme, admettant les centres de symétrie précédents.

Le problème du n° 4 sera résolu si nous savons trouver une fonction $U(\mathfrak{M}, t)$ jouissant des propriétés suivantes : 1° $U(\mathfrak{M}, t)$ satisfait dans tout le plan aux conditions imposées à $U(M, t)$ à l'intérieur des faces de D (n° 2); 2° $U(\mathfrak{M}, t)$ admet, quel que soit t, les points A_1, A_2, A_3 comme centres de symétrie; 3° la fonction initiale $U_0(\mathfrak{M}) = U(\mathfrak{M}, 0)$ est celle que l'on déduit de $U_0(m)$ (n° 4) par les symétries précédentes.

En effet, les conditions 1° et 2° imposées à $U(\mathfrak{M}, t)$ entraînent la condition 3° du n° 4 pour $U(m, t)$. Pour le démontrer, considérons deux points $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}'_0$ ou m_0, m'_0 du périmètre du triangle H symétriques par rapport à A_1. Les dérivées $\frac{dU(\mathfrak{M})}{dn}$, $\frac{dU(\mathfrak{M}'_0)}{dn'}$ ou $\frac{dU(m_0)}{dn}$, $\frac{dU(m'_0)}{dn'}$ existent, puisque $U(\mathfrak{M})$ admet des dérivées en tous les points du plan (conditions 1° de ce numéro et 2° du n° 2). Les normales intérieures en $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}'_0$ sont parallèles et de même sens, la relation $\frac{dU(m_0)}{dn} + \frac{dU(m'_0)}{dn'} = 0$ a lieu en vertu de la condition 2° de ce numéro.

6. Nous construirons maintenant des fonctions v, indépendantes de t, définies, continues, admettant des dérivées de tous les ordres pour tous les points du plan de H, admettant les points A_1, A_2, A_3 comme centres de symétrie, et satisfaisant à des équations de la forme

$$\Delta_2 v + k^2 v = 0,$$

k^2 étant une constante positive. Ces fonctions seront ainsi analogues aux fonctions harmoniques fondamentales de M. Poincaré [1].

Prenons, dans le plan du triangle H, deux axes Ox, Oy de coordonnées rectangulaires, soient

$$(1) \qquad P_i = x\cos\theta_i + y\sin\theta_i - p_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

les équations des côtés de ce triangle; désignons par a_1, a_2, a_3; h_1, h_2, h_3 les longueurs de ces côtés et des hauteurs correspondantes, par α_1, α_2, α_3 les angles

(1) *Théorie de la Chaleur,* Chap. XIV et XV.

opposés. On peut toujours supposer que

$$(2)\qquad \theta_2-\theta_3=\pi-\alpha_1,\qquad \theta_3-\theta_1=\pi-\alpha_2,\qquad \theta_1-\theta_2=\pi-\alpha_3,$$

et que l'on a l'identité

$$(3)\qquad a_1\mathrm{P}_1+a_2\mathrm{P}_2+a_3\mathrm{P}_3=2\mathrm{S},$$

S désignant la surface du triangle. Posons alors

$$(4)\qquad \rho_i=\frac{a_i\mathrm{P}_i}{2\mathrm{S}},\qquad \text{d'où}\qquad \mathrm{P}_i=\frac{2\mathrm{S}\rho_i}{a_i}.$$

On a

$$(5)\qquad \rho_1+\rho_2+\rho_3=1.$$

Les nombres ρ_i peuvent être considérés comme des coordonnées trilinéaires du point $\mathfrak{M}(x, y)$, par rapport au triangle H. Ils représentent le rapport des aires (affectées de signes) des triangles $\mathfrak{M}\alpha_2\alpha_3$, $\mathfrak{M}\alpha_3\alpha_1$, $\mathfrak{M}\alpha_1\alpha_2$ à l'aire du triangle H. Ce système de coordonnées présente l'avantage suivant : Si l'on effectue une transformation homographique entière amenant les points $\mathfrak{M}$, α_1, α_2, α_3 en $\mathfrak{M}'$, α'_1, α'_2, α'_3, les coordonnées ρ_1, ρ_2, ρ_3 de $\mathfrak{M}$ par rapport au triangle $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ sont égales respectivement à ρ'_1, ρ'_2, ρ'_3, coordonnées de $\mathfrak{M}'$ par rapport à $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$.

Soit alors [1]

$$(6)\qquad z=(\mu_1\rho_1+\mu_2\rho_2+\mu_3\rho_3)\pi,$$

les lettres μ désignant des constantes, et

$$(7)\qquad v=\cos z.$$

Quels que soient μ_1, μ_2, μ_3, on a, en tenant compte des relations (1) et (4),

$$(8)\qquad \Delta_2 v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-v\,\varphi(\mu_1, \mu_2, \mu_3),$$

φ désignant une forme quadratique des variables μ, que l'on peut écrire, en tenant compte de (2),

$$(9)\qquad \varphi(\mu_1, \mu_2, \mu_3)=\frac{\pi^2}{4\mathrm{S}^2}(\mu_1^2a_1^2+\mu_2^2a_2^2+\mu_3^2a_3^2-2\mu_2\mu_3a_2a_3\cos\alpha_1$$
$$-2\mu_3\mu_1a_3a_1\cos\alpha_2-2\mu_1\mu_2a_1a_2\cos\alpha_3).$$

La forme φ est positive ou nulle.

---

[1] *Voir* LAMÉ, *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur*, § 86.

Cherchons à déterminer les nombres μ de façon que v admette les points A_1, A_2, A_3 comme centres de symétrie. Pour deux points $\mathfrak{M}(P_i, \rho_i, z)$ et $\mathfrak{M}'(P'_i, \rho'_i, z')$ symétriques par rapport à A_1, on a

$$P_1 + P'_1 = 0, \qquad P_2 + P'_2 = h_2, \qquad P_3 + P'_3 = h_3,$$

d'où

$$\rho_1 + \rho'_1 = 0, \qquad \rho_2 + \rho'_2 = 1, \qquad \rho_3 + \rho'_3 = 1,$$

et

$$\cos z' = \cos[\pi(\mu_2 + \mu_3) - z].$$

Il faut donc que $\mu_2 + \mu_3$ soit un entier pair.

Il doit en être de même pour $\mu_3 + \mu_1$ et $\mu_1 + \mu_2$, donc :

La fonction $v = \cos z = \cos(\mu_1 \rho_1 + \mu_2 \rho_2 + \mu_3 \rho_3)\pi$ est une fonction harmonique fondamentale si μ_1, μ_2, μ_3 sont trois entiers de même parité.

7. On transforme l'expression de v à l'aide de l'égalité (5). En posant

$$2n_1 = \mu_1 - \mu_3, \qquad 2n_2 = \mu_2 - \mu_3,$$

n_1 et n_2 sont des entiers quelconques, et l'on a

$$v = \pm \cos 2\pi(n_1 \rho_1 + n_2 \rho_2). \tag{10}$$

A l'expression (9) de φ nous substituerons la suivante

$$\varphi(n_1, n_2) = \varphi(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \frac{\pi^2}{S^2}(n_1^2 a_1^2 + n_2^2 a_2^2 - 2 n_1 n_2 a_1 a_2 \cos\alpha_3). \tag{11}$$

Proposons-nous de ranger les fonctions v de façon que la suite correspondante des nombres φ soit une suite croissante.

Dans l'expression (10) on peut toujours supposer $n_1 \geqq 0$, n_2 étant positif, négatif ou nul. Ceci posé, prolongeons les vecteurs $\alpha_3\alpha_2$, $\alpha_1\alpha_3$; soient $\alpha_3 x$, $\alpha_3 y$ les axes ainsi obtenus. Considérons l'ensemble (E) des points P ayant pour coordonnées $x = n_1 a_1$, $y = n_2 a_2$, n_1 et n_2 étant entiers, et n_1 n'étant pas négatif. Ces points P appartiennent aux sommets du réseau de parallélogrammes construits sur le parallélogramme élémentaire $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, α_4 étant symétrique de α_2 par rapport à A_2.

A chaque point P de l'ensemble (E), nous ferons correspondre la fonction v donnée par les mêmes entiers n_1, n_2.

Dans ces conditions, la formule (11) montre que *le nombre φ relatif à une fonction v correspondant à un point P de l'ensemble* (E) *est, à un facteur constant près, égal à l'aire du cercle Γ de centre α_3 passant par* P.

Rangeons les points P de façon que les distances $\alpha_3 P$ aillent en croissant. Soient

$$P_0, \quad P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_i, \quad \ldots,$$

ces points; et

$$v_0, \quad v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_i, \quad \ldots,$$

$$\varphi_0, \quad \varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_i, \quad \ldots,$$

les fonctions v et les nombres φ correspondants. (P_0 est en α_3, v_0 est égal à 1, φ_0 est nul). Si plusieurs points distincts de (E) sont équidistants de α_3, on les range dans un ordre quelconque, mais on a toujours $\varphi_i \leqq \varphi_{i+1}$.

8. *On peut trouver un nombre fixe* C *tel que*

$$\varphi_i > C i,$$

quel que soit $i (i > 0)$. Pour le démontrer, nous établirons qu'*à l'intérieur* du cercle Γ_i correspondant au point P_i, on peut disposer i aires égales à une aire fixe σ, n'ayant entre elles aucune partie commune. Il y a une infinité de manières de réaliser cette condition; prenons, par exemple, la suivante :

De chaque point P_i de (E) comme centre, décrivons un cercle γ_i de rayon fixe, mais assez petit pour que ces cercles n'aient aucune partie commune (cela est possible, la distance de deux points P_i étant supérieure à une longueur fixe). Traçons, dans chacun des cercles γ_i, deux rayons rectangulaires, symétriques par rapport à $\alpha_3 P_i$, l'angle droit correspondant contenant α_3 à son intérieur. Faisons correspondre à chaque point P_i le secteur découpé dans le cercle γ_i par l'angle droit précédent. L'aire de ce secteur est fixe.

D'autre part le cercle Γ_i contient à son intérieur ou sur son périmètre les points $P_1, P_2, \ldots, P_i$; les i secteurs correspondants sont tous à l'intérieur de Γ_i, ce qui établit la proposition.

9. Passons au *développement d'une fonction initiale* $u_0(\mathfrak{M})$ *en série de fonctions* v_i.

Pour éviter toute difficulté, *nous supposerons que* $u_0(\mathfrak{M})$ *non seulement est finie, continue, symétrique par rapport à* A_1, A_2, A_3, *mais encore que cette fonction admet des dérivées des quatre premiers ordres continues et finies.*

Effectuons sur le plan de H une transformation homographique entière, choisie de façon que le triangle $\alpha'_1 \alpha'_2 \alpha'_3$ correspondant à $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ soit rectangle en α'_3, isoscèle, et que ses côtés égaux aient 2π pour longueur. Soit $\mathfrak{M}'$ le point correspondant à $\mathfrak{M}$, et $U_0(\mathfrak{M}')$ la fonction prenant en $\mathfrak{M}'$ la même valeur que $U_0(\mathfrak{M})$ en $\mathfrak{M}$.

Les coordonnées ρ_1, ρ_2, ρ_3 de $\mathfrak{M}'$ sont égales aux coordonnées correspondantes de $\mathfrak{M}$. Mais si nous prenons pour axes de coordonnées rectangulaires $\alpha'_3 x'$

et $\alpha'_3\alpha'_2$, et si nous désignons par x_1 et x_2 les coordonnées de $\mathfrak{M}'$ par rapport à ces axes, les formules (4) nous donnent

$$x_1 = 2\pi\rho_1, \qquad x_2 = 2\pi\rho_2,$$

et par suite l'expression des fonctions v devient

$$v = +\cos(n_1 x_1 + n_2 x_2).$$

Ceci posé, la fonction $U_0(\mathfrak{M}')$ possède, au point de vue de la continuité et des dérivées, les mêmes propriétés que $U_0(\mathfrak{M})$. Elle admet comme centres de symétrie les points A'_1, A'_2, A'_3 correspondant à A_1, A_2, A_3.

On peut exprimer analytiquement cette dernière propriété, en disant que $U_0(\mathfrak{M}')$ considérée comme fonction de x_1, x_2 ne change pas : 1° si l'on change simultanément x_1 et x_2 en $-x_1$ et $-x_2$, et 2° si l'on augmente l'une ou l'autre de ces coordonnées de 2π.

Il résulte de cette périodicité, et de l'existence des dérivées des quatre premiers ordres de $U_0(\mathfrak{M}')$, que cette fonction est développable en une série trigonométrique double, absolument et uniformément convergente [1]

$$\begin{aligned} U_0(\mathfrak{M}') + \sum_{m_1=0}^{m_1=\infty} \sum_{m_2=0}^{m_2=\infty} 2\big(& B_{m_1 m_2} \cos m_1 x_1 \cos m_2 x_2 + C_{m_1 m_2} \sin m_1 x_1 \sin m_2 x_2 \\ & + D_{m_1 m_2} \cos m_1 x_1 \sin m_2 x_2 + E_{m_1 m_2} \sin m_1 x_1 \cos m_2 x_2 \big). \end{aligned}$$

Les coefficients B, C, D, E sont donnés par des intégrales définies, qu'il est inutile d'écrire. Mais on constatera facilement sur l'expression des coefficients D et E que, U_0 ne changeant pas si l'on change x_1 et x_2 en $-x_1$ et $-x_2$, ces coefficients sont nuls.

10. Transformons alors en sommes les produits $2\cos m_1 x_1 \cos m_2 x_2$ et $2\sin m_1 x_1 \sin m_2 x_2$, il vient

$$\begin{aligned} U_0(\mathfrak{M}') = \sum_{m_1=0}^{+\infty} \sum_{m_2=0}^{+\infty} \big[& (B_{m_1 m_2} + C_{m_1 m_2}) \cos(m_1 x_1 - m_2 x_2) \\ & + (B_{m_1 m_2} - C_{m_1 m_2}) \cos(m_1 x_1 + m_2 x_2) \big]; \end{aligned}$$

cette série procède bien suivant les fonctions $v(\mathfrak{M}')$.

En changeant x_1, x_2 en $2\pi\rho_1$, $2\pi\rho_2$ on a le développement de $U_0(\mathfrak{M})$ en série, absolument et uniformément convergente, procédant suivant les fonctions v_i. On pourra ranger les termes de façon que les fonctions v_i se présentent dans l'ordre

(1) *Voir* Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 270-271.

des indices i croissants. Soit

$$(12) \qquad U_0(\mathfrak{M}) = \sum_{i=0}^{+\infty} A_i v_i$$

le développement trouvé; nous allons en déduire la solution du problème.

11. Considérons, à cet effet, la série

$$(13) \qquad U(\mathfrak{M}, t) = \sum_{i=0}^{+\infty} A_i e^{-\varphi_i t} v_i.$$

Pour toute valeur positive ou nulle de t, les termes de cette série sont, en valeur absolue, inférieurs ou égaux aux termes de même rang de la série (12). La série (13) est donc, dans ces conditions, absolument et uniformément convergente.

La fonction $U(\mathfrak{M}, t)$ ainsi définie est fonction continue de $t(t \geqq 0)$ et *se réduit bien pour $t = 0$ à la fonction donnée* $U_0(\mathfrak{M})$; elle satisfait visiblement aux conditions de symétrie du n° 5. Nous allons montrer qu'elle satisfait, pour toute valeur positive de t, à l'équation

$$(14) \qquad \Delta_2 U = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Nous ne considérerons plus, désormais, que des valeurs de t supérieures à un nombre positif t_0 donné à l'avance, d'ailleurs quelconque. Reprenons les axes Ox, Oy du n° 6. Soient x, y les coordonnées de $\mathfrak{M}$. Montrons que *la fonction* (13) *admet par rapport à t, x, y, pour des valeurs finies quelconques de x et y, et pour $t > t_0$, des dérivées partielles de tous ordres que l'on peut obtenir en dérivant terme à terme la série* (13).

Il résulte du n° 10 que l'on peut assigner un nombre K fixe, tel que, quel que soit i,

$$|A_i| < K.$$

Soit

$$\begin{aligned} v_i &= \pm \cos 2(n_1 \rho_1 + n_2 \rho_2)\pi \\ &= \pm \cos \left[\frac{\pi}{S} n_1 a_1 (x \cos\theta_1 + y \sin\theta_1 - p_1) + \frac{\pi}{S} n_2 a_2 (x \cos\theta_2 + y \sin\theta_2 - p_2) \right]. \end{aligned}$$

Considérons la série

$$(15) \qquad \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\partial^{l+q+r}(A_i e^{-\varphi_i t} v_i)}{\partial t^l \, \partial x^q \, \partial y^r}$$

formée par les dérivées des termes de la série (13).

On a

$$\frac{\partial^{l+q+r}(\mathrm{A}_i e^{-\varphi_i t} v_i)}{\partial t^l\, \partial x^q\, \partial q^r} = \pm \mathrm{A}_i(-1)^l \varphi_i^l \left[\frac{(n_1 a_1 \cos\theta_1 + n_2 a_2 \cos\theta_2)\pi}{\mathrm{S}}\right]^q$$

$$\times \left[\frac{(n_1 a_1 \sin\theta_1 + n_2 a_2 \sin\theta_2)\pi}{\mathrm{S}}\right]^r e^{-\varphi_i t} \cos 2\left(n_1\rho_1 + n_2\rho_2 + \frac{q+r}{4}\right)\pi.$$

Or la somme des carrés des expressions

$$\frac{(n_1 a_1 \cos\theta_1 + n_2 a_2 \cos\theta_2)\pi}{\mathrm{S}} \quad \text{et} \quad \frac{(n_1 a_1 \sin\theta_1 + n_2 a_2 \sin\theta_2)\pi}{\mathrm{S}}$$

est égale à φ_i, la valeur absolue de chacune de ces expressions est inférieure à $\varphi_i^{\frac{1}{2}}$. Il résulte de là, que

$$\left|\frac{\partial^{l+q+r}(\mathrm{A}_i e^{-\varphi_i t} v_i)}{\partial t^l\, \partial x^q\, \partial y^r}\right| < \mathrm{K}\, \varphi_i^{l+\frac{q+r}{2}} e^{-\varphi_i t_0},$$

pour $t > t_0$.

Soit $p = l + \frac{q+r}{2}$, la série à termes positifs (1)

$$(16) \qquad \sum_{i=0}^{+\infty} \varphi_i^p e^{-\varphi_i t_0}$$

est convergente. En effet, l'inégalité $\mathrm{C}_i < \varphi_i$ du n° 8 nous donne

$$i^2 \varphi_i^p e^{-\varphi_i t_0} < \frac{\varphi_i^{p+2}}{\mathrm{C}^2} e^{-\varphi_i t_0},$$

et comme $\varphi_i^{p+2} e^{-\varphi_i t_0}$ tend vers o quand i devient infini, il en est de même du premier membre de cette inégalité. La série (16) est donc convergente; *la série* (15) *est donc absolument et uniformément convergente.*

Dans les conditions indiquées, la fonction $\mathrm{U}(\mathfrak{M}, t)$ admet donc des dérivées $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y^2}$, que l'on obtient en dérivant la série (13) terme à terme.

Chacun des termes de (13) vérifiant l'équation (14), la fonction $\mathrm{U}(\mathfrak{M}, t)$ satisfait à cette équation. *Le problème est bien résolu.*

Je ne chercherai pas ici à supprimer les restrictions imposées à la fonction initiale $\mathrm{U}_0(\mathfrak{M})$ au n° 9, restrictions qui ne sont nullement nécessaires. Je me con-

(1) *Voir* la Thèse de M. Le Roy, n° 82.

tente également d'ajouter que les fonctions $v_i(\mathfrak{M})$ permettent de définir des fonctions $v_i(M)$ à la surface du tétraèdre initial, telles que les coefficients A_i de la série (13) donnant la solution s'expriment au moyen d'intégrales

$$\int_T U_0(M)\, v_i(M)\, d\sigma$$

étendues à la surface T du tétraèdre initial.

J'ajoute qu'il semble possible d'établir l'existence de fonctions analogues aux fonctions v_i, et d'une solution du problème du n° 2, pour un tétraèdre ou un polyèdre quelconque à faces planes; mais le nombre des polyèdres pour lesquels on peut effectivement construire la solution paraît très restreint.