ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

P. DUHEM

Recherches sur l'hydrodynamique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 5, nº 2 (1903), p. 197-255
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1903_2_5_2_197_0>

RECHERCHES SUR L'HYDRODYNAMIQUE,

PAR M. P. DUHEM.

QUATRIÈME PARTIE.

DES CONDITIONS AUX LIMITES.

(SUITE ET FIN.)

CHAPITRE III.

DU RÉGIME PERMANENT AU SEIN D'UN FLUIDE VISQUEUX.

§ 1. — LA CONDITION D'ADHÉRENCE DOIT ÊTRE ASSIMILÉE A L'INTRODUCTION DE NOUVELLES LIAISONS. — ÉNONCÉ ET DÉMONSTRATION D'UN LEMME (1).

Lorsque deux fluides ne peuvent glisser l'un sur l'autre, lorsqu'un fluide ne peut glisser sur un solide, doit-on traiter le système où deux corps adhèrent entre eux comme on traitait le système où ces corps glissaient l'un sur l'autre, en égalant simplement à o la vitesse relative le long de la surface de contact? Doit-on au contraire regarder le nouveau système comme différant du premier par l'introduction de nouvelles liaisons? Les deux manières de voir sont plausibles, bien que la seconde paraisse plus logique.

Ces deux manières de voir ne sont pas équivalentes; la première exige que le vecteur (p_x, p_y, p_z) aboutisse normalement à la surface de contact, ce que la seconde n'exige pas.

Une ambiguïté analogue s'est présentée dans l'étude du frottement de deux solides l'un sur l'autre; dans ce cas, la première manière de voir a dû être rejetée; elle aurait introduit plus de conditions que le problème ne comportait d'inconnues.

N'en serait-il pas de même dans la question qui nous a occupé au Chapitre précédent? C'est ce que nous nous proposons d'examiner en celui-ci.

Dans ce but, nous allons établir un LEMME QUI EST VALABLE SEULEMENT DANS L'HYPOTHÈSE OU L'ADHÉRENCE D'UN FLUIDE A UN SOLIDE ENTRAINE LA PERPENDICULARITÉ DU VECTEUR (p_x, p_y, p_z) A LA SURFACE DU SOLIDE.

(1) *Sur certains cas d'adhérence d'un liquide visqueux aux solides qu'il baigne* (*Comptes rendus*, t. CXXXIV, p. 265; 3 février 1902).

Voici l'énoncé de ce lemme :

Si un fluide visqueux et non compressible adhère à un corps solide, les six quantités

$$(89)\quad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{array}\right.$$

s'annulent aux points du fluide qui sont infiniment voisins de la surface du solide.

Soient, en effet, u', v', w', les trois composantes de la vitesse en un point du solide ; nous aurons

$$\begin{aligned} u' &= \mathrm{U} - \Omega_z y + \Omega_y z, \\ v' &= \mathrm{V} - \Omega_x z + \Omega_z x, \\ w' &= \mathrm{W} - \Omega_y x + \Omega_x y, \end{aligned}$$

U, V, W, Ω_x, Ω_y, Ω_z étant trois quantités qui dépendent exclusivement de t.

S'il y a adhérence du fluide au solide, nous avons, en tout point de leur commune surface,

$$u - u' = 0, \qquad v - v' = 0, \qquad w - w' = 0.$$

Les trois fonctions

$$\begin{aligned} f &= u - \mathrm{U} + \Omega_z y - \Omega_y z, \\ g &= v - \mathrm{V} + \Omega_x z - \Omega_z x, \\ h &= w - \mathrm{W} + \Omega_y x - \Omega_x y \end{aligned}$$

s'annulent donc en tous les points de la surface ; partant, on peut trouver, en chaque point de cette surface, un vecteur F, G, H, tel que l'on ait

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \alpha \mathrm{F}, & \dfrac{\partial f}{dy} = \beta \mathrm{F}, & \dfrac{\partial f}{\partial z} = \gamma \mathrm{F}, \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} = \alpha \mathrm{G}, & \dfrac{\partial g}{\partial y} = \beta \mathrm{G}, & \dfrac{\partial g}{\partial z} = \gamma \mathrm{G}, \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} = \alpha \mathrm{H}, & \dfrac{\partial h}{\partial y} = \beta \mathrm{H}, & \dfrac{\partial h}{\partial z} = \gamma \mathrm{H}, \end{array}$$

égalités qui peuvent encore s'écrire

$$(90)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \alpha \mathrm{F}, & \dfrac{\partial u}{\partial y} = \beta \mathrm{F} - \Omega_z, & \dfrac{\partial u}{\partial z} = \gamma \mathrm{F} + \Omega_y, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \alpha \mathrm{G} + \Omega_z, & \dfrac{\partial v}{\partial y} = \beta \mathrm{G}, & \dfrac{\partial v}{\partial z} = \gamma \mathrm{G} - \Omega_x, \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = \alpha \mathrm{H} - \Omega_y, & \dfrac{\partial w}{\partial y} = \beta \mathrm{H} + \Omega_x, & \dfrac{\partial w}{\partial z} = \gamma \mathrm{H}. \end{array}\right.$$

Dans ces égalités, on a posé

$$\cos(n_i, x) = \alpha, \qquad \cos(n_i, y) = \beta \qquad \cos(n_i, z) = \gamma.$$

Ces égalités nous donnent les expressions suivantes des six quantités (89) :

$$(91) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha F, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \beta G, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = \gamma H, \\ &\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma G + \beta H, \\ &\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \alpha H + \gamma F, \\ &\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \beta F + \alpha G. \end{aligned} \right.$$

Les trois premières égalités (91) donnent

$$(92) \qquad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} = \alpha F + \beta G + \gamma H.$$

Les égalités (43) et (44) transforment les égalités (51) de la I$^{\text{e}}$ Partie de ces *Recherches* en

$$(93) \quad \left\{ \begin{aligned} \nu_x &= -\lambda(\alpha F + \beta G + \gamma H) - 2\mu\alpha F, \\ \nu_y &= -\lambda(\alpha F + \beta G + \gamma H) - 2\mu\beta G, \\ \nu_z &= -\lambda(\alpha F + \beta G + \gamma H) - 2\mu\gamma H, \\ \tau_x &= -\mu(\gamma G + \beta H), \\ \tau_y &= -\mu(\alpha H + \gamma F), \\ \tau_z &= -\mu(\beta F + \alpha G). \end{aligned} \right.$$

Les égalités (48) de la première partie deviennent alors

$$(94) \quad \left\{ \begin{aligned} p_x &= (\lambda + \mu)\alpha(\alpha F + \beta G + \gamma H) + \mu F, \\ p_y &= (\lambda + \mu)\beta(\alpha F + \beta G + \gamma H) + \mu G, \\ p_z &= (\lambda + \mu)\gamma(\alpha F + \beta G + \gamma H) + \mu H. \end{aligned} \right.$$

Mais, si le fluide adhère au solide, le vecteur (p_x, p_y, p_z) doit être normal à la surface de contact; on doit donc avoir :

$$\begin{aligned} \beta p_z - \gamma p_y &= 0, \\ \gamma p_x - \alpha p_z &= 0, \\ \alpha p_y - \beta p_x &= 0; \end{aligned}$$

ou bien

$$\beta H - \gamma G = 0,$$

$$\gamma F - \alpha H = 0,$$

$$\alpha G - \beta F = 0;$$

ou enfin

$$F = K\alpha, \qquad G = K\beta, \qquad H = K\gamma, \tag{95}$$

K étant une quantité variable d'un point à l'autre de la surface.

D'ailleurs, les égalités (92) et (95) donnent

$$\theta = K. \tag{96}$$

Ce que nous avons écrit jusqu'ici s'applique aussi bien aux fluides compressibles qu'aux liquides incompressibles; si nous restreignons dorénavant notre analyse à ces derniers, nous devrons écrire $\theta = 0$, partant, selon l'égalité (96),

$$K = 0. \tag{97}$$

Alors, des égalités (91) et (95), découlera le lemme énoncé.

En outre, les égalités (90), (95) et (96) donneront, en tout point de la surface de contact du solide et du liquide

$$\left\{\begin{aligned} \omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\Omega_x, \\ \omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2\Omega_y, \\ \omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\Omega_z. \end{aligned}\right. \tag{98}$$

Supposons, en particulier, le solide immobile ou animé d'un simple mouvement de translation; nous aurons

$$\Omega_x = 0, \qquad \Omega_y = 0, \qquad \Omega_z = 0$$

et, selon les égalités (98),

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Ce résultat, joint au lemme précédent, conduit à la proposition suivante :

Si un fluide visqueux et incompressible adhère à un solide, et si ce solide est immobile ou animé d'un simple mouvement de translation, on a, en tout *point de la surface commune aux deux corps,*

$$(99)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=0, & \dfrac{\partial u}{\partial y}=0, & \dfrac{\partial u}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=0, & \dfrac{\partial v}{\partial y}=0, & \dfrac{\partial v}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial x}=0, & \dfrac{\partial w}{\partial y}=0, & \dfrac{\partial w}{\partial z}=0. \end{cases}$$

§ 2. — Écoulement permanent d'un liquide, de profondeur et de hauteur infinies, coulant entre des parois verticales.

Nous nous occuperons exclusivement de *liquides,* c'est-à-dire de fluides incompressibles; nous supposerons que la température garde une valeur uniforme et constante dans toute l'étendue du fluide. Nous nous trouverons alors (Ire Partie, Chap. III. § 2) dans un cas où il existe une fonction $\Lambda(x, y, z, t)$ permettant de mettre les équations de l'Hydrodynamique sous la forme [*loc. cit.*, égalités (157)]

$$(100)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Lambda}{\partial x} + \gamma_x - \dfrac{q_x}{\rho}, \\ \dfrac{\partial \Lambda}{\partial y} + \gamma_y - \dfrac{q_y}{\rho}, \\ \dfrac{\partial \Lambda}{\partial z} + \gamma_z - \dfrac{q_z}{\rho}, \end{cases}$$

et cette fonction Λ sera donnée par l'égalité [*loc. cit.,* égalité (158)]

$$(101)\quad \Lambda(x, y, z, t) = V_i + V_e + \frac{\Pi}{\rho}.$$

Dans le présent Chapitre, nous nous proposions d'étudier un *écoulement permanent,* c'est-à-dire un écoulement où les composantes u, v, w de la vitesse dépendent de x, y, z, mais point de t; dans un tel écoulement, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t}=0, \qquad \frac{\partial w}{\partial t}=0,$$

partant,

$$\gamma_x = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\gamma_y = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\gamma_z = u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

D'autre part, en un fluide incompressible où

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

est toujours nul, où ρ a partout la même valeur, où, en outre, d'après les hypothèses faites, T a une valeur uniforme, on a [Ire Partie, égalités (58)]

$$q_x = \mu\,\Delta u, \qquad q_y = \mu\,\Delta v, \qquad q_z = \mu\,\Delta w.$$

Les équations (100) deviennent donc, pour les mouvements que nous avons en vue d'étudier,

$$(100\ bis)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Lambda}{\partial x} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\mu}{\rho}\Delta u = 0, \\ \dfrac{\partial \Lambda}{\partial y} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\mu}{\rho}\Delta v = 0, \\ \dfrac{\partial \Lambda}{\partial z} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} - \dfrac{\mu}{\rho}\Delta w = 0. \end{cases}$$

A ces équations, il faut joindre l'équation de continuité

$$(101\ bis)\qquad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Le fluide dont nous étudierons le régime permanent sera supposé illimité aussi bien dans le sens des z positifs que dans le sens des z négatifs; les parois du canal dans lequel il se meut seront des cylindres dont les génératrices seront parallèles à Oz. La vitesse de chaque point matériel appartenant au fluide sera supposée parallèle au plan des x, y, z, en sorte que l'on aura

$$w = 0.$$

Enfin, u, v seront supposés indépendants de z.

Le canal s'étendra à l'infini, aussi bien en amont qu'en aval. A cet égard nous ferons les hypothèses suivantes :

Si l'on désigne par l la distance d'un point du plan des x, y à l'origine des coordonnées, lorsque l croît au delà de toute limite :

Les parois cylindriques du canal s'écartent infiniment; la largeur du canal croît au delà de toute limite;

Les composantes u, v de la vitesse et toutes leurs dérivées partielles tendent vers 0;

Les produits lu, lv, $l^2\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $l^2\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $l^2\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $l^2\dfrac{\partial v}{\partial y}$, ne croissent pas au delà de toute limite.

Les équations (100 *bis*) deviennent

$$(102)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Lambda}{\partial x}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\mu}{\rho}\Delta u=0, \\ \dfrac{\partial \Lambda}{\partial y}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\mu}{\rho}\Delta v=0, \\ \dfrac{\partial \Lambda}{\partial z}=0, \end{cases}$$

tandis que l'équation de continuité (101 *bis*) devient

$$(103)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

En vertu de cette égalité (103), il existe une fonction $\varphi(x, y)$ telle que l'on ait

$$(104)\qquad u=\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}, \qquad v=-\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}.$$

Si nous reportons ces valeurs de u et de v dans les deux premières égalités (102), elles deviennent

$$(105)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Lambda}{\partial x}+\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial x\,\partial y}-\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}-\dfrac{\mu}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi=0, \\ \dfrac{\partial \Lambda}{\partial y}-\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}+\dfrac{\mu}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi=0. \end{cases}$$

De ces deux égalités, il est aisé de tirer une troisième relation où ne figure plus que la fonction inconnue φ. En effet, différentions la première égalité (105) par rapport à y, la seconde par rapport à x et retranchons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons

$$(106)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi-\frac{\mu}{\rho}\Delta\Delta\varphi=0.$$

Traçons une circonférence de rayon l, ayant pour centre l'origine des coordonnées et située dans le plan des x, y. Soit σ la partie comprise à l'intérieur de cette circonférence, du plan des x, y que recouvre le fluide. Considérons l'intégrale

$$(107)\qquad \mathrm{J}=\int_\sigma \Delta\varphi\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi\right]d\sigma$$

que l'on peut encore écrire

$$(107\ bis)\qquad J = \int_\sigma \Delta\varphi \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\Delta\varphi\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Delta\varphi\right)\right] d\sigma.$$

Transformons-la au moyen d'une intégration par parties.

Soient :

L, le contour de l'aire σ,
n_i, la normale au contour L vers l'intérieur de l'aire σ,

$$\alpha = \cos(n_i, x), \qquad \beta = \cos(n_i, y).$$

Nous aurons

$$J = -\int_L (\Delta\varphi)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\beta\right) dL - \int_\sigma \Delta\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi\right) d\sigma.$$

Mais, selon l'égalité (107), la seconde intégrale n'est autre que J ; nous trouvons donc

$$(108)\qquad 2J = -\int_L (\Delta\varphi)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\beta\right) dL.$$

D'autre part, nous avons

$$(109)\qquad \int_\sigma \Delta\varphi\, \Delta\Delta\varphi\, d\sigma = -\int_L \Delta\varphi \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial n_i} dL - \int_\sigma \left[\left(\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial y}\right)^2\right] d\sigma.$$

Les égalités (106), (107), (108), (109) donnent sans peine

$$(110)\qquad \frac{\mu}{\rho}\int_\sigma \left[\left(\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial y}\right)^2\right] d\sigma = \int_L \Delta\varphi \left[\frac{\Delta\varphi}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\beta\right) - \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial n_i}\right] dL.$$

Le contour L se compose de trois parties :

1° Une partie λ qui coupe le canal en amont ;

2° Une partie λ' qui coupe le canal en aval ;

3° Une partie qui est la section des parois du canal par le plan des x, y.

Tout le long de cette dernière partie, *si le liquide adhère au solide et si l'on admet l'hypothèse énoncée au* § 1, on a, en vertu des égalités (99),

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

partant

$$\Delta\varphi = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Nous pouvons donc écrire

$$(111)\quad \frac{\mu}{\rho}\int_\sigma\left[\left(\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial y}\right)^2\right]d\sigma = \int_\lambda \Delta\varphi\left[\frac{\Delta\varphi}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\alpha-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\beta\right)-\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial n_i}\right]d\lambda$$
$$+\int_{\lambda'} \Delta\varphi\left[\frac{\Delta\varphi}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\alpha-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\beta\right)-\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial n_i}\right]d\lambda'.$$

Faisons maintenant croître au delà de toute limite le rayon l. D'après les hypothèses faites, chacun des deux termes du second membre tend vers o. Il en est donc de même du premier.

Mais, au premier membre, la quantité sous le signe $\int$ n'est jamais négative; le premier membre n'est donc jamais négatif et il ne peut décroître lorsque l croît; il ne peut donc avoir o pour limite que s'il est constamment nul. Cela exige que l'on ait, en tout point du fluide,

$$\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial y}=0.$$

D'ailleurs, nous avons vu, il y a un instant, que l'on avait, sur les parois,

$$\Delta\varphi=0.$$

On a donc, dans tout le fluide,

$$(112)\qquad \Delta\varphi=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

Nous voyons alors qu'il existe une fonction $\psi(x,y)$ telle que l'on ait

$$(113)\qquad u=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad v=-\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

La condition de continuité (103) nous montre que cette fonction vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta\psi=0.$$

Il en est nécessairement de même de ses dérivées partielles u et v, en sorte que, dans toute la partie du plan des x, y recouverte par le fluide, on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Le long de l'intersection des parois du canal avec le plan des x, y, on a les égalités (99), partant les égalités

$$u = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\beta = \frac{\partial u}{\partial n_i} = 0,$$

$$v = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\beta = \frac{\partial v}{\partial n_i} = 0.$$

Si l'on observe en outre que

$$lu, \quad lv, \quad l^2\frac{\partial u}{\partial x}, \quad l^2\frac{\partial u}{\partial y}, \quad l^2\frac{\partial v}{\partial x}, \quad l^2\frac{\partial v}{\partial y}$$

tendent vers des limites finies lorsque, dans le plan des x, y, le point (x, y) s'éloigne à une distance infinie l de l'origine, on voit que l'on a nécessairement, dans tout l'espace occupé par le fluide,

$$(114) \qquad u = 0, \qquad v = 0.$$

Le fluide ne peut présenter d'autre régime permanent que le repos.

Mais ces égalités (114), reportées dans les égalités (102), exigent que l'on ait

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Lambda}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0,$$

égalités qui sont les conditions d'équilibre de la masse fluide. Si nous supposons que l'on dispose de la pression Π de telle sorte que les deux premières ne soient pas vérifiées, le repos sera impossible et nous nous heurterons à une contradiction.

§ 3. — Un cylindre indéfini, au sein d'un fluide indéfini, éprouve un mouvement uniforme dans une direction perpendiculaire aux génératrices [1].

Une analyse très voisine de la précédente va nous permettre de traiter un problème dont un cas particulier a été examiné par Stokes.

Un cylindre indéfini, dont les génératrices sont parallèles à Oz, est animé parallèlement à Ox d'une translation uniforme de vitesse U. Il est plongé dans un fluide visqueux indéfini *qui adhère à sa surface*. Le mouvement dure depuis très longtemps, de sorte que *l'état du fluide, rapporté à un système d'axes coordonnés invariablement lié au cylindre, est un état de régime permanent.* On suppose chaque particule fluide animée d'une vitesse normale à Oz et indépendante de z

$$(115) \qquad w = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

---

(1) *Sur certains cas d'adhérence d'un liquide visqueux aux solides qu'il baigne* (*Comptes rendus*, t. CXXXIV, p. 265; 3 février 1902).

Si l est la distance d'un point à l'axe des z, on suppose que, lorsque l croît au delà de toute limite, u, v et toutes leurs dérivées partielles tendent vers o et que

$$lu, \quad lv, \quad l^2\frac{\partial u}{\partial x}, \quad l^2\frac{\partial u}{\partial y}, \quad l^2\frac{\partial v}{\partial x}, \quad l^2\frac{\partial v}{\partial y}$$

ne croissent pas au delà de toute limite.

D'après l'une des hypothèses faites, chacune des composantes u et v de la vitesse doit avoir la même valeur, à l'instant t, au point dont les coordonnées sont x, y et, à l'instant t', au point dont les coordonnées sont $x' = x + \mathrm{U}(t' - t)$, $y' = y$, c'est-à-dire que u et v ne dépendent de x et de t que par le binome $(x - \mathrm{U}t)$, ce qui permet d'écrire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\mathrm{U}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -\mathrm{U}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{116}$$

Moyennant les égalités (115) et (116), les équations (100 *bis*) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Lambda}{\partial x} + (u - \mathrm{U})\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\mu}{\rho}\Delta u = 0, \\ &\frac{\partial \Lambda}{\partial y} + (u - \mathrm{U})\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\mu}{\rho}\Delta v = 0, \\ &\frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right. \tag{117}$$

tandis que l'équation de continuité (101 *bis*) reprend la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{103}$$

Il existe donc une fonction $\varphi(x - \mathrm{U}t, y)$ telle que l'on ait

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{104}$$

en sorte que les deux premières égalités (117) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi = 0, \\ &\frac{\partial \Lambda}{\partial y} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi = 0. \end{aligned}\right. \tag{118}$$

Différentions la première de ces équations (118) par rapport à y, la seconde par rapport à x et retranchons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons que la fonction φ doit vérifier l'équation

$$(119) \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi - \frac{\mu}{\rho}\Delta\Delta\varphi = 0.$$

Dans le plan des x, y, la section du cylindre a pour contour L; dans ce plan, de l'origine des coordonnées pour centre, et avec un rayon l, décrivons une circonférence de cercle λ; prenons l assez grand pour que le contour L soit, en entier, à l'intérieur du cercle; soit σ l'aire comprise entre les contours L et λ.

L'égalité (119) nous permet d'écrire

$$(120) \qquad \int_\sigma \Delta\varphi\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi - \frac{\mu}{\rho}\Delta\Delta\varphi\right]d\sigma = 0.$$

Considérons l'intégrale

$$(121) \qquad \mathrm{J} = \int_\sigma \Delta\varphi\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi\right]d\sigma.$$

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\mathrm{J} = {} & \int_\sigma \Delta\varphi\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\Delta\varphi\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta\varphi\right)\right\}d\sigma \\
= {} & -\int_{\mathrm{L}} (\Delta\varphi)^2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\beta\right]d\mathrm{L} \\
& -\int_\lambda (\Delta\varphi)^2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\beta\right]d\lambda \\
& -\int_\sigma \Delta\varphi\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\frac{\partial}{\partial x}\Delta\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\varphi\right]d\sigma.
\end{aligned}$$

Mais, selon l'égalité (121), la dernière intégrale est précisément J; nous trouvons donc

$$(122) \qquad \begin{aligned}
\mathrm{J} = {} & -\frac{1}{2}\int_{\mathrm{L}} (\Delta\varphi)^2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\beta\right]d\mathrm{L} \\
& -\frac{1}{2}\int_\lambda (\Delta\varphi)^2\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\beta\right]d\lambda.
\end{aligned}$$

Les égalités (120), (121) et (122) donnent sans peine

$$(123) \qquad \begin{aligned}
& \frac{\mu}{\rho}\int_\sigma \left[\left(\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial y}\right)^2\right]d\sigma \\
& \quad = \int_{\mathrm{L}} \Delta\varphi\left\{\frac{\Delta\varphi}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\beta\right] - \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial n_i}\right\}d\mathrm{L} \\
& \qquad + \int_\lambda \Delta\varphi\left\{\frac{\Delta\varphi}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathrm{U}\right)\alpha - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\beta\right] - \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial\,\Delta\varphi}{\partial n_i}\right\}d\lambda,
\end{aligned}$$

Au second membre de cette égalité (123), la première intégrale est nulle en vertu des égalités (99), en sorte que ce second membre se réduit à la seconde intégrale.

Faisons croître le rayon l au delà de toute limite. Visiblement, en vertu des hypothèses faites, cette seconde intégrale tend vers o. Il en doit donc être de même du premier membre de l'équation (123). Or, cela n'est possible que si l'on a, en tout point de l'aire σ,

$$\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial y} = 0;$$

et comme on a, en tout point du contour L, en vertu des égalités (99),

$$\Delta\varphi = 0,$$

on doit avoir aussi, en tout point du plan des x, y extérieur au contour L,

(124) $$\Delta\varphi = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Il doit donc exister, en tout point des x, y extérieur au contour L, une fonction ψ telle que

(125) $$u = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

cette fonction pouvant d'ailleurs n'être pas uniforme. Selon l'égalité (103), cette fonction vérifierait l'équation de Laplace et il en serait de même de u :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Mais u est une fonction uniforme; elle s'annule à l'infini; en tout point du contour L on a, selon les égalités (99),

(126) $$\frac{\partial u}{\partial n_i} = \frac{\partial u}{\partial x}\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\beta = 0.$$

La fonction u doit donc être nulle dans tout le fluide, ce qui est impossible puisque l'on doit avoir, en tout point du contour L,

(127) $$u = U.$$

Stokes (¹) avait déjà traité ce problème dans le cas particulier où le cylindre est à section circulaire. Il était également parvenu à cette conséquence que le régime permanent considéré ne peut s'établir; mais, pour obtenir ce résultat, il avait uniquement fait usage de l'égalité (127); il n'avait pas invoqué les égalités (99), nécessaires pour que le vecteur (p_x, p_y, p_z) soit normal à la surface du cylindre. Le raisonnement qu'il a suivi pourrait donner prise à certaines critiques.

En effet, si l'analyse exposée en ce paragraphe et au paragraphe précédent aboutit à des contradictions, elle le doit à l'emploi des équations (99), c'est-à-dire, en dernière analyse, à l'hypothèse que le vecteur $(p_x. p_y, p_z)$ aboutit normalement à la surface le long de laquelle le fluide adhère au solide.

Si nous regardons cette adhérence comme constituant une liaison nouvelle, rien n'oblige plus le vecteur (p_x, p_y, p_z) à aboutir normalement à la surface d'adhérence; les impossibilités que nous venons de signaler disparaissent alors d'elles-mêmes. Nous sommes donc contraints d'adopter cette supposition dans l'étude du frottement des fluides sur les solides, comme nous l'avons adoptée dans l'étude du frottement des solides entre eux. Par là, toute ambiguïté se trouve levée dans l'établissement des conditions aux limites.

Nous allons faire usage de ces conditions pour traiter quelques problèmes très simples relatifs au régime permanent des fluides incompressibles de température uniforme. Nous aurons de nouveau occasion de constater que le vecteur (p_x, p_y, p_z) ne peut aboutir normalement aux surfaces d'adhérence.

§ 4. — De l'écoulement permanent par filets parallèles.

Le cas le plus simple, que nous allons étudier tout d'abord, est celui du mouvement permanent *par filets parallèles;* on nomme ainsi un mouvement où toutes les vitesses sont constamment parallèles à une droite fixe que nous pouvons prendre pour axe des z. Cette hypothèse s'exprime par les égalités

$$u = 0, \qquad v = 0. \tag{128}$$

Moyennant ces égalités, l'équation de continuité (101 *bis*) se réduit à $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$; elle nous enseigne que w est une simple fonction de x et de y:

$$w = w(x, y). \tag{129}$$

(¹) Stokes, *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums* (*Transactions of the Cambridge philosophical Society*, vol. IX, p. 8; 9 décembre 1850; Part I, Section IV, nos 45 à 48. — *Mathematical and physical Papers*, vol. III, p. 62. — *Collection de Mémoires publiés par la Société française de Physique*, t. V, p. 344).

Les deux premières égalités (100 *bis*), réduites à

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Lambda}{\partial y} = 0,$$

nous enseignent que Λ est une simple fonction de z :

(130) $$\Lambda = \Lambda(z).$$

Quant à la dernière égalité (100 *bis*), elle devient

(131) $$\frac{d\Lambda(z)}{dz} - \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Les équations (129) et (131) nous apprennent que $\frac{d\Lambda(z)}{dz}$ ne dépend pas de z, partant, que Λ est une fonction linéaire de z; soient Λ_0, Λ_1 les valeurs que prend cette fonction lorsqu'on donne à z les valeurs z_0, z_1. L'égalité (131) deviendra alors

(132) $$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\rho}{\mu}\,\frac{\Lambda_1 - \Lambda_0}{z_1 - z_0}.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles dont dépend l'étude du mouvement permanent par filets parallèles; elle a été donnée par Navier ([1]).

Pour compléter la mise en équations du problème, il convient de joindre à l'équation précédente les conditions qui doivent être vérifiées le long de la surface du solide où le fluide est contenu. Cette surface ne peut être, d'ailleurs, qu'une surface cylindrique dont les génératrices soient parallèles à Oz.

Selon les égalités (128) et (129), les égalités (51) de la I^re Partie de ces *Recherches* deviennent

(133) $$\left\{\begin{array}{lll} \nu_x = 0, & \nu_y = 0, & \nu_z = 0, \\ \tau_x = -\mu\dfrac{\partial w}{\partial y}, & \tau_y = -\mu\dfrac{\partial w}{\partial x}, & \tau_z = 0. \end{array}\right.$$

Si n_i est la normale à la surface limite dirigée vers l'intérieur du fluide, nous aurons $\cos(n_i, z) = 0$ et les égalités (133), jointes aux égalités (48) de la première partie, donneront

(134) $$p_x = 0, \qquad p_y = 0, \qquad p_z = \mu\frac{\partial w}{\partial n_i}.$$

([1]) NAVIER, *Mémoire sur les lois de l'écoulement des fluides,* lu à l'Académie royale des Sciences le 18 mars 1822 (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* année 1823, p. 417).

Les conditions aux limites sont de formes différentes selon que le liquide glisse ou ne glisse pas à la surface du solide.

Supposons d'abord que le fluide glisse à la surface du solide. Les conditions à vérifier seront les conditions (80). Mais l'égalité (85), jointe aux égalités (134) que nous venons d'écrire, donne

$$\Pi - \varpi = 0.$$

On voit alors que les deux premières égalités (80) deviennent deux identités, tandis que la troisième devient

$$\mu \frac{\partial w}{\partial n_i} = -\left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|w|}\right) w. \tag{135}$$

Si nous supposons que f et $\mathfrak{G}$ soient deux constantes, rien, dans les conditions (132) et (135), ne dépendra plus de la variable z et le problème auquel nous sommes amenés pourra s'énoncer de la manière suivante :

Soient σ la section droite du cylindre et L la ligne qui sert de contour à cette section droite ; la direction n_i sera normale à la ligne L, menée dans le plan de l'aire σ et vers l'intérieur de cette aire.

Il s'agit de trouver une fonction $w(x, y)$ qui vérifie la condition (132) en tout point de l'aire σ et la condition (135) en tout point du contour L.

Le sens positif de l'axe des z est arbitraire. Choisissons ce sens de telle sorte que Λ soit une fonction croissante de z ; $\frac{\rho}{\mu} \frac{\Lambda_1 - \Lambda_0}{z_1 - z_0}$ sera alors une quantité positive que nous désignerons par K^2 :

$$\frac{\rho}{\mu} \frac{\Lambda_1 - \Lambda_0}{z_1 - z_0} = K^2. \tag{136}$$

L'équation (132) deviendra

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = K^2. \tag{132 bis}$$

Je dis que la fonction $w(x, y)$, continue en tout point de l'aire σ, ne peut être positive en aucun point de cette aire.

Supposons, en effet, qu'elle puisse être positive en certains points de l'aire σ; comme elle ne peut être infinie, elle admettrait une limite supérieure positive et, comme elle est fonction continue de x et de y, elle atteindrait sa limite soit en un point de l'aire σ, soit en point du contour L.

Imaginons, d'abord, que cette limite soit atteinte en un point M du contour L; écrivons, au point M, la condition (135); w étant supposé positif, cette condition deviendra

$$\mu \frac{\partial w}{\partial n_i} = -f w - \mathfrak{G}. \tag{137}$$

w serait positif par hypothèse ; f et $\mathfrak{G}$ sont essentiellement négatifs [IV[e] Partie, inégalités (46) et (53)]; μ est essentiellement positif [I[re] Partie, inégalité (62 *bis*)]. La condition (137) donnerait donc

$$\frac{\partial w}{\partial n_i} > 0.$$

w croîtrait lorsqu'on s'éloignerait du point M selon la normale n_i, en sorte que w ne pourrait avoir atteint, au point M, sa limite supérieure.

Imaginons maintenant que w atteigne sa valeur maximum en un point M intérieur à l'aire σ; il faudrait qu'en ce point la forme quadratique en X et Y

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} X^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} XY + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} Y^2$$

ne fût positive pour aucun système de valeurs de X et de Y; partant, que ni $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, ni $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ ne fussent positifs, ce qui est incompatible avec la condition (132 *bis*).

La fonction $w(x, y)$ n'est donc positive en aucun point de l'aire σ; partout le fluide coule dans le même sens, et ce sens est celui où $\Lambda(z)$ va en diminuant.

w étant négatif en tout point de la ligne L, la condition (135) devient

$$\frac{\partial w}{\partial n_i} = -\frac{f}{\mu} w + \frac{\mathfrak{G}}{\mu}. \tag{135 bis}$$

Le problème que nous avons à résoudre se ramène sans peine à un problème connu.

Soit r la distance entre deux points (x, y), (x', y') de l'aire σ. Posons

$$w_0(x, y) = -\frac{K^2}{2\pi} \int\!\!\int \log r \, dx' \, dy', \tag{138}$$

l'intégrale double s'étendant à l'aire σ. Nous savons que

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = K^2. \tag{139}$$

Soit

$$w(x, y) = w_0(x, y) + w_1(x, y). \tag{140}$$

Le problème se ramènera à déterminer $w_1(x, y)$; mais, selon les égalités

(132 *bis*) et (139), $w_1(x, y)$ vérifiera, en tout point de l'aire σ, l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0, \tag{141}$$

tandis qu'en vertu des égalités (135 *bis*) et (140), on aura, en tout point de la ligne L,

$$\frac{\partial w_1}{\partial n_i} + \frac{f}{\mu} w_1 = \frac{\mathfrak{G}}{\mu} - \frac{f}{\mu} w_0 - \frac{\partial w_0}{\partial n_i}, \tag{142}$$

égalité où le second membre a une valeur connue en tout point de la ligne L.

Dans le cas où l'aire σ est une aire simplement connexe et convexe, le problème ainsi posé rentre comme cas particulier dans un problème que M. Zaremba (1) a complètement résolu en suivant les méthodes de M. H. Poincaré.

D'ailleurs, il est aisé de voir que ce problème est, en toutes circonstances, déterminé, c'est-à-dire qu'il ne peut comporter plus d'une solution. Supposons, en effet, qu'il en comporte deux distinctes, $w_1(x, y)$ et $w'_1(x, y)$ et posons

$$W_1(x, y) = w'_1(x, y) - w_1(x, y). \tag{143}$$

Selon (141), les fonctions w_1, w'_1 vérifient l'équation de Laplace en tout point de l'aire σ; il en est donc de même de leur différence W_1, ce qui permet d'écrire

$$\int_L W_1 \frac{\partial W_1}{\partial n_i} dL + \int_\sigma \left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_1}{\partial z}\right)^2\right] d\sigma = 0. \tag{144}$$

D'autre part, selon l'égalité (142), on a, en tout point de la ligne L,

$$\frac{\partial W_1}{\partial n_i} + \frac{f}{\mu} W_1 = 0.$$

L'égalité (144) peut donc s'écrire

$$\int_\sigma \left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_1}{\partial z}\right)^2\right] d\sigma - \frac{f}{\mu} \int W_1^2 \, dL = 0.$$

Si l'on observe que $\frac{f}{\mu}$ est essentiellement négatif, on voit que cette égalité exige que l'on ait

$$W_1 = 0$$

(1) S. Zaremba, *Sur l'équation aux dérivées partielles* $\Delta u + \xi u + f = 0$ *et sur les fonctions harmoniques* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XVI, 1899, p. 435

en tout point du contour L et

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial W_1}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial W_1}{\partial z} = 0,$$

en tout point de l'aire σ; il en résulte que la fonction $W_1(x, y)$ est nulle en tout point de l'aire σ et que les deux fonctions $w_1(x, y)$, $w'_1(x, y)$ y sont identiques, ce qui démontre le théorème énoncé.

La proposition que nous venons d'établir justifie l'emploi de méthodes synthétiques pour trouver, dans chaque cas particulier, la valeur de $w(x, y)$.

Nous nous contenterons de traiter le cas très simple et bien connu où le tuyau a la forme d'un cylindre droit, à base circulaire, de rayon R. Dans ce cas, si nous désignons par r la distance du point (x, y) à l'axe du cylindre, w deviendra une simple fonction de r qui vérifiera l'équation

$$\frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw(r)}{dr} = K^2, \tag{145}$$

transformée de l'équation (132 *bis*); l'intégrale générale de cette équation est

$$w(r) = \frac{K^2}{4} r^2 + B \log r + A,$$

A et B étant deux constantes arbitraires; mais comme $w(r)$ doit demeurer fini pour $r = 0$, il nous faut prendre $B = 0$ et

$$w(r) = \frac{K^2}{4} r^2 + A. \tag{146}$$

Exprimant alors que la condition (135 *bis*) est vérifiée pour $r = R$, nous trouvons

$$A = -\frac{K^2 R}{2}\left(\frac{R}{2} - \frac{\mu}{f}\right) - \frac{\mathfrak{G}}{f}$$

et, par conséquent,

$$w(r) = -\frac{K^2}{4}(R^2 - r^2) + \frac{K^2 \mu R}{2f} - \frac{\mathfrak{G}}{f}. \tag{147}$$

Si, dans cette formule, on suppose égal à 0 le coefficient de frottement $\mathfrak{G}$, on retrouve le résultat obtenu par Navier.

La vitesse le long de la paroi $(r = R)$ a pour valeur

$$w(R) = \frac{K^2 \mu R}{2f} - \frac{\mathfrak{G}}{f}. \tag{148}$$

En même temps, la troisième égalité (134) nous donne

$$p_z = -\frac{K^2\mu R}{2}. \tag{149}$$

Supposons que l'on donne à la quantité K^2 des valeurs de plus en plus petites, de telle sorte que $K^2\mu R$, tout en demeurant supérieur à $-2\mathfrak{G}$, tende vers $-2\mathfrak{G}$; $w(R)$, tout en restant négatif, tendra vers 0; en même temps, p_z tendra vers $\mathfrak{G}$.

Si nous supposons que $K^2\mu R$, continuant à décroître, devienne inférieur à $-2\mathfrak{G}$, il ne pourra plus y avoir glissement le long des parois du tube; en effet, s'il y avait glissement, p_z deviendrait, en valeur absolue, inférieur à $-\mathfrak{G}$; en même temps, la formule (148) donnerait pour $w(R)$ une valeur négative que nous savons inacceptable.

Il est aisé d'expliciter davantage la condition limite que nous venons d'obtenir dans le cas où l'on suppose le fluide soumis seulement aux actions capillaires et à la pesanteur.

A l'intérieur du tube supposé illimité, V_i aura la même valeur tout le long d'une même parallèle à Oz; il en sera de même de la partie V_e qui provient des actions capillaires; dès lors, si l'on désigne par α l'angle que les génératrices du cylindre font avec l'horizon et par g l'accélération de la pesanteur, les égalités (101) et (136) donneront

$$K^2 = \frac{\rho}{\mu} g \sin\alpha + \frac{\Pi_1 - \Pi_0}{\mu(z_1 - z_0)}. \tag{150}$$

Donc, tant que l'on aura

$$\frac{1}{2} R \left(\rho g \sin\alpha + \frac{\Pi_1 - \Pi_0}{z_1 - z_0}\right) > -\mathfrak{G}, \tag{151}$$

le fluide glissera sur la paroi solide; mais si l'on a

$$\frac{1}{2} R \left(\rho g \sin\alpha + \frac{\Pi_1 - \Pi_0}{z_1 - z_0}\right) < -\mathfrak{G}, \tag{151 bis}$$

le fluide demeurera soudé à la paroi solide.

Étudions donc maintenant le régime permanent qui s'établit dans le cas où le fluide demeure adhérent à la paroi solide.

$w(x, y)$ continuera à vérifier l'équation aux dérivées partielles (132 *bis*) en tout point de la section droite σ; mais, en tout point du contour L, on aura

$$w(x, y) = 0. \tag{152}$$

La détermination de w est alors ramenée à un problème connu qui n'admet qu'une solution. Il est aisé de voir que cette solution est négative en tout point de l'aire σ; en effet, si elle était positive en quelque partie de cette aire, elle admettrait une limite supérieure positive; cette limite ne pourrait être atteinte le long de la ligne L où w est nul; la fonction w présenterait donc un maximum à l'intérieur de l'aire σ, et nous avons vu que cette hypothèse était incompatible avec l'équation (132 *bis*).

La quantité que l'expérimentateur détermine, c'est la *vitesse moyenne*

$$U = \frac{1}{\sigma}\int w(x, y)\, d\sigma. \tag{153}$$

Si l'on multiplie K^2 par α et les dimensions de l'aire σ par un rapport de similitude β, il est clair que les égalités (132 *bis*) et (152) demeureront vérifiées pourvu que l'on multiplie $w(x, y)$ par $\alpha\beta^2$; U sera multiplié par la même quantité; nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Pour un même liquide et pour des tubes de même substance ayant des sections semblables, la vitesse moyenne est proportionnelle à $\frac{A_1 - A_0}{z_1 - z_0}$ *et au carré des dimensions de la section.*

C'est la loi découverte expérimentalement par Poiseuille.

Si le tube est à section circulaire, $w(x, y)$ devient une simple fonction de r, donnée encore par l'égalité (146); mais selon la condition (152), cette fonction doit s'annuler pour $r = R$, ce qui donne

$$w(r) = \frac{K^2}{4}(r^2 - R^2)$$

ou, plus explicitement, en vertu de l'égalité (150),

$$w(r) = \left[\frac{\rho g \sin\alpha}{4\mu} + \frac{\Pi_1 - \Pi_0}{4\mu(z_1 - z_0)}\right](r^2 - R^2). \tag{154}$$

C'est le résultat trouvé par Hagen, par Émile Mathieu, par M. Boussinesq (*voir*, au dernier Chapitre, l'historique de cette question).

L'analyse précédente s'accorde fort bien avec les faits d'expérience; elle est d'ailleurs complète si nous assimilons l'adhérence du liquide au solide à une condition de liaison. Mais, si nous ne faisions pas cette assimilation, nous serions conduits à adjoindre aux conditions déjà invoquées la condition suivante, qui entraînerait une impossibilité :

Pour que le fluide adhère à la paroi du tube, il ne suffit pas que la fonction w vérifie la condition (152) en tous les points de la ligne L; il faut encore que le vecteur dont p_x, p_y, p_z sont les composantes soit normal à la paroi du tube, ce qui, en vertu des égalités (134), s'exprime par l'égalité

$$(155) \qquad \mu \frac{\partial w}{\partial n_i} = 0$$

vérifiée en tous les points de la ligne L.

Si le fluide n'est pas un fluide parfait, μ est positif et l'égalité (155) devient

$$(155\ bis) \qquad \frac{\partial w}{\partial n_i} = 0.$$

Or, il est impossible que cette égalité soit vérifiée en tout point de la ligne L, car on aurait

$$\int_L \frac{\partial w}{\partial n_i} d\mathrm{L} = -\int_\sigma \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) d\sigma = 0,$$

ce qui est incompatible avec l'égalité (132 *bis*), à moins que l'on ait

$$(156) \qquad \mathrm{K}^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \Lambda_0 = \Lambda_1.$$

Mais, dans ce cas, les conditions (132 *bis*) et (152) donnent, en tout point, $w = 0$, ce qui ne saurait nous étonner, puisque la condition (156) est la condition d'équilibre du fluide.

Le problème de l'écoulement permanent par filets parallèles nous montre donc que l'on doit, sous peine de se heurter à une impossibilité, traiter l'adhérence du liquide à la paroi solide comme une condition de liaison.

§ 5. — Fluide visqueux compris entre deux plans parallèles.

Deux plans solides, $z = 0$ et $z = h$, sont parallèles et maintenus à une distance invariable l'un de l'autre; le premier est immobile, le second se meut parallèlement à Ox avec une vitesse uniforme U. Entre ces deux plans se trouve un liquide visqueux. On suppose que ce liquide soit parvenu à un régime permanent tel que tous les points matériels se meuvent parallèlement à Ox et l'on se propose d'étudier ce mouvement.

Les égalités

$$v = 0, \qquad w = 0,$$

jointes à l'équation de continuité, exigent que u soit indépendant de x; u est aussi indépendant de t, puisque le régime est permanent; u ne peut donc dépendre que de y et de z; par raison de symétrie, il ne dépendra que de z. Les deux dernières équations (100) donnent

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0,$$

en sorte que Λ ne dépend que de x. La première équation (100) devient

$$\frac{d\Lambda}{dx} - \frac{\mu}{\rho}\frac{d^2 u}{dz^2} = 0.$$

Elle nous enseigne, en premier lieu, que Λ *est une fonction linéaire de* x, en sorte que

$$\frac{d\Lambda}{dx} = \frac{\Lambda' - \Lambda}{x' - x}.$$

Elle nous enseigne, en second lieu, que u *est une fonction du second degré de* z, en sorte que

$$u = \frac{\rho(\Lambda' - \Lambda)}{2\mu(x' - x)} z^2 + A z + B, \tag{157}$$

A et B étant deux constantes qui devront être déterminées par les conditions aux limites.

Supposons, tout d'abord, que le fluide glisse sur les plans entre lesquels il est compris; soient u_0 sa vitesse le long du plan $z = 0$ et u_1 sa vitesse le long du plan $z = h$.

Les conditions (80) se réduisent ici à

$$-p_x = \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|u_0|}\right) u_0 \qquad \text{pour} \qquad z = 0,$$

$$-p_x = \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|U - u_1|}\right)(u_1 - U) \qquad \text{pour} \qquad z = h.$$

Mais nous avons, en vertu des égalités (57) de la I^e Partie de ces *Recherches*,

$$p_x = \mu\frac{\partial u}{\partial z} \qquad \text{pour} \qquad z = 0,$$

$$p_x = -\mu\frac{\partial u}{\partial z} \qquad \text{pour} \qquad z = h.$$

Nos conditions aux limites sont donc

$$\left\{\begin{array}{lll} \left(f + \dfrac{\mathfrak{G}}{|u_0|}\right) u_0 + \mu\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 & \text{pour} & z = 0, \\ \left(f + \dfrac{\mathfrak{G}}{|U - u_1|}\right)(U - u_1) + \mu\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0 & \text{pour} & z = h. \end{array}\right. \tag{158}$$

Ces conditions détermineront les constantes A et B de la formule (157).

Traitons le cas très simple où Λ est indépendant de x. C'est ce qui arrive, par raison de symétrie, si les deux plans sont supposés horizontaux et si les seules forces agissantes sont la pesanteur et les actions capillaires.

La formule (157) se réduit alors à

$$u = \mathrm{A}z + \mathrm{B} \tag{157 bis}$$

et les conditions (158) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|\mathrm{B}|}\right)\mathrm{B} + \mu\mathrm{A} = 0,\\ &\left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|\mathrm{U} - \mathrm{A}h - \mathrm{B}|}\right)(\mathrm{U} - \mathrm{A}h - \mathrm{B}) + \mu\mathrm{A} = 0. \end{aligned}\right. \tag{158 bis}$$

Ces conditions nous enseignent que les trois quantités

$$\mathrm{A}, \quad \mathrm{B}, \quad \mathrm{U} - \mathrm{A}h - \mathrm{B}$$

sont de même signe, car f et $\mathfrak{G}$ sont négatifs, tandis que μ est positif.

Nous pouvons toujours supposer que U soit positif. Alors nous voyons sans peine que la condition précédente exige que A et B soient positifs. Les conditions (158 *bis*) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} f\mathrm{B} + \mathfrak{G} + \mu\mathrm{A} &= 0,\\ f(\mathrm{U} - \mathrm{A}h - \mathrm{B}) + \mathfrak{G} + \mu\mathrm{A} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{159}$$

Elles donnent

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A} &= -\frac{2\mathfrak{G} + f\mathrm{U}}{2\mu - fh},\\ \mathrm{B} &= \frac{\mathfrak{G}h + \mu\mathrm{U}}{2\mu - fh} \end{aligned}\right. \tag{160}$$

et, par conséquent,

$$u = -\frac{(2\mathfrak{G} + f\mathrm{U})z - \mathfrak{G}h - \mu\mathrm{U}}{2\mu - fh}. \tag{161}$$

Mais cette solution n'est acceptable que si les égalités (159) peuvent être substituées aux égalités (158 *bis*), ce qui exige que l'on ait

$$\mathrm{B} > 0, \qquad \mathrm{U} - \mathrm{A}h - \mathrm{B} > 0.$$

Si l'on tient compte de la seconde égalité (160) et si l'on observe que, selon les mêmes égalités (160),

$$\mathrm{U} - \mathrm{A}h - \mathrm{B} = \frac{\mathfrak{G}h + \mu\mathrm{U}}{2\mu - fh},$$

on voit que cette double inégalité équivaut à l'inégalité unique

(162) $$U > -\frac{\mathfrak{E} h}{\mu}.$$

Si donc on a

(162 *bis*) $$U < -\frac{\mathfrak{E} h}{\mu},$$

il est impossible d'admettre que le fluide glisse sur les deux plans entre lesquels il est contenu. On est obligé d'admettre qu'il adhère à ces plans, ce qui donne

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{pour} \quad z = 0, \\ u &= \mathrm{U} \quad \text{pour} \quad z = h \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{B} = 0, \qquad \mathrm{A} = \frac{\mathrm{U}}{h},$$

(163) $$u = \frac{\mathrm{U}}{h} z.$$

Mais, en outre, si l'on n'assimilait pas à une liaison l'adhérence du liquide au solide, on devrait avoir, pour $z = 0$ aussi bien que pour $z = h$, $p_x = 0$, c'est-à-dire $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, ce qui est impossible, car l'égalité (163) donne

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\mathrm{U}}{h}.$$

Nous rencontrerions donc ici une impossibilité semblable à celle qui nous a arrêtés au paragraphe précédent lorsque nous avons examiné les conséquences de la même hypothèse.

§ 6. — Fluide compris entre deux cylindres de révolution de même axe et animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de cet axe.

Nous allons examiner un dernier exemple, très simple, et dont l'intégration peut être menée jusqu'au bout.

Une surface cylindrique indéfinie C_0, de révolution autour de l'axe des z, enferme à son intérieur un autre cylindre C_1, également de révolution autour de l'axe des z. Chacun des deux cylindres est homogène. Le cylindre C_0 est immobile, tandis que le cylindre C_1 est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des z; Ω_1 est la vitesse angulaire de ce mouvement.

Entre les deux surfaces C_0, C_1 se trouve un liquide visqueux. La position d'un point de ce liquide peut être repérée au moyen des coordonnées rectangulaires x,

y, z ou bien au moyen des coordonnées cylindriques r, θ, z. Le passage d'un système de coordonnées à l'autre est assuré par les formules

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

qui donnent

$$(164) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \cos\theta, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \sin\theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\sin\theta}{r}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\cos\theta}{r}. \end{aligned} \right.$$

Nous supposerons que la fonction potentielle V_e des actions extérieures et que la fonction potentielle V_i des actions intérieures sont uniformes dans tout le fluide et indépendantes de θ; c'est ce qui aura lieu, en particulier, si le fluide est soumis à la pesanteur, supposée parallèle à Oz, et aux actions capillaires.

La pression Π étant essentiellement uniforme, il en sera de même de la quantité

$$(101) \qquad \Lambda = \frac{\Pi}{\rho} + V_i + V_e.$$

Il semble évident que le mouvement d'un pareil fluide tendra vers un régime permanent dans lequel chaque élément fluide sera animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de Oz; en outre, la vitesse Θ de ce mouvement sera indépendante de θ et de z.

Étudions ce régime permanent.

Nous aurons, en ce régime,

$$(165) \qquad u = -\Theta\sin\theta, \qquad v = \Theta\cos\theta, \qquad w = 0.$$

Les égalités (164) et (165) donnent

$$(166) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \left(\frac{\Theta}{r} - \frac{d\Theta}{dr}\right)\sin\theta\cos\theta, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\Theta}{r}\cos^2\theta - \frac{d\Theta}{dr}\sin^2\theta, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\Theta}{r}\sin^2\theta + \frac{d\Theta}{dr}\cos^2\theta, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\left(\frac{\Theta}{r} - \frac{d\Theta}{dr}\right)\sin\theta\cos\theta. \end{aligned} \right.$$

L'équation de continuité, réduite à

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

est vérifiée d'elle-même.

Les égalités (164) et (166) donnent sans peine

$$(167)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\left(\dfrac{d^2\Theta}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d\Theta}{dr} - \dfrac{\Theta}{r^2}\right)\sin\vartheta, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \quad \left(\dfrac{d^2\Theta}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d\Theta}{dr} - \dfrac{\Theta}{r^2}\right)\cos\vartheta. \end{cases}$$

Les égalités (164) donnent aussi

$$(168)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Lambda}{\partial x} = \dfrac{\partial \Lambda}{\partial r}\cos\vartheta - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Lambda}{\partial \vartheta}\sin\vartheta, \\ \dfrac{\partial \Lambda}{\partial y} = \dfrac{\partial \Lambda}{\partial r}\sin\vartheta + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Lambda}{\partial \vartheta}\cos\vartheta. \end{cases}$$

Enfin l'accélération de chaque élément fluide a pour grandeur $\dfrac{\Theta^2}{r}$ et sa direction est opposée à celle du rayon vecteur r; on a donc

$$(169)\quad \begin{cases} \gamma_x = -\dfrac{\Theta^2}{r}\cos\vartheta, \\ \gamma_y = -\dfrac{\Theta^2}{r}\sin\vartheta, \\ \gamma_z = 0. \end{cases}$$

Les équations (100 *bis*) deviennent donc

$$(170)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Lambda}{\partial r}\cos\vartheta - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Lambda}{\partial \vartheta}\sin\vartheta - \dfrac{\Theta^2}{r}\cos\vartheta + \dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{d^2\Theta}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d\Theta}{dr} - \dfrac{\Theta}{r^2}\right)\sin\vartheta = 0, \\ \dfrac{\partial \Lambda}{\partial r}\sin\vartheta + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Lambda}{\partial \vartheta}\cos\vartheta - \dfrac{\Theta^2}{r}\sin\vartheta - \dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{d^2\Theta}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d\Theta}{dr} - \dfrac{\Theta}{r^2}\right)\cos\vartheta = 0, \\ \dfrac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Les deux premières égalités (170) donnent sans peine

$$(171)\quad \frac{\partial \Lambda}{\partial r} - \frac{\Theta^2}{r} = 0,$$

$$(172)\quad \frac{1}{r}\frac{\partial \Lambda}{\partial \vartheta} - \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{d^2\Theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Theta}{dr} - \frac{\Theta}{r^2}\right) = 0.$$

Au premier membre de l'égalité (172), le second terme est indépendant de ϑ; Λ ne pourrait donc dépendre de ϑ que s'il en était fonction linéaire; mais alors Λ ne pourrait pas être, comme il le doit, fonction uniforme de x et de y; Λ est donc indépendant de θ. L'équation (172) se réduit à

$$\frac{d^2\Theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Theta}{dr} - \frac{\Theta}{r^2} = 0, \tag{173}$$

tandis que l'équation (171) devient

$$\frac{d\,\mathrm{A}(r)}{dr} = \frac{\Theta^2}{r}. \tag{171 bis}$$

L'équation différentielle (171 *bis*) a déjà été rencontrée, dans la question qui nous occupe, par M. Max Margules ([1]) et par M. N. Petroff ([2]).

L'intégrale générale de cette équation est

$$\Theta = \frac{\mathrm{A}}{r} + \mathrm{B}r, \tag{174}$$

A et B étant deux constantes.

Les égalités (166) deviennent, moyennant cette égalité (174),

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2\mathrm{A}}{r^2}\sin\theta\cos\theta,\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\mathrm{A}}{r^2}(\sin^2\theta - \cos^2\theta) - \mathrm{B},\\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\mathrm{A}}{r^2}(\sin^2\theta - \cos^2\theta) + \mathrm{B},\\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{2\mathrm{A}}{r^2}\sin\theta\cos\theta. \end{aligned}\right. \tag{175}$$

Nous aurons, d'ailleurs,

$$\begin{aligned} p_x &= \mu\left[2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right],\\ p_y &= \mu\left[\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + 2\beta\frac{\partial v}{\partial y}\right],\\ p_z &= 0 \end{aligned}$$

([1]) MAX MARGULES, *Ueber die Bestimmung der Reibungs- und Gleitungscoefficienten aus ebenen Bewegungen einer Flussigkeit* (*Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Wien*, Bd. LXXXIII, Abth. II, 1881, p. 12).

([2]) N. PETROFF, *Neue Theorie der Reibung*. Hambourg et Leipzig, 1887, p. 95.

ou bien, en vertu des égalités (175),

$$(176)\quad \begin{cases} p_x = \dfrac{2\mu A}{r^2}[2\sin\theta\cos\theta\alpha + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)\beta], \\ p_y = \dfrac{2\mu A}{r^2}[2\sin\theta\cos\theta\beta + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)\alpha], \\ p_z = 0. \end{cases}$$

Si nous désignons par q la projection du vecteur (p_x, p_y, p_z) sur la direction de la vitesse Θ, nous avons

$$q = -p_x\sin\theta + p_y\cos\theta$$

ou, en vertu des égalités (176),

$$(177)\quad \begin{aligned} q = \frac{2\mu A}{r^2}[&-2\sin\theta\cos\theta(\beta\cos\theta + \alpha\sin\theta) \\ &+ (\sin^2\theta - \cos^2\theta)(\alpha\cos\theta - \beta\sin\theta)]. \end{aligned}$$

En un point du cylindre C_0, dont R_0 est le rayon, on a

$$r = R_0, \qquad \alpha = -\cos\theta, \qquad \beta = -\sin\theta,$$

$$(178)\quad q_0 = \frac{2\mu A}{R_0^2}.$$

En un point du cylindre C_1, dont R_1 est le rayon, on a

$$r = R_1, \qquad \alpha = \cos\theta, \qquad \beta = \sin\theta,$$

$$(178\ bis)\quad q_1 = -\frac{2\mu A}{R_1^2}.$$

Supposons d'abord que le liquide glisse sur chacun des deux cylindres que, pour simplifier, nous supposerons de même nature.

Le cylindre C_0 est immobile; la vitesse relative du fluide par rapport à cette paroi se réduit à

$$(179)\quad \Theta_0 = \frac{A}{R_0} + BR_0.$$

On aura donc, en vertu de l'égalité (178), en tout point du cylindre C_0,

$$(180)\quad \frac{2\mu A}{R_0^2} = -\left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|\Theta_0|}\right)\left(\frac{A}{R_0} + BR_0\right).$$

La vitesse avec laquelle tourne un point de la surface C_1 est $\Omega_1 R_1$. La vitesse relative du fluide par rapport au solide est

$$\Theta_1 - \Omega_1 R_1 = \frac{A}{R_1} + (B - \Omega_1) R_1. \tag{179 bis}$$

On doit donc avoir, en vertu de l'égalité (178 *bis*), en tout point du cylindre C_1,

$$\frac{2\mu A}{R_1^2} = -\left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|\Omega_1 R_1 - \Theta_1|}\right)\left[-\frac{A}{R_1} + (\Omega_1 - B)R_1\right]. \tag{180 bis}$$

Les égalités (180) et (180 *bis*) nous enseignent que les deux quantités Θ_0 et $(\Omega_1 R_1 - \Theta_1)$ sont toutes deux de même signe et que ce signe est le signe de A. Supposons que ce signe soit le signe $+$. Les égalités (180) et (180 *bis*) donneront les deux égalités

$$\left\{\begin{aligned} \frac{2\mu A}{R_0^2} &= -f\left(\frac{A}{R_0} + BR_0\right) - \mathfrak{G}, \\ \frac{2\mu A}{R_1^2} &= \quad f\left[\frac{R_1}{A} - (\Omega_1 - B)R_1\right] - \mathfrak{G}, \end{aligned}\right. \tag{181}$$

qui déterminent A et B et donnent, en particulier,

$$A = -\frac{[(\mathfrak{G} + f\Omega_1 R_1)R_0 + \mathfrak{G} R_1] R_0^2 R_1^2}{2\mu(R_0^3 + R_1^3) - f(R_0^2 - R_1^2) R_0 R_1}. \tag{182}$$

Le dénominateur de cette expression est assurément positif, car on a

$$\mu > 0, \qquad f < 0, \qquad R_0 > R_1.$$

Mais l'usage des égalités (181) et (182) n'est légitime que si l'on a les inégalités

$$A > 0, \qquad \Theta_0 > 0, \qquad \Omega_1 R_1 - \Theta_1 > 0$$

qui, en vertu de l'inégalité $f < 0$ et des égalités (181), exigent que l'on ait les inégalités

$$A > 0, \qquad \frac{2\mu A}{R_0^2} + \mathfrak{G} > 0, \qquad \frac{2\mu A}{R_1^2} + \mathfrak{G} > 0.$$

De ces trois inégalités, la seconde, en vertu des conditions $\mathfrak{G} < 0$, $R_0 > R_1$, entraîne les deux autres; d'ailleurs, en vertu de l'égalité (182), cette seconde condition devient

$$\mathfrak{G}(R_0^2 - R_1^2)(2\mu - fR_1) - 2\mu f \Omega_1 R_1^3 > 0$$

ou bien

$$\Omega_1 > \frac{\mathfrak{G}}{2\mu f} \frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^3} (2\mu - fR_1). \tag{183}$$

Si, dans les conditions (180) et (180 *bis*), nous avions supposé que le signe commun de A, de Θ_0 et de $(\Omega_1 R_1 - \Theta_1)$ fût le signe $-$, nous aurions obtenu, pour déterminer A et B, les conditions

$$(181\ bis)\qquad \begin{cases} \dfrac{2\mu A}{R_0^2} = -f\left(\dfrac{A}{R_0} + BR_0\right) + \mathfrak{G}, \\ \dfrac{2\mu A}{R_1^2} = \quad f\left[\dfrac{A}{R_1} - (\Omega_1 - B)R_1\right] + \mathfrak{G}. \end{cases}$$

Mais, pour que l'usage de ces deux inégalités fût légitime, il faudrait que l'on eût

$$(183\ bis)\qquad \Omega_1 < -\frac{\mathfrak{G}}{2\mu f}\,\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^3}(2\mu - fR_1).$$

Lors donc que l'on a

$$(184)\qquad -\frac{\mathfrak{G}}{2\mu f}\,\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^3}(2\mu - fR_1) \leqq \Omega_1 \leqq \frac{\mathfrak{G}}{2\mu f}\,\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^3}(2\mu - fR_1),$$

le liquide ne peut glisser sur les deux cylindres C_0, C_1 ; *il adhère au moins à l'un d'entre eux.*

La condition (184) étant vérifiée, peut-il arriver que le fluide adhère au cylindre C_1 et glisse sur le cylindre C_0?

L'égalité (179 *bis*) nous donnerait alors la première relation

$$(185)\qquad \frac{A}{R_1} + BR_1 + \Omega_1 R_1,$$

à laquelle il faudrait continuer de joindre la relation

$$(180)\qquad \frac{2\mu A}{R_0^2} = -\left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|\Theta_0|}\right)\left(\frac{A}{R_0} + BR_0\right).$$

Comme f et $\mathfrak{G}$ sont tous deux négatifs, cette égalité (180) montre que A et $\Theta_0 = \dfrac{A}{R_0} + BR_0$ sont de même signe. Supposons d'abord que ces quantités soient positives. Alors, à l'équation (180), nous pourrons substituer l'équation

$$(186)\qquad \frac{2\mu A}{R_0^2} = -f\left(\frac{A}{R_0} + BR_0\right) - \mathfrak{G}.$$

Les égalités (185) et (186) déterminent A et B; elles donnent, en particulier,

$$(187)\qquad A = -\frac{(\mathfrak{G} + f\Omega_1 R_0)R_0^2 R_1^2}{2\mu R_1^2 - f(R_0^2 - R_1^2)R_0}.$$

Mais cette solution n'est acceptable que si elle donne pour A et pour $\Theta_0 = \frac{A}{R_0} + BR_0$ des valeurs positives; or, selon l'égalité (186), elle donne à Θ_0 le même signe qu'à $\frac{2\mu A}{R_0^2} + \mathfrak{G}$ et, comme $\mathfrak{G}$ est négatif, cette dernière quantité ne peut être positive que si A est positif. Donc, pour que la précédente solution soit acceptable, il faut et il suffit qu'elle vérifie la condition

$$\frac{2\mu A}{R_0^2} + \mathfrak{G} > 0. \tag{188}$$

En vertu de l'expression (187) de A, expression dont le dénominateur est essentiellement positif, cette inégalité devient

$$-f[2\mu\Omega_1 R_1^2 + \mathfrak{G}(R_0^2 - R_1^2)] > 0,$$

ou bien, puisque f est essentiellement négatif,

$$\Omega_1 > -\frac{\mathfrak{G}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_1^2}. \tag{189}$$

Si nous avions supposé que le signe commun de A et de Θ_0 fût le signe —, nous aurions obtenu, pour déterminer A et B, les équations

$$\frac{A}{R_1} + BR_1 = \Omega_1 R_1, \tag{185}$$

$$\frac{2\mu A}{R_0^2} = -f\left(\frac{A}{R_0} + BR_0\right) + \mathfrak{G}. \tag{186 bis}$$

Mais, pour que cette solution fût valable, il faudrait que l'on eût

$$\Omega_1 < \frac{\mathfrak{G}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_1}. \tag{189 bis}$$

La quantité $\frac{\mathfrak{G}}{f}\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^3}$ étant assurément positive, on a

$$\frac{\mathfrak{G}}{2\mu f}\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^3}(2\mu - fR_1) > -\frac{\mathfrak{G}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_1^2}. \tag{190}$$

On peut donc trouver des valeurs de Ω_1 qui vérifient à la fois la condition (184) et l'une des conditions (189) ou (189 *bis*).

Lors donc que l'on a ou bien

$$-\frac{\mathfrak{G}(R_0^2 - R_1^2)}{2\mu R_1^2} < \Omega_1 < \frac{\mathfrak{G}}{2\mu f}\frac{R_0^2 - R_1^2}{R_1^3}(2\mu - fR_1) \tag{191}$$

ou bien

$$(191\ bis) \qquad -\frac{\mathfrak{G}}{2\mu f}\frac{R_0^2-R_1^2}{R_1^3}(2\mu - fR_1) < \Omega_1 < \frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_1^2},$$

le liquide ne peut glisser à la fois sur les deux cylindres C_0, C_1 ; *mais il peut adhérer au cylindre* C_1 *et glisser sur le cylindre* C_0. *Au contraire, ce régime est impossible si l'on a la condition*

$$(192) \qquad \frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_1^2} \leqq \Omega_1 \leqq -\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_1^2},$$

qui entraîne la condition (184).

La condition (184) étant vérifiée, peut-il arriver que le liquide glisse sur le cylindre C_1 et adhère au cylindre C_0 ?

Les équations qui doivent déterminer A et B sont alors

$$(193) \qquad \frac{A}{R_0} + BR_0 = 0,$$

$$(180\ bis) \qquad \frac{2\mu A}{R_1^2} = -\left[f + \frac{\mathfrak{G}}{|\Omega_1 R_1 - \Theta_1|}\right]\left(\Omega_1 R_1 - \frac{R_1}{A} - BR_1\right).$$

En raisonnant comme dans le cas précédent, nous trouverons que, pour que ces conditions déterminent des valeurs acceptables de A et de B, il faut et il suffit que l'on ait ou bien

$$(194) \qquad \Omega_1 > -\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_0^2},$$

ou bien

$$(194\ bis) \qquad \Omega_1 < \frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_0^2}.$$

D'ailleurs, on a

$$(195) \qquad -\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_0^2} < -\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_1^2},$$

et, *a fortiori,* selon l'inégalité (190),

$$(196) \qquad -\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_0^2} < \frac{\mathfrak{G}}{2\mu f}\frac{R_0^2-R_1^2}{R_1^3}(2\mu - fR_1).$$

Les conditions (194) et (194 *bis*) sont donc compatibles avec la condition (184), et nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

Lorsque l'on a ou bien

(197) $$-\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_0^2}<\Omega_1<\frac{\mathfrak{G}}{2\mu f}\frac{R_0^2-R_1^2}{R_1^3}(2\mu-fR_1)$$

ou bien

(197 *bis*) $$-\frac{\mathfrak{G}}{2\mu f}\frac{R_0^2-R_1^2}{R_1^3}(2\mu-fR_1)<\Omega_1<\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_0^2},$$

le liquide peut adhérer au cylindre C_0 *et glisser sur le cylindre* C_1; *lorsque l'on a, au contraire,*

(198) $$\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_0^2}\leqq\Omega_1\leqq-\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_0^2},$$

le liquide adhère forcément aux deux cylindres.

Dans ce dernier cas, les constantes A et B sont déterminées par les inégalités

(199) $$\frac{A}{R_1}+BR_1=\Omega_1R_1,\qquad \frac{A}{R_0}+BR_0=0.$$

En résumé, lorsque l'on a

(200) $$|\Omega_1|>\frac{\mathfrak{G}}{2\mu f}\frac{R_0^2-R_1^2}{R_1^3}(2\mu-fR_1),$$

le liquide glisse sur les deux cylindres.

Lorsque l'on a

(201) $$-\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_1^2}<|\Omega_1|\leqq\frac{\mathfrak{G}}{2\mu f}\frac{R_0^2-R_1^2}{R_1^3}(2\mu-fR_1),$$

le liquide est susceptible de deux régimes permanents distincts; en l'un des régimes, il adhère au cylindre C_1 *et glisse sur le cylindre* C_0; *en l'autre, il adhère au cylindre* C_0 *et glisse sur le cylindre* C_1.

Lorsque l'on a

(202) $$-\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_0^2}<|\Omega_1|\leqq-\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_1^2},$$

le liquide adhère au cylindre C_0 *et glisse sur le cylindre* C_1.

Enfin, lorsque l'on a

(203) $$|\Omega_1|\leqq-\frac{\mathfrak{G}(R_0^2-R_1^2)}{2\mu R_0^2},$$

le liquide adhère aux deux cylindres C_0, C_1.

Dans tous les cas que nous venons de traiter, si l'on ne regardait pas l'adhérence du fluide à l'un des deux cylindres comme constituant une nouvelle condition de liaison, on devrait écrire que le vecteur (p_x, p_y, p_z) est normal à la surface d'adhérence. Dans le cas où cette surface est le cylindre C_0, on trouverait ainsi l'équation

$$\frac{2\mu A}{R_0^2} = 0,$$

et l'équation

$$\frac{2\mu A}{R_1^2} = 0$$

dans le cas où la surface d'adhérence est le cylindre C_1. L'une et l'autre de ces équations exigeraient que l'on eût

$$A = 0,$$

résultat incompatible avec les solutions précédentes.

CHAPITRE IV.

LA CONDITION AUX LIMITES SUPPLÉMENTAIRE.

§ 1. — Des dégagements de chaleur au sein d'un système dont diverses parties frottent les unes sur les autres.

Au Chapitre précédent nous avons étudié exclusivement certains mouvements en lesquels un régime permanent est établi ; en ces mouvements, la température est, à la fois, uniforme et constante, en sorte qu'il est inutile de la faire figurer dans les équations.

En général, il n'en est plus ainsi, et la mise en équations du mouvement du système, où la température varie d'un point à l'autre et d'un instant à l'autre, n'est plus entièrement donnée par les principes posés au Chapitre II. Il convient d'y joindre une relation, vérifiée en tout point de la surface par laquelle deux corps frottent l'un sur l'autre, et que nous allons établir.

Les raisonnements que nous allons développer reposent tous sur une définition fondamentale que nous avons donnée autrefois [1] et que nous rappellerons tout d'abord.

---

[1] *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*, Chap. VI, § 2 (*Mémoire de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5e série, t. II, 1896, et Paris, A. Hermann, 1896).

Considérons un corps qui présente, avec les corps voisins, des liaisons bilatérales, accompagnées de viscosité et de frottement; imaginons que ce corps éprouve une modification réelle ou virtuelle; soient :

δU_1 la variation que subit son énergie interne;
$d\mathfrak{T}_{e1}$ le travail virtuel des actions extérieures qui lui sont appliquées;
$d\mathfrak{T}_{j1}$ le travail virtuel des forces d'inertie;
$d\mathfrak{T}_{l1}$ le travail des actions fictives de liaison, définies à la manière de Lagrange, qui s'exercent à sa surface.

La quantité de chaleur dQ_1 que dégage le corps considéré est *définie* par l'égalité

$$E\,dQ_1 = -E\,\delta U_1 + d\mathfrak{T}_{e1} + d\mathfrak{T}_{j1} + d\mathfrak{T}_{l1}. \tag{204}$$

Supposons que nous ayons affaire à une masse fluide 1, limitée, d'une part, par une surface s_1 le long de laquelle elle est *soudée* aux corps voisins, fluides ou solides, et, d'autre part, par une surface S le long de laquelle elle glisse, avec viscosité et frottement, sur un autre corps 2.

Selon ce que nous avons vu au Chapitre II, les actions de liaison qui doivent figurer dans le calcul de $d\mathfrak{T}_l$ se composent :

1° D'une pression, de composantes ϖ_x, ϖ_y, ϖ_z, appliquée en chaque point de la surface s_1;

2° D'une pression ϖ, normale à la surface S et dirigée vers l'intérieur du fluide 1, appliquée en chaque point de la surface S.

Si, comme nous l'avons fait au Chapitre II, nous désignons par N la normale à la surface S dirigée de 1 vers 2, nous aurons

$$\begin{aligned} d\mathfrak{T}_{l1} = &-\int \varpi[\cos(N, x)\,\delta x_1 + \cos(N, y)\,\delta y_1 + \cos(N, z)\,\delta z_1]\,dS \\ &+ \int (\varpi_x\,\delta x_1 + \varpi_y\,\delta y_1 + \varpi_z\,\delta z_1)\,ds_1. \end{aligned} \tag{205}$$

Le milieu auquel le corps 1 est soudé le long de la surface s_1 peut être fluide; ϖ_x, ϖ_y, ϖ_z sont alors donnés par les équations (71); il peut être solide; ϖ_x, ϖ_y, ϖ_z sont alors donnés par les équations (87), qui ont même forme que les égalités (71). En toutes circonstances, l'égalité (205) peut s'écrire

$$\begin{aligned} d\mathfrak{T}_{l1} = &-\int \varpi[\cos(N, x)\,\delta x_1 + \cos(N, y)\,\delta y_1 + \cos(N, z)\,\delta z_1]\,dS \\ &+ \int (p_{x1}\,\delta x_1 + p_{y1}\,\delta y_1 + p_{z1}\,\delta z_1)\,ds_1 \\ &+ \int \Pi_1[\cos(n_i, x)\,\delta x_1 + \cos(n_i, y)\,\delta y_1 + \cos(n_i, z)\,\delta z_1]\,ds_1, \end{aligned} \tag{206}$$

n_i étant la normale à la surface s_1, vers l'intérieur du corps 1.

Rien n'empêche de supposer que le milieu auquel le fluide 1 est soudé le long de la surface s_1 ne soit la continuation du fluide 1 lui-même; la surface s_1 sera une surface quelconque tracée à l'intérieur du fluide 1.

Soient λ une quantité constamment positive, variable d'une manière continue le long de la surface S, donnée une fois pour toutes, et ε une quantité positive infiniment petite, la même en tout point de S. Par chaque point M de S élevons, vers l'intérieur du fluide 1, une normale $\mathrm{M}m_1$ de longueur $\delta = \varepsilon\lambda$. Prenons le lieu du point m_1 pour surface s_1.

Si nous considérons le point M et le point correspondant m_1, nous pourrons écrire les égalités

$$ds_1 = d\mathrm{S},$$

$$\delta x_1(m_1) = \delta x_1(\mathrm{M}_1), \qquad \delta y_1(m_1) = \delta y_1(\mathrm{M}_1), \qquad \delta z_1(m_1) = \delta z_1(\mathrm{M}_1),$$

$$\cos(n_i, x) = \cos(\mathrm{N}, x), \qquad \cos(n_i, y) = \cos(\mathrm{N}, y), \qquad \cos(n_i, z) = \cos(\mathrm{N}, z).$$

En chacune de ces égalités sont négligées des quantités de l'ordre du produit de ε par la grandeur écrite en l'un ou l'autre membre.

Lors donc que ε tend vers o, $d\mathfrak{T}_l$ a pour limite

$$\begin{aligned} d\mathfrak{T}_{l1} = \int \Big\{ & [p_{x1} + (\Pi_1 - \varpi)\cos(\mathrm{N}, x)]\,\delta x_1 \\ & + [p_{y1} + (\Pi_1 - \varpi)\cos(\mathrm{N}, y)]\,\delta y_1 \\ & + [p_{z1} + (\Pi_1 - \varpi)\cos(\mathrm{N}, z)]\,\delta z_1 \Big\}\, d\mathrm{S}. \end{aligned}$$

Si nous tenons compte des égalités (56) et (57) et si nous observons que, dans ces égalités,

$$\cos(n_1, x) = -\cos(\mathrm{N}, x), \quad \cos(n_1, y) = -\cos(\mathrm{N}, y), \quad \cos(n, z) = -\cos(\mathrm{N}, z),$$

nous trouvons que $d\mathfrak{T}_l$ a pour limite, lorsque ε tend vers o,

$$(207) \quad d\mathfrak{T}_{l1} = -\int \left\{ \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right) [(u_1 - u_2)\,\delta x_1 + (v_1 - v_2)\,\delta y_1 + (w_1 - w_2)\,\delta z_1] \right\} d\mathrm{S}.$$

D'autre part, lorsque ε tend vers o, chacune des quantités $\delta\mathrm{U}$, $d\mathfrak{T}_e$, $d\mathfrak{T}_i$ qui figurent dans l'égalité (204) tend vers o comme les produits $\varepsilon\,\delta x_1$, $\varepsilon\,\delta y_1$, $\varepsilon\,\delta z_1$. D'où la conclusion suivante :

En un fluide, on considère une couche infiniment mince qui confine à une partie de la surface limite; on suppose que, le long de cette surface, le fluide glisse avec viscosité et frottement sur les corps voisins. Lorsque l'épaisseur de cette couche tend vers o, *la quantité de chaleur qu'elle dégage en une modification virtuelle quelconque ne tend pas en général vers* o; *cette quan-*

tité a pour limite :

$$(208) \qquad dQ_1 = -\frac{1}{E}\int\left\{\left(f+\frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)[(u_1-u_2)\,\delta x_1+(v_1-v_2)\,\delta y_1+(w_1-w_2)\,\delta z_1]\right\} dS.$$

Par définition, *cette quantité est la* quantité de chaleur dégagée par la viscosité et le frottement en la partie S de la surface limite du fluide 1.

La formule (208), que nous venons d'obtenir en supposant que le corps 1 soit un fluide, est un cas particulier d'une formule plus générale, indépendante de la nature du corps 1. Pour établir cette formule générale, nous imposerons aux indices 1 et 2 une permutation qui nous sera commode dans la suite. Nous désignerons par 2 le corps dont nous étudions le dégagement de chaleur dQ_2, par 1 le corps sur lequel il glisse le long de la surface S, par s_2 la surface qui le soude à d'autres corps. dQ_2 sera donnée par l'égalité

$$(204\ bis) \qquad E\,dQ_2 = -E\,\delta U_2 + d\mathfrak{T}_{e_2} + d\mathfrak{T}_{j2} + d\mathfrak{T}_{l2}.$$

D'autre part, les équations du mouvement de ce corps 2 sont données par les principes généraux que nous avons posés ailleurs ([1]).

Soient :

$\delta_T\mathcal{F}_2$ la variation virtuelle du potentiel interne $\mathcal{F}_2$, prise en supposant toutes les températures invariables;

$d\mathfrak{T}_{v2}$ le travail virtuel de la viscosité interne du corps 2, supposé dépourvu de frottement interne;

$d\mathfrak{T}_{w2}$ le travail virtuel des viscosités de contact qui agissent le long de la surface terminale;

$d\mathfrak{T}_{\psi 2}$ le travail virtuel des frottements de contact le long de la même surface.

Les équations du mouvement du corps 2 sont condensées dans la formule

$$(209) \qquad d\mathfrak{T}_{e2} + d\mathfrak{T}_{l2} - \delta_T\mathcal{F}_2 + d\mathfrak{T}_{j2} + d\mathfrak{T}_{v2} + d\mathfrak{T}_{w2} + d\mathfrak{T}_{\psi 2} = 0.$$

Comparée à l'égalité (204 *bis*), cette égalité (209) donne

$$(210) \qquad E\,dQ_2 = \delta_T\mathcal{F}_2 - E\,\delta U_2 - d\mathfrak{T}_{v2} - d\mathfrak{T}_{w2} - d\mathfrak{T}_{\psi 2}.$$

Supposons que le corps 2 se réduise à une couche infiniment mince, d'épaisseur δ, qui confine à la surface S; les quantités $\delta_T\mathcal{F}_2$, δU_2, $d\mathfrak{T}_{v2}$ tendront vers zéro avec ε;

([1]) *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques,* Chapitre VI, § 1, équations (223) (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* 5[e] série, t. II, 1896 et Paris, A. Hermann, 1896).

comme le long de la surface s_2 le corps 2 est soudé aux corps voisins, il n'y a le long de cette surface ni frottement de contact, ni viscosité de contact; $(d\mathfrak{T}_{w2}+d\mathfrak{T}_{\psi 2})$ est donc le travail virtuel des viscosités et frottements de contact qui agissent le long de la surface S; cette somme est indépendante de ε; en sorte que lorsque ε tend vers o, dQ_2 a pour limite

$$dQ_2 = -\frac{1}{E}(d\mathfrak{T}_{w2}+d\mathfrak{T}_{\psi 2}). \tag{211}$$

En un corps quelconque, on considère une couche infiniment mince qui confine à la surface limite; on suppose que, le long de cette surface, le corps glisse avec viscosité et frottement sur les corps voisins. Lorsque l'épaisseur de cette couche tend vers o, *la quantité de chaleur qu'elle dégage ne tend pas vers* o; *elle a pour limite le quotient par l'équivalent mécanique de la chaleur du travail virtuel changé de signe du frottement de contact et de la viscosité de contact qui s'exercent sur le corps considéré, le long de la surface considérée.*

Les développements donnés au Chapitre II nous montrent que si le corps 1 est un fluide ou un solide isotrope, la valeur limite de dQ_2 est

$$dQ_2 = -\frac{1}{E}\int\left\{\left(f+\frac{\mathfrak{G}}{|r'|}\right)[(u_2-u_1)\,\delta x_2+(v_2-v_1)\,\delta y_2+(w_2-w_1)\,\delta z_2]\right\}dS. \tag{208 bis}$$

§ 2. — La condition supplémentaire en une surface le long de laquelle deux corps glissent l'un sur l'autre.

Soit S une aire finie quelconque découpée en la surface par laquelle deux corps confinent l'un à l'autre et glissent l'un sur l'autre. A partir de cette aire, traçons, au sein des deux corps, les surfaces s_1, s_2, infiniment voisines de S, qui ont été considérées au paragraphe précédent.

Dans le temps dt, la masse matérielle comprise entre les surfaces s_1, s_2 et formée des couches 1 et 2 dégage réellement une quantité de chaleur dQ dont la théorie de la conductibilité fournit l'expression :

$$dQ = dt\int k_1\frac{\partial T}{\partial n_i}ds_1 + dt\int k_2\frac{\partial T}{\partial n_i}ds_2,$$

k_1 étant le coefficient de conductibilité du corps 1, k_2 le coefficient de conductibilité du corps 2, la normale n_i étant menée vers l'intérieur du corps 1 le long de la surface s_1, et vers l'intérieur du corps 2 le long de la surface s_2.

Lorsque ε tend vers o, cette quantité de chaleur a pour limite

$$dQ = dt \int \left[k_1 \left(\frac{\partial T}{\partial N} \right)_1 - k_2 \left(\frac{\partial T}{\partial N} \right)_2 \right] dS. \tag{212}$$

Mais cette limite peut s'obtenir d'une autre manière; dQ est égal, en effet, à la somme $(dQ_1 + dQ_2)$ des quantités de chaleur réellement dégagées, dans le temps dt, par les couches 1 et 2; et les valeurs limites de dQ_1 et dQ_2 se tirent des égalités (208) et (208 *bis*) en y faisant

$$\delta x_1 = u_1\, dt, \qquad \delta y_1 = v_1\, dt, \qquad \delta z_1 = w_1\, dt,$$
$$\delta x_2 = u_2\, dt, \qquad \delta y_2 = v_2\, dt, \qquad \delta z_2 = w_2\, dt,$$

ce qui nous donne pour valeur de la *quantité de chaleur réellement dégagée, dans le temps dt, en une portion quelconque de la surface par laquelle deux corps glissent l'un sur l'autre, la valeur essentiellement positive*

$$\begin{aligned} dQ &= -\frac{dt}{E} \int \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|} \right) [(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + (w_1 - w_2)^2]\, dS \\ &= -\frac{dt}{E} \int (f r'^2 + \mathfrak{G} |r'|)\, dS. \end{aligned} \tag{213}$$

Les seconds membres des égalités (212) et (213) doivent être égaux entre eux, quelle que soit l'aire S découpée sur la surface de contact des deux corps; pour cela, il faut et il suffit *que l'on ait, en tout point de la surface le long de laquelle deux corps glissent l'un sur l'autre, et à tout instant, la relation*

$$k_1 \left(\frac{\partial T}{\partial N} \right)_1 - k_2 \left(\frac{\partial T}{\partial N} \right)_2 = \frac{1}{E} \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|} \right) [(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + (w_1 - w_2)^2] = 0 \tag{214}$$

qui peut aussi s'écrire, en désignant par n_1, n_2, les deux demi-normales à la surface S dirigées l'une vers l'intérieur du corps 1, l'autre vers l'intérieur du corps 2,

$$k_1 \frac{\partial T}{\partial n_1} + k_2 \frac{\partial T}{\partial n_2} - \frac{1}{E} \left(f + \frac{\mathfrak{G}}{|r'|} \right) [(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2 + (w_1 - w_2)^2] = 0. \tag{214 bis}$$

Dans le cas où les corps 1 et 2 sont soudés entre eux le long de la surface S, on doit, comme nous le savons, faire

$$f = 0, \qquad \mathfrak{G} = 0.$$

L'égalité (213) devient alors

$$dQ = 0 \tag{215}$$

et l'égalité (214 *bis*) se réduit à

$$k_1 \frac{\partial T}{\partial n_1} + k_2 \frac{\partial T}{\partial n_2} = 0. \tag{216}$$

Dans le cas où les deux corps en contact glissent l'un sur l'autre avec viscosité, mais sans frottement, nos diverses égalités prennent des formes que l'on obtient aisément en y faisant $\mathfrak{G} = 0$. Ces formes ont été données par G. Kirchhoff [1]. Il importait de les étendre au cas où il y a frottement et de les déduire rigoureusement de nos définitions générales de la quantité de chaleur dégagée par un système.

CHAPITRE V.

ÉTUDE HISTORIQUE SUR LES CONDITIONS VÉRIFIÉES AUX LIMITES D'UN FLUIDE.

Les lois de la résistance qu'un fluide oppose au mouvement des solides qui y sont immergés, qu'il éprouve de la part des parois solides au long desquelles il coule avaient, de bonne heure, préoccupé les physiciens, sans que ceux-ci s'accordassent dans leurs opinions; Newton, Daniel Bernoulli, s'Gravesande, Chezy, l'abbé Bossut, Du Buat, avaient proposé, pour représenter ces lois, les formules les plus diverses [2].

Parmi ces physiciens, il en est un dont les recherches méritent d'arrêter un instant notre attention : c'est Du Buat [3].

Les expériences de Du Buat sur l'écoulement de l'eau dans les tuyaux l'amènent à supposer qu'une couche d'eau demeure adhérente à la paroi solide et ne prend

(1) G. Kirchhoff, *Vorlesungen über die Theorie der Wärme, herausgegeben von* Dr Max Planck, XIte Vorlesung, § 4; Leipzig, 1894.

(2) On trouvera d'intéressants renseignements sur ces anciennes recherches dans le Mémoire de Girard sur le mouvement des fluides dans les tubes capillaires, Mémoire qui sera cité plus loin.

(3) Du Buat, *Principes d'Hydraulique, vérifiés par un grand nombre d'expériences faites par ordre du Gouvernement,* 2 vol. (1re édition, Paris, 1779. — 2e édition, Paris, 1786).

aucune part au mouvement qui entraîne le reste du fluide (¹) (*loc. cit.*, 2ᵉ édition, t. I, p. 93). De même, lorsqu'un corps solide se meut dans un fluide, il entraîne « avec lui une certaine quantité du même fluide qui varie peu avec la différence des vitesses; de sorte que la masse en mouvement ne consiste pas seulement en la masse propre du corps, mais encore en celle du fluide entraîné, ce qui convient très bien avec ce que nous avons appelé *poupe* et *proue fluide* » (*loc. cit.*, t. II, IIIᵉ Partie, Section I, Chap. VII, p. 234). L'étude de cet entraînement du fluide par un solide en mouvement apparaît à Du Buat comme un objet d'une extrême importance : « Il n'est pas de moyen plus propre, dit-il (*loc. cit.*, t. II, p. 229) pour déterminer la quantité du fluide qu'entraîne avec lui un corps plongé que de faire osciller le corps dans le fluide.... On connaît les expériences de Newton sur les oscillations des globes dans différents fluides; comme il n'avait pour objet que de déterminer directement la résistance il ne s'attacha qu'aux pertes des amplitudes, sans observer la durée des oscillations. »

De quelle manière devons-nous concevoir cet entraînement? Le fluide se sépare-t-il, par une surface précise, en deux parties, l'une qui, pour ainsi dire, perdrait sa fluidité et ferait corps avec le solide; l'autre, demeurée fluide et glissant sur la première comme glissait la masse fluide entière à la surface du solide, selon l'hypothèse admise avant Du Buat? Ou bien, au contraire, la vitesse du fluide, identique à celle du solide le long de leur commune frontière, varie-t-elle d'une manière continue lorsqu'on s'éloigne de cette surface?

Si l'on s'en tenait seulement aux passages que nous avons cités, on attribuerait sans doute à Du Buat la première opinion; mais il est moins aisé de la concilier avec d'autres passages de ses *Principes d'Hydraulique*.

La masse même, qu'il attribue au fluide entraîné, semble peu compatible avec l'hypothèse que les mouvements de cette masse sont rigoureusement solidaires des oscillations du solide. « On voit, dit-il (*loc. cit.*; t. II, IIIᵉ Partie, Section I, Chap. VII), qu'en général, un globe, mû dans l'eau, entraîne avec lui, tant en avant que derrière, une portion du fluide dont le volume excède un peu la moitié du sien. »

(¹) Cette supposition s'était déjà présentée incidemment à l'esprit de Daniel Bernoulli, comme propre à expliquer les divergences entre les principes de l'Hydraulique et les données de l'observation. « Non dubito, écrit-il (ᵃ), quin hæc ad amussim experientiæ essent responsura, si modo adhæsio aquæ ad latera tubi motum non retardaret; puto tamen, eventum experimentorum talem esse posse, ut intelligenti, qui horum impedimentorum rationem habeat, satis ostendant propositionum veritatem. » Et plus loin (ᵇ) : Enormes has differentias maxima ex partie adhæsioni aquæ ad latera tubi tribuo, quæ certe adhæsio in hujusmodi casibus incredibilem exercere potest effectum. »

(ᵃ) DANIELIS BERNOULLI, *Hydrodynamica*, Sectio tertia, § 27, p. 50. — Argentorati, anno MDCCXXXVIII.

(ᵇ) *Ibid.*, ad. § 27, p. 59.

Coulomb [1] semblait ignorant ou insoucieux des recherches de Du Buat, lorsque, à l'imitation de Newton, il entreprit de déterminer, par des recherches expérimentales précises, la loi de la résistance qui s'oppose au mouvement relatif d'un solide et d'un fluide. Il fit osciller lentement dans un fluide un disque ou un cylindre suspendu à un fil de torsion et ses recherches le conduisirent au résultat suivant : La résistance qui s'oppose au mouvement relatif d'un solide et d'un fluide est la somme de deux termes; l'un de ces termes est proportionnel à la vitesse relative du solide et du fluide et l'autre au carré de cette même vitesse.

Cette loi, Coulomb ne la considère nullement comme un principe premier, expression immédiate de rapports qui existent entre le solide et le fluide le long de leur commune surface; il la regarde comme une conséquence du mouvement engendré dans le fluide. Quant aux rapports qui s'établissent entre le solide et le fluide le long de leurs surfaces de contact, voici ce qu'il en dit (*loc. cit.*, p. 296) : « On peut soupçonner que la cohérence entraîne latéralement au cylindre une petite portion du fluide dont toutes les molécules se détachent. Les molécules qui touchent immédiatement le cylindre prennent la même vitesse que le cylindre ; mais les parties latérales un peu plus éloignées prennent une plus petite vitesse, et, à une distance latérale de deux ou trois millimètres, la vitesse cesse en entier. »

De cette manière de voir, Coulomb trouve une preuve dans l'expérience suivante : La loi suivant laquelle décroissent les amplitudes des oscillations d'un disque plongé au sein d'un liquide ne varie pas lorsque la surface du disque métallique est enduite de suif ou saupoudrée de grès. « Il paraît, ajoute Coulomb (*loc. cit.*, p. 287), que l'on peut conclure de cette expérience que la partie de la résistance que nous avons trouvée proportionnelle à la simple vitesse est due à l'adhérence des molécules du fluide entre elles, et non à l'adhérence de ces molécules avec la surface du corps. »

Le Mémoire de Coulomb inspira les recherches de Girard. Dès 1804, Girard [2] tentait d'appliquer à l'Hydraulique l'hypothèse, proposée par Coulomb, selon laquelle un liquide éprouve, de la part des parois solides le long desquelles il coule, une résistance proportionnelle à la surface de ces parois et composée de deux termes : l'un au, proportionnel à la vitesse u du fluide; l'autre bu^2, proportionnel au carré de cette vitesse; mais il s'efforça d'adopter pour a et b des valeurs numériques égales; idée étrange, puisque ces coefficients ont des dimensions différentes et que le rapport de leurs valeurs numériques dépend du système

(1) *Expériences destinées à déterminer la cohérence des fluides et les lois de leur résistance dans les mouvements très lents*, par le citoyen COULOMB. Lu le 6 prairial, an VIII (1800). (*Mémoires de l'Institut national des Sciences et des Arts*. Sciences mathématiques et physiques, t. III, prairial an IX, p. 246.)

(2) GIRARD, *Rapport sur le projet général du canal de l'Ourcq*, 1804, p. 37.

d'unités adopté, comme Girard devait le reconnaître avec bonne grâce quelques années plus tard ([1]).

Dissipant cette erreur, de Prony, dans ses *Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes,* reprend la formule primitive de Coulomb et s'attache à déterminer la valeur des coefficients a et b.

De Prony admet d'ailleurs, comme Du Buat, dont il s'inspire, qu'une masse fluide notable demeure adhérente aux parois d'un canal où coule un liquide; il croit cette couche adhérente assez épaisse pour que ni la nature de la paroi, ni les petites aspérités qu'elle présente, n'aient d'influence sur le mouvement du liquide. « Lorsque le fluide coule dans un tuyau ou sur un lit susceptible d'être mouillé, une lame ou couche du fluide reste adhérente à la matière qui compose ce tuyau ou dans laquelle ce lit est creusé; cette couche peut ainsi être regardée comme la véritable paroi qui renferme la masse fluide en mouvement. »

En 1816, Girard revint ([2]) à l'étude de la résistance que les parois solides opposent à l'écoulement des fluides; il aborda cette étude au double point de vue théorique et expérimental. Il demeure attaché aux lois posées par Coulomb, dont le Mémoire « contient les principes qui doivent conduire à la solution de cette question » (*loc. cit.,* p. 253).

Ces principes, toutefois, il les précise et, en les précisant, il les altère de manière à les rapprocher des idées de Du Buat et de Prony. Coulomb, en un passage que nous avons cité, admettait qu'un solide et un liquide en mouvement relatif adhèrent le long de la surface de contact, puis que la vitesse varie graduellement, à partir de cette surface de contact, lorsqu'on pénètre au sein du liquide. Pour Girard, une gaine fluide très mince adhère à la surface du solide; une surface de discontinuité sépare cette gaine du reste du liquide et la vitesse qui figure dans ses formules, c'est la vitesse relative des deux masses fluides que sépare cette surface : « Par l'effet, dit-il (*loc. cit.,* p. 254), de l'adhérence du fluide aux parois du canal qui le contient, il arrive qu'une couche très mince de ce fluide reste attachée à ces parois, de sorte que le courant s'établit en glissant sur cette couche. »

Cette couche très mince qui adhère au solide oppose au mouvement du reste du fluide une résistance au proportionnelle à leur vitesse relative (*loc. cit.,* p. 255); cette résistance est donc attribuable, non aux actions du solide sur le fluide, mais aux actions mutuelles des diverses parties du fluide. Elle existerait seule si la paroi solide était parfaitement polie; mais la paroi offre une multitude

---

([1]) Girard, *Mémoire sur le mouvement des fluides,* etc. (*voir* ci-dessous), p. 256.

([2]) *Mémoire sur le mouvement des fluides dans les tubes capillaires et l'influence de la température sur ce mouvement,* par M. Girard. Lu à l'Académie, le 30 avril et le 6 mai 1816 (*Mémoires de la classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France,* années 1813, 1814 et 1815).

d'aspérités qu'épouse fidèlement la couche adhérente et qui se reproduisent à la surface par laquelle cette couche confine au reste du fluide; c'est à ces aspérités qu'il faut attribuer la présence, dans l'expression de la résistance, d'un terme bu^2 proportionnel au carré de la vitesse u (*loc. cit.*, p. 255). Girard, on le voit, suppose à la gaine liquide adhérente moins d'épaisseur que ne lui en attribuaient Du Buat et de Prony.

Les expériences effectuées par Girard ne s'accordent guère avec les fondements de sa théorie; la valeur du coefficient a, au lieu d'être constante pour un fluide donné, dépend du diamètre du tube par lequel le liquide s'écoule (*loc. cit.*, p. 297 et p. 328). Girard, il est vrai, ne s'émeut guère de cette contradiction; bien plus, il lui semble (*loc. cit.*, p. 328) que « l'existence de cette couche fluide (immobile, qui tapisse intérieurement le tuyau), par laquelle nous avons expliqué les phénomènes précédents, se trouve démontrée par celui qui nous occupe actuellement ». D'ailleurs, pour rétablir l'accord entre sa théorie et les faits d'expérience, il n'hésite pas à supposer que l'épaisseur de la couche adhérente dépend de la courbure de la paroi.

Les hypothèses touchant les actions moléculaires qui ont fourni à Navier (¹) les formules relatives à la viscosité intérieure des fluides lui fournissent également la théorie de la résistance qu'une paroi solide oppose à l'écoulement d'un fluide.

Pour Navier, le fluide n'est pas adhérent au solide; au contact d'une paroi immobile, le fluide a une vitesse dont les composantes u, v, w, différentes de o, vérifient seulement la condition (*loc. cit.*, p. 415)

$$u\cos(n_i, x) + v\cos(n_i, y) + w\cos(n_i, z) = 0.$$

Le travail virtuel des actions du solide sur la couche fluide contiguë a pour valeur (*loc. cit.*, p. 411)

$$-\int \mathrm{E}\,(u\,\delta x + v\,\delta y + w\,\delta z)\,d\mathrm{S},$$

$d\mathrm{S}$ étant un élément de la surface de contact et δx, δy, δz les composantes du déplacement virtuel de la masse liquide qui confine à cet élément. E est un coefficient positif qui dépend seulement de la nature du liquide et du solide et de leur commune température.

Cette expression du travail de la viscosité de contact rentre comme cas particulier dans notre formule (48), à condition d'y réduire notre quantité f à $-$ E.

(¹) NAVIER, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, lu à l'Académie royale des Sciences, le 18 Mars 1822 (*Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France*, année 1823, p. 389). On trouve un exposé des formules de Navier dans RESAL, *Traité de Mécanique générale*, t. II, p. 252; 1874.

La théorie proposée par Navier rentre donc comme cas particulier dans celle que nous avons exposée, à la condition de faire, en celle-ci,

$$f = -\mathrm{E}, \qquad \mathfrak{G} = 0.$$

Et, en effet, si l'on substitue ces valeurs dans les conditions (76), on obtient les équations qui doivent, selon Navier, être vérifiées en tout point de la surface de contact du solide et du liquide (*loc. cit.*, p. 415).

Ces conditions, Navier en fait usage pour traiter *de l'écoulement d'un fluide par un tuyau rectiligne dont la section est rectangulaire* (*loc. cit.*, p. 417), puis *de l'écoulement d'un fluide par un tuyau rectiligne dont la section est circulaire* (*loc. cit.*, p. 422). Les formules qu'il donne pour résoudre ce problème sont, au fond, identiques à celles que Girard avait déduites de sa théorie.

Ce rapprochement entre les conséquences de la théorie de Girard et les conséquences de la théorie de Navier ne doit pas nous surprendre; distinctes par une de leurs hypothèses fondamentales, la théorie de Girard et la théorie de Navier ne tardent guère à se rejoindre; pour celui-ci, c'est sur la paroi solide même que glisse le liquide; pour celui-là, c'est sur une mince couche fluide adhérente au liquide; mais, pour l'un comme pour l'autre, une surface de discontinuité sépare les masses mobiles des masses immobiles et les premières retardent les secondes par une viscosité à laquelle les deux physiciens imposent les mêmes lois.

La contradiction que les formules de Girard rencontrent dans ses propres expériences s'oppose donc également à l'adoption des formules de Navier.

En 1829, Poisson compose un Mémoire [1], capital pour le développement de la physique moléculaire, qui contient une théorie fort originale du mouvement des fluides visqueux; les hypothèses qu'il formule touchant l'action d'une paroi solide sur un fluide en mouvement ont d'étroites relations avec les suppositions que Girard avait émises.

« Si un fluide, dit-il (*loc. cit.*, p. 94), est en contact avec un corps solide susceptible d'agir sur ses molécules, cette action produira une compression particulière qui peut se transmettre de proche en proche, jusqu'à une distance extrêmement petite, mais sensible, de la surface du solide, quoique l'action immédiate de ce corps n'ait lieu qu'à une distance insensible. Il se peut que, dans l'épaisseur de cette couche ainsi comprimée, le fluide perde sa fluidité, ou, autrement dit, il est possible que ses molécules soient assez rapprochées les unes des autres pour que leur forme influe sur leur action mutuelle, comme dans les corps solides. Dans cette hypothèse, la contraction linéaire et, par suite, la pression moléculaire, n'y seront plus égales en tout sens autour de chaque

(1) *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides,* par S.-D. Poisson, lu à l'Académie des Sciences, le 12 octobre 1829 (*Journal de l'École Polytechnique,* XX[e] cahier, t. XIII, 1831, p. 1).

point; et c'est sans doute ce qui a lieu dans la couche extrêmement mince qui s'attache à un corps mouillé par un liquide et ne coule plus le long de sa surface; ce qui est un effet distinct de l'adhésion apparente, due à la même cause que les phénomènes de la capillarité. »

Comme Girard, Poisson admet qu'une véritable surface de discontinuité sépare cette couche immobile, adhérente à la paroi, de la masse fluide mobile :

« Nous avons déjà remarqué (*loc. cit.*, p. 161) qu'il est possible qu'une couche très mince du fluide devienne adhérente à cette paroi et perde sa fluidité; dans ce cas, nous regarderons cette couche comme faisant partie de la paroi qui aura pour surface celle de cette même couche où se termine le fluide qui sera resté mobile. »

L'accord entre les vues de Poisson et celles de Girard, que nous venons de constater dans les hypothèses fondamentales, se retrouve dans leurs conséquences : celles-ci, dès lors, s'accordent également avec les formules de Navier. Les conditions vérifiées à la surface de contact du solide et du fluide (*loc. cit.*, p. 169) sont ce que deviennent nos égalités (76) si l'on y remplace $\mathfrak{G}$ par o et f par un coefficient μ qui dépend « de la nature du fluide et de celle de la paroi. Il sera constant dans le cas d'un fluide incompressible et homogène qui aura partout la même température. S'il s'agit d'un fluide aériforme, il pourra dépendre de la compression variable du fluide ».

Si les suppositions de Poisson, dans le Mémoire que nous venons de citer, s'accordent très exactement avec celles de Girard, elles sont au contraire pleinement conformes à celles de Navier dans le Mémoire que Poisson consacre à la théorie du pendule [1]. Les vitesses des molécules adjacentes au solide ne sont plus supposées identiques à celles du solide; le fluide peut glisser à la surface du solide; il est assujetti seulement à cette condition : « Les vitesses des molécules adjacentes à ce corps sont constamment les mêmes, dans le sens normal, que celles des points correspondants de sa surface. » Mais, en glissant à la surface du solide, le fluide, par son frottement, produit une action tangentielle proportionnelle à la vitesse relative des deux corps en contact.

Ces principes sont bien ceux qu'admet Navier; mais, par une singulière inconséquence, Poisson omet de tenir compte, dans ses équations, de la viscosité interne du fluide; il aurait dû, dès lors, en vertu même de ses hypothèses, admettre que le fluide demeure adhérent au solide tout le long de leur commune surface.

L'idée, émise par Coulomb, selon laquelle le fluide se meut avec une vitesse exactement égale, le long des parois, à celle du solide qu'il baigne, et graduel-

---

[1] S.-D. Poisson, *Mémoire sur les mouvements simultanés d'un pendule et de l'air environnant* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XI, 1832, p. 521).

lement variable avec la distance à ces parois, semble donc généralement abandonnée; Girard, Navier, Poisson s'accordent à admettre l'existence d'une surface au travers de laquelle la vitesse subit une brusque variation; leurs opinions divergent seulement touchant le siège de cette surface. Nous retrouvons toutefois, en 1839, l'opinion de Coulomb dans un travail, d'ailleurs médiocre, de Hagen (1); lorsqu'un liquide coule dans un tube étroit, Hagen admet sans discussion (*loc. cit.*, p. 433) que la vitesse d'écoulement, nulle à la paroi, est, en chaque point, proportionnelle à la distance de ce point à la paroi..

L'opinion émise par Coulomb et abandonnée par la plupart de ses successeurs, allait trouver en Stokes un partisan convaincu; à l'appui de cette opinion, Stokes allait invoquer un argument nouveau, qui sera repris ensuite par divers théoriciens. Voici sous quelle forme il présente cet argument (2) :

Au sein d'un fluide visqueux en mouvement (*Papers*, Vol. I, p. 96) imaginons une surface et supposons qu'au voisinage de cette surface, les dérivées partielles des composantes u, v, w de la vitesse, soient extrêmement grandes; les actions tangentielles, dues à la viscosité, seront aussi extrêmement grandes; elles produiront une rapide atténuation de la vitesse relative des parties voisines. Passons à la limite et supposons qu'à un instant t, les composantes u, v, w de la vitesse soient discontinues le long d'une certaine surface; à cet instant, les actions tangentielles seraient infinies le long de cette surface; elles détruiraient immédiatement la vitesse relative des deux masses fluides qui confinent l'une à l'autre le long de cette surface; on ne peut donc trouver, au sein d'un fluide visqueux en mouvement, de surfaces le long desquelles les composantes de la vitesse soient discontinues. Raisonnant par analogie, il est naturel d'admettre que les actions, au contact d'un fluide et d'un solide qu'il baigne, sont semblables aux actions qu'exercent l'une sur l'autre deux masses fluides contiguës; que, par conséquent, la vitesse ne peut être discontinue le long d'une semblable surface. Par là, on est conduit à admettre que le fluide adhère au solide le long de leur commune frontière.

Le raisonnement de Stokes est une sorte d'esquisse des considérations que nous avons développées précédemment (IIe Partie, Chap. I); mais la comparaison de ce que nous avons écrit avec ce raisonnement trop sommaire montre que ce dernier n'est pas entièrement exact. Il est bien vrai qu'une surface au passage de

---

(1) Hagen, *Ueber die Bewegung des Wassers in engen cylindrischen Röhren* (*Poggendorff's Annalen*, Bd. XLVI, 1839, p. 423).

(2) P. G. Stokes, *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids*, lu le 14 avril 1845 à la *Philosophical Society* de Cambridge (*Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. VIII, p. 287. — *Mathematical and physical Papers*, Vol. I, p. 75).

laquelle les composantes u, v, w de la vitesse varieraient d'une manière discontinue ne peut persister pendant un temps fini au sein d'un fluide visqueux; mais il n'est pas exact que les actions de viscosité donnent, au long d'une telle surface, des résultantes infinies, et le raisonnement de Stokes, suivi rigoureusement, aurait pour conséquence de justifier l'opinon de Navier, bien loin de la réfuter.

D'ailleurs, en dépit de ces considérations, qui lui semblent démontrer l'adhérence du fluide au solide et la continuité du mouvement au sein du fluide, Stokes hésite à adopter cette opinion; car, en la suivant, il a étudié l'écoulement d'un liquide dans un tuyau et il a trouvé une formule qui ne s'accorde pas avec les expériences de l'abbé Bossut et de Du Buat.

Il tente alors de revenir à l'opinion de Navier (qu'il désigne sous le nom d'*opinion de Poisson*); mais, dans cette voie, il rencontre de nouvelles difficultés; selon les expériences de Du Buat, une couche liquide reste adhérente aux parois du tuyau au sein duquel coule un fluide; il n'est possible de mettre cette observation d'accord avec les formules de Navier qu'en supposant infini le coefficient E, et l'on est ainsi ramené à la précédente opinion.

Cette hésitation entre les diverses suppositions émises par Coulomb, par Girard, par Navier, par Poisson, se retrouve dans le *Rapport* (1) écrit par Stokes, en 1846.

Peut-être les conditions vérifiées au contact d'un solide et d'un liquide changent-elles, selon que le liquide *mouille* le solide, comme l'eau mouille le verre, ou que le liquide *ne mouille pas* le solide, comme il arrive dans le cas du mercure et du verre.

Les idées de Stokes touchant le problème qui nous occupe se fixent, en 1850, dans son célèbre travail : *De l'effet du frottement intérieur des fluides sur le mouvement des pendules* (2). Il a adopté définitivement l'hypothèse de Coulomb. Les raisons qui déterminent son choix sont, sous une forme plus explicite, celles qu'il avait déjà indiquées en 1845; voici en quels termes il les présente (*Collection de Mémoires,* t. V, p. 292) :

» Pour que le fluide, immédiatement en contact avec un solide, pût couler sur lui avec une vitesse finie, il faudrait que le solide exerçât sur le fluide un frotte-

(1) P. G. Stokes, *Report on recent researches on Hydrodynamics* (*Report of the British Association for* 1846, Part. I, p. 1. — *Mathematical and physical Papers,* Vol. I, p. 157).

(2) P. G. Stokes, *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums,* lu à la *Philosophical Society* de Cambridge, le 9 décembre 1850 (*Transactions of the Cambridge Philosophical Society,* Vol. IX, Part. II, p. 8. — *Philosophical Magazine,* Vol. I, 1851, p. 337. — *Collection de Mémoires relatifs à la Physique, publiés par la Société française de Physique,* t. V, 1891, p. 277. — *Mathematical and physical Papers* Vol. III, p. 1).

ment infiniment plus faible que celui que le fluide exerce sur lui-même. Car, concevons la couche élémentaire de fluide comprise entre la surface du solide et une surface parallèle à la surface h, et ne considérons que la portion de cette couche qui correspond à une portion élémentaire $d\mathrm{S}$ de la surface du solide. Il doit y avoir équilibre entre les forces qui agissent sur l'élément fluide et les forces effectives, prises en sens contraire (1). Concevons maintenant que h s'évanouisse par rapport aux dimensions linéaires de $d\mathrm{S}$, et que, finalement, $d\mathrm{S}$ s'évanouisse également. Il est évident que les conditions d'équilibre se réduisent finalement à celle-ci, que la pression oblique que l'élément fluide éprouve du côté du solide doit être égale et opposée à la pression qu'il éprouve du côté du fluide. Or, si le fluide pouvait couler le long du solide avec une vitesse finie, il s'ensuivrait que la pression tangentielle, mise en jeu par le glissement continu du fluide sur lui-même, ne serait pas même contrebalancée par le glissement rude et inégal du fluide sur le solide. Comme cela paraît *a priori* excessivement improbable, il semble raisonnable d'examiner en premier lieu les conséquences de la supposition qu'il n'y a pas de pareil glissement du fluide sur le solide, d'autant mieux que les difficultés mathématiques du problème seront ainsi matériellement diminuées. Je prendrai donc, comme condition devant être satisfaite aux limites du fluide, que la vitesse d'une particule fluide doit être égale, en grandeur et en direction, à celle de la particule solide avec laquelle elle est en contact. Les résultats déduits de cette hypothèse montrent, en réalité, l'accord le plus satisfaisant avec l'observation. »

En admettant qu'un liquide adhère aux parois des tuyaux dans lesquels il coule et en étudiant le régime permanent qui s'établit dans ces tuyaux, Stokes avait obtenu des résultats qui ne s'accordaient pas avec les observations de Bossut et de Du Buat; ce désaccord l'avait fait hésiter sur la légitimité de son hypothèse.

Cette hésitation lui eût été évitée, s'il eût connu les expériences poursuivies à la même époque par Poiseuille ; le résultat du calcul eût été pleinement conforme aux données de l'observation.

L'étude de l'écoulement des liquides dans les tubes de très petit diamètre apparaît comme particulièrement propre à contrôler les hypothèses qui pourraient être faites, touchant la résistance que les parois opposent à cet écoulement. D'autre part, cette étude intéresse à un haut degré le physiologiste qui veut analyser les phénomènes de la circulation capillaire. Ce fut surtout cette seconde raison qui porta Poiseuille (2) à reprendre cette étude au point de vue expérimental et à soumettre à l'observation des tubes beaucoup plus étroits que les tubes

(1) Par cette dernière expression, Stokes entend les *forces d'inertie*.

(2) POISEUILLE, *Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de petit diamètre* (*Mémoires des savants étrangers*, t. IX, 1846, p. 433).

employés par Girard. Les expériences furent couronnées d'un plein succès; elles lui révélèrent des lois qui sont aujourd'hui classiques; ces lois, d'ailleurs, ne s'accordaient pas avec les formules que Girard et Navier avaient tirées de leurs déductions théoriques (*loc. cit.*, p. 435 et p. 521).

Poiseuille ne tente ni de donner une explication théorique des lois qu'il avait découvertes, ni de préciser l'action de la paroi sur le liquide en mouvement; à cet égard, il se contente de penser (*loc. cit.*, p. 521), d'après les observations des micrographes sur la circulation capillaire, que « la vitesse est maximum dans le milieu du vaisseau; elle diminue au fur et à mesure qu'on s'approche des parois; ainsi, la vitesse, tout près des parois, est d'une lenteur extrême ».

Ce passage permet de rapprocher l'opinion de Poiseuille de celle de Coulomb; en fait, les partisans de cette opinion allaient trouver dans les lois de Poiseuille le plus fort argument en faveur de leur thèse.

En 1860, Hagenbach [1] eut l'idée de reprendre l'analyse appliquée par Navier à l'écoulement de l'eau dans les tubes de petit diamètre, mais en modifiant la condition aux limites employée par le physicien français; au lieu de supposer que l'eau glissait le long des parois du tuyau en éprouvant une résistance proportionnelle à sa vitesse de glissement, il admit que la vitesse à la paroi était nulle. Pour justifier cette hypothèse, il invoqua un raisonnement analogue à celui que M. Stokes avait plusieurs fois développé : « Il est facile de voir, dit-il (*loc. cit.*, p. 394), que la vitesse est nulle à la paroi du tuyau. Cette supposition découle déjà, d'une manière assez sûre, de cette circonstance que le liquide coule de la même manière dans des tubes étroits faits de substances différentes, pourvu seulement que la paroi soit lisse et mouillée par le liquide. Elle résulte aussi de l'observation des canaux et des rivières où l'on aperçoit une couche immobile le long des rives. Mais on peut également démontrer cette proposition, pourvu que l'on admette que le frottement entre une couche de verre ou de métal et une couche fluide engendre une force du même ordre de grandeur que le frottement entre deux couches liquides. Supposons, en effet, que la couche voisine de la paroi coule avec une vitesse finie; elle serait retenue par une force de frottement qui serait proportionnelle à une vitesse finie et entraînée par une autre force de frottement qui serait proportionnelle à une différence infiniment petite de vitesses; mais, en toutes les autres couches liquides, il est fait équilibre à la pression par la différence de deux forces qui sont, l'une et l'autre, proportionnelles à une différence infiniment petite de vitesses; il est donc clair que la vitesse doit être infiniment petite dans la couche contiguë à la paroi. »

---

(1) HAGENBACH, *Über die Bestimmung der Zähigkeit einer Flüssigkeit durch den Aussfluss aus Röhren* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, Bd. CIX, 1860, p. 385).

Grâce à ce changement apporté aux conditions aux limites, l'analyse de Navier fournit sans peine à Hagenbach les lois mêmes que Poiseuille avait tirées de l'expérience.

Peu de temps après, et sans connaître le travail de Hagenbach, Émile Mathieu (1) reprit, avec le même succès, une analyse semblable. « Quand un liquide coule dans un tube capillaire, dit-il, il existe une couche de liquide adhérente au tube...; cette adhérence tient à la force de cohésion du liquide et du verre, ou plutôt au frottement qui est proportionnel à cette force. Ainsi, la condition à la surface est que la vitesse du liquide soit nulle sur la paroi. »

Plus tard, par des méthodes analogues, le même sujet fut repris par M. Boussinesq (2); en modifiant la condition aux limites admise par Navier, M. Boussinesq justifiait cette modification par des raisons semblables à celles qu'avaient invoquées Stokes et Hagenbach.

Bien que très général, le consentement à l'opinion de Coulomb ne fut cependant pas universel; certains hydrauliciens, et non des moindres, tinrent pour les hypothèses de Girard et de Navier; parmi ceux-ci, il convient de citer Darcy (3).

Darcy n'ignore pas les considérations par lesquelles, depuis Prony, on tente de prouver qu'un fluide ne peut couler le long d'une paroi solide avec une vitesse finie; il sait qu'en supposant du même ordre de grandeur les actions mutuelles des diverses parties du fluide et les actions du solide sur le fluide, on prétend démontrer qu'un tel glissement engendrerait un frottement infini; mais il se range à l'opinion que Dupuit avait émise dans ses *Études sur le mouvement des eaux courantes*, et, sans discuter la rigueur du raisonnement, il révoque en doute l'hypothèse même qui lui sert de fondement. « On voit par ce qui précède, dit-il (*loc. cit.*, p. 309), qu'il suffit d'une vitesse relative infiniment petite pour faire naître, dans les couches fluides en contact, une résistance comparable à celle qui pourrait être engendrée par une vitesse finie du liquide glissant sur une paroi solide. M. Dupuit a donc pu prétendre que de Prony ne paraît pas avoir exprimé une idée précise lorqu'il a dit : « Cette cohésion des molécules fluides entre elles, et celle des mêmes molécules à la matière dont le tuyau est formé ou dans laquelle le tuyau est creusé, doivent être, en général, représentées par des valeurs différentes, mais comparables ou du même ordre les unes par rapport aux autres. »

« L'adhérence à la paroi, en effet, peut être expérimentée sous une vitesse finie

---

(1) Émile Mathieu, *Sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petit diamètre* (*Comptes rendus*, t. LVII, 1863, p. 320. — *Cours de Physique mathématique*, p. 66. Paris, 1873).

(2) Boussinesq, *Théorie des expériences de M. Poiseuille sur l'écoulement des liquides dans les tubes capillaires* (*Comptes rendus*, t. LXV, 1867, p. 46).

(3) Darcy, *Recherches expérimentales sur le mouvement de l'eau dans les tuyaux* (*Mémoires des Savants étrangers*, t. XV, 1858, p. 141).

quelconque, tandis que ce qu'on appelle la *cohésion* ne peut l'être que sous l'influence d'une vitesse relative infiniment petite; car, de quelque manière qu'on fasse l'expérience, ajoute justement M. Dupuit, *la cohésion du liquide sera toujours assez forte pour que la vitesse relative des deux surfaces soit sensiblement nulle* ».

« Ces deux forces de l'adhérence et de la cohésion sont, on le voit, d'un ordre différent et sans mesure commune. »

De ce passage une conclusion semble se dégager nettement : Le liquide peut, comme le voulait Navier, glisser avec une vitesse finie à la surface d'une paroi solide; mais il ne peut se produire, entre deux masses fluides, une de ces surfaces de discontinuité dont Girard admettait l'existence.

Cette conclusion n'est pas, cependant, celle qu'adopte Darcy. S'il admet que, dans certains cas exceptionnels, le liquide glisse à la surface même du solide, il pense que, le plus souvent, l'écoulement a lieu selon le mode que Girard a imaginé. Voici, en effet, quelques-unes des propositions par lesquelles Darcy résume ses recherches (*loc. cit.*, p. 347) :

» Il résulte des expériences faites :

» 1° Que, même dans un tuyau *verticalement placé* et à raison de l'attraction de ses parois, une couche liquide leur reste adhérente.

» 2° Que l'épaisseur de cette couche est beaucoup trop faible pour faire disparaître les aspérités de la paroi; que, d'ailleurs, elle doit présenter une épaisseur sensiblement constante et, par conséquent, offrir à sa surface les mêmes reliefs que la paroi elle-même.

» Sans doute, dans un courant, il ne peut y avoir entre les vitesses de deux filets contigus qu'une différence insensible; mais il ne saurait en être ainsi lorsqu'il s'agit de la couche adhérente; elle est, pour ainsi dire, passée à l'état d'*émail,* d'enduit aqueux de la paroi. »

Cette couche tend à retarder le mouvement du liquide qu'elle enserre :

» Si donc, d'une part, l'attraction des parois doit être considérée comme une des causes retardatrices du mouvement, on doit reconnaître, d'autre part, que cette cause agit vraisemblablement en grande partie par l'intermédiaire de la cohésion du fluide que la surface extérieure du cylindre mobile doit surmonter.

» Ainsi le mode d'agir de l'attraction des parois semblerait pouvoir se résumer ainsi :

» Force nécessaire pour vaincre l'attraction des parois, dans les parties où le liquide viendrait à s'en détacher, et force nécessaire pour surmonter la cohésion quand le cylindre liquide passe sur l'enduit aqueux.

» Enfin, les aspérités de la surface qui viennent modifier brusquement le mouvement et la direction des filets fluides forment, évidemment, une autre cause retardatrice. »

Une inconséquence assez étrange semble donc faire le fond des considérations développées par Darcy touchant l'action des parois sur une masse fluide en mouvement.

C'est aux hypothèses de Navier que revient M. Oskar Emil Meyer [1].

Reprenant des expériences analogues à celles de Coulomb, M. Oskar Emil Meyer fait osciller un disque métallique au sein d'une masse d'eau que recouvre une couche d'huile; la face supérieure du disque est amenée tout près de la surface de séparation entre l'eau et l'huile.

Conformément à l'opinion de Coulomb, M. O.-E. Meyer admet (*Diss.*, p. 6; *Pogg. Ann.*, p. 61) que l'eau adhère au disque métallique : *Discum fluido circumfuso tanto modo humectari pono, ut stratum fluidi disco vicinum eadem gaudeat celeritate qua ipse discus.* Mais il suppose que les deux liquides glissent l'un sur l'autre le long de leur surface de contact; ce glissement engendrerait une résistance soumise à des lois semblables de tout point à celles que Navier imposait au frottement d'un liquide sur un solide. Il semble par là, que l'opinion de M. O.-E. Meyer s'accorderait aisément avec l'hypothèse de Girard et de Darcy; mais ce n'est là qu'une apparence dissipée par la lecture des écrits où, peu après, M. O.-E. Meyer développe plus explicitement sa pensée.

Dans son Mémoire inséré aux *Annales de Poggendorff*, tout en admettant en général l'adhérence du liquide au solide, M. O.-E. Meyer écrit (*Pogg. Ann.*, p. 68) quelques lignes où il déclare que les lois vérifiées au contact d'un solide et d'un liquide sont tout à fait analogues à celles qui sont vérifiées au contact de deux liquides; il les suppose donc, en ce passage, données par les formules de Navier. De plus, il écarte (*ibid.*, p. 69) l'objection présentée par Stokes contre ces formules; avec Dupuit et avec Darcy, il admet ce principe : Les lois de la viscosité interne d'un fluide sont d'une tout autre nature que les lois dont dépend la viscosité au contact de deux substances différentes.

Dans son travail publié au *Journal de Borchardt*, M. O.-E. Meyer s'exprime plus explicitement encore; il admet que les conditions vérifiées à la surface de contact de deux fluides sont données par les équations de Navier (*loc. cit.*, p. 238); qu'il en est de même des conditions vérifiées à la surface de contact d'un liquide et d'un solide (*ibid.*, p. 239); mais que, dans le cas où le solide est mouillé par le fluide, le coefficient E est infini, en sorte que la vitesse relative du solide et du fluide tombe à o.

---

(1) Ottocarius Æmilius Meyer, *De mutua duorum fluidorum frictione :* Dissertatio inauguralis; Regimonti Prussorum (Kœnigsberg), anno MDCCCLX. — Oskar Emil Meyer, *Ueber die Reibung der Flussigkeiten* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie,* Bd. CXIII, p. 55; 1861). — *Ueber die Reibung der Flussigkeiten;* theoretischer Theil (*Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik,* Bd. LIX, p. 229; 1861).

A l'époque même où M. O.-E. Meyer soutenait la thèse dont nous venons de parler, paraissait un travail de grande importance sur la viscosité des fluides, travail dû à la collaboration de Helmholtz et de M. von Piotrowski (1). Par la discussion des expériences anciennes aussi bien que par l'analyse des observations de M. von Piotrowski, Helmholtz est conduit à admettre les conclusions suivantes (*Wiss. Abh.*, Bd. I, p. 174, pp. 214-222) :

Il est des cas où l'expérience s'accorde d'une manière satisfaisante avec l'hypothèse que le fluide adhère complètement au solide; tels sont les cas où l'eau se trouve au contact du verre, où l'éther, l'alcool se trouvent au contact du verre, d'une surface métallique polie. Il est, au contraire, des cas où le liquide glisse à la surface du solide, en se conformant aux lois que Navier a admises; cette circonstance se présente, notamment, au contact de l'eau et d'une surface métallique polie. On peut donc écrire, en toutes circonstances, les conditions aux limites indiquées par Navier (*Wiss. Abh.*, Bd. I, p. 204), mais, dans certaines circonstances, on doit supposer que le coefficient de viscocité mutuelle du solide et du fluide est infini (*Wiss. Abh.*, Bd. I, p. 214) ou, du moins, extrêmement grand (*Ibid.*, p. 221).

Cette opinion, commune à Helmholtz et à M. O.-E. Meyer, est celle que Franz-Emil Neumann professait dans ses leçons. Ses leçons sur ce sujet n'ont été publiées que dans ces dernières années (2); mais par des citations de M. O.-E. Meyer (3) et de M. von Piotrowski (4), nous voyons qu'elles étaient fort connues des physiciens allemands et particulièrement de Helmholtz.

Maxwell (5), qui se réfère d'ailleurs aux recherches de Helmholtz et de M. G. von Piotrowski, semble partager leurs vues; sans doute, en étudiant les oscillations d'un disque métallique au sein de l'air ou d'autres gaz, il admet que le fluide adhère complètement au solide mobile; mais, s'il admet cette hypothèse, c'est simplement parce que les conditions de Navier, appliquées au glissement de l'air sur le disque, conduisent à regarder la vitesse de glissement comme très petite; dès lors, les expériences n'étant pas assez précises pour permettre d'assurer

---

(1) H. Helmholtz et G. von Piotrowski, *Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten* (*Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der Akademie der Wissenschaften zu Wien*, Bd. XL, p. 607, 12 avril 1860. — *Wissenschaftliche Abhandlungen von H. Helmholtz*, Bd. I, p. 172).

(2) F.-E. Neumann, *Einleitung in die theoretische Physik*, herausgegeben von C. Pape; Leipzig, 1883, pp. 252-253.

(3) O.-E. Meyer, *Dissertatio inauguralis*, p. 6.

(4) G. von Piotrowski, in *Wissensch. Abh. von Helmholtz*, Bd. I, p. 182.

(5) J. Clerk Maxwell, *On the viscosity or internal friction of air and other gases* (*The Bakerian Lecture*, 8 février 1866; *Philosophical Transactions*, Vol. CLVI. — *Scientific Papers*, Vol. II, p. 1).

qu'elle diffère de o, il est aussi sûr et plus simple de la supposer rigoureusement égale à o (*Scientific papers*, vol. II, p. 9).

Comme Helmholtz et von Piotrowski, Stefan (1) admet qu'un liquide peut glisser sur une surface solide; il applique, en particulier, cette hypothèse au glissement du mercure sur le verre qui, selon lui, suit les lois tracées par Navier. D'ailleurs, dans ce cas, l'hypothèse semblait fort plausible; car les expériences de Poiseuille lui-même avaient prouvé que les lois de l'écoulement d'un liquide dans un tube capillaire, découvertes par ce physicien, ne s'appliquaient pas à l'écoulement du mercure dans le verre.

Mais, chose remarquable, cette exception n'était qu'apparente et due à des observations incorrectes; en 1870, M. Emil Warburg (2) reprit l'étude de l'écoulement du mercure dans des tubes de verre capillaires; contrairement à son attente, il trouva que cet écoulement suivait les célèbres lois de Poiseuille; il fallait nécessairement conclure de cette observation que le mercure adhérait au verre (*loc. cit.*, p. 370). Cette découverte expérimentale paraît à M. Warburg (*loc. cit.*, p. 379) s'accorder pleinement avec le raisonnement de Stokes, selon lequel le glissement d'un liquide sur un solide est impossible si l'on admet que le frottement du solide sur le fluide dépend de lois analogues à celles qui régissent le frottement mutuel de deux couches fluides.

Quelques années plus tard, l'observation de M. E. Warburg était confirmée successivement par M. E. Villari (3) et par M. Syn. Koch (4); ces deux auteurs reconnurent que le mercure, coulant dans de très fins tubes de verre, suivait les lois de Poiseuille.

Les hypothèses formulées par Navier touchant le glissement des liquides sur les solides, un moment remises en honneur par les recherches de Helmholtz et de von Piotrowski, se trouvaient de nouveau rejetées en suspicion par ces observations qui ramenaient l'attention vers l'hypothèse de Coulomb.

Une tendance analogue se dégageait des importantes recherches expérimentales, historiques et critiques poursuivies par M. Couette (5). En précisant par

---

(1) STEFAN, *Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der Akademie der Wissenschaften zu Wien*, Bd. XLVI, 1862.

(2) EMIL WARBURG, *Ueber den Ausfluss des Quecksilbers aus gläsernen Capillarröhren* (*Poggendorff's Annalen*, Bd. CXL, 1870, p. 367).

(3) E. VILLARI (*Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, 3e série, t. VI, 1876, p. 1).

(4) SYN. KOCH, *Ueber die Abhängigkeit der Reibungsconstante des Quecksilbers von der Temperatur* (*Wiedemann's Annalen*, Bd. XIV, 1881, p. 1).

(5) M. COUETTE, *La viscosité des liquides* (*Bulletin des Sciences Physiques de la Faculté des Sciences de Paris*, 1re année, Paris, 1888-1889; pp. 49, 123, 201, 262). — *Études sur le frottement des liquides* (*Thèse de Paris*, 30 mai 1890, et *Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. XXI, p. 433; 1890).

ses expériences les conditions dans lesquelles les lois de Poiseuille étaient applicables; en prouvant que, dans les limites de vitesse où elles s'appliqueraient, les lois d'oscillation d'un disque plongé dans le liquide s'accordaient avec l'hypothèse de Coulomb; enfin, en mettant en évidence les causes de doute que recélaient les calculs de Helmholtz, M. Couette a grandement contribué à établir la légitimité de ces deux propositions :

Lorsqu'un solide et un liquide sont en mouvement relatif, le liquide adhère au solide tout le long de leur commune surface.

Lorsqu'on s'éloigne de cette surface pour pénétrer au sein de la masse fluide, la vitesse du fluide varie d'une manière continue.

Toutefois, il s'en faut bien que ces propositions soient universellement admises dans les Traités récents d'Hydrodynamique. L'opinion générale paraît se rapprocher de celle qui a été admise par Helmholtz et M. G. von Piotrowski; la résistance opposée par un solide au mouvement d'un fluide obéirait aux lois posées par Navier; toutefois, dans un grand nombre de cas, le coefficient de viscosité E, introduit par Navier, serait si grand que les deux corps adhéreraient sensiblement l'un à l'autre; dans les applications mathématiques, d'ailleurs, on suppose presque toujours qu'il y a adhérence complète du fluide au solide, ce qui rend les calculs beaucoup plus aisés.

Tel est le parti adopté par G. Kirchhoff (1), par M. Lamb (2), par M. Basset (3), par M. W. Wien (4).

CONCLUSION DE LA QUATRIÈME PARTIE.

Visiblement, le doute et l'hésitation sont extrêmes parmi les physiciens qui ont cherché les conditions qu'un fluide vérifie au voisinage des surfaces limites; il est clair que l'absence de principes mécaniques suffisamment généraux laisse le champ libre aux conjectures les plus variées.

Les principes posés dans ces *Recherches* nous fournissent-ils quelque moyen de débrouiller ce chaos, de fixer quelque conclusion certaine ?

Tout d'abord, ils nous permettent de rejeter une des solutions proposées, la

---

(1) G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über mathematische Physik : Mechanik*, XXVIe Leçon; Leipzig, 1877.

(2) LAMB, *A Treatise on the mathematical theory of the motion of fluids;* p. 222; Cambridge, 1879.

(3) BASSET, *A Treatise on Hydrodynamics*, vol. II, p. 247; Cambridge, 1888.

(4) W. WIEN, *Lehrbuch der Hydrodynamik*, p. 18 et Chap. VII; Leipzig, 1900.

solution préconisée par Du Buat, par de Prony, par Girard, par Poisson, par Darcy. Il ne peut pas se faire qu'une couche fluide demeure adhérente au solide et que le reste du fluide glisse avec une vitesse finie sur cette couche. Les raisonnements exposés au Chapitre I de la II[e] Partie de ces *Recherches* nous ont démontré qu'au sein d'un fluide visqueux, aucune surface ne peut être, pour les composantes de la vitesse, une surface de discontinuité (¹).

Les composantes de la vitesse varient donc d'une manière continue d'un point à l'autre du fluide; par là, le doute se trouve restreint et nous ne pouvons plus hésiter qu'entre l'hypothèse de Coulomb et l'hypothèse de Navier.

Comme nous l'avons fait remarquer, l'hypothèse de Navier est impliquée, comme cas particulier, dans notre théorie. Pour retrouver les formules de Navier, il nous suffit d'admettre que le coefficient du frottement de contact $\mathfrak{G}$ est identiquement nul et que le coefficient de la viscosité de contact f ne dépend pas de la vitesse relative r'.

L'hypothèse de Coulomb admet que, pour deux corps différents, dont l'un au moins est fluide, la vitesse relative est nulle le long de la surface de contact. Si les fluides sont dénués de viscosité intrinsèque, ce n'est point là une hypothèse nouvelle, mais une conséquence des principes posés par Navier.

Dans le cas, au contraire, où les fluides étudiés sont des fluides visqueux, l'hypothèse de Coulomb se présentait jusqu'ici comme une hypothèse première que rien ne reliait aux principes généraux de la Mécanique. Ce n'était pas, en effet, relier cette hypothèse aux principes de la Mécanique de remarquer, avec F.-E. Neumann, Helmholtz, M. O.-E. Meyer et tant d'autres, que les formules de Navier donnent cette hypothèse à titre de loi limite lorsqu'on y fait croître au delà de toute limite le coefficient f de la viscosité de contact; c'est proprement remarquer que lorsque la théorie de Navier perd tout sens, on est contraint d'adopter l'hypothèse de Coulomb; ou mieux, c'est faire la remarque suivante : Lorsque f prend de grandes valeurs sans que μ dépasse certaines limites, les composantes de la vitesse relative deviennent très petites, ce qui assure une adhérence approchée, mais non pas une adhérence rigoureuse des deux corps.

La théorie que nous avons exposée permet de prévoir des cas où un fluide adhérera forcément et rigoureusement aux corps solides qu'il baigne; l'hypothèse

---

(¹) Récemment, M. Hadamard (^{a}) a montré que cette proposition devait être admise même pour les fluides parfaits. Des surfaces le long desquelles deux parties distinctes d'un même fluide glisseraient l'une sur l'autre pourraient persister, une fois nées; mais il est impossible qu'elles naissent à aucun instant.

(^{a}) J. HADAMARD, *Sur les glissements dans les fluides* (*Comptes rendus*, 2 février et 2 mars 1903, t. CXXXVI, p. 299 et 545).

de Coulomb est ainsi reliée aux principes généraux de l'Énergétique. Mais, en outre, elle montre qu'un même fluide et un même solide pourront, selon les circonstances du mouvement, adhérer l'un à l'autre ou glisser l'un sur l'autre ; cette conclusion est conforme à l'opinion émise par certains hydrauliciens et notamment par Darcy dans un passage que nous avons cité.