Annales de la faculté des sciences de Toulouse

D.-T. Egorov
B.-K. Mlodziejowski

Notice sur Karl-Michailovitch Peterson

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 5, no 4 (1903), p. 459-479
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1903_2_5_4_459_0>

NOTICE

SUR

KARL-MICHAILOVITCH PETERSON,

PAR MM. D.-T. EGOROV ET B.-K. MLODZIEIOWSKI.

Traduit du russe (1) par M. Édouard DAVAUX,

Ingénieur de la Marine à Toulon.

I. — KARL-MICHAILOVITCH PETERSON ET SES TRAVAUX GÉOMÉTRIQUES,

PAR M. B.-K. MLODZIEIOWSKI.

J'ai l'intention, dans cet aperçu, de donner des renseignements sur la vie et sur la caractéristique des travaux géométriques d'un de nos grands mathématiciens, Karl-Michaïlovitch Peterson. Bien que les mérites scientifiques de Peterson aient déjà rendu son nom célèbre de son vivant parmi les mathématiciens russes, ce n'est que dans ces dernières années qu'il est arrivé à une réputation plus juste et plus complète. Peterson s'occupa de deux branches des Mathématiques : des équations aux dérivées partielles et de la Géométrie différentielle. Ce furent, avant tout, ses recherches sur les équations aux dérivées partielles qui fixèrent sur lui l'attention et qui, en 1879, lui firent obtenir le grade de Docteur de l'Université de la Nouvelle Russie. Les travaux de Peterson sur la Géométrie différentielle furent aussi hautement appréciés par ses collègues immédiats de la Société mathématique de Moscou, mais ils furent moins connus

---

(1) Les deux Parties de cette Notice, dues respectivement, la première à M. Mlodzieiowski et la seconde à M. Egorov, ont paru séparément en 1903 dans le premier fascicule du Tome XXIV (p. 1-21 et 22-29) du *Recueil mathématique* (МАТЕМАТИЧЕСКІЙ СБОРНИКЪ), publié par la Société mathématique de Moscou; on a adopté comme titre, pour chaque Partie, la traduction française du titre russe de l'article correspondant.

dans de plus grands cercles de mathématiciens, peut-être parce que, à cette époque, on s'occupait peu en Russie de cette branche de la Géométrie. Et pourtant la première place appartient incontestablement à ces travaux de Peterson, par la richesse des résultats qu'il a obtenus et par l'abondance des idées profondes et ingénieuses. Tandis que Peterson, dans ses recherches sur les équations aux dérivées partielles, n'a fait que se mettre au niveau de ses contemporains, dans ses travaux de Géométrie il s'est placé sur beaucoup de points en avant de son temps. Quand plus tard les recherches de Peterson acquirent une plus grande notoriété, il fut reconnu qu'une série entière de propositions, trouvées plus tard par Darboux, Lie, Bianchi, Schwarz, Maurice Lévy et d'autres savants, avaient été déjà obtenues beaucoup plus tôt par Peterson. Mais, indépendamment des résultats, la méthode fondamentale dont s'est servi Peterson dans ses recherches est féconde au plus haut degré et sans aucun doute peut encore donner beaucoup de choses intéressantes et nouvelles. Dans ces derniers temps, les travaux de Peterson ont attiré de plus en plus sur eux l'attention des savants occidentaux, principalement des savants allemands. Le mérite en revient surtout au professeur Stäckel, de Kiel, dont de nombreux travaux se rapportent à l'étude de Peterson; le professeur Stäckel a publié (1) en 1901 une biographie de Peterson.

Pour faire connaître les circonstances très simples de la vie de Peterson, je me suis surtout servi des documents et renseignements mis gracieusement à ma disposition par le directeur de l'École de Pétropavlovsk, K.-R. Vernander, et par un professeur de cette école, K.-A. Grévé, qui avaient connu de près Peterson; je me suis servi aussi de la biographie de Peterson, que j'ai mentionnée plus haut, faite par le professeur Stäckel. En dehors de ces sources, j'ai emprunté quelques renseignements sur la vie de Peterson à l'*Aperçu sur la vie et les travaux d'auteurs russes défunts,* de D.-D. Jazikov, à la *Bibliographie russe,* année 1881, et à un article de V.-V. Bobinine sur Peterson dans le *Dictionnaire biographique russe.*

Karl-Michaïlovitch Peterson est né à Riga le 13 mai de l'année 1828; il descendait d'une famille bourgeoise et, à ce qu'il semble, lithuanienne.

Ayant terminé ses études au collège de Riga en 1847, il entra la même année à l'Université de Dorpat, où il s'occupa de sciences mathématiques et naturelles. A cette époque, Senff et Minding enseignaient les Mathématiques à l'Université de Dorpat. Peterson entendit chez Senff la théorie des courbes et des surfaces; mais le célèbre Minding fut surtout le guide de Peterson en Géométrie. Cet

(1) *Karl Peterson* (1828-1881), von Paul Stäckel, in Kiel (*Bibliotheca mathematica,* dritte Folge, zweiter Band, 1901, p. 122-132).

illustre savant publia une série de remarquables travaux sur la Théorie de la déformation des surfaces, se rapportant au fameux Mémoire de Gauss : *Disquisitiones generales circa superficies curvas.* Ainsi Minding découvrit entre autres l'invariabilité de la courbure géodésique dans la déformation d'une surface, il trouva les conditions de l'application d'une surface sur une autre et donna des surfaces applicables sur les surfaces de révolution. Les travaux suivants de Peterson ont un rapport direct avec ces travaux de Minding; c'est à lui-même que Peterson présenta sa thèse, et Minding l'apprécia par la mention *ausgezeichnet.*

Le professeur Stäckel, dans sa biographie de Peterson, fait connaître, d'après une Communication du professeur Kneser, le contenu de cette thèse, conservée dans les dossiers de l'Université de Dorpat. La première Partie se rapporte à la théorie des lignes sur les surfaces et principalement à la théorie de la courbure géodésique et de la courbure normale. Peterson y démontre le théorème simple et élégant qui suit :

Si une courbe est donnée sur une surface développable, sa relation en chaque point avec la surface est définie très simplement par l'inclinaison φ *de son plan osculateur sur le plan tangent à la surface développable, par l'angle* ω *de la tangente à la courbe avec une droite génératrice, et par la distance* l *du point de la courbe à l'arête de rebroussement, en la comptant sur la génératrice. Si les génératrices de la surface sont définies par un paramètre* t, *une équation de la forme* $f(l, \omega, \varphi, t) = 0$ *exprime la nature d'une courbe tracée sur la surface. Si la surface développable et la forme de la fonction* f *sont données, la courbe correspondante s'exprime sans constantes arbitraires, avec une ou deux constantes, selon que la fonction* f, *en plus de* t, *dépend seulement de* l, *ou également de* ω, *ou en outre de* φ; *inversement, si une courbe est donnée et si l'on recherche une surface développable pour laquelle une courbe donnée possède une propriété définie par une équation donnée* $f(l, \omega, \varphi, t) = 0$, *le nombre des constantes arbitraires dans l'équation de la surface sera* 0, 1 *ou* 2, *selon qu'il entre dans* f, *en plus de* t, *seulement* φ *ou également* ω, *ou en outre* l.

La seconde partie de la thèse de Peterson se rapporte à la déformation des surfaces. Peterson démontre que, si l'on connaît pour chaque point d'une surface, en plus des coefficients E, F, G de l'élément linéaire, les deux rayons de courbure principaux r_1 et r_2 et l'angle φ entre une des lignes de courbure et une des lignes de coordonnées sur la surface, la forme de la surface est par là entièrement définie; on voit facilement que r_1, r_2 et φ se relient immédiatement aux paramètres du second ordre L, M, N ou D, D', D'', de sorte que la proposition de Peterson est, au fond, équivalente aux trois équations fondamentales de Mainardi-Codazzi qui jouent un rôle si important dans la théorie des surfaces et qui expriment la même idée sous une forme plus symétrique et plus commode. Si nous appelons l'attention sur ce que Mainardi a donné ses formules en 1856 et sur ce que la thèse de Peterson est de 1853, nous devrons reconnaître, avec le professeur Stäckel, que le talent de Peterson l'avait déjà conduit dans ce premier travail sur une voie sûre et que, en la suivant, il devait arriver aux propositions les plus importantes de la théorie de la déformation des surfaces. Il est regrettable que l'idée émise par Peterson dans sa thèse n'ait pas reçu de lui, à ce qu'il semble, de développement ultérieur. Nous verrons ci-dessous que, dans ses travaux postérieurs, la théorie de la déformation l'occupa non pas tant en elle-même que dans son rapport avec d'autres formes de correspondance des surfaces.

Peterson étudia à l'Université de Dorpat de 1847 à 1852 et, au commencement de 1853, il subit l'examen de candidat. Comme on le voit par une copie du registre, Peterson passa brillamment son examen. Il obtint les notes les plus élevées dans tous les sujets, sauf deux; l'un de ces derniers était la *reine höhere Geometrie.* Il passa seulement *ziemlich gut* l'examen de langue russe obligatoire à Dorpat. C'est ici le lieu de remarquer que, bien que, selon l'attestation de personnes ayant connu Peterson dans la période moscovite de sa vie, sa façon de parler le russe donna toujours l'impression qu'il n'était pas d'origine russe, tous ses articles dans le *Recueil mathématique* n'en sont pas moins écrits dans une très belle langue, précise et claire.

Il est difficile de fixer avec précision l'époque à laquelle Peterson s'établit à Moscou, où il devint précepteur dans une famille distinguée. En 1865, Peterson entra comme professeur de Mathématiques à l'École allemande de Petropavlovsk en qualité de suppléant, et devint en 1879 professeur titulaire. Il sut transmettre à ses élèves une partie de cet amour de la Science qui l'animait lui-même, et beaucoup de ses élèves, entraînés par son enseignement, choisirent, à la fin de leur cours à l'École, la Faculté de Mathématiques. En outre, tous les anciens élèves de Peterson, avec lesquels j'ai eu occasion de m'entretenir, parlaient unanimement de lui comme d'un homme leur ayant inspiré un profond respect, non seulement par ses connaissances étendues, mais encore par son caractère droit et noble. S'étant établi à Moscou, Peterson fit partie du Cercle des Mathématiciens moscovites, groupés à cette époque autour des professeurs Braschmann et Davidov de l'Université de Moscou. Davidov avait été attaché à l'École de Petropavlovsk et, depuis 1866, il y avait même enseigné quelque temps les Mathématiques; selon toute apparence, il s'y rencontra avec Peterson. En octobre 1864, les membres de ce Cercle proposèrent de se réunir chaque mois, de septembre à avril, pour échanger des communications sur les différentes branches des Mathématiques. Peterson fut un des agents actifs de ces réunions et, dans le *Recueil* *mathématique,* publié en 1866 par le Cercle, contenant les Communications lues par les membres du Cercle, se trouve son Mémoire *Sur les relations et les affinités entre les surfaces courbes,* qui inaugurait la série de ses travaux sur la Géométrie différentielle.

Le 23 janvier 1867, ce Cercle de mathématiciens fut réorganisé en Société mathématique de Moscou et, en même temps, le *Recueil mathématique* devint une publication périodique. Avec d'autres mathématiciens du Cercle, Peterson entra dans la nouvelle Société comme membre fondateur et continua à prendre part à ses travaux avec son ancienne ardeur. Les procès-verbaux des séances de la Société notent de lui, de 1865 à 1879, dix-huit Communications dans le domaine de la Géométrie différentielle et de la théorie des équations aux dérivées partielles.

Peterson publia en même temps dans le *Recueil mathématique* six Mémoires, dont trois se rapportent à la Géométrie différentielle et trois à la théorie des équations aux dérivées partielles. Ces Mémoires sont les suivants :

1. Объ отношеніяхъ и сродствахъ между кривыми поверхностями (*Sur les relations et les affinités entre les surfaces courbes*), t. I, 1866, p. 391-438.

2. О кривыхъ на поверхностяхъ (*Sur les courbes tracées sur les surfaces*), t. II, 1867, p. 17-44.

3. Объ изгибаніи поверхностей второго порядка (*Sur la déformation des surfaces du second degré*), t. X, 1883, p. 476-523.

4, 5, 6. Объ интегрированіи уравненій съ частными производными (*Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles*), t. VIII, 1877, p. 291-361; t. IX, 1878, p. 137-192; t. X, 1882, p. 169-223.

Les deux premiers Mémoires de Peterson, refondus et augmentés, furent publiés par lui en 1868 en langue allemande sous le titre : *Ueber Curven und Flächen*. Ce travail de Peterson est intéressant parce que nous y avons l'exposé le plus complet et le plus systématique des idées que Peterson prit pour base de ses recherches géométriques.

Le 28 novembre 1879, Peterson, sur la présentation des professeurs E.-T. Sabinine, N.-A. Oumov et V.-V. Preobrajensky, fut élevé par le Conseil de l'Université de la Nouvelle Russie au grade de Docteur *honoris causa* en Mathématiques pures. Comme on le voit par la présentation elle-même, publiée dans les Comptes rendus des séances du Conseil (*Mémoires de l'Université de la Nouvelle Russie,* t. XXX), la place principale fut assignée dans celle-ci aux recherches de Peterson sur les équations aux dérivées partielles; il fut fait seulement mention de ses travaux géométriques.

Peterson ne s'est pas marié. Il mena une vie paisible et retirée, occupant tout son temps à des recherches scientifiques ou à des entretiens avec quelques amis, ses collègues à l'École de Petropavlovsk. En mars 1881, il tomba malade, et le 19 avril de la même année il mourut à l'hôpital de l'École d'une inflammation du péritoine.

Nous avons déjà dit que les idées de Peterson et les résultats qu'il obtint sont présentés de la façon la plus complète dans son livre *Ueber Curven und Flächen*. Aussi nous suivrons surtout ce livre pour l'exposé des travaux géométriques de Peterson. Son analyse circonstanciée est d'autant plus nécessaire qu'il est actuellement une curiosité bibliographique, et l'on ne peut que se joindre au professeur Stäckel pour souhaiter qu'il soit publié de nouveau.

Un des principaux mérites de Peterson dans la Géométrie différentielle des surfaces consiste en ce qu'il a indiqué la propriété suivante, simple et en même temps générale, de toute correspondance entre deux surfaces : dans toute correspondance entre deux surfaces, il existe en général sur chaque surface un système de lignes conjuguées auquel correspond sur l'autre un système également conjugué. Cette proposition apparaît avec toute sa simplicité fondamentale, dans la pleine acception du mot, dans la théorie de la correspondance des surfaces, non seulement parce que les variables, correspondant à ce réseau général conjugué, représentent par-dessus tout un système commode de coordonnées pour l'étude de la correspondance donnée, mais aussi parce que, entre les propriétés de la correspondance et les propriétés de ce réseau conjugué, existe un lien géométrique étroit. Nous verrons ci-dessous quels riches résultats Peterson a tirés de sa proposition, et en particulier dans la théorie de la déformation des surfaces.

Le livre *Ueber Curven und Flächen* fut publié par Peterson comme une première livraison après laquelle d'autres devraient paraître.

A en juger par plusieurs passages du livre, et aussi par des parties des Mémoires de Peterson qui n'entrèrent pas dans la première Partie du livre, on peut supposer que la seconde Partie devait être principalement consacrée à la représentation conforme ou, comme l'appelle Peterson, à la *relation graphique* des surfaces. La première livraison, qui représente par elle-même un tout complet, commence par l'exposé des propriétés fondamentales des courbes dans l'espace et des courbes sur les surfaces. Peterson y démontre une propriété fondamentale indiquée dans la suite par Darboux, à savoir que si u, v sont des coordonnées conjuguées sur une surface, les coordonnées cartésiennes x, y, z satisfont à une même équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = m\frac{\partial \theta}{\partial u} + n\frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Ensuite Peterson introduit diverses familles de lignes qui doivent trouver leur application dans des recherches ultérieures. Telles sont les *lignes hélicoïdales*, dont les tangentes sont également inclinées sur une direction déterminée, les *lignes cylindriques et coniques*, représentant les lignes de contact avec la surface de cylindres et de cônes qui lui sont circonscrits. Peterson s'arrête avec une attention particulière sur deux familles remarquables de lignes, qu'il a appelées *lignes de lumière* et *lignes d'ombre* (*Licht- und Schattenlinien*). Les premières sont des lignes d'égal éclairement, c'est-à-dire les lieux géométriques des points pour lesquels un faisceau de droites normales rencontre une surface sous un angle constant; les lignes d'ombre sont les enveloppes des ombres portées par les normales à une surface sur les plans tangents correspondants dans l'hypothèse où les rayons lumineux sont parallèles. Peterson indique une série de propriétés intéressantes de ces lignes et découvre que les lignes de lumière et d'ombre, correspondant à une même direction des rayons incidents, forment sur la surface un réseau conjugué [1].

Plus loin, Peterson établit la notion d'une forme particulière d'équations qu'il a appelées *équations d'une courbe particulière avec des variables conjuguées*. Supposons que nous ayons sur une surface une famille de lignes dépendant d'un paramètre, par exemple une des familles de lignes coniques. Prenons sur la surface une famille de lignes conjuguées avec les lignes de la famille donnée et prenons les deux familles pour système de lignes de coordonnées sur la surface. Alors notre surface sera représentée avec les coordonnées u, v par des équations de la forme

$$x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \varphi_2(u, v), \qquad z = \varphi_3(u, v),$$

où $u = \text{const.}$ représente l'équation de la famille que nous avons prise, et $v = \text{const.}$ de la famille conjuguée. Peterson appelle ces équations : *équations de courbes de forme donnée à variables conjuguées*. Si dans les fonctions φ entrent toutes les quantités arbitraires dont peuvent dépendre les lignes d'une famille donnée, ces équations seront les équations générales de la famille de courbes considérées. Peterson affirme que l'on peut obtenir les formes de ces équations sans connaître la surface sur laquelle sont les lignes cherchées; dans ce cas, les fonctions φ doivent dépendre encore d'une fonction arbitraire des coordonnées u, v dont la présence transforme les équations précédentes en l'équation d'une famille de lignes donnée sur une surface arbitraire. Les exemples donnés par Peterson en vue de l'application de cette idée sont très intéressants et l'on peut encore espérer beaucoup de son développement ultérieur. Peterson lui-même a appliqué sa méthode à la déduction des équations des courbes coniques et cylindriques, dont un cas particulier a été indiqué plus tard par Kœnigs. En désignant

(1) Cette proposition a été retrouvée en 1892 par M. Pieri.

par $\alpha(v)$, $\beta(v)$, $\gamma(v)$ les coordonnées des sommets des cônes circonscrits, Peterson trouve les équations générales suivantes des courbes coniques

$$x = \left(a + \int \alpha \frac{\partial w}{\partial v} dv\right) : w, \qquad y = \left(b + \int \beta \frac{\partial w}{\partial v} dv\right) : w, \qquad z = \left(c + \int \gamma \frac{\partial w}{\partial v} dv\right) : w,$$

où a, b, c sont des fonctions de u, α, β, γ, de v, et où w dépend des deux variables. Nous avons pour les courbes cylindriques

$$x = a + \int \alpha w \, dv, \qquad y = b + \int \beta w \, dv, \qquad z = c + \int \gamma w \, dv.$$

Un cas particulièrement intéressant et élégant est celui où les deux familles de lignes conjuguées sont coniques. Alors les formules précédentes prennent la forme

$$x = \frac{\alpha + a}{l + \lambda}, \qquad y = \frac{b + \beta}{l + \lambda}, \qquad z = \frac{c + \gamma}{l + \lambda},$$

où a, b, c dépendent de u, et α, β, γ de v. Si le second système se compose de lignes cylindriques, alors $\lambda = \text{const.}$, et en remplaçant l par $\frac{1}{l}$, nous avons

$$x = l(a + \alpha), \qquad y = l(b + \beta), \qquad z = l(c + \gamma).$$

Enfin, dans le cas où les deux systèmes sont cylindriques, nous trouvons

$$x = a + \alpha, \qquad y = b + \beta, \qquad z = c + \gamma.$$

Ce sont les surfaces connues de translation, étudiées en détail par Peterson et trouvées dans la suite par Bianchi.

Peterson passe ensuite à l'exposé des idées fondamentales de ses travaux sur la correspondance, ou, comme il l'appelle, sur la *relation* et l'*affinité* des surfaces. Si à chaque point d'une surface correspond un point déterminé d'une autre et inversement, Peterson appelle cette dépendance une *relation* des surfaces : il est évident que cette relation s'exprime analytiquement par deux équations entre les coordonnées courantes (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) des points des deux surfaces ou par deux équations entre les coordonnées curvilignes (u, v), (u_1, v_1) sur ces surfaces. S'il est donné plus de deux équations entre ces quantités, la relation entre les surfaces correspondantes ne sera possible que dans le cas où toutes ces équations seront la conséquence de deux d'entre elles, ce qui, en général, impose des conditions aux surfaces elles-mêmes. Aussi une relation de la dernière sorte n'est pas possible entre tout couple de surfaces, mais seulement entre des surfaces qui se trouvent dans une dépendance réciproque déterminée. Peterson appelle ces relations des *affinités* de deux surfaces. Peterson démontre ici le théorème fondamental dont on a parlé plus haut, à savoir que dans chaque relation ou affinité de deux surfaces il existe sur chacune d'elles un réseau de lignes conjuguées, auquel correspond sur l'autre surface un réseau également conjugué. Peterson appelle ce réseau, qui peut être réel, imaginaire ou formé de lignes confondues, la *base de la relation ou de l'affinité.* Comme exemples, Peterson indique les relations suivantes : 1° le *parallélisme,* pour lequel les normales correspondantes des deux surfaces sont parallèles; 2° la *perspective,* où les points correspondants des deux surfaces sont sur les rayons d'une gerbe de droites; 3° la *conjonction,* pour laquelle les deux surfaces ont aux points correspondants une tangente commune. Deux autres relations ne dépendent pas de la position relative des surfaces; 4° la *conjugaison,* pour laquelle à chaque système de lignes conjuguées sur une surface correspond un système conjugué sur l'autre; 5° la *relation graphique,* pour laquelle les angles correspondants sur les deux surfaces sont égaux entre eux. Il est évident par la définition même de la relation (4) que sa base est indéterminée.

Ensuite Peterson indique des formes diverses d'affinités. D'abord il est clair que si nous donnons, dans une relation donnée, la base de la relation, c'est-à-dire le système de lignes conjuguées qui reste conjugué sur la seconde surface, nous introduisons par là une nouvelle condition et nous n'obtenons plus une relation, mais une affinité; ainsi chaque relation sur une base donnée est une affinité. En outre, Peterson donne comme exemples d'affinités : 1° la *déformation;* 2° la *perspective graphique,* où deux surfaces se trouvent simultanément en relation graphique et en relation de perspective; 3° le *développement,* pour lequel une des surfaces est tangente aux normales de l'autre; 4° la *perspective parallèle,* pour laquelle les rayons vecteurs menés d'un point aux points de la première surface sont parallèles aux normales aux points correspondants de l'autre et réciproquement; 5° l'*affinité des plans correspondants,* où à des courbes planes d'une surface correspondent des courbes planes de l'autre.

Ainsi Peterson a eu en vue non seulement les formes de correspondance entre des surfaces qui étaient plus ou moins étudiées en détail à son époque, mais encore des formes dont la signification dans la théorie des surfaces n'a été découverte que plus tard. Ainsi le parallélisme se trouve en relation étroite avec la représentation sphérique d'une surface, la conjonction n'est pas autre chose que la correspondance entre les deux surfaces focales d'une congruence rectiligne, la conjugaison renferme comme cas particulier les congruences connues W_1 dans lesquelles les lignes asymptotiques des deux surfaces focales se correspondent l'une à l'autre. La perspective graphique également est tout à fait identique à l'inversion et à la similitude (1); le développement est la relation entre une surface et sa développée; la perspective parallèle est, comme il n'est pas difficile de s'en

(1) Ce résultat a été retrouvé en 1877 par Éd. Weyr.

convaincre, la transformation par polaires réciproques relative à une sphère de rayon égal à un; enfin, l'affinité de plans correspondants est identique à la collinéation. Dans les travaux imprimés de Peterson, beaucoup de ces relations ne sont qu'effleurées, bien que nous y trouvions beaucoup de choses intéressantes.

Dans les Mémoires de Peterson, les relations de parallélisme et de perspective sont étudiées plus en détail; aussi une grande attention est-elle portée sur l'application de ces deux transformations géométriques à des formes diverses d'affinité.

Peterson commence son étude du parallélisme par la démonstration du théorème suivant dont l'importance est évidente.

Dans tout couple de surfaces parallèles il existe deux familles de courbes conjuguées auxquelles les tangentes en deux points correspondants sont parallèles entre elles et qui représentent ainsi la base de la correspondance donnée.

Peterson a indiqué en même temps des relations simples permettant de passer d'une surface à une autre qui lui est *parallèle sur une base donnée :* sous la forme qu'il leur a donnée, elles conduisent à une suite de conséquences très importantes, en particulier dans la théorie de la déformation. Peterson a examiné avec une attention particulière le parallélisme sur une base rectangulaire, c'est-à-dire le cas où les lignes conjuguées qui servent de base au parallélisme sont rectangulaires, autrement dit sont des lignes de courbure. Comme sur la sphère toutes les lignes conjuguées sont orthogonales, le problème revient à l'étude du parallélisme d'une surface arbitraire avec la sphère. En prenant sur la sphère des circonférences de grands cercles pour l'une des deux familles de lignes conjuguées, Peterson en tire les équations générales des surfaces avec des lignes de courbure cylindriques.

Dans l'application du parallélisme à la théorie de la déformation, Peterson découvrit le théorème remarquable qui constitue un des ornements de son travail. Il consiste en ce qui suit. Supposons que l'on ait deux surfaces S et S′, applicables l'une sur l'autre, et que l'on connaisse la base de la déformation, c'est-à-dire le système de lignes conjuguées qui demeure conjugué après déformation. Alors, si l'on sait trouver toutes les surfaces Σ parallèles à S sur la même base, et toutes les surfaces Σ' parallèles à S′ sur cette base, les surfaces Σ' s'appliqueront sur les surfaces Σ.

Ce théorème permet, connaissant un couple de surfaces applicables l'une sur l'autre, d'en déduire une infinité d'autres couples semblables, pourvu que l'on sache résoudre pour les surfaces primitives le problème du parallélisme sur une base donnée. Ce dernier problème exige l'intégration d'une équation de Laplace et peut être résolu jusqu'au bout dans beaucoup de cas. Peterson a appliqué sa méthode avec un succès éclatant à une série de cas particuliers en partie nouveaux, en partie déjà connus avant lui, mais résolus par des procédés particuliers et artificiels. Ainsi il a donné des surfaces applicables sur les surfaces de révolution (Minding), sur les hélicoïdes et sur les surfaces moulures (Bour). En outre, Peterson a déduit de là les surfaces applicables sur les surfaces minima trouvées ensuite en 1875 par Schwarz, les surfaces applicables sur les surfaces de translation obtenues en 1878 par Bianchi. De plus, Peterson a trouvé les surfaces spirales, qui ont la propriété d'être semblables à elles-mêmes, et il en a donné des déformations; ces surfaces ont également été découvertes en 1878 simultanément par Sophus Lie et Maurice Levy.

Les surfaces applicables sur les surfaces du second ordre trouvées par Peterson sont particulièrement remarquables. Peterson a considéré ces surfaces comme un cas particulier des surfaces de la forme

$$x = m(u)\mu(v), \qquad y = m(u)\nu(v), \qquad z = \eta(u),$$

où u et v sont les coordonnées d'un système conjugué de lignes coniques et cylindriques. Peterson a trouvé que ces lignes peuvent être prises pour base de la déformation et que sur cette base chaque surface de la forme indiquée peut être déformée sous une infinité de formes. J'ai considéré dans la suite en 1886 (¹) les déformations de ce genre avec plus de détails.

Dans les recherches de Peterson les lignes de déformation principales ont une grande importance. Peterson a appelé ainsi des lignes conjuguées sur une surface et telles qu'elles demeurent conjuguées dans la déformation de la surface, non pas dans une nouvelle forme quelconque, mais dans une infinité de nouvelles formes. Du théorème fondamental de Peterson résulte que si les lignes de déformation sont principales pour une surface donnée nous obtiendrons aussi des lignes de déformation principales, si nous transformons la surface donnée en une autre qui lui est parallèle, de façon que le système donné de lignes serve de base à ce parallélisme. Peterson lui-même a trouvé les lignes de déformation principales pour les surfaces de révolution, de translation, pour les surfaces minima, pour les surfaces du second ordre et pour les hélicoïdes s'appliquant sur une caténoïde. Le problème général des lignes de déformation principales des hélicoïdes a été résolu en 1896 par Stäckel.

Peterson a étudié en outre la relation de perspective. Il démontra ici cette proposition, que la perspective graphique, c'est-à-dire une transformation par perspective pour laquelle la similitude est conservée dans les parties infiniment petites,

(¹) *Mémoires scientifiques de l'Université de Moscou,* Section physico-mathématique, tome VII.

ne peut être qu'une transformation par similitude ou une inversion, proposition qui étend ses propriétés sur la transformation des surfaces, et qui fut démontrée par Liouville pour la transformation de l'espace. A ce sujet Peterson a démontré que la transformation considérée conserve les lignes de courbure, théorème qui fut démontré dans la suite par Darboux.

Peterson a ensuite donné le moyen de découvrir, pour une surface donnée, toutes les surfaces perspectives avec elle sur une base donnée et enfin il a démontré que toute transformation projective ou toute affinité des plans correspondants, comme il l'appelle, conserve la conjugaison de toutes les lignes sur les surfaces; cette même proposition fut également démontrée dans la suite par Darboux. Peterson en déduisit une équation générale très élégante des surfaces ayant un système de lignes conjuguées planes.

La dernière partie du Livre de Peterson est consacrée aux équations des lignes géodésiques. En remarquant que l'inversion conserve les lignes de courbure, Peterson appliqua aux surfaces avec des lignes de courbure cylindriques, dont les équations avaient été obtenues par lui antérieurement, successivement la transformation par inversion et la transformation par parallélisme, pour base de laquelle sont prises les lignes de courbure. Il obtient de cette manière des surfaces à lignes de courbure de plus en plus compliquées, et démontre que cette méthode permet d'obtenir l'équation générale des lignes de courbure avec deux séries de fonctions arbitraires d'une variable. Il donne lui-même sous forme de quadratures les équations générales de surfaces avec des lignes de courbure coniques et planes. Comme aux lignes de courbure d'une surface donnée correspond sur son développement une famille de lignes géodésiques et de lignes qui leur sont conjuguées, possédant l'équation de lignes de courbure avec un certain nombre de fonctions arbitraires, nous aurons alors l'équation des lignes géodésiques avec le même nombre de fonctions arbitraires.

Tels sont, dans les grandes lignes, les résultats obtenus par Peterson dans son Livre : *Ueber Curven und Flächen*. Comme ses deux premiers Mémoires ont paru presque en entier dans le *Recueil mathématique,* nous n'examinerons pas en détail ces articles, mais nous en donnerons brièvement le contenu.

Le Mémoire *Sur les relations et les affinités entre les surfaces courbes* contient la théorie générale des relations et des affinités, le théorème sur la base d'une relation, c'est-à-dire sur l'existence d'un réseau conjugué commun pour tout couple de surfaces correspondantes, la théorie de la relation de parallélisme et son application à la déformation des surfaces, la perspective graphique, la perspective conjuguée et l'affinité de plans correspondants. Dans ce Mémoire ne figurent pas les surfaces applicables sur les surfaces minima, ni celles applicables sur les surfaces moulures, mais en revanche il y a une déformation intéressante qui ne se rencontre pas dans l'Ouvrage allemand de Peterson. C'est la déformation suivante :

$$x = \frac{\sin hc}{\cos hu + \cos v}, \qquad y = \frac{\sin cv}{\cos hu + \cos v}, \qquad z = \frac{a \cos hcu + b \cos cv}{\cos hu + \cos v},$$

$$x = \frac{c \sin hu}{\cos hu + \cos v}, \qquad y = \frac{c \sin v}{\cos hu + \cos v}, \qquad z = \frac{b \cos hcu + a \cos cv}{\cos hu + \cos v},$$

où les constantes a et b sont liées par la relation

$$b^2 - a^2 = 1.$$

Les deux surfaces ont un système de courbes conjuguées coniques $u =$ const., $v =$ const.

Il est intéressant de remarquer que, dans les travaux de Peterson, sont considérés presque exclusivement les cas de déformation dans lesquels des courbes coniques et cylindriques servent de base de la déformation : tels sont, outre celui que l'on vient de citer, ceux des déformations des surfaces du second ordre et des surfaces de translation. Cela fait naître la supposition que Peterson a possédé des méthodes plus générales inconnues de nous, pour la résolution du problème de la déformation des surfaces de ce genre ([1]). Le dernier travail de Peterson *Sur la déformation des surfaces du second degré* fut livré à l'impression en 1882, après la mort de son auteur. Ce travail ne se trouve pas en relation très étroite avec le Livre : *Ueber Curven und Flächen*, auquel il n'emprunte que les déductions nécessaires pour le développement ultérieur du contenu principal du Mémoire.

L'article est consacré à l'étude plus détaillée des surfaces applicables sur les surfaces du second ordre qui ont été données par Peterson dans son premier Mémoire. Si l'on considère l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

les surfaces en question, qui sont applicables sur lui, sont représentées par les équations

$$x = r \cos\varphi \cos u, \qquad y = r \sin\varphi \cos u, \qquad z = \int \sqrt{a^2(1 - k^2)\sin^2 u + c^2 \cos^2 u}\, du,$$

([1]) Dans la séance de la *Société mathématique* du 15 octobre 1902 a été exposée une solution générale que j'ai trouvée du problème de la déformation des surfaces sur une base conique ou cylindrique.

où

$$r=\sqrt{a^2k^2-(a^2-b^2)\sin^2 v},$$

$$\varphi=\int\frac{a\sqrt{k^2(a^2\sin^2 v+b^2\cos^2 v)-(a^2-b^2)\sin^2 v}}{a^2k^2-(a^2-b^2)\sin^2 v}\,dv.$$

Ici k est un paramètre de la déformation, u et v sont des coordonnées curvilignes, conjuguées pour toutes les surfaces d'une famille donnée, les lignes $u=$ const. sont des lignes coniques, $v=$ const. des lignes cylindriques; la surface primitive correspond à $k=1$. Il est évident qu'en échangeant les rôles des axes nous pouvons obtenir pour chaque ellipsoïde trois familles de surfaces applicables semblables; en changeant les signes de a^2, b^2, c^2, nous trouvons des surfaces applicables sur d'autres surfaces à centre du second ordre.

Peterson appelle entre autres l'attention ici sur l'existence, pour les surfaces du second ordre, de *surfaces applicables en dehors des limites,* c'est-à-dire dont tous les points réels correspondent à des points imaginaires de la surface primitive. La possibilité analytique de telles surfaces applicables résulte de ce fait que l'expression d'un élément linéaire d'une surface donnée

$$E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

peut rester une forme quadratique positive des différentielles du, dv pour des valeurs réelles des coordonnées u, v auxquelles ne correspondent pas de points réels de la surface donnée, et même pour des valeurs complexes de ces coordonnées.

Peterson, dans son Mémoire, s'arrête surtout sur la déformation des surfaces du second ordre dont les longueurs d'axes prennent des valeurs limites particulières. Ces valeurs peuvent être de trois sortes : un axe peut devenir infini, ou nul, ou égal à un autre axe. Peterson examine ces trois cas et arrive à des conséquences paradoxales, mais très intéressantes.

Quand les axes d'une surface du second ordre deviennent infinis, la courbure des points qui s'éloignent à l'infini tend, en général, vers o. Dans ce cas, la surface devient un plan, et ses déformations ne présentent pas d'intérêt, mais il y a trois cas où la courbure ne tend pas vers o, mais vers une autre limite finie. Ce sera : 1° Quand $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a^2}$ ont des limites finies; 2° quand $\frac{a^3}{bc}$ a une limite finie; 3° quand $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ ont des limites finies. Dans le premier cas, on obtient les paraboloïdes ordinaires dont des déformations avaient été déjà trouvées par Peterson auparavant. Dans les deux autres cas, la surface du second ordre devient un plan, mais, par suite du choix des ordres d'infinitude des axes, la courbure de la partie de la surface qui s'éloigne ne tend pas vers o. Aussi on peut trouver une surface courbe dont notre surface tend à prendre la forme à la limite, et, en outre, telle qu'aux régions finies de cette surface correspondront les points éloignés à l'infini de notre paraboloïde, et inversement. Peterson appelle ces *surfaces des déformées de paraboloïdes*. Parmi les trois cas précédents, le troisième est particulièrement remarquable, car l'élément linéaire y a une forme homogène qui, comme l'a démontré Peterson, correspond à une surface spirale.

On obtient de la même manière des déformations des surfaces à deux demi-axes égaux. Outre le simple passage à la limite qui conduit à la déformation ordinaire des surfaces de révolution, on obtient à la limite une autre forme de déformées de la manière suivante. Si nous rapportons les points d'une surface du second ordre, par exemple d'un ellipsoïde, à un système de coordonnées elliptiques sur la surface, nous obtenons l'élément linéaire de la surface sous la forme

$$ds^2 = \frac{u-v}{4}\left[\frac{u\,du^2}{(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)} - \frac{v\,dv^2}{(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)}\right].$$

Tous les points réels de la surface s'obtiennent quand

$$a^2 \geqq u \geqq b^2, \qquad b^2 \geqq v \geqq c^2.$$

Si nous rapprochons maintenant les longueurs des demi-axes b et c, alors le domaine des valeurs de v se rétrécit et à la limite à tous les points de la surface correspondra une seule valeur

$$v = b^2 = c^2.$$

En outre, l'expression de l'élément linéaire, prenant maintenant la forme

$$ds^2 = \frac{u-v}{4}\left[\frac{u\,du^2}{(a^2-u)(b^2-u)^2} - \frac{v\,dv^2}{(a^2-v)(b^2-v)^2}\right],$$

conserve un sens même pour v non égal à b^2. De cette manière nous avons l'élément d'une surface, que nous pouvons appeler, d'après son origine, *déformée* d'une surface du second ordre à deux axes égaux; elle ne se déforme pas elle-même suivant une surface de révolution, et tous les points de la surface donnée du second ordre correspondent à des points éloignés à l'infini de la surface.

En supposant égaux les trois axes d'une surface du second ordre, nous obtiendrons de la même manière à la limite trois formes de déformées. Ce seront : 1° les déformées de la sphère; 2° les déformées d'une surface de révolution; 3° la déformée d'une surface générale du second ordre à trois axes égaux. Les déformées de la deuxième et de la troisième espèce sont telles que leurs points à distance finie correspondent à des points éloignés à l'infini des surfaces correspondantes du second ordre. On obtient de la même manière les déformées des surfaces du second ordre avec des axes infiniment petits; pour qu'elles soient déterminées, il est nécessaire qu'un demi-axe demeure fini ou tende vers l'infini, et que les deux autres demi-axes a et b tendent vers o, de telle sorte que le rapport $\frac{a}{b}$ ait pour limite l'unité.

Le trait caractéristique du talent de Peterson qui perce à travers tous ses travaux est cette conception nette à un degré suprême de la Géométrie, grâce à laquelle toute l'Analyse de Peterson est toujours exempte de complications superflues et se fond étroitement avec le sens géométrique. Les connaissances profondes de Peterson en Analyse, connaissances qu'il a manifestées d'une manière brillante dans ses travaux sur les équations aux dérivées partielles, se font sentir ici, bien qu'elles ne s'étalent pas aux yeux du lecteur sous des formes volumineuses et qu'elles ne donnent lieu à des conséquences purement géométriques, toujours remarquablement élégantes, que là où c'était possible.

Cet aperçu des travaux géométriques de Peterson montre que nous étions en droit d'affirmer que Peterson a été, dans ses travaux, non seulement tout à fait à la hauteur de son temps, mais encore en avance sur son temps. Bien que quelques-uns des résultats qu'il obtint aient été retrouvés dans la suite par d'autres savants, il est resté, dans les Mémoires de Peterson, encore beaucoup d'idées qui attendent d'être exploitées. On doit espérer que les recherches de Peterson obtiendront une plus grande notoriété, et que ses mérites scientifiques seront enfin appréciés comme ils le méritent.

II. — TRAVAUX DE K.-M. PETERSON SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

PAR M. D.-T. EGOROV.

On doit à K.-M. Peterson, sur la théorie des équations aux dérivées partielles, trois Mémoires qui ont été publiés dans les Tomes VIII, IX et X du *Recueil mathématique,* sous le titre général *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles*. Ces Mémoires, qui s'élèvent au-dessus de tous les autres travaux scientifiques de l'auteur, lui ont valu, de l'Université impériale de la Nouvelle-Russie, le grade de docteur *honoris causa* en mathématiques pures. Dans le Tome 30 des *Mémoires de l'Université impériale de la Nouvelle-Russie,* a été publié à cette occasion un rapport de Sabinine, Préobrajensky et Oumov, professeurs à la Faculté physico-mathématique, contenant l'analyse des deux premiers Mémoires de K.-M. Peterson sur la Théorie des équations aux dérivées partielles avec l'indication de tous les résultats auxquels l'auteur lui-même attachait le plus grand intérêt et qui sont reconnus par les critiques comme les plus importants. Dans l'état actuel de la théorie des équations aux dérivées partielles, les recherches de Peterson ne présentent peut-être pas un intérêt particulier au point de vue des résultats qui y sont contenus, car les plus importants de ces résultats se trouvent dans les travaux d'autres auteurs contemporains ou de devanciers de K.-M. Peterson; mais le mode même d'exposition de K.-M. Peterson présente de tels mérites, et les méthodes sur lesquelles est basée toute son étude sont si ingénieuses et si originales, qu'aujourd'hui même les trois Mémoires de K.-M. Peterson dans le *Recueil mathématique* n'ont pas perdu de leur importance et méritent une grande notoriété.

Le point de départ des travaux de K.-M. Peterson est la notion d'équations différentielles appelées *conditionnelles* (selon la terminologie de l'auteur), c'est-à-dire d'équations qui n'ont lieu que dans le cas où nous admettons l'existence d'une ou plusieurs équations différentielles, distinctes des premières et appelées *conditions*. Ainsi par exemple, si D et A sont deux expressions linéaires homogènes avec des différentielles totales de la forme

$$D = \sum_{i=1}^{n} D_i\, dx_i, \qquad A = \sum_{i=1}^{n} A_i\, dx_i,$$

où D_i et A_i sont des fonctions des variables x_i, et, s'il résulte des données de la question que, sous la condition que l'expression A s'annule, l'expression D s'annule nécessairement aussi : alors, selon la terminologie de K.-M. Peterson, l'équation $D = 0$ est l'équation conditionnelle, et l'équation $A = 0$ est la condition. Il faut, d'ailleurs, remarquer que, dans le cas considéré, les deux équations joueront souvent le même rôle et que l'on pourra prendre l'équation $D = 0$ pour la condition et l'équation $A = 0$ pour l'équation conditionnelle. Si les expressions D et A, après multiplication par des facteurs respectifs, deviennent des différentielles exactes, et si les relations

$$f(x_1, \ldots, x_n) = b,$$
$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = a$$

sont les intégrales des équations $D = 0$ et $A = 0$, alors, en vertu de notre hypothèse, la différentielle df ne s'annule que lorsque la différentielle $d\varphi$ s'annule, ou, ce qui revient au même, b ne reste constant que si a reste constant, et, par conséquent, nous avons, en général,

$$b = \psi(a)$$

ou

$$f = \psi(\varphi), \tag{1}$$

où ψ désigne une fonction arbitraire. La relation (1) sert d'expression analytique à la liaison qui existe entre les expressions différentielles D et A; elle est l'*intégrale* de l'équation conditionnelle $D = 0$ qui a lieu pour la condition $A = 0$.

Plusieurs équations conditionnelles différentes peuvent être données sous une même condition. Ainsi, si, sous la condition que l'expression différentielle A s'annule, les expressions différentielles B et C s'annulent, et si $\varphi = a$, $\psi = b$, $\chi = c$ sont respectivement les intégrales des équations $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, nous aurons

$$(2) \qquad \psi = F(\varphi), \qquad \chi = \Phi(\varphi),$$

où F et Φ sont des fonctions arbitraires et où les relations (2) servent d'intégrales des équations conditionnelles $B = 0$, $C = 0$, données sous la condition $A = 0$.

De même une ou plusieurs équations conditionnelles peuvent être données sous *plusieurs* conditions. Ainsi, si l'expression différentielle D s'annule sous la condition que les expressions différentielles A et B s'annulent simultanément, et, si les relations $f = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$ servent respectivement d'intégrales aux équations $D = 0$, $A = 0$, $B = 0$, nous aurons alors

$$(3) \qquad f = F(\varphi, \psi),$$

où F désigne une fonction arbitraire et où la relation (3) est l'intégrale de l'équation conditionnelle $D = 0$, donnée sous les conditions $A = 0$, $B = 0$. Peterson appelle *arguments des conditions,* les arguments φ et ψ dans la relation (3), de même que l'argument φ dans les relations (2) et (1).

Les premiers paragraphes du premier Mémoire de Peterson sont entièrement consacrés aux méthodes d'intégration et à l'étude de la forme des intégrales d'un système d'équations différentielles, composé d'équations *non conditionnelles* et de groupes d'équations conditionnelles dont chacune a lieu sous une condition. Les résultats de l'intégration, selon Peterson, s'expriment par des équations dans lesquelles entrent des fonctions arbitraires, dépendant chacune d'un argument.

Dans le Paragraphe 4 du premier Mémoire, K.-M. Peterson aborde le problème important de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles d'ordre n à deux variables indépendantes. A cet effet, il considère toutes les dérivées partielles

$$z_k^{(i)} = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \, \partial y^k},$$

au même titre que z, x, y, comme des variables indépendantes, liées par l'équation donnée

$$(4) \qquad F(x, y, z, z', z_1, \ldots, z^{(n)}, z_1^{(n-1)}, \ldots, z_n) = 0$$

et par les relations différentielles

$$(5) \qquad dz_k^{(i)} = z_k^{(i+1)}\,dx + z_{k+1}^{(i)}\,dy.$$

Cette manière de poser le problème se rencontre, avant Peterson, dans un Mémoire de Pfaff (*Abhandlungen der Berliner Akademie,* 1814-1815), mais seulement pour des équations du premier ordre, et à peu près en même temps, dans le Travail de N.-I. Sonine : *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre* (*Recueil mathématique,* t. VII); parmi les auteurs qui ont écrit après K.-M. Peterson, S. Lie a poursuivi ce point de vue d'une façon particulièrement persévérante.

Le fond de la méthode de K.-M. Peterson consiste en ceci : il adjoint à l'équation donnée (4) les équations $\frac{d\mathrm{F}}{dx} = 0$ et $\frac{d\mathrm{F}}{dy} = 0$, qui sont identiques en vertu de $\mathrm{F} = 0$, et qui *font connaître que cette dernière a lieu pour x et y arbitraires,* et de plus les relations différentielles

$$(6) \qquad \begin{cases} dz^{(n)} = z^{(n+1)}\,dx + z_1^{(n)}\,dy, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ dz_n \;= z_n^1\,dx \quad + z_{n+1}\,dy, \end{cases}$$

et il se pose alors le problème d'éliminer des équations mentionnées les dérivées partielles d'ordre $n+1$ pour obtenir une relation entre les variables principales restantes $x, y, z, z', z_1, \ldots, z^{(n)}, \ldots, z_n$. Cette élimination, cela va sans dire, ne réussit pas, car le nombre des équations indépendantes est égal au nombre des variables éliminées, et Peterson arrive à une relation de la forme

$$(7) \qquad \mathrm{M} + \mathrm{N}\,z_{n+1} = 0,$$

où M et N sont des expressions différentielles, ne contenant pas les dérivées d'ordre $n+1$. Si l'on introduit, avec Peterson, les notations

$$u = -\frac{dy}{dx}, \qquad \mathrm{Z}_k^{(i)} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_k^{(i)}}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y},$$

alors

$$\mathrm{N} = \mathrm{Z}^{(n)} u^n + \mathrm{Z}_1^{(n-1)} u^{n-1} + \ldots + \mathrm{Z}_n,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{M}\,dx = \mathrm{Y}\,dx + \mathrm{Z}^{(n)}\,dz_1^{(n-1)} + (\mathrm{Z}^{(n)} u + \mathrm{Z}_1^{(n-1)})\,dz_2^{(n-2)} \\ + (\mathrm{Z}^{(n)} u^2 + \mathrm{Z}_1^{(n-1)} u + \mathrm{Z}_2^{(n-2)})\,dz_3^{(n-3)} + \ldots. \end{aligned}$$

En s'appuyant sur la relation (7), on peut seulement conclure, relativement aux variables *principales,* que l'expression M s'annule si l'on égale l'expression N à zéro, ou en d'autres termes : si l'on pose $dy + u_i\,dx = 0$, où u_i est une des racines de l'équation *caractéristique* $N = 0$. On obtient de cette manière n *équations conditionnelles*

$$M_i\,dx = 0, \qquad \text{si} \qquad dy + u_i\,dx = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

auxquelles il faut adjoindre toutes les équations non conditionnelles (5). En supposant que toutes les conditions et équations qui en dépendent sont intégrées, Peterson démontre que dans ce cas toutes les équations non conditionnelles (5) s'intègrent (au moyen de quadratures), et l'on obtient de cette manière l'intégrale générale $F = 0$, dépendant de n fonctions arbitraires d'un argument.

On voit facilement que si l'on considère l'ensemble de toutes les équations différentielles, introduites par K.-M. Peterson pour une quelconque des racines u_i de l'équation *caractéristique* $N = 0$, elles ne sont autres que les équations différentielles des variétés caractéristiques d'ordre n pour l'équation donnée $F = 0$. Peterson se borne ainsi dans son étude presque exclusivement au cas où pour les équations différentielles de *chaque* système de caractéristiques il existe deux combinaisons intégrables; il obtient seulement dans ce cas par sa méthode l'intégrale générale de l'équation donnée.

Dans le Paragraphe 7 du premier Mémoire, Peterson introduit des équations conditionnelles d'ordre supérieur, en appliquant des raisonnements, entièrement semblables à ceux que l'on a cités plus haut, à une dérivée quelconque de l'équation donnée $\dfrac{d^{m+n}F}{dx^m\,dy^n} = 0$. Les équations différentielles auxquelles il arrive coïncident avec les équations différentielles des caractéristiques d'ordre supérieur.

Le deuxième Mémoire du *Recueil mathématique* est consacré principalement aux équations aux dérivées partielles linéaires et *bilinéaires*, qui admettent des équations conditionnelles d'un ordre inférieur d'une unité à l'ordre de l'équation donnée, en d'autres termes, qui admettent des variétés caractéristiques d'ordre inférieur. Il semble que Peterson ait ignoré que des équations de forme plus générale peuvent posséder une propriété semblable.

Enfin, le troisième Mémoire est consacré à l'extension des méthodes précédentes à des équations avec un nombre quelconque de variables indépendantes. Peterson est obligé pour cela de considérer des équations conditionnelles, ayant lieu sous *plusieurs* conditions, par suite de quoi s'introduisent dans l'intégration des fonctions arbitraires de plusieurs arguments.

On trouve comme résultat que toutes les équations aux dérivées partielles se partagent en trois classes : 1° les équations du *premier* ordre avec un nombre arbitraire de variables indépendantes; 2° les équations d'un ordre quelconque avec *deux* variables indépendantes; 3° les équations du second ordre et d'ordre supérieur à deux avec trois et plus de trois variables indépendantes. La méthode de K.-M. Peterson est *toujours* applicable aux équations de la première et de la deuxième classe, en ce sens que pour une équation *quelconque* de ces deux classes on peut former un système d'équations conditionnelles et non conditionnelles, dont l'intégration est équivalente à l'intégration de l'équation donnée; en ce qui concerne les équations de la troisième classe, cette méthode ne s'applique pas, en général, et l'on ne réussit que pour quelques types spéciaux d'équations de la troisième classe à former un système d'équations différentielles (conditionnelles et non conditionnelles) dont l'intégration conduit à *la* détermination de l'intégrale générale de l'équation donnée. On peut expliquer cette différence essentielle entre les équations des deux premières classes et celles de la dernière, comme l'a remarqué Peterson, par ce fait que l'intégrale générale pour la première classe dépend *d'une* fonction arbitraire, pour la deuxième classe de plusieurs fonctions arbitraires, mais, en outre, *d'un* argument, et pour la troisième classe de plusieurs fonctions arbitraires de plusieurs arguments.

Tel est, dans ses lignes les plus générales, le contenu de l'étude de K.-M. Peterson. Comme nous le voyons, les résultats donnés par l'auteur sur l'intégration des équations aux dérivées partielles sont presque tous connus maintenant, mais ils sont tous obtenus à l'aide d'une méthode générale et à un point de vue général. D'ailleurs, les mérites de l'œuvre de Peterson ne se bornent pas là, et l'on pourrait citer toute une série de points isolés, présentant chacun un intérêt particulier; si l'on tient compte encore de l'abondance heureuse des exemples importants qu'il a réunis, et qui illustrent toutes les parties de ses recherches, on peut dire à bon droit que les Mémoires de K.-M. Peterson sur la théorie des équations aux dérivées partielles méritent encore maintenant d'être sérieusement étudiés.