A. Liapounoff

Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 6, nº 1 (1904), p. 5-116

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1904_2_6_1_5_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

SUR LA STABILITÉ

DES FIGURES ELLIPSOIDALES D'ÉQUILIBRE

D'UN LIQUIDE ANIMÉ D'UN MOUVEMENT DE ROTATION,

PAR M. A. LIAPOUNOFF.

Traduit du russe par M. Édouard DAVAUX,

Ingénieur de la Marine, à Toulon (¹).

INTRODUCTION.

Dans ce travail, j'étudie la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation, dont les molécules s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton, en partant d'un principe représentant une généralisation du principe connu de Lagrange, d'après lequel l'étude de la stabilité se ramène à la recherche du minimum du potentiel.

Avant de parler de la méthode que j'ai suivie et des résultats auxquels je suis

---

(¹) M. Liapounoff a très gracieusement autorisé la publication en langue française de sa thèse : Объ устойчивости эллипсоидальныхъ формъ равновѣсія вращающейся жидкости, 1884; pendant l'impression de cette traduction, l'auteur a modifié, en quelques points, la rédaction primitive de son travail, et y a ajouté des notes qui seront signalées par la lettre L (mars 1904).

arrivé, ce qui sera fait plus loin, je dois indiquer les recherches qui ont quelques rapports avec les miennes.

Liouville s'est occupé de la question, il y a 30 ans. Malheureusement, il n'a pas publié ses travaux. Tout ce que nous en connaissons est contenu dans un Mémoire publié dans les *Additions à la Connaissance des Temps* de 1855, et réimprimé ensuite dans le Tome XX (année 1855) de son journal, sous le titre : *Formules générales relatives à la question de la stabilité de l'équilibre d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation autour d'un axe*. Dans ce Mémoire, Liouville donne des formules générales pour la résolution de la question de la stabilité d'une figure d'équilibre quelconque d'un liquide animé d'un mouvement de rotation, mais il ne les applique pas à des cas particuliers. Il fait la remarque que son travail n'est qu'un extrait du premier Paragraphe d'un Mémoire ayant pour titre : *Sur la stabilité de l'équilibre des mers*. Mais nous ne connaissons de ce dernier qu'un compte rendu succinct présenté par Liouville à l'Académie et inséré au Tome XV des *Comptes rendus*, p. 903, et, d'après ce qu'y dit l'auteur, on ne peut pas juger des résultats qu'il a obtenus; tout ce qui se rapporte à la question que nous considérons est contenu seulement dans le passage suivant :

« ... Et... qu'arriverait-il à une masse liquide, homogène, douée d'une quelconque des formes ellipsoïdales d'équilibre, à deux ou même à trois axes inégaux? Ces questions intéressantes, et qui me semblent entièrement neuves, je les ai aussi traitées; mais l'exposition de mes recherches exigerait de longs développements, que je remets à une autre séance pour ne pas abuser des moments de l'Académie. Toutefois, je dirai dès à présent que j'ai dû avoir recours à certaines fonctions heureusement introduites en analyse par M. Lamé, à l'occasion d'un problème relatif au mouvement de la chaleur. En complétant, à quelques égards, les formules de cet habile géomètre, et aussi en les combinant avec d'autres formules qui m'appartiennent, j'ai réussi en quelque sorte à ajouter un nouveau Chapitre à la *Mécanique céleste*, etc. ».

Du reste, dans le Tome XVI des *Comptes rendus*, p. 363, se trouve une courte Note, dans laquelle il est parlé de l'un des résultats obtenus par Liouville. Nous y rencontrons ce qui suit :

« M. Liouville lit une Note ayant pour titre : *Recherches sur la stabilité de l'équilibre des fluides*. Il a essayé de résoudre, pour le cas d'une figure elliptique quelconque, les questions de stabilité que Laplace, en s'occupant de l'équilibre des mers, a résolues seulement pour des corps à très peu près sphériques. Le théorème le plus remarquable est relatif aux ellipsoïdes à trois axes inégaux de M. Jacobi. L'état d'équilibre de ces ellipsoïdes est toujours un état stable. Nous reviendrons sur cette Communication quand M. Liouville aura présenté son travail complet à l'Académie. »

Le résultat relatif aux ellipsoïdes de M. Jacobi a été obtenu par Liouville, comme le lecteur le verra plus loin, probablement pour une hypothèse particulière en ce qui concerne les troubles.

Je n'ai pu trouver aucune autre indication sur les recherches de Liouville dans cette voie, et, d'une façon générale, dans l'intervalle de temps entre l'année 1855, où parut le Mémoire de Liouville *Formules générales,* etc., et l'année 1883, où fut publiée la nouvelle édition de la seconde Partie de la *Natural Philosophy* de Thomson et Tait, je ne sache pas, à l'exception d'un travail de Riemann, que l'on ait parlé quelque part de la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre.

Dans son Mémoire connu (¹), sur le cas du mouvement d'un ellipsoïde liquide découvert par Dirichlet, publié en 1861 au Tome IX des *Abhandl. der König. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen,* Riemann résout entre autres la question de la stabilité des ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi *relativement à des déplacements et des vitesses à l'instant initial, satisfaisant aux hypothèses de Dirichlet.* Riemann trouve que les ellipsoïdes de Maclaurin sont stables ou instables, selon que les rapports entre leurs axes sont supérieurs ou inférieurs à 0,303327..., et, par conséquent, suivant que leurs excentricités sont inférieures ou supérieures à 0,952886..., et que les ellipsoïdes de Jacobi sont toujours stables. On ne trouve donc, relativement à des troubles arbitraires, qu'un résultat dans le Mémoire de Riemann, savoir que les ellipsoïdes de révolution sont instables, si les rapports entre leurs axes sont inférieurs à 0,303327....

Dans la nouvelle édition de la *Natural Philosophy* de Thomson et Tait, dont je n'ai pris connaissance qu'après que ce Mémoire était écrit, on trouve (²) quelques remarques assez intéressantes sur la question des figures d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation, envisagée d'une manière générale. Suivant la remarque des auteurs, ils n'ont pas cessé de s'occuper de cette question pendant les quinze années qui se sont écoulées à partir de la première édition de leur livre, et sont arrivés à des résultats qui l'éclairent beaucoup ; mais ils n'en ont fait connaître que quelques-uns, et en outre sans démonstration, promettant de revenir sur ce sujet dans le second Volume de leur Ouvrage. De ces résultats, je ne citerai que ceux qui se rapportent à la question de la stabilité des figures d'équilibre ellipsoïdales :

Si l'on impose la condition que la figure du liquide reste toujours un ellipsoïde de révolution, tous les ellipsoïdes de révolution planétaires sont des figures d'équilibre stables. Si l'on impose la condition que le liquide conserve toujours

---

(¹) *Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides* (*B. Riemann's Werke,* herausg. v. Weber, 1876).

(²) THOMSON et TAIT, *Treatise on natural Philosophy,* Vol. I, Part. II, 1883, § 778", p. 332-335.

la forme d'un ellipsoïde, les ellipsoïdes de révolution sont stables ou *instables* suivant que leur excentricité est inférieure ou *supérieure* à 0,8126... (excentricité de l'ellipsoïde de révolution de Jacobi) ([1]), et les ellipsoïdes à trois axes sont toujours stables. *Si enfin aucune condition n'est imposée, aussi bien les ellipsoïdes de révolution que les ellipsoïdes à trois axes sont instables pour des moments des quantités de mouvement suffisamment grands* ([2]).

En outre, Thomson et Tait énoncent le principe, sur lequel ils ont basé leurs recherches, sous la forme suivante :

« When the energy with given moment of momentum is either a minimum or a maximum, the kinetic equilibrium is clearly stable, if the liquid is perfectly inviscid. »

Ils ajoutent :

« It seems probable that it is essentially unstable, when the energy is a minimax; but we do not know that this proposition has been ever proved. »

A ce qu'il paraît, c'est d'après ce complément de leur principe que Thomson et Tait donnent leur appréciation sur l'*instabilité* indiquée plus haut.

Conformément au principe de Thomson et Tait, je commence mon étude par la recherche des conditions sous lesquelles, pour un moment donné des quantités de mouvement, l'énergie totale d'un liquide, soumis à l'action de forces newtoniennes entre ses molécules et à une pression constante sur sa surface, est minimum, maximum ou minimum-maximum. Après avoir démontré que ces conditions sont remplies pour toute figure d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation, et qu'en outre un maximum pour l'énergie est en général impossible, je ramène la question du minimum d'énergie à celle du minimum d'une certaine expression Π, dépendant de la forme du liquide et du moment des quantités de mouvement correspondant à la figure d'équilibre considérée. En vertu du principe énoncé plus haut, la question de la stabilité se ramène donc à un problème du calcul des variations.

Il est à propos de remarquer ici que l'application de la méthode du calcul des variations à la résolution des questions de stabilité d'équilibre pour un liquide n'est pas nouvelle. Giesen ([3]) et Hagen ([4]), en se basant sur le principe de

---

([1]) Ce résultat ne contredit pas Riemann, parce que Riemann fait certaines hypothèses particulières relativement *aux vitesses*.

([2]) Thomson et Tait ne donnent pas de limite inférieure pour ces moments de quantités de mouvement.

([3]) A. GIESEN, *Ueber die Stabilität des Gleichgewichtes einer nur der Gravitation unterworfenen Flüssigkeit* (*Jahresbericht über die höhere Schule in Opladen*, f. 1872-1873, S. J.).

([4]) J. HAGEN, *Ueber die Stabilität des Gleichgewichtes einer auf einem dreiaxigen Ellipsoid mit kleinen Excentricitäten ausgebreiteten Flüssigkeit...* (*O. Schlömilch's Zeitschrift für Math. und Ph.*, Bd. XXII, 1877).

Lagrange, se sont servis de cette méthode pour l'étude de la stabilité de l'équilibre d'un liquide couvrant un noyau solide fixe de forme ellipsoïdale avec excentricités très petites. Mais, avant eux, Liouville avait pensé à appliquer le principe de Lagrange à la même question, ainsi qu'à la question de la stabilité des figures ellipsoïdales (en considérant le mouvement comme un repos relatif). Du moins, à l'endroit du Tome XV des *Comptes rendus* indiqué plus haut, il parle des positions d'un système quelconque de points (sans exclure un liquide), dans lesquelles la force vive du système prend les plus grandes valeurs, comme de positions d'équilibre stable, et dans son Mémoire *Formules générales,* etc., on trouve tout ce qui est nécessaire pour déterminer les conditions du maximum de force vive, en vue de l'étude de la stabilité des deux cas considérés d'équilibre d'un liquide.

Autant que je sache, le principe de Lagrange n'a été démontré nulle part d'une manière directe pour un liquide; on rencontre cependant pour cette démonstration les mêmes difficultés que pour celle du principe de Thomson et Tait cité plus haut, lequel représente une généralisation du principe de Lagrange.

Primitivement, en entreprenant l'étude du problème que je m'étais posé, je considérais la question au même point de vue que Liouville, c'est-à-dire que je la ramenais à la recherche de la stabilité d'un repos relatif du liquide. Quand, ensuite, j'ai pris connaissance de la nouvelle édition de la *Natural Philosophy* de Thomson et Tait, j'ai remarqué que le principe énoncé par eux offrait quelque avantage sur celui de Lagrange, et, voulant le prendre pour point de départ, j'ai entrepris la transformation du Chapitre I de mon Travail, où étaient exposés les éléments sur lesquels, à mon avis, pouvait être basée l'application du principe de Lagrange à la résolution de mon problème. Mais, par cela, seul, mon point de vue était changé ; le fond même de la question restait ce qu'il était primitivement. D'ailleurs je ne regardais pas comme possible de prendre sans démonstration le principe de Thomson et Tait, que je voulais poser comme base de mes recherches.

Il fallait convenir avant tout de ce que l'on entendait par *figure d'équilibre stable*. Par analogie avec ce que l'on appelle, en mécanique, stabilité d'un système de points isolés, on était porté à entendre, par figure d'équilibre stable, une figure du liquide telle que, après que l'on a communiqué aux molécules des déplacements et des vitesses suffisamment petits, elle reste, pendant toute la durée du mouvement, aussi peu différente qu'on le veut de la figure d'équilibre. Mais l'équation de la force vive, qui forme la base de l'étude de la stabilité de l'équilibre des systèmes conservatifs, dans la mécanique des systèmes de points isolés, se trouve en général insuffisante pour découvrir, dans un liquide, après que son repos (absolu ou relatif) a été troublé, le caractère du mouvement choisi comme signe de l'équilibre stable. Il me fallait donc, ou renoncer à la possibilité de résoudre le problème que je m'étais posé, en m'appuyant sur le principe du minimum d'énergie, ou donner, pour un liquide, une définition plus générale de la stabilité. C'est ce qu'il m'a paru possible de faire, pourvu que la nouvelle définition ne contredise pas l'idée existante sur la stabilité. Or un examen attentif de la question me montra que toute difficulté disparaissait, à condition de définir une figure stable d'équilibre comme une figure telle que, après communication au mouvement du liquide de troubles suffisamment petits, la figure du liquide demeure aussi peu différente que l'on veut de la figure d'équilibre, *au moins tant qu'il ne se forme pas à la surface du liquide des saillies en forme de fils ou de feuillets assez minces*.

Cette définition, exprimée sous une forme précise, constitue la base de toutes mes recherches. En l'adoptant, et en faisant certaines hypothèses relativement à la continuité du mouvement, je me sers ensuite de la méthode de Lejeune-Dirichlet pour la démonstration du théorème fondamental. D'après ce théorème, toute figure d'équilibre, pour laquelle a lieu un minimum de Π (sous certaines conditions), est stable. Après cela, je passe à la recherche des formules servant pour l'examen du signe d'un accroissement infiniment petit de Π, et je me borne à l'expression de la variation seconde de Π. Je termine le Chapitre I par l'étude du signe de cette variation, dans deux hypothèses particulières relativement aux déplacements : 1° quand le liquide se déplace comme un système invariable; 2° quand une figure donnée d'équilibre se change en une autre figure d'équilibre qui en est infiniment voisine. Cette seconde étude conduit à un résultat dans lequel est contenu, comme cas particulier, le premier des résultats de Thomson et Tait énoncés plus haut, et qui, dans la suite, facilite considérablement l'étude de la stabilité des ellipsoïdes, surtout des ellipsoïdes de Jacobi.

On doit remarquer ici que j'ai seulement en vue de trouver tous les ellipsoïdes qui doivent être appelés stables, d'après le théorème fondamental indiqué plus haut, ne désirant nullement affirmer que tous les autres ellipsoïdes (c'est-à-dire ceux pour lesquels Π n'est pas minimum) sont instables, comme cela résulterait du complément, cité plus haut, au principe de Thomson et Tait, lequel reste sans démonstration. En parlant de *limites*, par exemple pour l'excentricité des ellipsoïdes stables de révolution, j'entendrai donc par là simplement des nombres tels que tout nombre intermédiaire est l'excentricité d'un ellipsoïde sûrement stable.

Pour ce qui concerne la résolution complète du problème, on ne peut l'espérer que du seul procédé général de recherche de la stabilité, qui consiste en une étude effective du mouvement troublé. Cette étude n'entrait pas dans le plan de mon travail, où je désirais seulement montrer *à quels résultats, relativement à la stabilité des ellipsoïdes de Maclaurin et de Jacobi, conduit la loi de la conservation de l'énergie*.

J'indiquerai maintenant les points essentiels des autres parties de mon travail.

Dans le Chapitre II, je transforme, pour la sphère, l'expression générale de la variation seconde de Π trouvée au Chapitre I, en me servant du développement de la variation du déplacement normal d'un point de la surface du liquide en série de fonctions sphériques. Giesen et Hagen se sont servis, avant moi, du même procédé pour la transformation d'une expression semblable, dans les recherches mentionnées plus haut sur la stabilité de l'équilibre d'un liquide sur un noyau solide de forme ellipsoïdale, dont les excentricités sont très petites. La transformée de l'expression de la variation seconde de Π se présente sous la forme d'une série dont tous les termes sont positifs. J'obtiens ainsi le résultat, qui du reste n'est pas nouveau, que *la sphère est une figure d'équilibre stable*.

Dans le Chapitre III, je me sers du même procédé de transformation de la variation seconde de Π, pour les ellipsoïdes de révolution. Mais l'expression que j'obtiens ne donne pas (comme pour la sphère) la possibilité de dire, sans une recherche préliminaire, quelque chose sur son signe : il m'a été pour cela nécessaire de démontrer quelques propriétés de croissance et de décroissance d'expressions dépendant de fonctions que je désigne par $p_k^m(x)$ et $q_k^m(x)$ et qui sont liées aux fonctions sphériques ordinaires de première et de seconde espèce, de la même façon que la fonction $\sinh \text{yp}\, x$ est liée à $\sin x$. En m'appuyant sur ces propriétés, je démontre que *les ellipsoïdes de révolution sont stables, tant que leur excentricité reste inférieure à l'excentricité* (0,8126...) *de l'ellipsoïde de révolution avec lequel se confondent les ellipsoïdes de Jacobi pour la limite supérieure de la vitesse angulaire*. Puis j'appelle l'attention sur ce fait que, dans le cas particulier où la surface du liquide est supposée rester ellipsoïdale pendant toute la durée du mouvement, la limite supérieure de l'excentricité des ellipsoïdes de révolution stables demeure la même, et par conséquent inférieure à celle que trouve Riemann. La raison de cette diversité de résultats devient tout à fait claire, si l'on tient compte de ce qui a été dit plus haut relativement à la signification des limites que j'ai obtenues, et aussi de ce que Riemann n'étudie la stabilité que pour des vitesses initiales satisfaisant aux hypothèses de Dirichlet. Je considère, en outre, encore deux cas particuliers : celui où l'ellipsoïde d'inertie de la masse liquide demeure toujours un ellipsoïde de révolution, et celui où la surface du liquide demeure toujours une surface de révolution. Dans le premier cas, on obtient pour limite supérieure de l'excentricité des ellipsoïdes stables le nombre 0,89..., et, dans le second, le nombre 0,985....

Je consacre le Chapitre IV à l'exposé des propriétés des fonctions de Lamé, sur lesquelles est basée, dans le Chapitre suivant, la transformation de la variation seconde de Π et la recherche de son signe pour les ellipsoïdes à trois axes. Ici je démontre, entre autres, un théorème sur le nombre des racines de l'équation

$$E_k^m(x) = 0$$

comprises entre certaines limites. Ce théorème complète celui que Klein a démontré dans son Mémoire *Ueber Lamé'sche Functionen* dans le Tome XVIII des *Mathematische Annalen*. Puis j'attire l'attention sur quelques propriétés des constantes τ_k^m, qui entrent dans l'équation différentielle des fonctions de Lamé, et qui sont définies par la condition que les fonctions d'un certain type satisfassent à cette équation; en m'appuyant sur ces résultats, je démontre quelques propriétés de croissance et de décroissance de certaines expressions dépendant des fonctions de Lamé, ou de fonctions qui leur sont liées de la même façon que $p_k^m(x)$ et $q_k^m(x)$ mentionnées plus haut sont liées aux fonctions sphériques ordinaires. J'introduis pour ces fonctions les notations $\mathbf{E}_k^m(x)$ et $\mathbf{F}_k^m(x)$, en conservant pour les fonctions de Lamé ordinaires les notations habituellement usitées $E_k^m(x)$ et $F_k^m(x)$.

Dans le Chapitre V, je me sers des propositions signalées au Chapitre précédent pour transformer la variation seconde de Π relative aux ellipsoïdes à trois axes. L'examen de son signe, basé sur les propriétés trouvées des fonctions de Lamé, montre que *les ellipsoïdes à trois axes sont stables tant qu'ils restent suffisamment voisins des ellipsoïdes de révolution*. On obtient toutefois des limites assez resserrées pour la vitesse angulaire relative aux ellipsoïdes stables; on démontre qu'elle doit être comprise entre des limites dont le rapport est égal à 0,87.... J'expose ensuite avec quelque détail l'analyse d'après laquelle je résous les équations déterminant les limites des ellipsoïdes stables. Je démontre aussi, dans ce Chapitre, que, pour le cas particulier considéré par Riemann, mes formules donnent le même résultat que celui auquel arrive Riemann relativement aux ellipsoïdes à trois axes de Jacobi.

Comme on le voit par ce qui précède, je me borne partout à la recherche de la variation seconde de Π. Dans mon étude subsiste donc une lacune : pour résoudre la question de la stabilité des ellipsoïdes qui servent de limites aux ellipsoïdes stables, il est nécessaire de tenir compte des termes de l'accroissement de Π qui suivent le terme relatif à la variation seconde. Mais la recherche de ces termes, dans le cas général, offre d'assez grandes difficultés, et, pour les écarter, je n'ai pas encore trouvé jusqu'ici de procédé quelque peu rigoureux.

Ce que je dis ici ne s'applique pas à l'ellipsoïde de révolution de Jacobi, servant d'une des *limites* pour les ellipsoïdes stables à deux, aussi bien qu'à trois axes inégaux. Pour l'étude de la stabilité de cet ellipsoïde, on peut se servir d'un procédé particulier, au moyen duquel la question est ramenée à la recherche du signe d'une certaine forme quadratique. La résolution de ce problème fait l'objet du Chapitre VI, dans lequel je démontre que l'*ellipsoïde de révolution de Jacobi est une figure d'équilibre stable.*

Je remarquerai en terminant que la question de la stabilité des ellipsoïdes *limites* se trouve en relation étroite avec un problème de Tchebychef, celui des figures d'équilibre infiniment voisines des figures ellipsoïdales (1). Les essais que j'ai faits pour arriver à quelque résultat touchant cette dernière question, m'ont donné en partie la matière du présent travail.

A. L.

Septembre 1883 — Octobre 1884.

CHAPITRE I.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LE PROBLÈME DE LA STABILITÉ DES FIGURES D'ÉQUILIBRE D'UN LIQUIDE EN ROTATION.

1. Considérons un liquide parfait homogène, et supposons que les seules forces qui agissent sur lui sont les attractions mutuelles des molécules, soumises à la loi newtonienne de la proportionnalité à l'inverse du carré des distances, et une pression constante s'exerçant à la surface.

Supposons que le liquide, qui se trouve sous l'action de ces forces, tourne d'un mouvement uniforme, comme un corps solide, autour d'un axe qui se meut d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme. En introduisant un milieu invariable animé d'un mouvement convenable, nous pouvons considérer ce cas

(1) Ce problème fut proposé à l'auteur en 1882 par Tchebychef, et l'auteur a énoncé les résultats auxquels il est arrivé en cherchant à le résoudre, en une thèse, à la fin du présent travail. Dans le Mémoire connu, qui parut en 1885 dans les *Acta mathematica,* M. Poincaré est arrivé aux mêmes résultats, sans connaître les recherches de l'auteur. Toutefois la question des nouvelles figures d'équilibre, peu différentes des figures ellipsoïdales, ne peut encore être considérée comme résolue; car le calcul n'a donné qu'une première approximation, et cela seulement au point de vue formel. Donc, rien ne prouve que les nouvelles figures d'équilibre existent réellement. Après 20 années écoulées depuis l'époque où le présent travail fut publié, l'auteur a repris la question, dont il s'occupe en ce moment. Il a réussi à trouver une méthode qui permet de pousser l'approximation, dans cette question difficile, aussi loin qu'on veut, et bientôt il se propose de publier les résultats de ses recherches.

L.

du mouvement d'un liquide comme un repos relatif résultant de l'équilibre entre toutes les forces qui agissent sur lui et la force centrifuge. D'après cela, nous appellerons, suivant l'usage, la figure que conserve le liquide dans ce mouvement, sa *figure d'équilibre*. La stabilité de ce cas du mouvement d'un liquide, dans un certain sens de ce mot, fera l'objet de nos recherches. Nous considérerons aussi le cas particulier où la vitesse angulaire de rotation est nulle; mais, au point de vue de l'étude de la stabilité, il faut distinguer ce cas particulier du cas général. Nous distinguerons donc *une figure d'équilibre du liquide animé d'un mouvement de rotation, et une figure d'équilibre du liquide non animé d'un mouvement de rotation.*

Dans les travaux consacrés à la stabilité du mouvement, on distingue, comme on sait, deux sortes de stabilité : la *stabilité dans le temps* et la *stabilité dans l'espace*. Dans l'étude de la stabilité dans le temps, on compare, pour un seul et même instant, les coordonnées du système et leurs dérivées par rapport au temps, dans le mouvement troublé et dans le mouvement non troublé. Au contraire, dans l'étude de la stabilité dans l'espace, toutes les coordonnées et leurs dérivées par rapport au temps sont supposées exprimées, par élimination du temps, en fonction d'une des coordonnées, et l'on se contente ainsi de la comparaison des coordonnées restantes et de leurs dérivées par rapport au temps, pour une seule et même valeur de la coordonnée prise pour variable indépendante.

Dans le cas d'un mouvement du liquide tel que celui que nous avons défini plus haut, la stabilité qui fera l'objet de notre étude n'appartiendra ni à l'un, ni à l'autre de ces deux cas de stabilité. En considérant une figure d'équilibre quelconque, nous comparerons la figure du liquide à un moment quelconque de son mouvement troublé avec la figure qu'il conserve dans le mouvement non troublé, en faisant abstraction du mouvement des molécules. Si, de plus, la vitesse angulaire correspondant à la figure d'équilibre considérée n'est pas nulle, nous tiendrons compte aussi de la position de la surface du liquide, dans le mouvement troublé, relativement à un axe passant par le centre d'inertie du liquide, et parallèle à l'axe de rotation dans le mouvement non troublé. Nous envisagerons en outre également la force vive du mouvement du liquide.

C'est dans cet ordre d'idées que l'objet de nos recherches sera la *stabilité de la figure d'équilibre*. La définition précise de ce que nous entendons par figure stable d'équilibre sera donnée dans un des numéros suivants.

2. Dans tout mouvement d'un liquide, suivant les conditions ici considérées, ont lieu la loi de la conservation du mouvement du centre d'inertie et la loi de la conservation des aires dans tout plan se mouvant d'un mouvement de translation uniforme et rectiligne et pour tout point de ce plan.

La constance supposée de la pression sur la surface du liquide est une condition essentielle pour que le mouvement du liquide satisfasse à ces lois. D'après cette condition, on démontre facilement que les équations différentielles du mouvement du liquide admettent aussi une intégrale exprimant la loi de la conservation de l'énergie, pourvu que l'on fasse l'hypothèse que les vitesses des points du liquide sont des fonctions continues des coordonnées. Nous aurons toujours cette hypothèse en vue, et, d'une façon générale, nous supposerons que le mouvement du liquide se fait d'une manière continue, de sorte que les coordonnées de tout point du liquide seront supposées des fonctions continues de leurs valeurs initiales et du temps, et le mouvement intérieur de chaque élément du liquide sera supposé s'opérant suivant les lois d'une déformation homogène. Nous supposerons d'ailleurs que tous les points de la surface du liquide restent toujours à des distances finies du centre d'inertie du liquide.

Imaginons un milieu invariable en mouvement de translation, avec une vitesse égale et parallèle à celle du centre d'inertie du liquide, et considérons le mouvement relatif du liquide par rapport à ce milieu. En appelant ρ la densité du liquide, nous désignerons par $J\rho$ le moment des quantités de mouvement du liquide, pris par rapport à son centre d'inertie [1]. Nous prendrons ce dernier point pour origine d'un système de coordonnées rectangulaires x, y, z dont les axes seront supposés avoir des directions invariables, et nous prendrons pour direction de l'axe des z celle du moment des quantités de mouvement $J\rho$, de sorte que, si u, v et w sont les projections sur les axes des x, des y et des z de la vitesse relative d'un point (x, y, z) du liquide, nous aurons les équations suivantes :

$$(1)\qquad \int x\,d\tau = 0, \qquad \int y\,d\tau = 0, \qquad \int z\,d\tau = 0,$$

$$(2)\qquad \int u\,d\tau = 0, \qquad \int v\,d\tau = 0, \qquad \int w\,d\tau = 0,$$

$$(3)\qquad \int (wy - vz)\,d\tau = 0, \qquad \int (uz - wx)\,d\tau = 0, \qquad \int (vx - uy)\,d\tau = J,$$

où $d\tau$ est un élément de volume, et où les intégrations s'étendent à tout le volume du liquide.

D'une façon générale, nons entendrons toujours par

$$\int F(x, y, z)\,d\tau \quad \text{ou} \quad \int F(x', y', z')\,d\tau' \quad (^2)$$

une intégrale s'étendant à tout le volume du liquide.

---

[1] Dans la suite, en parlant du moment des quantités de mouvement, nous sous-entendrons toujours qu'il doit être pris par rapport au centre d'inertie.

[2] D'une façon générale, nous désignerons toutes les quantités se rapportant au point (x', y', z') par les mêmes lettres que pour le point (x, y, z), mais avec des accents.

Désignons ensuite par $T\rho$ la force vive du mouvement relatif du liquide, de sorte que

$$T = \tfrac{1}{2}\int (u^2 + v^2 + w^2)\, d\tau,$$

et par V la fonction potentielle de la masse liquide au point (x, y, z), de sorte que si f est une certaine constante positive, dépendant de l'attraction de l'unité de masse par l'unité de masse à l'unité de distance, et r la distance entre les points (x, y, z) et (x', y', z'), ce dernier appartenant à l'élément de volume du liquide $d\tau'$, on aura

$$V = f\rho \int \frac{d\tau'}{r}.$$

Avec les notations adoptées, l'équation qui exprime la loi de la conservation de l'énergie prend la forme suivante :

$$T - \tfrac{1}{2}\int V\, d\tau = H, \tag{4}$$

où H est une constante représentant la valeur initiale de l'énergie totale du liquide rapportée à l'unité de densité, dans son mouvement par rapport au centre d'inertie [1].

Comme, d'après la loi de conservation de l'énergie, cette dernière ne dépend que de la figure et de la position du liquide, ainsi que des vitesses de ses points à l'instant initial, on peut parler de la recherche des mouvements, c'est-à-dire des données initiales, pour lesquels l'énergie totale, pour un moment donné des quantités de mouvement, est minimum, maximum ou minimum-maximum [2]. Arrivons maintenant à la résolution de ce problème, qui consistera, par conséquent, à rechercher parmi toutes les surfaces délimitant un volume donné et satisfaisant aux conditions (1), et parmi tous les u, v, w satisfaisant aux conditions (2) et (3) et à l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{5}$$

que l'on doit toujours avoir en vue, ceux pour lesquels la variation du premier

---

(1) En parlant, dans la suite, de l'énergie totale, nous supposerons toujours qu'il s'agit de l'énergie dans ce mouvement relatif. D'une façon générale, nous entendrons, par le mot *mouvement,* ce mouvement relatif.

(2) Pour éviter tout malentendu, nous croyons nécessaire de faire remarquer que, quand pour un système donné de valeurs des variables annulant la première différentielle d'une fonction, cette dernière n'est ni minimum, ni maximum, nous dirons qu'elle est minimum-maximum.

ordre de l'expression H, définie par l'équation (4), s'annule pour toutes les déformations infiniment petites possibles de la surface, dans lesquelles le volume délimité ne change pas, et dans lesquelles les équations (1) ne sont pas troublées, et pour toutes les variations infiniment petites possibles de u, v, w ne troublant pas les équations (2), (3) et (5).

En nous servant du procédé connu du calcul des variations, nous trouvons les équations suivantes, pour la détermination des données initiales cherchées :

$$u = a_1 + \omega_y z - \omega_z y + \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$v = b_1 + \omega_z x - \omega_x z + \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$w = c_1 + \omega_x y - \omega_y x + \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

et

$$\begin{aligned}(6)\qquad & V + \omega_x(wy - vz) + \omega_y(uz - wx) + \omega_z(vx - uy) \\ & - \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + a_1 u + b_1 v + c_1 w + ax + by + cz = \lambda,\end{aligned}$$

parmi lesquelles la dernière doit devenir une identité sur la surface cherchée.

Dans ces équations, ω_x, ω_y, ω_z, a, b, c, a_1, b_1, c_1 et λ sont des constantes, et φ une fonction de x, y, z, assujettie à la condition de devenir constante sur la surface. De cette condition et de l'équation (5), nous déduisons, en tenant compte de la continuité supposée de u, v, w,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

dans tout le volume occupé par le liquide; les conditions (1) et (2) donnent donc $a_1 = b_1 = c_1 = 0$, et, par conséquent, nous obtenons pour u, v, w les expressions

$$u = \omega_y z - \omega_z y, \qquad v = \omega_z x - \omega_x z, \qquad w = \omega_x y - \omega_y x,$$

dans lesquelles ω_x, ω_y et ω_z, en vertu des conditions (3), doivent satisfaire aux relations

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} S_x \omega_x - P_z \omega_y - P_y \omega_z &= 0, \\ -P_z \omega_x + S_y \omega_y - P_x \omega_z &= 0, \\ -P_y \omega_x - P_x \omega_y + S_z \omega_z &= J, \end{aligned}\right.$$

où

$$S_x = \int (y^2 + z^2)\, d\tau, \qquad S_y = \int (z^2 + x^2)\, d\tau, \qquad S_z = \int (x^2 + y^2)\, d\tau,$$

$$P_x = \int yz\, d\tau, \qquad P_y = \int zx\, d\tau, \qquad P_z = \int xy\, d\tau.$$

L'équation (6) prend donc la forme suivante :

$$V + \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + ax + by + cz = \lambda. \tag{8}$$

Désignons par n la direction de la normale intérieure à la surface du liquide en un des points de son élément ds, multiplions les deux membres de l'équation (8) par $\cos(nx)\,ds$ et intégrons sur toute la surface. En remarquant que

$$\int \frac{\partial V}{\partial x}\,d\tau = 0,$$

nous trouvons, en vertu des conditions (1), $a = 0$. On démontrerait de même que $b = c = 0$. Si, d'autre part, nous multiplions les deux membres de l'équation (8) par $[x\cos(nz) - z\cos(nx)]\,ds$, et si nous intégrons sur toute la surface, en remarquant que

$$\int \left(x\frac{\partial V}{\partial z} - z\frac{\partial V}{\partial x}\right) d\tau = 0,$$

nous obtenons l'équation

$$\omega_x(S_z\omega_z - P_x\omega_y - P_y\omega_x) - \omega_z(S_x\omega_x - P_z\omega_y - P_y\omega_z) = 0,$$

laquelle, en vertu des équations (7), donne $\omega_x = 0$, à moins que J ne soit nul. On trouverait exactement de la même manière, pour J non nul, $\omega_y = 0$, et les équations (7) donnent

$$P_x = 0, \qquad P_y = 0 \qquad \text{et} \qquad \omega_z = \frac{J}{S_z}.$$

Les valeurs trouvées pour ω_x, ω_y et ω_z restent évidemment légitimes dans le cas où $J = 0$. L'équation (8) se ramène donc, dans tous les cas, à la forme

$$V + \frac{1}{2}\frac{J^2}{S_z^2}(x^2 + y^2) = \lambda, \tag{9}$$

et c'est là la condition connue, nécessaire et suffisante, pour que le liquide, sous les forces considérées ici, puisse tourner comme un corps solide autour de l'axe des z, avec une vitesse angulaire $\frac{J}{S_z}$.

Dans ce mouvement du liquide, l'axe de rotation, comme on sait, est toujours un des axes centraux principaux d'inertie du volume occupé par le liquide. Par conséquent, les conditions $P_x = 0$ et $P_y = 0$, obtenues plus haut, sont déjà contenues dans la condition (9) (bien entendu si J n'est pas nul).

En ce qui concerne la constante λ, qui entre dans l'équation (9), on obtient facilement pour elle, par le même procédé qui a servi à démontrer plus haut les égalités $a=0$ et $\omega_x=0$, l'expression suivante

$$\lambda = \frac{5}{6}\,\frac{\omega J + \int V\,d\tau}{Q},$$

Q étant le volume du liquide et $\omega = \frac{J}{S_z}$. Nous désignerons d'une façon générale par ω la vitesse angulaire correspondant à une figure d'équilibre quelconque.

Nous pouvons exprimer le résultat que nous avons obtenu sous la forme suivante :

Pour que la première variation de l'énergie totale s'annule, pour un moment donné des quantités de mouvement $J\rho$, *il est nécessaire et suffisant de donner au liquide une figure telle qu'il puisse tourner, comme un corps solide, autour d'un certain axe, avec la vitesse angulaire* $\frac{J}{S}$, S *étant le moment d'inertie du volume occupé par le liquide par rapport à l'axe de rotation, et de lui communiquer effectivement ce mouvement.*

Il est évident que, sans tenir compte des conditions (1), (2) et (5), nous obtiendrions la même solution pour le problème que nous considérons.

3. En supposant la figure du liquide arbitraire, nous trouvons, par la résolution des équations (7), les valeurs suivantes, pour ω_x, ω_y, ω_z,

$$(10)\qquad \omega_x = J\,\frac{P_xP_z + S_yP_y}{D},\qquad \omega_y = J\,\frac{P_yP_z + S_xP_x}{D},\qquad \omega_z = J\,\frac{S_xS_y - P_z^2}{D}$$

où

$$(11)\qquad D = S_xS_yS_z - S_xP_x^2 - S_yP_y^2 - S_zP_z^2 - 2P_xP_yP_z.$$

Partout, dans la suite, nous entendrons par ω_x, ω_y et ω_z, précisément ces valeurs.

Posons, dans un mouvement quelconque du liquide satisfaisant aux conditions (3),

$$u = \omega_y z - \omega_z y + u_1,\qquad v = \omega_z x - \omega_x z + v_1,\qquad w = \omega_x y - \omega_y x + w_1.$$

Nous aurons, d'après cela,

$$T = \tfrac{1}{2}J\omega_z + \tfrac{1}{2}\int (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)\,d\tau$$

et l'équation (4) prendra la forme suivante :

$$\frac{1}{2}\int(u_1^2+v_1^2+w_1^2)\,d\tau+\Pi=\mathrm{H}, \tag{12}$$

où Π est une expression dépendant seulement de la figure du liquide et de la position qu'il occupe, savoir :

$$\Pi=\frac{1}{2}\left(\mathrm{J}^2\frac{\mathrm{S}_x\mathrm{S}_y-\mathrm{P}_z^2}{\mathrm{D}}-\int \mathrm{V}\,d\tau\right). \tag{13}$$

Il est important, pour ce qui suit, d'appeler l'attention sur ce fait que cette expression ne change pas de valeur pour une rotation du liquide autour de l'axe des z, et quand $\mathrm{J}=0$, pour un déplacement d'ensemble arbitraire. Ce dernier point est évident; pour ce qui concerne le premier, nous nous convainquons de son exactitude en remarquant que l'expression (11), comme on le sait par la théorie des moments d'inertie, conserve sa valeur après une rotation quelconque du liquide autour de l'origine des coordonnées, et que l'expression $\mathrm{S}_x\mathrm{S}_y-\mathrm{P}_z^2$ se comporte de la même manière pour une rotation autour de l'axe des z. Ainsi Π n'a qu'une seule valeur entièrement déterminée pour toute figure donnée du liquide, pour toute position donnée de celui-ci par rapport à l'axe des z, et pour tout J donné.

Comme toutes les conditions auxquelles doivent satisfaire u_1, v_1 et w_1 sont remplies, pour toute figure du liquide, par les valeurs $u_1=v_1=w_1=0$, l'équation (12) conduit à la conclusion que, pour que l'on puisse communiquer au liquide un mouvement annulant la première variation de H, pour un moment donné des quantités de mouvement $\mathrm{J}\rho$, dont la direction est prise pour axe des z, il est nécessaire et suffisant de donner au liquide une figure et une position par rapport à l'axe des z, telles que la première variation de Π s'annule, sous la condition de l'invariabilité du volume (que nous sous-entendrons toujours) et sous les conditions (1) (dont on peut d'ailleurs ne pas tenir compte). D'après cela, l'équation

$$\delta\Pi=0$$

est équivalente à celle (9).

Nous arrivons ainsi à cette conclusion que, pour toute figure d'équilibre, correspondant au moment des quantités du mouvement $\mathrm{J}\rho$, pour laquelle l'axe des z sert d'axe de rotation au liquide, Π, sous les conditions (1), est minimum, maximum ou minimum-maximum; quand Π est minimum, H ne peut être aussi que minimum; mais quand Π n'est pas minimum, H ne peut être que minimum-maximum, le cas où H est maximum étant évidemment impossible.

Dans les numéros suivants, nous nous proposons de montrer que le minimum de Π correspond à une figure d'équilibre stable, et dans ce qui précède nous avons voulu seulement montrer le lien qui existe entre notre recherche et la théorie générale de la stabilité du mouvement, dans laquelle on est conduit au principe énoncé dans la nouvelle édition de la *Natural Philosophy* de Thomson et Tait ([1]), pour le cas du mouvement d'un liquide que nous considérons, sous la forme suivante :

« When the energy with given moment of momentum is either a minimum or a maximum, the kinetic equilibrium is clearly stable, if the liquid is perfectly inviscid. It seems probable that it is essentially unstable, when the energy is a minimax ([2]). »

4. Il est nécessaire avant tout de donner une définition précise de ce que nous entendrons par *figure d'équilibre stable*. Pour cela, nous devons convenir d'abord des termes dont nous nous servirons et indiquer les hypothèses que nous ferons.

Imaginons une surface, invariablement liée au centre d'inertie du liquide (ou, ce qui est la même chose, à l'origine des coordonnées x, y, z), que nous supposerons telle qu'elle puisse servir de surface au liquide, tournant comme un corps solide autour de l'axe des z, avec une vitesse angulaire ω. Nous supposerons que cette surface peut tourner autour de l'origine des coordonnées, mais, pour ω non nul, nous ne considérerons comme *possibles* que des rotations autour de l'axe des z, tandis que, pour $\omega = 0$, toutes les rotations autour de l'origine seront supposées possibles. Nous appellerons, dans la suite, cette surface invariable de forme, mais variable en position, une *surface d'équilibre*.

Nous supposerons toujours la surface d'équilibre, que nous aurons à considérer, telle qu'en un quelconque de ses points la direction de la normale change d'une manière continue, pour un déplacement continu de ce point sur la surface, et telle que les courbures de ses sections normales restent partout finies. En outre, nous supposerons que cette surface n'ait pas de points à distance infinie du centre d'inertie du liquide.

Supposons que l'on trouble le mouvement du liquide qui conservait une certaine figure d'équilibre, et considérons la surface du liquide à un instant quelconque du mouvement troublé. Envisageons les droites qui joignent un point quelconque de cette surface à tous les points de la surface d'équilibre dans une quelconque de ses positions *possibles,* et choisissons le plus petit de tous les segments de ces droites entre le point pris sur la surface du liquide et un point quelconque de la

---

([1]) W. Thomson and P. G. Tait, *Treatise on natural Philosophy*. Vol. I, Part. II, 1883, p. 335.

([2]) « Quand l'énergie, pour un moment donné des quantités de mouvement, est minimum ou maximum, l'équilibre cinétique d'un liquide parfait est évidemment stable. Il paraît probable qu'il est essentiellement instable, quand l'énergie est minimum-maximum. »

surface d'équilibre. Ce segment représentera la normale la plus courte abaissée, du point considéré de la surface du liquide, sur la surface d'équilibre. Nous appellerons le point de la surface d'équilibre où cette normale rencontre pour la *première fois* cette surface, *la base* de la normale, et le point correspondant pris sur la surface du liquide, le *sommet* de la normale. Nous désignerons par n le segment considéré, et nous le regarderons comme positif, ou comme négatif, selon que son sommet se trouve du côté intérieur ou du côté extérieur de la surface d'équilibre, en appelant, cela s'entend, côté intérieur celui où se trouve le liquide dans le mouvement non troublé. En considérant *tous* les points de la surface du liquide, nous trouverons la plus grande des valeurs numériques de tous les n. Nous désignerons cette quantité positive par N et nous l'appellerons *l'écart entre la surface du liquide et la surface d'équilibre pour une position donnée de cette dernière.* En général, N variera quand changera de position la surface d'équilibre. En choisissant parmi toutes les valeurs de N, correspondant à toutes les positions *possibles* de la surface d'équilibre, *la plus petite de toutes,* nous aurons ce que nous nommerons plus loin *l'écart entre la surface du liquide et la surface d'équilibre* et ce que nous désignerons par ε.

Nous considérerons encore une quantité caractérisant, jusqu'à un certain point, la déviation que subit la figure du liquide à partir de la figure d'équilibre. Soit, comme précédemment, Q le volume du liquide, et q le plus grand volume dont tous les points sont intérieurs tant à la surface du liquide qu'à la surface d'équilibre dans l'une de ses positions possibles. La différence $Q - q$ variera en général, quand variera la position de la surface d'équilibre. *La plus petite de toutes* les valeurs prises par elle, pour toutes les positions *possibles* de cette surface, sera appelée *déviation de la figure du liquide à partir de la figure d'équilibre,* et nous la désignerons par Δ.

Si l'on considère toutes les surfaces possibles du liquide, dont les écarts à partir de la surface d'équilibre sont égaux à une quantité donnée ε, il est évident que, pour ces surfaces, Δ peut avoir toutes les valeurs comprises entre zéro et une certaine limite, dépendant de ε, qui s'annulera pour $\varepsilon = 0$. Toute fonction continue de ε, n'admettant que des valeurs que peut recevoir Δ pour le même ε, et s'annulant *seulement* pour $\varepsilon = 0$, sera appelée *déviation possible,* et nous la désignerons par $\varphi(\varepsilon)$.

Il est important, pour la suite, d'attirer l'attention sur la circonstance suivante. En vertu des hypothèses faites sur la continuité du mouvement, la surface du liquide variera d'une manière continue avec le cours du temps et sera constituée toujours des mêmes points du liquide. Par conséquent, ε *et* Δ *seront des fonctions continues du temps.*

Il est évident que, pour N suffisamment petit, à chaque point de la surface du liquide correspond seulement un point de la surface d'équilibre comme *base de* *normale,* et qu'en outre *chaque* point de la surface d'équilibre est la base d'une normale correspondant à un certain point de la surface du liquide. Ceci résulte directement des hypothèses énoncées plus haut, relativement à la surface d'équilibre. Donc, N étant assez petit, n peut être considéré comme une fonction des points de la surface d'équilibre. En supposant toujours les troubles assez petits pour que la condition ci-dessus soit satisfaite pour la position où $N = \varepsilon$, nous ne considérerons tout mouvement troublé que tant qu'elle n'est pas dérangée.

Considérons une surface quelconque du liquide, pour laquelle la condition que nous venons d'énoncer est satisfaite pour une certaine position de la surface d'équilibre, et supposons que cette surface varie de telle manière que tous les n varient en chaque point de la surface d'équilibre d'une manière continue selon une loi quelconque, qui doit seulement satisfaire à la condition que N diminue d'une manière continue, en tendant vers zéro. Nous appellerons une surface variant ainsi, *une surface tendant d'une manière continue vers la surface d'équilibre.* Nous parlerons aussi des figures du liquide, tendant d'une façon continue vers la figure d'équilibre.

En passant maintenant à la définition de la stabilité, nous devons préalablement dire que l'expression *force vive du mouvement relatif* qui s'y rencontrera, désigne la force vive dans le mouvement du liquide relativement au milieu invariablement lié à son centre d'inertie et possédant une vitesse angulaire géométriquement égale à celle que possédait le liquide dans le mouvement non troublé.

Définition. — *Communiquant aux molécules d'un liquide, qui conservait une des figures d'équilibre, des déplacements et des vitesses quelconques, considérons le mouvement troublé qui s'ensuit. Si l'écart initial entre la surface du liquide et la surface d'équilibre et la valeur initiale de la force vive du mouvement relatif, pour toutes les autres données initiales possibles* (1), *peuvent être choisis suffisamment petits pour que la force vive du mouvement relatif du liquide et l'écart entre sa surface et la surface d'équilibre restent inférieurs à certaines limites données à l'avance, quelque petites que soient ces dernières, pendant toute la durée du mouvement, ou au moins tant que la déviation de la figure du liquide à partir de la figure d'équilibre ne devient pas inférieure à une certaine déviation possible donnée à l'avance, quelque petites que soient toutes les valeurs de cette dernière, la figure considérée sera dite* STABLE.

(1) Ces données initiales ne doivent pas être entièrement arbitraires : elles doivent être telles que le mouvement qui s'ensuit possède une certaine continuité, au moins tant que la figure du liquide ne s'écarte pas trop de la figure d'équilibre. Cette condition doit être toujours sous-entendue.

Si, pour la figure d'équilibre considérée, le mouvement, du caractère qui vient d'être défini, ne se produit que pour des déplacements et des vitesses à l'instant initial satisfaisant à certaines conditions, qui permettent de les choisir arbitrairement petits, nous dirons que cette figure d'équilibre est stable relativement aux données initiales satisfaisant à ces conditions. Des exemples d'une telle *stabilité conditionnelle* seront donnés au Chapitre III.

5. Nous passons maintenant à la démonstration du principe sur lequel sera basée toute notre étude, et nous nous servirons pour cela de la méthode à l'aide de laquelle Lejeune-Dirichlet a démontré le principe de Lagrange ramenant la recherche de la stabilité de l'équilibre d'un système conservatif quelconque de points à la recherche d'un minimum du potentiel.

Le principe que nous avons l'intention de démontrer est le suivant :

Théorème fondamental. — *Si, pour une figure d'équilibre correspondant à un moment des quantités de mouvement* $J\rho$, *a lieu un minimum de* Π *sous les conditions* (1), *cette figure d'équilibre est stable.*

Avant tout, on doit dire ce qu'il faut entendre ici par un minimum de Π. Nous avons vu que Π ne change pas, pour une rotation d'ensemble du liquide autour de l'axe des z quand J diffère de zéro, et pour toute rotation d'ensemble autour de l'origine des coordonnées quand $J = 0$. Donc, dans la recherche du minimum de Π, on doit éliminer les déplacements se réduisant à ces rotations; c'est ce que l'on pourra faire en introduisant la condition que Δ ne soit pas nul. Par conséquent, si Π_m est la valeur de Π pour la figure d'équilibre considérée, l'affirmation que Π_m est un minimum de Π indique que, pour toute figure du liquide tendant d'une manière continue vers la figure d'équilibre, et pour laquelle Δ s'annule seulement pour $N = 0$, on peut trouver une limite N_0 telle que toutes les valeurs prises par la différence $\Pi - \Pi_m$, pour les variations de cette figure du liquide de $N = N_0$ à $N = 0$, resteront positives, en ne s'annulant que pour $N = 0$.

Nous concluons de là que, $\varphi(\varepsilon)$ étant une fonction donnée représentant une déviation possible, on peut, quelle que soit cette fonction, trouver une limite E telle que, pour toute figure du liquide pour laquelle $\varepsilon < E$ et $\Delta \geqq \varphi(\varepsilon)$, la différence $\Pi - \Pi_m$ soit positive, en ne s'annulant que pour $\varepsilon = 0$ (1). Ce point constituera le fond de toute la démonstration (2).

(1) Il est évident que, pour toute valeur donnée de ε, la différence $\Pi - \Pi_m$ peut être rendue aussi petite qu'on veut, par le choix d'une figure telle que Δ soit suffisamment petit. C'est pour écarter cet inconvénient que l'on a introduit la condition $\Delta \geqq \varphi(\varepsilon)$.

(2) On voit que ce point n'est pas établi. L'auteur l'admet comme une conséquence de la notion du minimum; mais on doit avouer que, dans la question considérée, cette notion est assez obscure. L.

En ce qui concerne les conditions (1) énoncées dans le théorème, elles sont satisfaites d'elles-mêmes, puisque nous ne considérons que le mouvement du liquide relativement à son centre d'inertie. Ces conditions ne joueront aucun rôle dans la démonstration, mais nous verrons dans la suite qu'elles sont *nécessaires* pour la possibilité d'un minimum de Π. A ces conditions, on doit d'ailleurs ajouter la condition de l'invariabilité du volume, qui est toujours sous-entendue.

Désignons par $\mathfrak{T}_\rho$ la force vive du mouvement relatif du liquide, et par ε^0 et $\mathfrak{T}^0$ les valeurs initiales de ε et de $\mathfrak{T}$, en convenant, d'une manière générale, de désigner les valeurs initiales de toutes les quantités considérées par les mêmes lettres avec l'indice o en haut. D'après notre définition de la stabilité, notre théorème sera démontré si l'on prouve que, quelque petites que soient les quantités positives e et σ et quelle que soit la fonction $\varphi(\varepsilon)$ donnée satisfaisant aux conditions connues, la condition énoncée dans ce théorème donne toujours la possibilité de choisir les données initiales ε^0 et $\mathfrak{T}^0$ assez petites pour que, pour toutes les autres données initiales possibles satisfaisant à la condition $\Delta^0 \geqq \varphi(\varepsilon^0)$, pendant toute la durée du mouvement du liquide qui s'ensuit, tant que la condition

$$\Delta \geqq \varphi(\varepsilon)$$

n'est pas troublée, les inégalités

$$\varepsilon < e \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{T} < \sigma^2$$

restent satisfaites.

En désignant, comme précédemment, par ω, la vitesse angulaire correspondant à la figure d'équilibre considérée, nous poserons

$$u = \mathfrak{u} - \omega y, \qquad v = \mathfrak{v} + \omega x,$$

de sorte qu'il viendra

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\int (\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2 + w^2)\, d\tau,$$

et nous introduirons de plus les notations suivantes :

$$\int (wy - \mathfrak{v} z)\, d\tau = \xi, \qquad \int (\mathfrak{u} z - wx)\, d\tau = \eta, \qquad \int (\mathfrak{v} x - \mathfrak{u} y)\, d\tau = \zeta.$$

En outre, nous poserons, comme au n° 3,

$$u = \omega_y z - \omega_z y + u_1, \qquad v = \omega_z x - \omega_x z + v_1, \qquad w = \omega_x y - \omega_y x + w_1,$$

mais actuellement, nous considérons des troubles arbitraires pour lesquels, en général, le moment des quantités de mouvement doit varier. Par suite, u_1, v_1 et w_1

doivent satisfaire aux relations

$$\int (w_1 y - v_1 z)\, d\tau = \alpha, \qquad \int (u_1 z - w_1 x)\, d\tau = \beta, \qquad \int (v_1 x - u_1 y)\, d\tau = \gamma,$$

où α, β, γ sont des constantes dépendant des données initiales.

Si nous posons maintenant

$$T_1 = \frac{1}{2}\int (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)\, d\tau,$$

l'équation (4) donnera, au lieu de l'équation (12), la suivante :

$$(14) \qquad T_1 + \Pi = T_1^0 + (\omega_x^0 - \omega_x)\alpha + (\omega_y^0 - \omega_y)\beta + (\omega_z^0 - \omega_z)\gamma + \Pi^0.$$

En remarquant que

$$\alpha = \xi - \omega P_y, \qquad \beta = \eta - \omega P_x, \qquad \gamma = \zeta - J + \omega S_z,$$

on obtient facilement les relations suivantes

$$(15) \qquad \mathfrak{T} = T_1 + \omega_x \alpha + \omega_y \beta + (\omega_z - \omega)\gamma + \frac{1}{2}(\omega^2 S_z + J\omega_z - 2J\omega)$$

et

$$(16) \quad T_1^0 + (\omega_x^0 - \omega_x)\alpha + (\omega_y^0 - \omega_y)\beta + (\omega_z^0 - \omega_z)\gamma$$
$$= \mathfrak{T}^0 - [\omega_x \xi^0 + \omega_y \eta^0 + (\omega_z - \omega)\zeta^0] + \omega\left[\omega_x P_y^0 + \omega_y P_x^0 + (\omega_z - \omega)\left(\frac{J}{\omega} - S_z^0\right)\right]$$
$$- \frac{1}{2}(\omega^2 S_z^0 + J\omega_z^0 - 2J\omega).$$

Posons maintenant

$$\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + (\omega_z - \omega)^2} = \theta,$$
$$\sqrt{P_x^2 + P_y^2 + \left(\frac{J}{\omega} - S_z\right)^2} = P,$$
$$\frac{1}{2}(\omega^2 S_z + J\omega_z - 2J\omega) = i$$

et désignons par S le plus grand des moments centraux d'inertie du volume occupé par le liquide à un instant quelconque. On voit facilement que

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \leqq 2ST_1 \qquad \text{et} \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqq 2S\mathfrak{T},$$

et, par conséquent, en vertu de l'inégalité

$$(aa_1 + bb_1 + cc_1)^2 \leqq (a^2 + b^2 + c^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2),$$

l'égalité (15) donne

$$(17)\qquad \mathfrak{T} \leqq \mathrm{T}_1 + \theta\sqrt{2\mathrm{S}}\sqrt{\mathrm{T}_1} + i$$

et l'égalité (14), en vertu de (16), conduit à l'inégalité suivante :

$$(18)\qquad \mathrm{T}_1 + \Pi \leqq \mathfrak{T}^0 + \theta\sqrt{2\mathrm{S}^0}\sqrt{\mathfrak{T}^0} + \omega\theta\mathrm{P}^0 - i^0 + \Pi^0$$

qui aura lieu pendant toute la durée du mouvement.

Il faut remarquer, relativement à toutes les quantités qui entrent dans les inégalités (17) et (18), qu'elles ne dépendent pas de la direction qui peut être prise pour axe des x dans le plan perpendiculaire à l'axe des z, et que d'ailleurs les quantités θ, P et i peuvent être rendues aussi petites qu'on le veut, en choisissant ε suffisamment petit, car les quantités

$$\mathrm{P}_x,\quad \mathrm{P}_y,\quad \frac{\mathrm{J}}{\omega} - \mathrm{S}_z,\quad \omega_x,\quad \omega_y \qquad \text{et} \qquad \omega_z - \omega$$

s'annulent, comme nous le savons, aussitôt que le liquide prend la figure d'équilibre considérée.

En outre, on peut remarquer que, si ε est pris pour quantité infiniment petite du premier ordre, θ et P seront des infiniment petits d'un ordre non inférieur au premier, et i un infiniment petit d'un ordre non inférieur au second. En effet, les formules (10) et (11) donnent

$$\omega_z = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{S}_z} + \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{S}_z}\,\frac{\mathrm{S}_x\mathrm{P}_x^2 + \mathrm{S}_y\mathrm{P}_y^2 + 2\mathrm{P}_x\mathrm{P}_y\mathrm{P}_z}{\mathrm{D}}$$

et, par conséquent,

$$i = \frac{\omega^2}{2\mathrm{S}_z}\left(\frac{\mathrm{J}}{\omega} - \mathrm{S}_z\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{J}^2}{\mathrm{S}_z}\,\frac{\mathrm{S}_x\mathrm{P}_x^2 + \mathrm{S}_y\mathrm{P}_y^2 + 2\mathrm{P}_x\mathrm{P}_y\mathrm{P}_z}{\mathrm{D}}.$$

On voit aussi par là que i est une quantité positive.

ε' étant une valeur quelconque de ε qui ne dépasse pas e et la limite E dont il a été parlé au commencement de ce numéro, désignons par $\theta_{\varepsilon'}$, $i_{\varepsilon'}$ et $\mathrm{S}_{\varepsilon'}$ les plus grandes de toutes les valeurs que prennent θ, i et S, pour toutes les figures possibles du liquide auxquelles correspond $\varepsilon \leqq \varepsilon'$. Puis désignons par $\Pi_{\varepsilon'}$ la plus petite de toutes les valeurs prises par Π, pour toutes les figures possibles pour lesquelles $\varepsilon = \varepsilon'$ et $\Delta \geqq \varphi(\varepsilon')$. D'après ce que l'on a remarqué plus haut, $\Pi_{\varepsilon'} - \Pi_m$ sera une quantité positive non nulle qui, pour ε' suffisamment petit, peut être rendue aussi petite qu'on le veut.

Choisissons ε' suffisamment petit pour que l'inégalité

$$(19)\qquad \Pi_{\varepsilon'} - \Pi_m + \theta_{\varepsilon'}\sqrt{2\mathrm{S}_{\varepsilon'}}\sqrt{\Pi_{\varepsilon'} - \Pi_m} + i_{\varepsilon'} < \sigma^2$$

soit satisfaite, et ensuite, prenons pour figure initiale une figure quelconque pour laquelle les inégalités

$$\varepsilon^0 < \varepsilon', \qquad \Delta^0 \geqq \varphi(\varepsilon^0), \qquad \Pi_{\varepsilon'} > \Pi^0 + \omega\theta_{\varepsilon'}P^0$$

soient satisfaites.

Si maintenant l'on communique aux molécules du liquide des vitesses relatives suffisamment petites pour que $\mathfrak{T}^0$ satisfasse à la condition

$$\mathfrak{T}^0 + \theta_{\varepsilon'}\sqrt{2S^0}\sqrt{\mathfrak{T}^0} < \Pi_{\varepsilon'} - (\Pi^0 + \omega\theta_{\varepsilon'}P^0),$$

l'inégalité (18) conduira à l'inégalité suivante

$$T_1 + \Pi < \Pi_{\varepsilon'} \tag{20}$$

qui sera satisfaite au moins tant que ε reste inférieur à ε'. Mais la valeur initiale de ε est inférieure à ε', d'après une de nos conditions, et, d'autre part, ε varie d'une manière continue dans le cours du temps (n° 4). Par conséquent, il ne peut devenir supérieur à ε' sans lui devenir préalablement égal. Or, l'égalité $\varepsilon = \varepsilon'$, en vertu de l'inégalité (20), tant que $\Delta \geqq \varphi(\varepsilon)$, est évidemment impossible.

Nous arrivons ainsi à la conclusion qu'au moins tant que la condition $\Delta \geqq \varphi(\varepsilon)$ est remplie, ε reste inférieur à ε', et l'inégalité (20) donne

$$T_1 < \Pi_{\varepsilon'} - \Pi_m,$$

d'où nous déduisons, en vertu des inégalités (17) et (19), la suivante :

$$\mathfrak{T} < \sigma^2.$$

Notre théorème est par là démontré.

Remarquons que notre démonstration suppose que J n'est pas nul. Mais il est évident qu'il n'est pas besoin de s'arrêter à part sur le cas où $J = 0$ et où, par conséquent, $\omega = 0$.

Si, dans l'étude d'une figure d'équilibre quelconque, correspondant à un moment des quantités de mouvement $J\rho$, il est démontré que Π est minimum pour cette figure, sous les conditions (1), nous pouvons alors affirmer, d'après ce que l'on vient de démontrer, que cette figure d'équilibre est stable. Dans le cas où Π n'est pas minimum, nous ne pouvons rien conclure.

On peut encore ajouter aux conditions (1) d'autres conditions, et, dans certains cas, Π n'étant pas en général minimum, peut le devenir pour ces nouvelles conditions. Si ces dernières sont telles que, pour certaines données initiales, elles peuvent être conservées pendant toute la durée du mouvement, nous pouvons en conclure qu'il y a *stabilité de la figure d'équilibre relativement à ces données initiales.*

6. Nous devons maintenant donner des formules pour l'examen du signe de l'accroissement que reçoit Π, quand on passe de la figure d'équilibre considérée à une figure quelconque du liquide qui en est infiniment voisine. Mais nous nous bornerons à la recherche de l'expression et du signe de la variation seconde de Π, car la recherche des variations d'ordre supérieur, nécessaire dans le cas où la variation seconde s'annule, présente, en général, d'assez grandes difficultés.

Nous ne considérerons maintenant que des figures du liquide tendant d'une manière continue vers la figure d'équilibre, pour lesquelles n n'a qu'une seule valeur en tout point de la surface d'équilibre. D'ailleurs nous pouvons supposer que N reste toujours inférieur au plus petit de tous les rayons de courbure des sections normales principales de la surface d'équilibre. Dans ces conditions, si nous désignons par R_1 et R_2 les rayons de courbure des sections normales principales de cette surface, en un des points (x, y, z) de son élément ds, ces rayons étant considérés comme positifs, si la surface est convexe du côté extérieur dans le voisinage de ce point, et comme négatifs, dans le cas contraire, la condition de l'invariabilité du volume du liquide s'exprimera de la façon suivante :

$$(21)\qquad \int ds\int_0^n\left(1-\frac{\alpha}{R_1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{R_2}\right)d\alpha=\int\left[n-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{n^2}{2}+\frac{1}{R_1R_2}\frac{n^3}{3}\right]ds=0,$$

en convenant d'entendre par l'intégrale

$$\int F(x, y, z)\,ds \quad \text{ou} \quad \int F(x', y', z')\,ds'$$

une intégrale s'étendant à toute la surface d'équilibre. De même, les conditions (1) conduiront aux égalités

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int ds\int_0^n[x+\alpha\cos(nx)]\left(1-\frac{\alpha}{R_1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{R_2}\right)d\alpha=0,\\ &\int ds\int_0^n[y+\alpha\cos(ny)]\left(1-\frac{\alpha}{R_1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{R_2}\right)d\alpha=0,\\ &\int ds\int_0^n[z+\alpha\cos(nz)]\left(1-\frac{\alpha}{R_1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{R_2}\right)d\alpha=0.\end{aligned}\right.$$

Pour toute loi donnée suivant laquelle la surface considérée doit tendre vers la surface d'équilibre, n sera une certaine fonction de N, et, pour fixer les idées, nous pouvons convenir ici, en considérant toute expression dépendant de la figure du liquide, comme une fonction de N, d'entendre, par sa variation d'un ordre quelconque m le terme en N^m multiplié par $1.2.3\ldots m$, dans son développement suivant les puissances de N, arrêté à un terme complémentaire d'un ordre plus élevé. Si, dans cet ordre d'idées, nous désignons par δn la première variation de n, et si nous posons

$$n = \delta n + n_1,$$

n_1 représentera une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur au premier, en convenant toujours de prendre N pour infiniment petit du premier ordre. Les égalités (21) et (22) permettent de trouver les équations conditionnelles auxquelles doivent satisfaire les variations d'ordre quelconque de n considérées comme fonctions d'un point de la surface d'équilibre. Mais il nous suffira d'avoir seulement les équations auxquelles doit satisfaire la variation du premier ordre de n, savoir

$$\int \delta n \, ds = 0, \tag{23}$$

$$\int x \, \delta n \, ds = 0, \qquad \int y \, \delta n \, ds = 0, \qquad \int z \, \delta n \, ds = 0. \tag{24}$$

L'expression (13) peut être représentée sous la forme suivante

$$\Pi = A + B$$

où

$$A = \frac{1}{2}\left(\omega^2 S_z + \frac{J^2}{S_z}\right) + \frac{1}{2}\frac{J^2}{S_z}\frac{S_x P_x^2 + S_y P_y^2 + 2 P_x P_y P_z}{D}$$

et

$$B = -\frac{1}{2}\left(\omega^2 S_z + \int V \, d\tau\right).$$

En ce qui concerne le premier terme A, la recherche de sa variation d'un ordre quelconque ne présente aucune difficulté. En remarquant que, pour la figure d'équilibre considérée,

$$\frac{J^2}{S_z^2} = \omega^2, \qquad P_x = 0 \qquad \text{et} \qquad P_y = 0,$$

nous trouvons immédiatement $\delta A = 0$. Si nous supposons encore la surface d'équilibre amenée à une position pour laquelle $P_z = 0$, nous trouvons

$$\delta^2 A = \frac{\omega^2}{S_z}\left[\int (x^2 + y^2)\, \delta n \, ds\right]^2 + \frac{\omega^2}{S_x}\left(\int xz \, \delta n \, ds\right)^2 + \frac{\omega^2}{S_y}\left(\int yz \, \delta n \, ds\right)^2.$$

En ce qui concerne le second terme B, nous y rencontrons une intégrale dans laquelle la fonction à intégrer devient infinie dans les limites de l'intégration, et, bien que la recherche de sa première variation ne présente pas de difficultés, pour le calcul de la seconde, il est nécessaire de recourir à son accroissement. Comme on aura évidemment $\delta B = 0$, notre problème consistera ici à trouver pour cet accroissement une expression de la forme

$$\Delta B = \tfrac{1}{2} b N^2 + \beta N^2,$$

où b est une quantité indépendante de N, et β une quantité à l'égard de laquelle il nous suffira de montrer qu'elle tend vers zéro en même temps que N; quand ceci sera établi, $b N^2$ représentera la seconde variation cherchée de B, dont le signe déterminera le signe de l'accroissement infiniment petit de B.

Soient (x, y, z) et (x', y', z') deux points de la surface d'équilibre, et désignons par $r(\alpha, \alpha')$ la distance entre les points dont les coordonnées sont

$$x + \alpha \cos(nx), \quad y + \alpha \cos(ny), \quad z + \alpha \cos(nz)$$

et

$$x' + \alpha' \cos(n'x), \quad y' + \alpha' \cos(n'y), \quad z' + \alpha' \cos(n'z),$$

en convenant de désigner $r(\alpha, 0)$ et $r(0, 0)$ respectivement par $r(\alpha)$ et r. Puis désignons par $U(\alpha)$ la valeur, pour le premier de ces points, de la fonction à laquelle se réduit l'expression

$$V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

quand la surface du liquide se confond avec la surface d'équilibre. D'après cela, $U(0)$ représentera la constante λ qui figure dans l'équation (9).

Avec les notations adoptées, nous trouvons, pour l'accroissement de B, l'expression suivante :

$$\Delta B = C - \tfrac{1}{2} f \rho D$$

où

$$C = \int ds \int_0^n U(\alpha)\left(1 - \frac{\alpha}{R_1}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{R_2}\right) d\alpha$$

et

$$D = \int ds \int_0^n \left(1 - \frac{\alpha}{R_1}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{R_2}\right) d\alpha \int ds' \int_0^{n'} \left(1 - \frac{\alpha'}{R'_1}\right)\left(1 - \frac{\alpha'}{R'_2}\right) \frac{d\alpha'}{r(\alpha, \alpha')}.$$

On sait, par la théorie de la fonction potentielle, que $U(\alpha)$ et $\dfrac{\partial U(\alpha)}{\partial \alpha}$ sont des fonctions continues de α, et que $\dfrac{\partial^2 U(\alpha)}{\partial \alpha^2}$ reste aussi une fonction continue, tant que α ne passe pas par zéro, mais que, bien qu'elle éprouve à ce passage une discontinuité, cependant, pour les conditions indiquées plus haut relativement à la surface d'équilibre, elle ne devient pas infinie. Par suite, nous pouvons ordonner la fonction de n, entrant sous le signe de l'intégrale dans l'expression de C, en série de puissances entières positives de n, au moins jusqu'au terme en n^2 inclusivement. Si donc nous représentons par $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial n}$ la valeur de la dérivée $\frac{\partial \mathrm{U}(n)}{\partial n}$ pour $n=0$, nous obtenons ainsi

$$(25)\quad \int_0^n \mathrm{U}(\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{\mathrm{R}_1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{\mathrm{R}_2}\right)d\alpha = \lambda n + \left[\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial n} - \lambda\left(\frac{1}{\mathrm{R}_1}+\frac{1}{\mathrm{R}_2}\right)\right]\frac{n^2}{2} + \mathrm{K}n^3,$$

où K est une quantité à l'égard de laquelle il nous suffit de savoir que c'est une fonction de n restant finie pour toute valeur de n quelque petite qu'elle soit. En nous servant de l'égalité (21), nous tirons de (25) l'expression suivante pour C :

$$\mathrm{C} = \frac{1}{2}\int \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial n} n^2\, ds + \int\left(\mathrm{K} - \frac{\lambda}{3\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}\right) n^3\, ds,$$

d'où

$$\delta^2 \mathrm{C} = \int \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial n}(\delta n)^2\, ds.$$

Arrivons maintenant à la transformation de l'expression de D.

a étant une constante donnée, décrivons du point (x, y, z) de la surface d'équilibre une sphère de rayon $a\mathrm{N}^{\frac{2}{3}}$, et de tous les points de sa ligne d'intersection avec cette surface, menons les normales jusqu'à leur intersection la plus proche avec la surface du liquide. Nous détacherons ainsi de l'espace compris entre la surface du liquide et la surface d'équilibre un volume dont la plus grande dimension sera évidemment une quantité infiniment petite d'ordre $\frac{2}{3}$. Nous désignerons cette plus grande dimension par $\mathrm{HN}^{\frac{2}{3}}$, où H, par conséquent, restera fini pour tous les points de la surface d'équilibre, quelque petit que soit N. En outre, on voit facilement que la plus courte des distances entre un point quelconque du volume considéré, qui se trouve sur la normale au point (x, y, z), et un point quelconque d'une des normales relatives à la ligne d'intersection de la sphère avec la surface d'équilibre, est également une quantité infiniment petite d'ordre $\frac{2}{3}$. Nous désignerons cette plus courte distance par $h\mathrm{N}^{\frac{2}{3}}$, où h, pour $\mathrm{N}=0$, ne s'annulera pas (il est évident que $\lim h = a$).

Si nous convenons que

$$\int^0 \mathrm{F}(x', y', z')\, ds'$$

est une intégrale qui s'étend à toute la surface d'équilibre, à l'exception de la partie qui se trouve à l'intérieur de la sphère considérée, nous pouvons présenter l'expression de D sous la forme de la somme suivante :

$$D = \int ds \int_0^n \left(1 - \frac{\alpha}{R_1}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{R_2}\right) d\alpha \int^0 ds' \int_0^{n'} \left(1 - \frac{\alpha'}{R_1'}\right)\left(1 - \frac{\alpha'}{R_2'}\right) \frac{d\alpha'}{r(\alpha, \alpha')}$$
$$+ \int ds \int_0^n G\left(1 - \frac{\alpha}{R_1}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{R_2}\right) d\alpha,$$

où G est la fonction potentielle, au point dont les coordonnées sont $x + \alpha\cos(nx)$, $y + \alpha\cos(ny)$, $z + \alpha\cos(nz)$, de la masse remplissant le volume défini plus haut avec la densité $+1$ ou -1. En tout cas c'est une quantité dont la valeur numérique ne peut dépasser $2\pi H^2 N^{\frac{4}{3}}$. On voit par là que le second terme de l'expression de D représente une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur au second, et que nous devons par conséquent nous adresser au premier terme. Or, il suffit évidemment, pour cela, de considérer l'expression

$$\int n\, ds \int^0 \frac{n'\, ds'}{r(\theta n, \theta' n')}$$

où θ et θ' sont des fractions positives, et cette expression peut être présentée sous la forme :

$$(26) \qquad \int n\, ds \int^0 \frac{n'\, ds'}{r} + \int n\, ds \int^0 \frac{r - r(\theta n, \theta' n')}{r(\theta n, \theta' n')}\, \frac{n'\, ds'}{r}.$$

Mais, d'après ce que l'on a remarqué plus haut,

$$r(\theta n, \theta' n') > h N^{\frac{2}{3}}$$

et, d'autre part, il est évident qu'en valeur numérique,

$$[r - r(\theta n, \theta' n')] < 2N.$$

Par conséquent, la valeur numérique du second terme de l'expression (26) est inférieure à

$$2N^{\frac{7}{3}} \int \frac{ds}{h} \int \frac{ds'}{r},$$

et le problème se ramène à l'examen du premier terme qui, comme on sait, diffère, par un infiniment petit d'ordre supérieur, de l'expression

$$\int\int \frac{nn'\, ds\, ds'}{r}.$$

Nous trouvons ainsi

$$\delta^2 D = 2 \int\int \frac{\delta n\, \delta n'\, ds\, ds'}{r},$$

et nous obtenons, pour la seconde variation cherchée de Π, l'expression suivante :

$$(27)\qquad \delta^2\Pi = \int \frac{\partial U}{\partial n}(\delta n)^2\, ds - f\rho \int\int \frac{\delta n\, \delta n'\, ds\, ds'}{r} + \Omega + W,$$

où

$$(28)\qquad \Omega = \frac{\omega^2}{S_z}\left[\int (x^2+y^2)\,\delta n\, ds\right]^2$$

et

$$W = \frac{\omega^2}{S_x}\left(\int xz\,\delta n\, ds\right)^2 + \frac{\omega^2}{S_y}\left(\int yz\,\delta n\, ds\right)^2.$$

7. Il est assez difficile de dire quelque chose de général au sujet de l'expression (27). En nous appuyant sur ce qui a été dit à l'égard de Π au n° 3, nous pouvons seulement affirmer que cette expression s'annulera toujours, quand la variation δn se ramènera, pour ω différent de zéro, à la forme

$$(29)\qquad \delta n = [x\cos(ny) - y\cos(nx)]\,\theta_z,$$

et pour $\omega = 0$ à la forme

$$(30)\qquad \begin{aligned}\delta n = {} & [y\cos(nz) - z\cos(ny)]\,\theta_x \\ & + [z\cos(nx) - x\cos(nz)]\,\theta_y + [x\cos(ny) - y\cos(nx)]\,\theta_z,\end{aligned}$$

où θ_x, θ_y, θ_z sont des quantités indépendantes de x, y, z. Dans le numéro suivant, nous rechercherons le signe de l'expression (27) dans certaines hypothèses particulières relativement à la variation δn, et actuellement nous remarquerons seulement que, dans tous les cas auxquels nous aurons affaire, son premier terme sera positif et le second négatif.

A l'égard de l'expression $\frac{\partial U}{\partial n}$, qui se trouve sous le signe de l'intégrale dans le premier terme, on doit remarquer qu'elle représente l'accélération de la pesanteur observée à la surface du liquide, au point (x, y, z), et que sa valeur numérique est égale à

$$\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Nous pouvons maintenant tirer de tout ce qui précède le criterium suivant de la stabilité (il ne renferme, cela s'entend, que des conditions suffisantes, mais non nécessaires) :

Si, pour une figure d'équilibre correspondant à la vitesse angulaire ω, *l'expression* (27) *reste positive pour toutes les valeurs possibles de* δn *satisfai-*

sant aux équations (23) *et* (24), *en s'annulant seulement quand* δn *se ramène, pour* ω *différent de zéro, à la forme* (29), *et, pour* $\omega = 0$, *à la forme* (30), *cette figure d'équilibre sera stable.*

Il faut remarquer que, dans la suite, nous appellerons souvent δn déplacement normal du point (x, y, z) de la surface du liquide, parce que le rapport $\frac{\delta n}{n}$ a pour limite 1.

L'expression (27) ne diffère que par le terme W et par un facteur constant de l'expression qu'a trouvée Liouville [1] pour l'accroissement de la force vive du mouvement du liquide, en supposant que la figure d'équilibre qu'il conservait subît des troubles infiniment petits, et en considérant le mouvement du liquide relativement à un milieu invariable qui tourne autour de l'axe des z avec une vitesse angulaire constante ω ou avec une vitesse variable $\frac{J}{S_z}$. Dans le premier de ces cas, le terme Ω disparaît dans la formule (27).

Quant au terme W, il ne jouera, comme nous le verrons, aucun rôle dans la recherche de la stabilité des *ellipsoïdes*, qui constitue notre problème principal. Le terme Ω aura, au contraire, une grande importance, surtout pour les ellipsoïdes de Jacobi.

8. Nous rechercherons maintenant le signe de l'expression (27) dans deux hypothèses particulières relativement aux déplacements (pour parler rigoureusement, relativement aux variations des déplacements).

Nous supposerons d'abord que tous les déplacements des points du liquide sont des déplacements qu'admet un système invariable. Mais nous ne supposerons pas actuellement que l'on ait les équations (24), et nous poserons

$$\delta n = \cos(nx)\,\delta x + \cos(ny)\,\delta y + \cos(nz)\,\delta z,$$

où

$$(31)\quad \delta x = \varepsilon_x + \theta_y z - \theta_z y, \qquad \delta y = \varepsilon_y + \theta_z x - \theta_x z, \qquad \delta z = \varepsilon_z + \theta_x y - \theta_y x,$$

ε_x, θ_x, ... étant des quantités qui ne dépendent pas de x, y, z.

En remarquant que

$$\frac{\partial U}{\partial n}\delta n = \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\delta z$$

---

(1) Formules générales relatives à la question de la stabilité de l'équilibre d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation autour d'un axe (*Journal de Liouville*, t. 20, 1855).

et qu'en vertu des expressions (31),

$$\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z - f\rho\int\frac{\delta n'\,ds'}{r} = 0,$$

nous trouvons

$$\delta^2\Pi = \omega^2\int(x\,\delta x + y\,\delta y)\,\delta n\,ds + \Omega + W,$$

ce qui, d'après les conditions (1) et les égalités $P_x = 0$, $P_y = 0$, $P_z = 0$, se ramène à la forme suivante :

$$(32)\qquad \begin{aligned}\delta^2\Pi + \omega^2 Q(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2) &= \omega^2(S_z - S_y)\,\theta_x^2 + \omega^2(S_z - S_x)\,\theta_y^2 + W\\ &= \omega^2\frac{S_z}{S_y}(S_z - S_y)\,\theta_x^2 + \omega^2\frac{S_z}{S_x}(S_z - S_x)\,\theta_y^2.\end{aligned}$$

On voit par là que la seconde variation de Π est égale à zéro pour tous les déplacements hélicoïdaux autour de l'axe des z, qu'*elle est négative pour des déplacements de translation perpendiculaires à cet axe,* et que, pour des rotations autour d'axes perpendiculaires à l'axe des z, elle peut être aussi bien positive que négative, mais qu'elle sera toujours *positive, si l'axe de rotation du liquide est l'axe du plus grand moment d'inertie du volume qu'il occupe,* ce qui, comme on sait, a lieu pour toutes les figures ellipsoïdales d'équilibre.

L'égalité (32) montre que les inégalités

$$(33)\qquad S_z > S_x \quad \text{et} \quad S_z > S_y$$

sont des conditions nécessaires pour que $\delta^2\Pi$ reste positif, pour tous les δn satisfaisant aux conditions (23) et (24). En s'appuyant sur cela, on peut démontrer que pour que $\delta^2\Pi$, sous les conditions indiquées au numéro précédent, reste toujours positif, il est nécessaire que, sous ces mêmes conditions, $\delta^2\Pi - W$ reste positif.

En effet, δn étant une variation quelconque satisfaisant aux équations (23) et (24), posons

$$(34)\qquad \delta n = [y\cos(nz) - z\cos(ny)]\,\theta_x + [z\cos(nx) - x\cos(nz)]\,\theta_y + \delta n_1$$

et remarquons que, les différences $S_z - S_x$, $S_z - S_y$ n'étant pas nulles, nous pouvons disposer du choix des constantes θ_x et θ_y, de telle façon que δn_1 satisfasse aux équations

$$\int xz\,\delta n_1\,ds = 0 \qquad \text{et} \qquad \int yz\,\delta n_1\,ds = 0.$$

En le faisant, substituons dans la formule (27), à la place de δn, son expression (34). Après certaines transformations, nous aurons

$$\delta^2 \Pi = \delta^2 \Pi_1 + \delta^2 \Pi_0,$$

où $\delta^2 \Pi_1$ est ce que devient $\delta^2 \Pi$, quand on y remplace δn par δn_1, et $\delta^2 \Pi_0$ est le second membre de l'égalité (32). Or, de cette expression de $\delta^2 \Pi$ il résulte que les inégalités (33) et l'inégalité $\delta^2 \Pi_1 > 0$, qui sont *nécessaires* pour que l'inégalité $\delta^2 \Pi > 0$ ait lieu, sont en même temps *suffisantes* pour que la condition $\delta^2 \Pi - W > 0$ soit satisfaite; d'où ce que l'on a énoncé plus haut.

Par suite de ce qui vient d'être démontré, le terme W dans l'expression (27) n'aura pour nous aucune importance.

Considérons une autre hypothèse particulière relativement aux déplacements.

Supposons que la figure d'équilibre considérée appartienne à une série de figures d'équilibre, ayant un centre d'inertie commun et un axe de rotation commun, et passant *d'une façon continue* de l'une à l'autre par une variation de la vitesse angulaire. Alors, si $\delta\omega$ est l'accroissement infiniment petit de la vitesse angulaire correspondant au passage de la figure d'équilibre considérée à une figure infiniment voisine de cette série, il est facile, d'après l'équation (9), de trouver que la variation δn, correspondant à ce passage, doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial U}{\partial n}\delta n - f\rho\int\frac{\delta n'\,ds'}{r} + \omega(x^2+y^2)\,\delta\omega = \frac{5}{3}\,\frac{S_z}{Q}\,\omega\,\delta\omega. \tag{35}$$

En outre, nous savons qu'elle doit également satisfaire aux équations

$$\int xz\,\delta n\,ds = 0, \qquad \int yz\,\delta n\,ds = 0. \tag{36}$$

En supposant maintenant que tous les déplacements se ramènent à des déplacements tels qu'ils changent la figure d'équilibre considérée dans cette nouvelle figure d'équilibre, l'expression (27), à l'aide des équations (35) et (36), se réduira à celle-ci :

$$\delta^2 \Pi = \Omega + \omega\,\delta\omega\,\delta S_z.$$

Or, pour une série donnée de figures d'équilibre, nous pouvons considérer deux des trois quantités S_z, ω, J comme fonctions de la troisième. Par conséquent, cette formule peut être présentée sous la forme

$$\delta^2 \Pi - \Omega = \omega\,\frac{dS_z}{d\omega}(\delta\omega)^2. \tag{37}$$

Si nous nous servons de la formule (28), et si nous prenons J pour variable indépendante, en désignant par δJ son accroissement infiniment petit correspondant au passage à la nouvelle figure d'équilibre, nous obtiendrons encore

$$(38)\qquad \delta^2\Pi = \frac{\omega}{S_z}\frac{dS_z}{dJ}(\delta J)^2.$$

On voit par là que *si, dans le passage de la figure d'équilibre considérée à une figure infiniment voisine, le moment d'inertie relatif à l'axe de rotation et le moment des quantités de mouvement varient dans un même sens, la seconde variation de* Π *sera positive pour les déplacements considérés.*

On sait que, pour les ellipsoïdes de révolution dont l'excentricité ne dépasse pas une certaine limite 0,93..., le moment d'inertie, et par conséquent aussi le moment des quantités de mouvement, croissent quand la vitesse angulaire croît, et que, pour des excentricités supérieures, ils décroissent tous les deux quand cette vitesse croît. On sait aussi que, pour les ellipsoïdes à trois axes, le moment des quantités de mouvement, et par conséquent aussi le moment d'inertie, décroissent constamment, quand la vitesse angulaire croît. On voit par là que, pour tous les ellipsoïdes qui peuvent être des figures d'équilibre, la seconde variation de Π est positive pour les déplacements considérés.

D'après ce que l'on vient de dire, on voit déjà la portée du terme Ω dans la formule (27) : le second membre de l'égalité (37) est négatif pour tous les ellipsoïdes à trois axes et pour les ellipsoïdes de révolution dont les excentricités sont supérieures à 0,93..., tandis que la formule (38) est toujours positive.

En ce qui concerne le terme W, qui, comme nous l'avons vu, ne peut avoir pour nous aucune utilité, nous le laisserons de côté, et partout nous considérerons seulement l'expression

$$(39)\qquad \delta^2\Pi_1 = \delta^2\Pi - W,$$

dans laquelle le premier membre représente la seconde variation de

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{J^2}{S} - \int V\,d\tau\right) \quad [1].$$

En terminant remarquons que le théorème démontré, relativement à la possibilité de remplacer la recherche du signe de $\delta^2\Pi$ par la recherche du signe de $\delta^2\Pi_1$, est contenu, comme cas particulier, dans un autre plus général, sur lequel nous désirons maintenant appeler l'attention.

De l'égalité

$$\Pi = \Pi_1 + \frac{1}{2}\frac{J^2}{S_z}\frac{S_x P_x^2 + S_y P_y^2 + 2 P_x P_y P_z}{D},$$

[1] Comme plus loin S_x et S_y ne se rencontreront point dans nos formules, nous écrirons S au lieu de S_z.

il résulte que, pour que Π soit minimum, sous les conditions (1), il est *suffisant* que Π_1 soit minimum sous ces conditions, et *nécessaire* que Π_1 soit minimum sous les conditions $P_x = 0$ et $P_y = 0$. Mais, d'autre part, on s'assure facilement que, si pour la figure d'équilibre considérée les conditions

$$S_z > S_x \quad \text{et} \quad S_z > S_y,$$

sont remplies (ce qui est nécessaire, comme nous savons, pour la possibilité du minimum de Π ou Π_1), Π_1 ne peut être minimum sous les conditions $P_x = 0$ et $P_y = 0$, ne l'étant pas sans ces conditions-là. Pour s'en convaincre, il suffit seulement de remarquer que l'on peut passer de chaque figure d'équilibre à toute autre figure du liquide, satisfaisant aux conditions (1), au moyen des deux procédés suivants : 1° déformation de la surface du liquide sous les conditions $P_x = 0$ et $P_y = 0$; et 2° rotation de toute la masse liquide, comme un corps solide, autour d'un axe perpendiculaire à l'axe des z.

En vertu de ce que l'on vient de démontrer, dans tous les cas où ne sera donnée aucune dépendance entre la déformation de la surface du liquide sous les conditions $P_x = 0$ et $P_y = 0$ et sa rotation autour d'un axe perpendiculaire à l'axe des z, la recherche des conditions de minimum de Π sera équivalente à celle de minimum de Π_1 [1].

Nous finissons par là les raisonnements généraux et nous arrivons à l'étude de la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre. Nous commencerons par le cas le plus simple, celui de la sphère considérée comme figure d'équilibre. Bien que, dans ce cas, le problème ne présente rien de nouveau, et qu'il ne soit d'ailleurs qu'un cas particulier du problème de la stabilité des ellipsoïdes de révolution, il n'est pas moins opportun de commencer par le résoudre d'une manière indépendante, en vue de montrer comment le problème se complique, quand on passe de la sphère aux ellipsoïdes de révolution, et de ces derniers aux ellipsoïdes à trois axes.

CHAPITRE II.

LA STABILITÉ DE LA SPHÈRE.

9. Le seul cas connu jusqu'à présent, dans lequel un liquide, sous l'action des attractions mutuelles entre ses éléments, peut se trouver en équilibre, est celui

[1] En utilisant cette remarque, on pourrait simplifier considérablement la démonstration du théorème fondamental.

où il conserve la figure d'une sphère. Examinons la stabilité de cette figure d'équilibre.

Soit R le rayon de la sphère.

Comme dans le cas considéré $\omega = 0$, et par conséquent

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n} = \tfrac{4}{3}\pi f \rho R,$$

la formule (27) se réduit à la suivante

$$(1) \qquad \delta^2 \Pi = f\rho \left[\tfrac{4}{3}\pi R \int (\delta n)^2 \, ds - \int\int \frac{\delta n \, \delta n' \, ds \, ds'}{r} \right].$$

Introduisons, pour les points de la surface de la sphère, les coordonnées sphériques, en posant

$$x = R \sin\theta \cos\psi, \qquad y = R \sin\theta \sin\psi, \qquad z = R \cos\theta.$$

En considérant ensuite δn comme une fonction de θ et ψ, supposons-la telle que l'on ait le développement

$$\delta n = \sum_{m=0}^{m=\infty} Y_m(\theta, \psi),$$

où $Y_m(\theta, \psi)$ est une fonction sphérique de θ et ψ d'ordre m, la série du second membre étant uniformément convergente pour toutes les valeurs de θ comprises entre les limites 0 et π, et pour toutes les valeurs de ψ comprises entre 0 et 2π (1).

Or, en tenant compte des conditions (23) et (24), on trouve

$$Y_0(\theta, \psi) = 0 \qquad \text{et} \qquad Y_1(\theta, \psi) = 0.$$

---

(1) C'est une restriction dont on peut aujourd'hui s'affranchir; car, d'après une proposition générale sur les fonctions sphériques que l'auteur a obtenue il y a sept ans, la formule définitive, celle (2), si l'on entend par les Y_m leurs expressions connues au moyen des intégrales définies renfermant la fonction δn, ne dépend nullement de la possibilité du développement de cette fonction en une série de la forme considérée. Pour la validité de cette formule, il suffit que δn soit une fonction intégrable sur la surface de la sphère. La même remarque s'applique à des formules analogues que l'on rencontrera plus loin, dans l'étude de la stabilité des ellipsoïdes. Pour ce qui concerne les détails, nous renverrons au Mémoire de M. Stekloff : *Sur certaines égalités générales communes à plusieurs séries de fonctions employées dans l'Analyse* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, 8e série, t. XV). L'avant-dernier numéro de ce Mémoire est consacré précisément au problème dont il s'agit ici. L.

Nous aurons donc

$$\delta n = \sum_{m=2}^{m=\infty} \mathrm{Y}_m(\theta, \psi),$$

et à l'aide de cette expression de δn, nous trouvons

$$\int (\delta n)^2 \, ds = \sum_{m=2}^{m=\infty} \int (\mathrm{Y}_m)^2 \, ds.$$

Si nous nous servons ensuite de la formule connue

$$\int \frac{\mathrm{Y}_m(\theta', \psi')\, ds'}{r} = \frac{4\pi \mathrm{R}}{2m+1} \mathrm{Y}_m(\theta, \psi),$$

nous parviendrons à celle-ci :

$$\int\int \frac{\delta n \, \delta n' \, ds \, ds'}{r} = 4\pi \mathrm{R} \sum_{m=2}^{m=\infty} \frac{1}{2m+1} \int (\mathrm{Y}_m)^2 \, ds.$$

Par suite, la formule (1) prend finalement la forme suivante :

$$\delta^2 \Pi = \frac{4}{3}\pi f \rho \mathrm{R} \sum_{m=2}^{m=\infty} \frac{2m-2}{2m+1} \int (\mathrm{Y}_m)^2 \, ds. \tag{2}$$

Or cette expression ne peut prendre de valeurs négatives et ne peut évidemment s'annuler, si tous les δn ne sont pas simultanément nuls.

Nous voyons donc que *la sphère est une figure d'équilibre stable* [1].

---

[1] Ce résultat a été trouvé, entre autres, par A. Giesen, dans son Mémoire *Ueber die Stabilität des Gleichgewichtes einer nur der Gravitation unterworfenen Flüssigkeit*, inséré dans le *Jahresbericht über die höhere Schule in Opladen* de 1872-1873. Il l'obtient comme cas particulier de la solution du problème de la stabilité de l'équilibre d'un liquide sur un noyau solide de forme sphérique.

CHAPITRE III.

LA STABILITÉ DES ELLIPSOIDES DE RÉVOLUTION.

10. C'est Newton qui énonça, dans ses *Philosophiae naturalis principia mathematica,* le théorème qu'un liquide animé d'un mouvement de rotation, dont les molécules s'attirent réciproquement en raison inverse du carré des distances, peut conserver la forme d'un ellipsoïde de révolution. Ce théorème fut ensuite démontré par Clairaut (1) et par Maclaurin (2). Mais l'étude détaillée de ce cas d'équilibre n'a été faite que par Laplace (3), et ensuite par Meyer (4). Les résultats de ces recherches sont, comme on sait, les suivants :

Les ellipsoïdes de révolution allongés ne peuvent être des figures d'équilibre. Au contraire, tout ellipsoïde de révolution planétaire peut être une figure d'équilibre d'un liquide tournant autour de son axe de révolution. D'ailleurs, à chaque moment des quantités de mouvement correspond toujours un ellipsoïde de révolution et un seul. D'autre part, à toute vitesse angulaire inférieure à une certaine limite $\sqrt{2\pi f\rho}\,\sqrt{0,2246\ldots}$, correspondent deux ellipsoïdes, l'excentricité de l'un d'eux étant inférieure, et l'excentricité de l'autre supérieure à 0,93.... Quand la vitesse angulaire est égale à cette limite, les deux ellipsoïdes se confondent, et, pour des vitesses angulaires supérieures, les figures ellipsoïdales d'équilibre ne sont pas possibles. Si l'on fait croître le moment des quantités de mouvement de zéro à l'infini, l'excentricité croît de zéro à 1, et la vitesse angulaire d'abord croît de zéro à son maximum, puis diminue pour redevenir nulle.

Comme nous verrons plus loin, l'excentricité 0,8126... aura pour nous une importance particulière; c'est pour elle, comme l'on sait, que les ellipsoïdes de révolution passent aux figures ellipsoïdales d'équilibre à trois axes inégaux découvertes par Jacobi.

Nous prendrons l'équation de l'ellipsoïde sous la forme

$$\frac{x^2+y^2}{\lambda^2+1}+\frac{z^2}{\lambda^2}=a^2,$$

---

(1) *Phil. Trans.,* 1737. — Clairaut, *Théorie de la figure de la terre.* Paris, 1743 ou 1808.

(2) Maclaurin, *Traité des fluxions,* liv. I, chap. XIV.

(3) Laplace, *Traité de Mécanique céleste,* liv. III, chap. III.

(4) C.-O. Meyer, *De Aequilibrii formis Ellipsoidicis* [*Crelle's J.*, Bd. 24 (1842)].

en supposant λ et a positifs. Alors la condition pour que cet ellipsoïde soit une figure d'équilibre, correspondant à une vitesse angulaire ω ou à un moment des quantités de mouvement $J\rho$, s'exprimera de la manière suivante

$$(1)\qquad \frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = \frac{25\pi^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{4}{3}}}\frac{J^2}{f\rho Q^{\frac{10}{3}}}\frac{\lambda^{\frac{4}{3}}}{(\lambda^2+1)^{\frac{2}{3}}} = (3\lambda^2+1)\lambda \operatorname{arc\,cot}\lambda - 3\lambda^2,$$

où $\operatorname{arc\,cot}\lambda$ est supposé ne pas sortir des limites 0 et $\frac{\pi}{2}$, ce que nous supposerons toujours dans la suite, en nous servant du symbole $\operatorname{arc\,cot}\lambda$ pour λ positif. L'étude de l'équation (1) conduit à tous les résultats énoncés plus haut.

Avant de passer à la recherche de la stabilité de ces ellipsoïdes, nous croyons nécessaire d'attirer l'attention sur certaines propriétés des fonctions sphériques, dont nous nous servirons.

11. Nous nous servirons des notations $P_k^m(x)$, $Q_k^m(x)$ de Heine, pour ce qu'il appelle *Zugeordnete Kugelfunctionen* de première et de seconde espèce. Mais nous aurons aussi affaire à des fonctions à argument imaginaire de la forme $x = i\lambda$, où $i = \sqrt{-1}$, et, pour plus de commodité, nous introduirons encore les notations :

$$(-i)^m P_k^m(i\lambda) = p_k^m(\lambda) \qquad \text{et} \qquad (i)^{m+1} Q_k^m(i\lambda) = q_k^m(\lambda),$$

en faisant des conventions relatives aux signes, comme on le verra d'après les formules citées ci-dessous.

Avant tout, nous allons indiquer quelques expressions de ces fonctions.

En supposant toujours $k \leqq m$, nous pouvons les exprimer à l'aide d'intégrales définies de la manière suivante :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} p_k^m(\lambda) &= \frac{2^m}{\pi}\frac{\Gamma(m+k+1)\Gamma(m-k+1)}{\Gamma(2m+1)}\int_0^\pi (\sqrt{\lambda^2+1}\cos\varphi + \lambda)^m \cos k\varphi\, d\varphi \ \text{[1]},\\ q_k^m(\lambda) &= \frac{1}{2^m}\frac{\Gamma(2m+2)}{[\Gamma(m+1)]^2}\int_0^{\operatorname{arc\,cot}\lambda} (\sqrt{\lambda^2+1}\cos\varphi - \lambda)^m \cos k\varphi\, d\varphi \quad \text{[2]}.\end{aligned}\right.$$

Puis, d'après la formule connue,

$$(3)\qquad P_k^m(x) = \frac{\Gamma(m-k+1)}{\Gamma(2m+1)}(x^2-1)^{\frac{k}{2}}\frac{d^{m+k}(x^2-1)^m}{dx^{m+k}} \quad \text{[3]},$$

---

[1] HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen*, 1. Bd. (2e édition, 1878), p. 207.

[2] *Ibid.*, p. 224.

[3] *Ibid.*, p. 202, 206.

nous aurons

$$p_k^m(\lambda) = \frac{\Gamma(m-k+1)}{\Gamma(2m+1)}(\lambda^2+1)^{\frac{k}{2}}\frac{d^{m+k}(\lambda^2+1)^m}{d\lambda^{m+k}}. \tag{4}$$

En remarquant ensuite que les fonctions $p_k^m(\lambda)$ et $q_k^m(\lambda)$ sont des solutions particulières de l'équation différentielle

$$\frac{d}{d\lambda}\left[(\lambda^2+1)\frac{du}{d\lambda}\right] - \left[m(m+1) - \frac{k^2}{\lambda^2+1}\right]u = 0 \quad (^1), \tag{5}$$

nous obtenons, pour la fonction $q_k^m(\lambda)$, l'expression suivante :

$$q_k^m(\lambda) = (2m+1)\,p_k^m(\lambda)\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{[p_k^m(\lambda)]^2(\lambda^2+1)}. \tag{6}$$

Nous appellerons l'attention sur cette circonstance qu'indiquent les formules (4) et (6) que, pour $\lambda > 0$, ce que nous supposerons partout dans la suite, les fonctions $p_k^m(\lambda)$ et $q_k^m(\lambda)$ conservent des valeurs positives, la première ne s'annulant, en outre, jamais et la seconde s'annulant seulement pour $\lambda = \infty$.

Nous indiquerons encore les expressions des fonctions p_k^m et q_k^m sous forme de séries hypergéométriques. Si nous introduisons l'excentricité de l'ellipsoïde (λ),

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}},$$

nous obtiendrons

$$p_k^m(\lambda) = \varepsilon^{-m}\,F\left(-\frac{m+k}{2},\ -\frac{m-k}{2},\ -\frac{2m-1}{2},\ \varepsilon^2\right) \quad (^2),$$

$$q_k^m(\lambda) = \varepsilon^{m+1}\,F\left(\frac{m+k+1}{2},\ \frac{m-k+1}{2},\ \frac{2m+3}{2},\ \varepsilon^2\right).$$

On peut tirer de là le produit $p_k^m q_k^m$ sous forme de série hypergéométrique du second ordre. Pour cela, nous nous servirons d'un résultat des recherches de Clausen [3], qui a démontré que, si $\gamma = \alpha + \beta + \frac{1}{2}$, $\alpha + \alpha' = \frac{1}{2}$, $\beta + \beta' = \frac{1}{2}$ et $\gamma + \gamma' = 2$, on a

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)\,F(\alpha', \beta', \gamma', x) = F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} + \alpha - \beta, \tfrac{1}{2} - \alpha + \beta; \gamma, 2 - \gamma, x).$$

Nous trouvons ainsi

$$p_k^m(\lambda)\,q_k^m(\lambda) = \varepsilon\,F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} - k, \tfrac{1}{2} + k; \tfrac{1}{2} - m, \tfrac{3}{2} + m, \varepsilon^2). \tag{7}$$

---

(1) HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen*, 1. Bd. (2e édition, 1878), p. 216.

(2) *Ibid.*, p. 218.

(3) CLAUSEN, *Beitrag zur Theorie der Reihen* (*Crelle's, J.*, Bd. III).

Si nous introduisons, à la place des variables x, y, z, les variables λ, θ et ψ, à l'aide des équations

$$(8) \qquad x = a\sqrt{\lambda^2+1}\sin\theta\cos\psi, \qquad y = a\sqrt{\lambda^2+1}\sin\theta\sin\psi, \qquad z = a\lambda\cos\theta$$

(nous supposerons toujours que θ est compris entre les limites o et π, et ψ entre o et 2π), l'équation de Laplace

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

se transforme dans la suivante

$$(10) \qquad \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(\lambda^2+1)\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right] + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{\lambda^2+\cos^2\theta}{(\lambda^2+1)\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} = 0.$$

En tenant compte de l'équation différentielle connue des fonctions sphériques, on démontre facilement que l'équation (10) est satisfaite par les fonctions

$$(11) \qquad \begin{cases} p_k^m(\lambda)\,[c_k^m \mathrm{C}_k^m(\theta,\psi) + s_k^m \mathrm{S}_k^m(\theta,\psi)], \\ q_k^m(\lambda)\,[c_k^m \mathrm{C}_k^m(\theta,\psi) + s_k^m \mathrm{S}_k^m(\theta,\psi)], \end{cases}$$

où c_k^m et s_k^m sont des constantes et $\mathrm{C}_k^m(\theta,\psi)$, $\mathrm{S}_k^m(\theta,\psi)$ les notations abrégées, dont nous nous servirons dans la suite pour désigner les fonctions

$$\mathrm{P}_k^m(\cos\theta)\cos k\psi, \quad \mathrm{P}_k^m(\cos\theta)\sin k\psi.$$

Nous voyons ainsi que les transformées des fonctions (11) pour les variables x, y, z satisfont à l'équation (9).

On peut démontrer que la transformée de la première des fonctions (11) est une fonction entière de degré m de x, y, z. Pour cela, il suffit évidemment de montrer que la transformée de l'expression

$$\mathrm{F} = p_k^m(\lambda)\,[\mathrm{C}_k^m(\theta,\psi) + i\,\mathrm{S}_k^m(\theta,\psi)] = p_k^m(\lambda)\,\mathrm{P}_k^m(\cos\theta)\,(\cos\psi + i\sin\psi)^k$$

est une telle fonction. Or, en posant $\cos\theta = i\mu$, nous trouvons, d'après les formules (3), (4) et (8),

$$\mathrm{F} = \pm\left[\frac{\Gamma(m-k+1)}{\Gamma(2m+1)}\right]^2 \frac{i^m}{a^k}(x+iy)^k \frac{d^{m+k}(\lambda^2+1)^m}{d\lambda^{m+k}} \frac{d^{m+k}(\mu^2+1)^m}{d\mu^{m+k}}.$$

En supposant d'abord que $m+k$ est un nombre pair, on voit que

$$(12) \qquad \frac{d^{m+k}(\lambda^2+1)^m}{d\lambda^{m+k}} \frac{d^{m+k}(\mu^2+1)^m}{d\mu^{m+k}}$$

est une fonction entière symétrique de degré $m-k$ de λ^2 et μ^2, racines de l'équation quadratique en ξ

$$\frac{x^2+y^2}{\xi+1}+\frac{z^2}{\xi}=a^2,$$

et, en outre, une fonction entière de degré $\frac{m-k}{2}$ de λ^2; par conséquent, d'après un théorème connu d'Algèbre, une fonction entière de degré $\frac{m-k}{2}$ de x^2+y^2 et z^2. Si, au contraire, $m+k$ est un nombre impair, l'expression (12) est égale au produit de $\lambda\mu=\frac{z}{ai}$ par une fonction entière symétrique de degré $m-k-1$ de λ^2 et μ^2, et de degré $\frac{m-k-1}{2}$ par rapport à λ^2; ce sera donc le produit de z par une fonction entière de degré $\frac{m-k-1}{2}$ en x^2+y^2 et z^2.

Dans les deux cas, on trouve que F est une fonction entière de degré m de x, y, z, et, par suite, la proposition est démontrée.

En considérant x, y, z comme des coordonnées rectangulaires, et en nous basant sur ce qui vient d'être démontré, nous pouvons établir les formules suivantes :

$$(13)\qquad \int\frac{\mathrm{H}_k^m(\theta',\psi')\,ds'}{\sqrt{\lambda_0^2+\cos^2\theta'}\,r}=\frac{4\pi a\sqrt{\lambda_0^2+1}}{2m+1}\,\mathrm{H}_k^m(\theta,\psi)\begin{cases} q_k^m(\lambda_0)\,p_k^m(\lambda), & \lambda\leqq\lambda_0,\\ p_k^m(\lambda_0)\,q_k^m(\lambda), & \lambda\geqq\lambda_0,\end{cases}$$

où l'intégration s'étend à toute la surface de l'ellipsoïde auquel correspond $\lambda=\lambda_0$, et où l'on a posé

$$(14)\qquad \mathrm{H}_k^m(\theta,\psi)=c_k^m\,\mathrm{C}_k^m(\theta,\psi)+s_k^m\,\mathrm{S}_k^m(\theta,\psi).$$

Nous remarquons, pour cela, que le premier membre de l'égalité (13) est la fonction potentielle d'une couche répandue sur la surface de l'ellipsoïde (λ_0) avec la densité

$$\frac{\mathrm{H}_k^m(\theta,\psi)}{\sqrt{\lambda_0^2+\cos^2\theta}}.$$

Par suite, d'après un théorème bien connu, il nous suffit de démontrer que le second membre de l'égalité (13), que nous désignerons par u, satisfait aux conditions suivantes :

1° u reste partout une fonction continue et uniforme de x, y, z;

2° Tant que le point (x, y, z) ne se trouve pas sur la surface de l'ellipsoïde (λ_0), $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ sont des fonctions continues et uniformes de x, y, z, et u satisfait à l'équation de Laplace;

3° Au passage à travers cette surface, $\frac{\partial u}{\partial n}$ éprouve une discontinuité déterminée par l'équation

$$\frac{\partial u_i}{\partial n_i} + \frac{\partial u_e}{\partial n_e} = -\frac{4\pi \mathrm{H}_k^m(\theta, \psi)}{\sqrt{\lambda_0^2 + \cos^2\theta}},$$

dans laquelle n_i et n_e sont les directions de la normale intérieure et de la normale extérieure, et u_i, u_e désignent les expressions de u correspondant respectivement à $\lambda < \lambda_0$ et $\lambda > \lambda_0$;

4° $xu, yu, zu, x^2\frac{\partial u}{\partial x}, y^2\frac{\partial u}{\partial y}, z^2\frac{\partial u}{\partial z}$ restent partout finis.

D'après ce qui a été démontré, nous concluons tout de suite que, pour $\lambda < \lambda_0$, les conditions 1°, 2° et 4° sont satisfaites, et qu'elles le sont aussi pour $\lambda > \lambda_0$; ceci résulte de la formule (6) qui montre qu'en premier lieu les fonctions

$$\lambda q_k^m(\lambda) \quad \text{et} \quad \lambda^2 \frac{d\, q_k^m(\lambda)}{d\lambda}$$

tendent, pour $\lambda = \infty$, vers des limites déterminées, et qu'en second lieu u_e est le produit d'une fonction entière de x, y, z par la fonction

$$\int_\lambda^\infty \frac{d\alpha}{[p_k^m(\alpha)]^2(\alpha^2+1)},$$

laquelle, aussi bien que ses dérivées par rapport à x, y, z, sont des fonctions continues et uniformes de x, y, z.

Enfin, à l'aide de la même formule (6), on démontre facilement que u satisfait à la condition 3°.

Les formules (13) ne présentent, d'ailleurs, rien de nouveau; on peut trouver, par exemple, dans Liouville, des formules semblables, dans lesquelles entrent des fonctions sphériques à arguments réels [1].

Tout ce qui a été exposé jusqu'ici nous servira pour obtenir l'expression définitive de la variation seconde de Π_1, et nous démontrerons, dans le numéro suivant, les théorèmes sur lesquels sera basée la recherche du signe de cette variation.

12. Nous allons démontrer maintenant les propriétés suivantes des fonctions $p_k^m(\lambda)$ et $q_k^m(\lambda)$.

Lemme. — *Si, pour $n \geqq m$, les nombres $n - s$ et $m - k$ sont de même parité,*

---

(1) Liouville, *Lettres sur diverses questions d'Analyse et de Physique mathématique* (deuxième Lettre) (*J. de Liouville*, t. XI, 1846, p. 261).

et si, en outre, $n^2+n+k^2 \geqq m^2+m+s^2$, *le rapport*

$$\frac{p_s^n(\lambda)}{p_k^m(\lambda)}$$

croît, quand λ *croît.*

Il se comprend de soi-même que le cas de $n=m$ et $s=k$ doit être exclu.

Pour la démonstration, remarquons, en premier lieu, que le signe de la dérivée

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{p_s^n(\lambda)}{p_k^m(\lambda)}$$

est le même que celui de l'expression

$$p_k^m(\lambda)\frac{d\,p_s^n(\lambda)}{d\lambda} - p_s^n(\lambda)\frac{d\,p_k^m(\lambda)}{d\lambda},$$

et, en second lieu, que cette expression s'annule toujours pour $\lambda = 0$, aussitôt que $n-s$ et $m-k$ sont des nombres de même parité. Or, par suite de cette dernière circonstance, l'équation (5) conduit à l'égalité suivante

$$\begin{aligned}(\lambda^2+1)&\left[p_k^m(\lambda)\frac{d\,p_s^n(\lambda)}{d\lambda} - p_s^n(\lambda)\frac{d\,p_k^m(\lambda)}{d\lambda}\right]\\ &= \int_0^\lambda\left[(n-m)(n+m+1)+\frac{k^2-s^2}{\lambda^2+1}\right]p_s^n(\lambda)\,p_k^m(\lambda)\,d\lambda,\end{aligned}$$

dont le second membre est positif dans les conditions énoncées.

Notre lemme est ainsi démontré.

Corollaire I. — Si $k-s$ est un nombre pair positif, le rapport $\dfrac{p_s^m(\lambda)}{p_k^m(\lambda)}$ croît, quand λ croît.

Corollaire II. — Si $n-m$ est un nombre pair positif, le rapport $\dfrac{p_k^n(\lambda)}{p_k^m(\lambda)}$ croît, quand λ croît.

Corollaire III. — Pour $n>m$, le rapport $\dfrac{p_{n-\sigma}^n(\lambda)}{p_{m-\sigma}^m(\lambda)}$ croît, quand λ croît.

D'après cela, nous pouvons démontrer les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Le produit* $\dfrac{1}{2m+1}p_k^m(\lambda)\,q_k^m(\lambda)$ *croît, quand k croît de deux unités, et décroît quand m croît de deux unités.*

Théorème II. — *Le produit* $\dfrac{1}{2m+1}p_{m-\sigma}^m(\lambda)\,q_{m-\sigma}^m(\lambda)$ *décroît, quand m croît.*

Il suffit, pour démontrer ces théorèmes, de remarquer que la formule (6) conduit à l'égalité suivante :

$$(15)\qquad \frac{1}{2m+1} p_k^m(\lambda)\, q_k^m(\lambda) - \frac{1}{2n+1} p_s^n(\lambda)\, q_s^n(\lambda)$$
$$= \int_\lambda^\infty \left[\frac{p_k^m(\lambda)}{p_s^n(\alpha)}\right]^2 \left\{\left[\frac{p_s^n(\alpha)}{p_k^m(\alpha)}\right]^2 - \left[\frac{p_s^n(\lambda)}{p_k^m(\lambda)}\right]^2\right\} \frac{d\alpha}{\alpha^2+1},$$

car cette égalité, en vertu des corollaires I et II de notre lemme, conduit immédiatement au théorème I et, en vertu du corollaire III, au théorème II.

Nous appellerons encore l'attention sur le théorème suivant :

Théorème III. — *Si $n - s$ est un nombre impair, pour $n > 1$, la différence*

$$\tfrac{1}{3} p_0^1(\lambda)\, q_0^1(\lambda) - \frac{1}{2n+1} p_s^n(\lambda)\, q_s^n(\lambda)$$

reste toujours positive (en ne s'annulant que pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$).

En remarquant que toutes les conditions qui ont été énoncées pour formuler le lemme sont satisfaites dans le cas considéré, l'égalité (15) démontre ce théorème.

Revenons maintenant à notre problème.

13. Pour les points de la surface de l'ellipsoïde (λ), qui représente une figure d'équilibre donnée, introduisons les coordonnées θ et ψ à l'aide des équations (8).

Avec ces coordonnées, l'élément de surface de l'ellipsoïde s'exprime, comme on sait, de la manière suivante :

$$ds = a^2 \sqrt{\lambda^2+1}\, \sqrt{\lambda^2+\cos^2\theta}\, \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Donc, si l'on représente l'expression $\sqrt{\lambda^2+\cos^2\theta}\,\delta n$ sous forme de série de fonctions sphériques de θ et ψ, pour que les conditions (23) et (24) du Chapitre I puissent être satisfaites, cette série ne doit pas contenir de fonction sphérique d'ordre nul, ni du premier ordre.

Posons, par suite,

$$(16)\qquad \begin{cases} \sqrt{\lambda^2+\cos^2\theta}\,\delta n = \displaystyle\sum_{m=2}^{m=\infty} \mathrm{Y}_m(\theta,\psi), \\ \mathrm{Y}_m(\theta,\psi) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=m} \mathrm{H}_k^m(\theta,\psi), \end{cases}$$

où $\mathrm{H}_k^m(\theta,\psi)$ est défini par la formule (14).

On sait qu'en vertu de la condition d'équilibre

$$\frac{\partial U}{\partial n} = A\sqrt{\lambda^2 + \cos^2\theta},$$

où A est une quantité ne dépendant ni de θ, ni de ψ. Pour la déterminer, nous poserons $\theta = 0$, par suite de quoi $\frac{\partial U}{\partial n}$ deviendra l'accélération de la pesanteur observée sur la surface de l'ellipsoïde au pôle. Cette accélération étant, comme on sait, égale à

$$4\pi f\rho a(\lambda^2+1)\lambda(1-\lambda \operatorname{arc} \cot\lambda),$$

nous trouvons ainsi

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 4\pi f\rho a\sqrt{\lambda^2+1}\,\lambda(1-\lambda \operatorname{arc} \cot\lambda)\sqrt{\lambda^2+\cos^2\theta}.$$

Nous obtenons par suite, d'après les formules (16),

$$\int \frac{\partial U}{\partial n}(\delta n)^2 ds = 4\pi f\rho a^3(\lambda^2+1)\lambda(1-\lambda \operatorname{arc} \cot\lambda)\sum_{m=2}^{m=\infty}\sum_{k=0}^{k=m}\int (\mathrm{H}_k^m)^2 d\sigma,$$

où $d\sigma = \sin\theta\, d\theta\, d\psi$ est l'élément de surface de la sphère de rayon 1, sur laquelle est effectuée l'intégration.

Puis, d'après les formules (16) et (13), nous trouvons

$$\int\int \frac{\delta n\, \delta n'\, ds\, ds'}{r} = 4\pi a^3(\lambda^2+1)\sum_{m=2}^{m=\infty}\sum_{k=0}^{k=m}\frac{p_k^m(\lambda)\, q_k^m(\lambda)}{2m+1}\int (\mathrm{H}_k^m)^2 d\sigma.$$

A l'aide de ces expressions, les formules (27) et (39) du Chapitre I donnent

$$\delta^2 \Pi_1 = 4\pi f\rho a^3(\lambda^2+1)\sum_{m=2}^{m=\infty}\sum_{k=0}^{k=m}\mathrm{T}_k^m\int (\mathrm{H}_k^m)^2 d\sigma + \Omega, \tag{17}$$

où

$$\mathrm{T}_k^m = \lambda(1-\lambda \operatorname{arc} \cot\lambda) - \frac{p_k^m(\lambda)\, q_k^m(\lambda)}{2m+1}, \tag{18}$$

ce qui, comme on le voit d'après les formules (2), peut être également présenté sous la forme

$$\mathrm{T}_k^m = \frac{p_0^1(\lambda)\, q_0^1(\lambda)}{3} - \frac{p_k^m(\lambda)\, q_k^m(\lambda)}{2m+1}. \tag{19}$$

En remarquant en outre que

$$\int (x^2+y^2)\,\delta n\, ds = -\frac{16\pi}{45} a^4 (\lambda^2+1)^{\frac{3}{2}} c_0^2$$

et

$$S = \tfrac{8}{15}\pi a^5 (\lambda^2+1)^2 \lambda,$$

nous trouvons, d'après la formule (28) du Chapitre I,

$$(20) \qquad \Omega = \frac{64\pi^2}{45} f\rho a^3 (\lambda^2+1) \frac{1}{3} \frac{\omega^2}{2\pi f\rho\lambda} (c_0^2)^2.$$

La formule (17) montre que le signe de la variation seconde de Π_1 dépend essentiellement des signes des expressions T_k^m, à la recherche desquels nous devons par conséquent en venir maintenant.

14. Comme les expressions des T_k^m renfermées dans la formule (17) correspondent à $m>1$, on voit, par la formule (19), que, pour k et m de parité différente, tous ces T_k^m représentent, d'après le Théorème III, des quantités qui restent toujours positives. Par conséquent, en supposant dans la suite $m>1$, nous supposerons que k et m sont des nombres de même parité.

Les Théorèmes I et II conduisent aux inégalités suivantes

$$T_k^m > T_{k+2}^m \qquad \text{et} \qquad T_m^m \geqq T_2^2,$$

où le signe de l'égalité ne se rapporte qu'au cas de $m=2$. On voit par là que tant que $T_2^2 \geqq 0$, tous les T_k^m conservent des valeurs positives. Tout aboutit ainsi à la recherche de l'expression de T_2^2.

Nous trouvons facilement, par les formules (2),

$$(21) \qquad T_2^2 = \tfrac{1}{8}[\lambda(13+3\lambda^2) - (3+14\lambda^2+3\lambda^4)\,\text{arc}\cot\lambda].$$

Pour obtenir l'allure générale de cette fonction, posons

$$u = \frac{8T_2^2}{3+14\lambda^2+3\lambda^4} = \frac{\lambda(13+3\lambda^2)}{3+14\lambda^2+3\lambda^4} - \text{arc}\cot\lambda,$$

d'où

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{16(3+\lambda^2)(1-\lambda^2)}{(1+\lambda^2)(3+14\lambda^2+3\lambda^4)^2}.$$

On voit par là que u croît quand λ varie de 0 à 1, que cette fonction atteint son maximum pour $\lambda=1$, et qu'elle diminue constamment par un accroissement ultérieur de λ. D'ailleurs, pour $\lambda = 0$ et pour $\lambda = \infty$, on a respectivement

$$u = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad u = 0.$$

Tout ceci conduit à la conclusion que l'équation

$$T_2^2 = 0 \tag{22}$$

n'a qu'une seule racine positive, qui est inférieure à 1; quand λ est supérieur à cette racine, $T_2^2 > 0$, et quand λ lui est inférieur, $T_2^2 < 0$.

Il est à remarquer que l'équation (22) est une équation connue, qui définit un ellipsoïde de révolution avec lequel se confond l'ellipsoïde à trois axes de Jacobi, pour la limite supérieure de la vitesse angulaire. L'excentricité de cet ellipsoïde est égale, comme on sait, à 0,8126..., et la racine de l'équation (22) est 0,717... (¹).

Nous voyons ainsi que tant que $\lambda > 0{,}717\ldots$, la variation seconde de Π_1 reste positive, et ne peut s'annuler si tous les δn ne sont pas nuls à la fois.

Nous obtenons donc le résultat suivant :

Dans le cas général (c'est-à-dire si l'on n'impose aucune condition pour les troubles), les ellipsoïdes de révolution sont des figures d'équilibre stables, tant que leurs excentricités sont inférieures à celle de l'ellipsoïde de révolution de Jacobi, c'est-à-dire à 0,8126....

En ce qui concerne ce dernier ellipsoïde de révolution, il est nécessaire, pour l'étude de sa stabilité, de recourir aux variations d'ordres supérieurs de Π (*voir* Chap. VI).

15. A chaque couple de valeurs de m et k correspond un système de déplacements dépendant de deux constantes arbitraires c_k^m et s_k^m si $k > 0$, et d'une seule si $k = 0$. Si l'on parvenait à exclure ceux de ces déplacements qui correspondent à $k = m$, $k = m - 2$, ..., $k = m - 2l$, ou bien ceux qui correspondent à $m = 2$, $m = 3$, ..., $m = M$, les limites des ellipsoïdes stables s'élargiraient, et nous verrons en effet plus loin qu'on peut exclure certains systèmes de déplacements. La question se pose d'ailleurs de savoir s'il est possible, par élimination successive d'un nombre fini de systèmes de déplacements, d'arriver à ce que tous les ellipsoïdes de révolution deviennent des figures d'équilibre stables.

(¹) Meyer trouve $\frac{1}{\lambda} = 1{,}3946$ (*Crelle's J.*, Bd. XXIV). Du reste la substitution dans l'expression (21) fait voir que $0{,}717 < \lambda < 0{,}7171$. Il faut remarquer qu'en s'arrêtant, dans la valeur de l'excentricité, à la quatrième décimale, on doit prendre $\varepsilon = 0{,}8127$.

Dans cette vue, nous en venons maintenant à une étude plus détaillée des expressions que nous avons désignées par T_k^m. Cette étude est également importante sous cet autre rapport, que les expressions T_k^m se rencontrent dans le problème des figures d'équilibre différant infiniment peu des formes ellipsoïdales, question qui présente un très grand intérêt, non seulement à cause de son importance physique, mais aussi en raison de la difficulté de son analyse ([1]).

Nous avons vu que la fonction T_2^2 s'annule seulement pour une seule valeur finie positive de λ. Nous allons montrer maintenant que la même chose a lieu pour chaque T_k^m, si $m > 1$ et si $m - k$ est un nombre pair.

Nous commencerons par la recherche de T_m^m, que l'on peut effectuer par le même procédé qui a servi à la recherche de T_2^2.

Posons

$$(23)\qquad t = \frac{p_0^1(\lambda)\,q_0^1(\lambda)}{3} = \lambda(1 - \lambda \operatorname{arc}\cot\lambda) = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\left(1 - \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\operatorname{arc}\sin\varepsilon\right),$$

où $\operatorname{arc}\sin\varepsilon$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et introduisons l'abréviation suivante :

$$a(a+1)\ldots(a+m-1) = [a, m],$$

en convenant que $[a, 0]$ représente 1.

Nous trouvons par suite, d'après les formules (7) et (18),

$$T_m^m = t - \frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{[\frac{1}{2}, n]}{[1, n]}\,\frac{\varepsilon^{2n}}{n+m+\frac{1}{2}},$$

ce qui peut être présenté aussi sous la forme

$$(24)\qquad T_m^m = t - \varepsilon^{-2m}\int_0^{\varepsilon}\frac{x^{2m}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En posant maintenant

$$T_m^m = \varepsilon^{-2m}\,S_m,$$

([1]) Sous une forme particulière, cette question a été traitée par Legendre, qui a montré qu'un ellipsoïde de révolution très peu comprimé est la seule figure d'équilibre qui diffère très peu de la sphère. [*Voir* LEGENDRE, *Recherches sur la figure des Planètes* (Histoire de l'Académie royale des Sciences, An. MDCCLXXXIV.)] — Sous une autre forme particulière, se rapportant à la vitesse angulaire limite pour les ellipsoïdes, la question a été soulevée par Tchebychef. Bien qu'elle ait un lien très étroit avec le problème que nous étudions, il nous est néanmoins impossible d'entrer dans aucun détail à son sujet, parce que cela nous entraînerait trop loin.

nous obtenons

$$\frac{dS_m}{d\varepsilon} = 2m\varepsilon^{2m-3}\left(\frac{m-1}{m} - \varepsilon^2\right)\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \operatorname{arc\,sin}\varepsilon\right).$$

Comme la fonction

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \operatorname{arc\,sin}\varepsilon$$

reste positive pour toute valeur positive de ε ne dépassant pas 1, on voit par là que tant que ε croît de 0 à $\sqrt{\frac{m-1}{m}}$, la fonction S_m croît aussi; pour $\varepsilon = \sqrt{\frac{m-1}{m}}$, elle atteint son maximum, et, pour un accroissement ultérieur de ε jusqu'à 1, elle décroît constamment. En remarquant en outre que, pour $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = 1$, on a respectivement

$$S_m = 0 \qquad \text{et} \qquad S_m = -\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\frac{\pi}{2},$$

nous arrivons à la conclusion suivante : si T_m^m est considéré comme une fonction de ε, l'équation

$$T_m^m = 0 \tag{25}$$

a toujours une racine entre les limites $\sqrt{\frac{m-1}{m}}$ et 1, et, à part zéro, c'est sa racine unique entre 0 et 1. Tant que ε est compris entre 0 et cette racine, $T_m^m > 0$ et, quand ε est compris entre cette racine et 1, $T_m^m < 0$. Le théorème II conduit ensuite à la conclusion que cette racine est une fonction croissante de m, et l'on voit qu'elle a pour limite 1, pour $m = \infty$.

Si T_m^m est exprimé en fonction de λ, l'équation (25) n'a qu'une seule racine finie positive, qui est comprise entre 0 et $\frac{1}{\sqrt{m-1}}$; quand λ positif lui est inférieur, $T_m^m < 0$ et, quand λ fini lui est supérieur, $T_m^m > 0$. On voit que cela renferme, comme cas particulier, le résultat obtenu au n° **14** à l'égard de T_2^2.

Revenons maintenant à l'étude de l'expression générale de T_k^m.

En posant

$$\frac{[\frac{1}{2}-k, n][\frac{1}{2}+k, n]}{[\frac{1}{2}-m, n][\frac{1}{2}+m, n]} = \frac{[k-n+\frac{1}{2}, 2n]}{[m-n+\frac{1}{2}, 2n]} = \alpha_n, \tag{26}$$

nous trouvons, d'après la formule (7),

$$p_k^m(\lambda)\, q_k^m(\lambda) = \varepsilon \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2m+1}{2m+2n+1}\,\frac{[\frac{1}{2}, n]}{[1, n]}\,\alpha_n\varepsilon^{2n},$$

d'où, d'après la formule (19),

$$(27)\quad T_k^m = \varepsilon \left\{ \frac{2(m-1)}{3(2m+1)} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{[\frac{1}{2}, n]}{[1, n]} \left[\frac{2n-1}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{\alpha_n}{2n+2m+1} \right] \varepsilon^{2n} \right\}.$$

On peut montrer que α_n est une quantité qui ne dépasse pas 1 en valeur numérique et que, en outre,

$$\alpha_n \geqq -\frac{2n-1}{2n+1},$$

où le signe de l'égalité convient au cas de $m=1$ et $k=0$, ou au cas de $n=0$.

Nous devons pour cela considérer trois cas : 1° $n \leqq k$, 2° $k < n \leqq m$ et 3° $n > m$.

Dans le premier cas, la formule (26) donne

$$0 < \alpha_n \leqq 1,$$

où le signe de l'égalité ne peut avoir lieu que pour $k=m$.

Dans le second cas, on peut donner à la formule (26) la forme suivante :

$$\alpha_n = (-1)^{n-k} \frac{[\frac{1}{2}, n-k]}{[m-n+\frac{1}{2}, n-k]} \frac{[\frac{1}{2}, n+k]}{[m-k+\frac{1}{2}, n+k]},$$

d'où

$$(-1)^{n-k}\alpha_n > 0 \qquad \text{et} \qquad (-1)^{n-k}\alpha_n \leqq \frac{[\frac{1}{2}, n+k]}{[n-k+\frac{1}{2}, n+k]}.$$

Comme, dans le cas considéré, le second membre de la seconde inégalité est une fonction croissante de k, sa plus grande valeur pour $n-k$ positif et impair est $\frac{1}{4n-1}$, ce qui, pour $n>0$, représente une quantité positive, ne dépassant pas $\frac{2n-1}{2n+1}$. On a donc, dans ce cas,

$$-\frac{2n-1}{2n+1} \leqq \alpha_n < 1,$$

où le signe de l'égalité répond au cas où $m=n=1$, $k=0$.

Enfin, dans le troisième cas, en présentant la formule (26) sous la forme

$$\alpha_n = (-1)^{m-k} \frac{[n-m+\frac{1}{2}, m+k]}{[n-k+\frac{1}{2}, m+k]},$$

nous concluons

$$0 < (-1)^{m-k}\alpha_n \leqq 1$$

et

$$-\alpha_n \leqq \frac{n-m+\frac{1}{2}}{n+m-\frac{1}{2}},$$

où, sauf le cas de $m=0$,

$$\frac{n-m+\frac{1}{2}}{n+m-\frac{1}{2}} \leqq \frac{2n-1}{2n+1}.$$

Or, pour $m=0$, on a $k=0$ et par conséquent $\alpha_n=1$. Donc, dans ce troisième cas nous obtenons

$$-\frac{2n-1}{2n+1} \leqq \alpha_n \leqq 1,$$

où les signes d'égalité se rapportent, soit au cas de $m=1$, $k=0$, soit au cas de $k=m$.

La proposition est donc démontrée.

Nous concluons de là

$$\frac{2n-1}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{\alpha_n}{2n+2m+1} \geqq \frac{2n-1}{2n+1} \frac{2(m-1)}{(2n+3)(2n+2m+1)}.$$

Nous remarquons en outre que, pour $m=0$,

$$\frac{2n-1}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{\alpha_n}{2n+2m+1} = \frac{2}{2n+3}.$$

On voit par là que la somme figurant dans la formule (27) ne renferme point de termes négatifs. Par suite, $\frac{1}{\varepsilon} T_k^m$ est une fonction décroissante de ε. Mais, pour $\varepsilon=0$, elle devient $\frac{2(m-1)}{3(2m+1)}$, et pour $\varepsilon=1$ elle se réduit à $-\frac{p_k^m(0)\, q_k^m(0)}{2m+1}$, ce qui est une quantité négative, si $m-k$ est un nombre pair, et zéro, si $m-k$ est impair (¹).

Nous déduisons de là que, pour $m>1$ et $m-k$ pair, l'équation

$$T_k^m = 0$$

a toujours une racine différente de zéro comprise entre 0 et 1, et d'ailleurs une seule; que, pour ε compris entre zéro et cette racine, $T_k^m > 0$ et, pour ε compris entre cette racine et 1, $T_k^m < 0$. En vertu du théorème I, cette racine croît, k étant constant, lorsque m croît de deux unités, et, pour m constant, lorsque

(¹) Nous trouvons, d'après les formules du n° 11,

$$\frac{p_k^m(0)\, q_k^m(0)}{2m+1} = \frac{1+(-1)^{m+k}}{2} \frac{\pi}{2^{2m+1}} \frac{\Gamma(m+k+1)\,\Gamma(m-k+1)}{\left[\Gamma\left(\frac{m+k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m-k}{2}+1\right)\right]^2}.$$

k diminue de deux unités. En outre, en remarquant que

$$\lim (T_k^m)_{m=\infty} = t,$$

nous concluons que cette racine a pour limite 1, pour $m = \infty$. Nous ajouterons que, en vertu du théorème II, pour σ pair, la racine de l'équation

$$T_{m-\sigma}^m = 0$$

est une fonction croissante de m, qui a pour limite 1, pour $m = \infty$.

En ce qui concerne le cas de $m - k$ impair, nous retrouvons le théorème III.

Remarquons que les théorèmes I et II du n° **12** ne sont que des cas particuliers d'un théorème plus général, que nous n'avons pas indiqué, d'abord parce qu'il ne se distingue pas par la même simplicité et, en second lieu, parce qu'il n'a pas, pour notre objet principal, de l'importance. Maintenant, pour compléter l'étude des fonctions T_k^m, nous allons l'énoncer sous une forme géométrique.

En prenant m pour l'abscisse et k pour l'ordonnée d'un point du plan, dans un système de coordonnées rectangulaires, considérons l'ensemble des points définis par les conditions

$$m - k \geqq 0, \qquad k \geqq 0,$$

m et k étant des nombres entiers toujours de même parité, ou toujours de parités différentes.

Menons, par l'origine des coordonnées, la bissectrice de l'angle compris entre les directions positives des axes des abscisses et des ordonnées, et appelons la partie de la bissectrice, dont les points ont des abscisses positives, sa *partie positive*. Cela posé, les points considérés ne pourront être situés que sur la partie positive de l'axe des abscisses, sur la partie positive de la bissectrice et dans la partie du plan comprise entre elles. Par l'un quelconque de ces points (m_1, k_1), menons une droite parallèle à l'axe des ordonnées, jusqu'à l'intersection avec l'axe des abscisses d'un côté, et avec la bissectrice de l'autre, et une branche d'hyperbole équilatère, dont l'axe réel coïncide avec l'axe des abscisses et le centre soit au point $(-\frac{1}{2}, 0)$. Par cette construction, la partie considérée du plan se partagera, en général, en quatre parties : en trois parties entièrement délimitées, et une partie qui s'étend à l'infini. Nous désignerons cette dernière par A, et la partie entièrement délimitée qui ne lui est pas contiguë par B. Si alors, le point (m_1, k_1) étant exclu, tous les autres points des contours de A et B sont censés appartenant à ces parties du plan, on pourra affirmer que tous les T_k^m correspondant aux points de la partie A sont supérieurs à $T_{k_1}^{m_1}$, et tous les T_k^m correspondant aux points de la partie B sont inférieurs à $T_{k_1}^{m_1}$. Quant aux T_k^m qui correspondent aux autres points, on ne peut rien dire en général.

L'étude précédente fait voir que, par exclusion d'un nombre fini de systèmes de déplacements, nous pouvons étendre, autant que nous voulons, les limites des excentricités des ellipsoïdes pour lesquels la variation seconde de Π_1 reste positive, mais que nous ne pouvons jamais arriver, par cette voie, à ce qu'elle reste positive, pour tous les ellipsoïdes de révolution qui peuvent être des figures d'équilibre.

16. Considérons maintenant la signification géométrique de quelques systèmes de déplacements.

En premier lieu, il est évident que, pour les systèmes de déplacements correspondant à $k = 0$, la surface du liquide reste une surface de révolution autour de l'axe des z.

Puis on voit facilement que l'ensemble des systèmes de déplacements, qui correspondent à $m = 2$, transforme la surface de l'ellipsoïde de révolution donné dans la surface d'un ellipsoïde concentrique, ayant le même volume et soumis seulement, en outre, à la condition d'être infiniment peu différent de l'ellipsoïde donné.

En effet, si tous les déplacements se réduisent à ceux que nous venons d'indiquer, on a

$$\sqrt{\lambda^2 + \cos^2\theta}\,\delta n = c_0^2\,\mathrm{P}_0^2(\cos\theta) + c_1^2\,\mathrm{P}_1^2(\cos\theta)\cos\psi + c_2^2\,\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\cos 2\psi + s_1^2\,\mathrm{P}_1^2(\cos\theta)\sin\psi + s_2^2\,\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\sin 2\psi,$$

ce qui, d'après les équations (8), peut être présenté sous la forme

$$(28)\qquad 2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(\lambda^2+1)^2} + \frac{z^2}{\lambda^4}}\,\delta n = \frac{\eta - \vartheta}{\lambda^2+1}x^2 - \frac{\eta+\vartheta}{\lambda^2+1}y^2 + \frac{2\vartheta}{\lambda^2}z^2 + \alpha yz + \beta zx + \gamma xy,$$

où η, ϑ, α, β et γ représentent des quantités infiniment petites qui ne dépendent pas de x, y, z.

Nous remarquons ensuite que, en général, si

$$f(x, y, z) = 0$$

est l'équation d'une surface donnée,

$$f(x, y, z) + \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}\,\delta n = 0$$

est (à une première approximation) l'équation d'une surface infiniment voisine, définie par la distance δn d'un quelconque de ses points (x, y, z) à la surface donnée, cette distance étant considérée comme positive, si le point (x, y, z) se trouve du côté de la surface donnée où la fonction f décroît.

Dans la formule (28), x, y, z sont supposés être les coordonnées d'un point de la surface de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2+y^2}{\lambda^2+1}+\frac{z^2}{\lambda^2}=a^2;$$

mais nous pouvons les considérer aussi comme les coordonnées d'un point de la surface infiniment voisine en laquelle la surface de l'ellipsoïde se transforme après les déplacements considérés. Par suite, d'après ce que l'on vient de remarquer, l'équation de cette surface sera

$$\frac{1+\eta-\vartheta}{\lambda^2+1}x^2+\frac{1-\eta-\vartheta}{\lambda^2+1}y^2+\frac{1+2\vartheta}{\lambda^2}z^2+\alpha yz+\beta zx+\gamma xy=a^2,$$

ce qui démontre ce que l'on a énoncé plus haut.

Les déplacements considérés consistent en trois systèmes de déplacements : 1° le système, auquel correspond $k=0$, et qui transforme l'ellipsoïde de révolution donné en un nouvel ellipsoïde de révolution autour du même axe; 2° le système, auquel correspond $k=1$, et qui se ramène à une rotation de l'ellipsoïde donné autour d'un axe perpendiculaire à l'axe des z; 3° le système, auquel correspond $k=2$, et qui transforme l'ellipsoïde donné en un ellipsoïde à trois axes, dont le plus petit axe reste ce qu'il était en grandeur et en direction.

17. Nous avons vu que, dans l'étude générale de la stabilité des ellipsoïdes de révolution, qui a fait l'objet du n° **14**, le terme complémentaire Ω ne jouait aucun rôle. Nous allons considérer maintenant un cas particulier, ayant une assez grande généralité, dans lequel, grâce à la présence de ce terme dans la formule (17), les limites des ellipsoïdes stables s'élargissent.

Si les déplacements et les vitesses relatifs, communiqués à l'instant initial aux molécules d'un liquide qui conservait la figure d'un ellipsoïde de révolution, sont tels que leurs projections sur l'axe des z, sur la direction du rayon vecteur, et sur la direction de la tangente à un parallèle, ne dépendent pas de la longitude (ψ), ces projections jouiront évidemment de la même propriété dans tout le cours du mouvement troublé du liquide. De ceci résulte la possibilité d'exclure tous les déplacements qui correspondent à $k>0$. C'est dans cette hypothèse particulière, où la surface du liquide restera toujours une surface de révolution autour de l'axe des z, que nous rechercherons maintenant la stabilité des ellipsoïdes de révolution.

Dans le cas considéré, la formule (17) prend la forme suivante :

$$(29) \qquad \delta^2 \Pi_1 = 4\pi f \rho a^3 (\lambda^2 + 1) \sum_{m=2}^{m=\infty} T_0^m \int (H_0^m)^2 d\sigma + \Omega,$$

où

$$H_0^m = c_0^m P_0^m (\cos\theta).$$

En nous basant sur ce qui précède, nous pouvons affirmer que le terme de cette expression, qui dépend de c_0^2, reste toujours positif. En effet, quand ce terme demeure seul, tous les déplacements se réduisent à ceux qui transforment l'ellipsoïde de révolution donné en une nouvelle figure d'équilibre infiniment peu différente et correspondant à un nouveau moment des quantités de mouvement différant infiniment peu de l'ancien. Par suite, d'après la formule (38) du Chapitre I, nous trouvons que le terme considéré prend la forme

$$(30) \qquad \frac{\omega}{S} \frac{dS}{dJ} (\delta J)^2.$$

On vérifie facilement ce résultat par un calcul immédiat, si l'on se sert de l'expression (20) pour Ω, et aussi de l'expression

$$T_0^2 = \tfrac{1}{4}\lambda(7 + 9\lambda^2) - \tfrac{1}{4}(1 + \lambda^2)(1 + 9\lambda^2) \operatorname{arc} \cot \lambda,$$

qui, d'après l'équation (1), peut être présentée sous la forme

$$T_0^2 = -\frac{1 + \lambda^2}{4} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\omega^2}{2\pi f \rho} \right).$$

L'expression (30) représente, comme nous le savons, une quantité généralement positive. Mais il importe également que nous attirions l'attention sur ce fait qu'elle ne peut s'annuler pour aucune valeur finie positive de λ. En effet, elle est égale à

$$\frac{\omega}{S} \frac{dJ}{d\lambda} \frac{dS}{d\lambda} (\delta\lambda)^2,$$

et ici les facteurs

$$\frac{\omega}{S} \quad \text{et} \quad \frac{dJ}{d\lambda},$$

comme on le sait par la théorie des ellipsoïdes de Maclaurin, ne peuvent s'annuler que pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$. Quant à

$$\frac{dS}{d\lambda} = -\frac{1}{5} \left(\frac{4Q^5}{3\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\lambda^{\frac{5}{3}} (\lambda^2 + 1)^{\frac{2}{3}}},$$

ce facteur ne peut s'annuler que pour $\lambda = \infty$ (c'est-à-dire quand l'ellipsoïde devient une sphère).

La formule (29) conduit donc à la conclusion que, dans l'hypothèse particulière considérée, les ellipsoïdes de révolution sont stables, tant que λ surpasse la racine unique positive de l'équation

$$T_0^4 = 0,$$

à la résolution de laquelle notre problème est ainsi ramené.

Nous trouvons (¹) à l'aide des formules (2) :

$$\begin{aligned}192\,T_0^4 = {} & \lambda(3675\lambda^6 + 5075\lambda^4 + 1965\lambda^2 + 357) \\ & - 3(1225\lambda^8 + 2100\lambda^6 + 1110\lambda^4 + 244\lambda^2 + 9)\operatorname{arc\,cot}\lambda,\end{aligned}$$

et, d'après ce qui précède, nous savons que cette expression reste positive, pour toute valeur finie de λ supérieure à la racine cherchée de l'équation considérée, et négative, pour toute valeur positive de λ qui lui est inférieure. On résout facilement, d'après cela, l'équation considérée, avec une approximation voulue. En désignant par λ la racine cherchée, nous trouvons

$$0{,}173830 < \lambda < 0{,}173831$$

et, par suite,

$$\varepsilon = 0{,}985225\ldots.$$

La vitesse angulaire correspondante est donnée par l'équation :

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = 0{,}174523\ldots.$$

Nous arrivons ainsi au résultat suivant :

Pour les déplacements et les vitesses à l'instant initial, pour lesquels, pendant toute la durée du mouvement du liquide, la surface de celui-ci reste une surface de révolution, les ellipsoïdes de révolution sont des figures d'équilibre stables, si leurs excentricités sont inférieures à 0,985225....

18. Dirichlet a montré que, pour certaines données initiales, un liquide, soumis aux attractions newtoniennes entre ses éléments, peut se mouvoir de telle façon que sa surface, pendant toute la durée du mouvement, reste une surface ellipsoïdale dont les axes, dans le cours du temps, changent en général de grandeur et de direction. Il résulte de là que nous pouvons exclure tous les déplacements

(¹) Cet endroit contenait une erreur de calcul que l'auteur a découverte pendant l'impression de cette traduction, et qui est à présent corrigée. L.

auxquels correspond $m > 2$. Mais si nous appliquions notre formule à l'étude de la stabilité des ellipsoïdes de révolution, dans cette hypothèse particulière relative aux déplacements, nous obtiendrions évidemment, pour limite supérieure des excentricités des ellipsoïdes stables, l'ancienne valeur 0,8126.... Cependant Riemann a démontré qu'en réalité cette limite est beaucoup plus grande (¹). En étudiant le cas du mouvement découvert par Dirichlet, il s'occupe, entre autres, du problème de la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre, par rapport aux déplacements initiaux pour lesquels la surface du liquide reste toujours un ellipsoïde. En remarquant l'analogie qui existe entre les équations différentielles définissant, dans une certaine hypothèse particulière, les axes de l'ellipsoïde liquide en fonction du temps, et les équations différentielles du mouvement d'un point matériel sur une surface, Riemann arrive à un criterium de la stabilité, par lequel on obtient non seulement les conditions suffisantes, mais aussi les conditions nécessaires pour la stabilité. Au moyen de ce criterium, Riemann trouve, entre autres, que les ellipsoïdes de Maclaurin sont stables, tant que les rapports entre leurs axes dépassent 0,303327..., et instables dans le cas contraire. On déduit de là, pour limite supérieure des excentricités des ellipsoïdes stables, un nombre compris entre 0,9528862 et 0,9528866. Pour les ellipsoïdes avec des excentricités plus grandes, l'instabilité se manifeste par les déplacements qui transforment l'équateur en ellipse (²).

Remarquons qu'on peut envisager l'étude de Riemann à un point de vue plus général. Le nombre 0,95... obtenu par lui représente une *limite supérieure* des excentricités des ellipsoïdes de révolution stables, mais dans un autre sens du mot que le nombre 0,81... trouvé plus haut : le nombre de Riemann représente une limite que ne peuvent dépasser les excentricités des ellipsoïdes stables, tandis que le nombre 0,81... représente une limite supérieure des excentricités des ellipsoïdes *sûrement* stables.

19. Considérons encore une hypothèse particulière.

Si l'on exclut les déplacements correspondant à $k = m = 2$, l'étude de la stabi-

---

(¹) *Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoïdes* [*B. Riemann's mathem. Werke, herausg. v. Weber*, 1876, S. 190].

(²) Autant que je sache, il n'a pas encore été démontré jusqu'ici, que le cas, découvert par Dirichlet, du mouvement d'un ellipsoïde liquide fût le seul cas où un liquide, sous les mêmes conditions relativement aux forces agissantes, puisse se mouvoir en conservant la forme d'un ellipsoïde. Nous n'avons donc pas encore le droit de considérer la valeur obtenue par Riemann (0,95...), comme la limite supérieure effective des excentricités des ellipsoïdes de révolution stables relativement à tous les déplacements et toutes les vitesses à l'instant initial, après lesquels la surface du liquide demeure un ellipsoïde pendant toute la durée du mouvement.

lité, par rapport aux déplacements restants, conduit à la résolution de l'équation

$$T_3^3 = 0,$$

laquelle, au moyen des formules (23) et (24), se réduit à la forme

$$\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}(15+10\varepsilon^2+56\varepsilon^4) - 3(5+16\varepsilon^4-16\varepsilon^6)\arcsin\varepsilon = 0.$$

La racine unique positive de cette équation est comprise entre les limites 0,895 et 0,9, de sorte que dans le cas particulier considéré, comme dans le cas général, la limite supérieure des excentricités des ellipsoïdes stables de révolution est inférieure à la limite de Riemann.

Quant à la possibilité de l'hypothèse considérée, on peut remarquer que l'exclusion des déplacements qui correspondent à $k = m = 2$ est équivalente à l'hypothèse que, pendant toute la durée du mouvement du liquide, l'ellipsoïde d'inertie de sa masse reste un ellipsoïde de révolution, et un tel mouvement du liquide exige une certaine symétrie dans la distribution des déplacements et des vitesses à l'instant initial ([1]).

Nous finirons par là l'étude de la stabilité des ellipsoïdes de révolution.

CHAPITRE IV.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DE LAMÉ.

20. Nous considérerons ici les propriétés des fonctions de Lamé sur lesquelles sera basée la résolution du problème de la stabilité des ellipsoïdes de Jacobi. Ces propriétés, comme nous le verrons, seront analogues, sous plusieurs rapports, aux propriétés des fonctions sphériques considérées dans le Chapitre précédent.

Par fonction de Lamé de première espèce $E_k^m(x)$, on désigne, comme on sait, une fonction entière de degré m des quantités

$$(1) \qquad x, \quad \sqrt{x^2-b^2}, \quad \sqrt{x^2-a^2},$$

([1]) On parle ici d'un genre de symétrie tel que, après une rotation autour de l'axe des z d'un certain angle inférieur à π, la surface du liquide se superpose à sa surface dans l'ancienne position, et la vitesse, en chaque point de l'espace occupé par le liquide, demeure ce qu'elle était auparavant en grandeur et en direction.

satisfaisant à l'équation différentielle

$$(2)\qquad \frac{d}{dx}\left[\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}\,\frac{du}{dx}\right]+\frac{(a^2+b^2)\tau_k^m-m(m+1)x^2}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}}\,u=0,$$

où a, b et τ_k^m sont des constantes. Nous supposerons partout dans la suite a et b positifs, et en outre $a>b$. Quant à τ_k^m, c'est une constante qu'on doit déterminer par cette condition que l'équation (2) admette effectivement une solution particulière qui soit une fonction entière des quantités (1).

On sait que toute fonction entière des quantités (1), satisfaisant à l'équation (2) pour une valeur positive entière donnée de m, ne peut être que d'une des quatre formes suivantes : ou une fonction entière de degré m de x, ou un produit d'une fonction entière de degré $m-1$ de x par $\sqrt{x^2-b^2}$ ou $\sqrt{x^2-a^2}$, ou enfin un produit d'une fonction entière de degré $m-2$ de x par $\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}$. D'après cela, les fonctions E_k^m se divisent en quatre classes : à la première classe se rattachent toutes les fonctions entières de x; à la seconde, les fonctions ayant $\sqrt{x^2-b^2}$ en facteur; à la troisième, les fonctions ayant $\sqrt{x^2-a^2}$ en facteur; et à la quatrième, les fonctions ayant $\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}$ en facteur. Toutes les fonctions entières de x, à l'aide desquelles s'expriment les fonctions E_k^m, contiennent d'ailleurs ou seulement des puissances paires de x, ou seulement des puissances impaires (1). Les fonctions d'une seule et même classe se distinguent l'une de l'autre par des valeurs différentes des constantes τ_k^m, dont dépendent les coefficients des différentes puissances de x. On détermine ces coefficients, par des équations linéaires aux différences finies du second ordre, et les constantes τ_k^m, par des équations algébriques. Si $\frac{m}{2}$ ou $\frac{m-1}{2}$ (selon que m est pair ou impair) est désigné par σ, le degré de l'équation algébrique, pour les fonctions de la première classe, est égal à $\sigma+1$; pour les fonctions de la deuxième et de la troisième classes à $m-\sigma$; et pour les fonctions de la quatrième classe, à σ. On sait, relativement à ces équations, que toutes leurs racines sont réelles et distinctes (2). Parmi les coefficients, il n'en reste qu'un d'arbitraire, que nous déterminerons par la condition que le coefficient de la plus haute puissance de x soit égal à 1. Alors, tous les coefficients seront réels.

Il correspondra donc en tout, à chaque valeur donnée de m, $2m+1$ fonctions E_k^m distinctes.

En nous servant de la notation $E_k^m(x)$ pour les fonctions des quatre classes, nous donnerons à k les valeurs : 1, 2, 3, ..., $2m+1$. La loi, d'après laquelle les nombres de cette suite doivent correspondre à des fonctions des diverses

---

(1) HEINE, *Handb. d. Kugelf.*, 1 Bd., 1878, p. 359, 360.

(2) *Ibid.*, p. 362-368, 371-375. *Voir* la fin de ce numéro.

classes, sera définie plus tard, et à présent nous nous bornerons à supposer que, pour une seule et même classe, τ_k^m soit une fonction *décroissante* de k.

Nous ne rencontrerons que des cas où x ne sort pas des limites $-b$ et $+b$, ou b et a, ou a et ∞, et enfin où x est une variable purement imaginaire. Dans le premier cas, nous remplacerons x par μ; dans le deuxième, par ν; et dans le troisième, par λ. Pour éviter les quantités imaginaires, nous prendrons, au lieu de $\sqrt{x^2-a^2}$ et $\sqrt{x^2-b^2}$, respectivement $\sqrt{a^2-\mu^2}$ et $\sqrt{b^2-\mu^2}$, ou $\sqrt{a^2-\nu^2}$ et $\sqrt{\nu^2-b^2}$. Parmi ces derniers radicaux, $\sqrt{b^2-\mu^2}$, $\sqrt{a^2-\nu^2}$ et $\sqrt{\nu^2-b^2}$ peuvent s'annuler, et les signes de ces radicaux resteront indéterminés, là où l'on n'en dira rien. Quant aux radicaux $\sqrt{a^2-\mu^2}$, $\sqrt{\lambda^2-a^2}$ et $\sqrt{\lambda^2-b^2}$, nous les supposerons toujours positifs.

On sait que la fonction $E_k^m(x)$ ne peut s'annuler, quand on a $x>a$ (¹). Par suite, pour ces valeurs de x, la seconde solution particulière de l'équation (2) peut être exprimée par la formule :

$$F_k^m(\lambda) = (2m+1)\,E_k^m(\lambda)\int_\lambda^\infty \frac{dx}{[E_k^m(x)]^2\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}}. \tag{3}$$

C'est une fonction de Lamé de seconde espèce. Nous nous bornerons à sa définition par la formule (3), car nous ne la rencontrerons plus loin que pour des arguments dépassant a.

On peut remarquer que, d'après ce qui vient d'être dit, la fonction $E_k^m(x)$ conserve des valeurs positives pour toute valeur de $x>a$, et que par conséquent $F_k^m(\lambda)$ reste toujours aussi positif. D'ailleurs, on a

$$\lim \left\{ \lambda^{m+1} F_k^m(\lambda) \right\}_{\lambda=\infty} = 1.$$

Les fonctions de Lamé à argument purement imaginaire auront pour nous une importance toute spéciale. A la place des fonctions de Lamé elles-mêmes, nous introduirons, dans ce cas, les fonctions définies par l'égalité

$$\mathbf{E}_k^m(\lambda) = (-i)^m E_k^m(i\lambda),$$

avec cette détermination des radicaux :

$$\sqrt{(i\lambda)^2-a^2} = +i\sqrt{\lambda^2+a^2}, \qquad \sqrt{(i\lambda)^2-b^2} = +i\sqrt{\lambda^2+b^2}.$$

D'après certaines propriétés de la fonction $E_k^m(x)$, dont il sera parlé plus loin (n° 22), la fonction $\mathbf{E}_k^m(\lambda)$ ne peut s'annuler pour aucune valeur réelle de λ, excepté $\lambda=0$, et, pour $\lambda>0$, ce que nous supposerons toujours en considérant la fonction $\mathbf{E}_k^m(\lambda)$, elle conserve des valeurs positives.

(¹) *Ibid.*, p. 381.

La fonction $\mathbf{E}_k^m(\lambda)$ est une solution particulière de l'équation

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\sqrt{(\lambda^2+a^2)(\lambda^2+b^2)}\,\frac{du}{d\lambda}\right]-\frac{(a^2+b^2)\tau_k^m+m(m+1)\lambda^2}{\sqrt{(\lambda^2+a^2)(\lambda^2+b^2)}}\,u=0.$$

Nous définirons une autre solution particulière de cette équation, correspondant à une fonction de Lamé de seconde espèce, et que nous rencontrerons également dans la suite pour $\lambda>0$, par la formule

$$\mathbf{F}_k^m(\lambda)=(2m+1)\,\mathbf{E}_k^m(\lambda)\int_\lambda^\infty\frac{dx}{[\mathbf{E}_k^m(x)]^2\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}. \tag{4}$$

La fonction $\mathbf{F}_k^m(\lambda)$ conserve encore des valeurs positives pour toute valeur positive de λ, et d'ailleurs

$$\lim\left\{\lambda^{m+1}\mathbf{F}_k^m(\lambda)\right\}_{\lambda=\infty}=1.$$

Posons maintenant

$$\int_0^\lambda\frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}=\alpha,\qquad \int_a^\lambda\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}}=\alpha_1,$$

$$\int_0^\mu\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}}=\beta,\qquad \int_0^b\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}}=\eta,$$

$$\int_b^\nu\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}}=\gamma,\qquad \int_b^a\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}}=\zeta,$$

et introduisons, au lieu des variables μ, ν, λ, les variables β, γ, α_1 ou α. Alors les équations différentielles auxquelles satisfont $\mathrm{E}_k^m(\mu)$, $\mathrm{E}_k^m(\nu)$, $\mathrm{E}_k^m(\lambda)$ et $\mathbf{E}_k^m(\lambda)$ prendront la forme suivante [1] :

$$\frac{d^2\mathrm{E}(\mu)}{d\beta^2}+[p\tau-m(m+1)\mu^2]\,\mathrm{E}(\mu)=0, \tag{5}$$

$$\frac{d^2\mathrm{E}(\nu)}{d\gamma^2}-[p\tau-m(m+1)\nu^2]\,\mathrm{E}(\nu)=0, \tag{6}$$

$$\frac{d^2\mathrm{E}(\lambda)}{d\alpha_1^2}+[p\tau-m(m+1)\lambda^2]\,\mathrm{E}(\lambda)=0, \tag{7}$$

$$\frac{d^2\mathbf{E}(\lambda)}{d\alpha^2}-[p\tau+m(m+1)\lambda^2]\,\mathbf{E}(\lambda)=0, \tag{8}$$

où l'on a posé $p=a^2+b^2$. Nous emploierons aussi l'abréviation $q=a^2b^2$, qui sera rencontrée plus loin.

---

(1) Nous n'écrirons pas d'indices là où il n'en résultera aucun inconvénient.

Indiquons maintenant les formules pour le calcul des fonctions $\mathbf{E}_k^m(\lambda)$ (¹) :

Première classe.

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathbf{E}_k^m(\lambda) = \lambda^m + c_1\lambda^{m-2} + c_2\lambda^{m-4} + \ldots, \\ &2i(2m+1-2i)\,c_i + p[\tau^m - (m+2-2i)^2]\,c_{i-1} \\ &\qquad - q(m+4-2i)(m+3-2i)\,c_{i-2} = 0, \\ &c_{-1} = 0, \qquad c_0 = 1, \\ &c_{\sigma+1} = 0. \end{aligned}\right.$$

Deuxième classe.

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathbf{E}_k^m(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 + b^2}\,(\lambda^{m-1} + c_1\lambda^{m-3} + c_2\lambda^{m-5} + \ldots), \\ &2i(2m+1-2i)\,c_i + \{p[\tau^m - (m+1-2i)^2] - a^2(2m+3-4i)\}\,c_{i-1} \\ &\qquad - q(m+2-2i)(m+3-2i)\,c_{i-2} = 0, \\ &c_{-1} = 0, \qquad c_0 = 1, \\ &c_{m-\sigma} = 0. \end{aligned}\right.$$

Troisième classe.

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathbf{E}_k^m(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 + a^2}\,(\lambda^{m-1} + c_1\lambda^{m-3} + c_2\lambda^{m-5} + \ldots), \\ &2i(2m+1-2i)\,c_i + \{p[\tau^m - (m+1-2i)^2] - b^2(2m+3-4i)\}\,c_{i-1} \\ &\qquad - q(m+2-2i)(m+3-2i)\,c_{i-2} = 0, \\ &c_{-1} = 0, \qquad c_0 = 1, \\ &c_{m-\sigma} = 0. \end{aligned}\right.$$

Quatrième classe.

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathbf{E}_k^m(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 + a^2}\,\sqrt{\lambda^2 + b^2}\,(\lambda^{m-2} + c_1\lambda^{m-4} + c_2\lambda^{m-6} + \ldots), \\ &2i(2m+1-2i)\,c_i + p[\tau^m - (m+1-2i)^2]\,c_{i-1} \\ &\qquad - q(m+1-2i)(m+2-2i)\,c_{i-2} = 0, \\ &c_{-1} = 0, \qquad c_0 = 1, \\ &c_\sigma = 0. \end{aligned}\right.$$

Nous indiquerons encore des formules pour le calcul des fonctions de Lamé (en les considérant comme des fonctions de ν) exprimées au moyen de l'angle (²)

$$\varphi = \operatorname{am}\left[a(\zeta - \gamma), \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right].$$

(¹) HEINE, p. 362-368.
(²) *Ibid.*, p. 371-375.

Conservons les notations de Heine K, L, M, N pour les fonctions des première, deuxième, troisième et quatrième classes.

Posons

$$2\tau^m - m(m+1) = z, \qquad \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = g$$

et déterminons α_i et α'_i à l'aide des conditions

$$(13)\quad \begin{cases} (i+1)(2m-2i-1)g\alpha_{i+1} - [(m-2i)^2+z]\alpha_i + (m+1-i)(2i-1)g\alpha_{i-1} = 0, \\ \alpha_0 = \dfrac{(a^2-b^2)^{\frac{m}{2}}}{2^{m-1}}, \qquad \alpha_{-1} = 0. \\ (i+1)(2m-2i-1)g\alpha'_{i+1} - [(m-1-2i)^2+z]\alpha'_i + (m-i)(2i+1)g\alpha'_{i-1} = 0, \\ \alpha'_0 = \dfrac{(a^2-b^2)^{\frac{m-1}{2}}}{2^{m-2}}, \qquad \alpha'_{-1} = 0. \end{cases}$$

Si nous introduisons maintenant l'angle φ, à l'aide des équations

$$\sqrt{\nu^2-b^2} = \sqrt{a^2-b^2}\cos\varphi, \qquad \sqrt{a^2-\nu^2} = \sqrt{a^2-b^2}\sin\varphi,$$

nous obtiendrons, pour le calcul des fonctions de Lamé des différentes classes et des constantes qui leur correspondent, les formules et les équations suivantes :

m pair.

$$(14)\quad \begin{cases} K(\nu) = \alpha_0\cos m\varphi + \alpha_1\cos(m-2)\varphi + \ldots + \frac{1}{2}\alpha_\sigma, \\ \qquad z\alpha_\sigma - (m+2)(m-1)g\alpha_{\sigma-1} = 0; \\ N(\nu) = \alpha_0\sin m\varphi + \alpha_1\sin(m-2)\varphi + \ldots + \alpha_{\sigma-1}\sin 2\varphi, \\ \qquad (4+z)\alpha_{\sigma-1} - \dfrac{(m-3)(m+4)}{2}g\alpha_{\sigma-2} = 0; \\ L(\nu) = \nu[\alpha'_0\cos(m-1)\varphi + \alpha'_1\cos(m-3)\varphi + \ldots + \alpha'_{\sigma-1}\cos\varphi], \\ \qquad \left[1+z-\dfrac{m(m+1)}{2}g\right]\alpha'_{\sigma-1} - \dfrac{(m-1)(m+2)}{2}g\alpha'_{\sigma-2} = 0; \\ M(\nu) = \nu[\alpha'_0\sin(m-1)\varphi + \alpha'_1\sin(m-3)\varphi + \ldots + \alpha'_{\sigma-1}\sin\varphi], \\ \qquad \left[1+z+\dfrac{m(m+1)}{2}g\right]\alpha'_{\sigma-1} - \dfrac{(m-1)(m+2)}{2}g\alpha'_{\sigma-2} = 0. \end{cases}$$

m impair.

$$
(15)\quad
\begin{cases}
K(\nu) = \nu[\alpha'_0 \cos(m-1)\varphi + \alpha'_1 \cos(m-3)\varphi + \ldots + \tfrac{1}{2}\alpha'_\sigma], \\
\qquad z\alpha'_\sigma - m(m+1)g\alpha'_{\sigma-1} = 0; \\[1ex]
N(\nu) = \nu[\alpha'_0 \sin(m-1)\varphi + \alpha'_1 \sin(m-3)\varphi + \ldots + \alpha'_{\sigma-1}\sin 2\varphi], \\
\qquad (4+z)\alpha'_{\sigma-1} - \dfrac{(m-2)(m+3)}{2} g\alpha'_{\sigma-2} = 0; \\[1ex]
L(\nu) = \alpha_0 \cos m\varphi + \alpha_1 \cos(m-2)\varphi + \ldots + \alpha_\sigma \cos\varphi, \\
\left[1 + z - \dfrac{m(m+1)}{2} g\right]\alpha_\sigma - \dfrac{(m-2)(m+3)}{2} g\alpha_{\sigma-1} = 0; \\[1ex]
M(\nu) = \alpha_0 \sin m\varphi + \alpha_1 \sin(m-2)\varphi + \ldots + \alpha_\sigma \sin\varphi, \\
\left[1 + z + \dfrac{m(m+1)}{2} g\right]\alpha_\sigma - \dfrac{(m-2)(m+3)}{2} g\alpha_{\sigma-1} = 0.
\end{cases}
$$

La méthode de Sturm s'applique facilement à l'étude des équations définissant z.

21. En entendant par x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point, introduisons les coordonnées elliptiques λ, μ, ν et les coordonnées λ, θ, ψ à l'aide des équations

$$
(16)\quad
\begin{cases}
x = \sqrt{\lambda^2 + a^2}\,\dfrac{\sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{a^2-\nu^2}}{a\sqrt{a^2-b^2}} = \sqrt{\lambda^2+a^2}\sin\theta\cos\psi, \\[2ex]
y = \sqrt{\lambda^2 + b^2}\,\dfrac{\sqrt{b^2-\mu^2}\sqrt{\nu^2-b^2}}{b\sqrt{a^2-b^2}} = \sqrt{\lambda^2+b^2}\sin\theta\sin\psi, \\[2ex]
z = \lambda\dfrac{\mu\nu}{ab} = \lambda\cos\theta.
\end{cases}
$$

Ici λ^2, $-\mu^2$ et $-\nu^2$ sont les racines de l'équation du troisième degré en ξ :

$$
(17)\qquad \frac{x^2}{\xi + a^2} + \frac{y^2}{\xi + b^2} + \frac{z^2}{\xi} = 1,
$$

d'ailleurs λ, μ, ν sont compris entre les limites indiquées plus haut (0 et ∞, $-b$ et $+b$, b et a), et θ, ψ respectivement entre les limites 0 et π, 0 et 2π. D'après cela, les formules (16), pour ψ donné, définissent entièrement les signes de $\sqrt{a^2-\nu^2}$ et de $\sqrt{b^2-\mu^2}\sqrt{\nu^2-b^2}$.

Les coordonnées λ, μ, ν sont, comme on sait, orthogonales.

Par la substitution (16), l'équation aux dérivées partielles de Laplace prend a forme

$$(\nu^2 - \mu^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + (\lambda^2+\nu^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} + (\mu^2+\lambda^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\gamma^2} = 0, \tag{18}$$

et l'on peut se convaincre facilement, à l'aide des équations (5), (6) et (8) que les fonctions

$$\mathrm{E}_k^m(\lambda)\,\mathrm{E}_k^m(\mu)\,\mathrm{E}_k^m(\nu) \quad \text{et} \quad \mathrm{F}_k^m(\lambda)\,\mathrm{E}_k^m(\mu)\,\mathrm{E}_k^m(\nu) \tag{19}$$

sont des solutions particulières de l'équation (18). Nous arrivons ainsi à la conclusion que les transformées des fonctions (19), pour les variables x, y, z, satisfont à l'équation de Laplace.

On peut se convaincre facilement aussi que la transformée de la première des fonctions (19) est une fonction entière de degré m de x, y, z. En effet, si nous désignons par $\varphi_n(x)$ une fonction entière de degré n de x, et si nous entendons par σ_1, σ_2, σ_3, 0 ou 1, la première des fonctions (19), en vertu des équations (16), pourra toujours être présentée sous la forme

$$\mathrm{A}\,x^{\sigma_1}y^{\sigma_2}z^{\sigma_3}\varphi_{\frac{m-\tau}{2}}(\lambda^2)\,\varphi_{\frac{m-\tau}{2}}(-\mu^2)\,\varphi_{\frac{m-\tau}{2}}(-\nu^2),$$

où $\tau = \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$, $m-\tau$ est toujours un nombre pair et A une constante. Mais

$$\varphi_{\frac{m-\tau}{2}}(\lambda^2)\,\varphi_{\frac{m-\tau}{2}}(-\mu^2)\,\varphi_{\frac{m-\tau}{2}}(-\nu^2) \tag{20}$$

est une fonction entière symétrique des racines de l'équation (17), fonction dont le degré par rapport à chaque racine est $\frac{m-\tau}{2}$. Donc, en remarquant que, si l'on présente cette équation sous la forme $\xi^3+p_1\xi^2+p_2\xi+p_3=0$, les coefficients p_1, p_2, p_3 seront du second degré par rapport à x, y, z, nous concluons que la transformée de la fonction (20) est une fonction entière de x, y, z, de degré $m-\tau$, ce qui démontre ce que l'on a énoncé plus haut.

On peut, à l'aide de ceci, démontrer les formules suivantes :

$$\int \frac{\mathrm{E}_k^m(\mu')\,\mathrm{E}_k^m(\nu')}{\sqrt{(\mathrm{R}^2+\mu'^2)(\mathrm{R}^2+\nu'^2)}}\frac{ds'}{r} = \frac{4\pi}{2m+1}\mathrm{E}_k^m(\mu)\,\mathrm{E}_k^m(\nu)\begin{cases}\mathrm{E}_k^m(\lambda)\,\mathrm{F}_k^m(\mathrm{R}), & \lambda \leqq \mathrm{R},\\ \mathrm{F}_k^m(\lambda)\,\mathrm{E}_k^m(\mathrm{R}), & \lambda \geqq \mathrm{R},\end{cases} \tag{21}$$

dans lesquelles l'intégrale est supposée étendue à toute la surface de l'ellipsoïde, défini par l'équation $\lambda = \mathrm{R}$. Il nous paraît superflu de nous arrêter à la démonstration, car elle serait entièrement semblable à celle des formules (13) du Chapitre précédent [1].

---

[1] Les formules (21), ou, plus exactement, des formules semblables ne contenant que

Les fonctions de Lamé jouissent de cette propriété que le produit $E_k^m(\mu) E_k^m(\nu)$, transformé en fonction des variables θ et ψ, représente une fonction sphérique d'ordre m, et inversement, toute fonction sphérique de θ et ψ d'ordre m, transformée, par l'introduction des variables μ et ν, peut toujours être présentée, et d'une seule manière, sous la forme

$$\sum_{k=1}^{k=2m+1} \varepsilon_k E_k^m(\mu) E_k^m(\nu),$$

où les ε_k sont des constantes (¹).

Rappelons ensuite que, si nous désignons par $d\sigma$ l'élément de surface de la sphère de rayon 1, en considérant θ et ψ comme les coordonnées polaires d'un des points de cet élément, nous aurons

$$\int E_k^m(\mu) E_k^m(\nu) E_s^n(\mu) E_s^n(\nu) \, d\sigma = 0, \tag{22}$$

si, pour $m = n$, $k \neq s$, et si l'intégrale est étendue à toute la surface de la sphère.

D'après ce qui vient d'être dit au sujet du produit $E_k^m(\mu) E_k^m(\nu)$, la formule (22) est évidente pour $m \neq n$, et, d'après les formules (16), elle est également évidente pour $m = n$, si les fonctions E_k^m et E_s^m appartiennent à des classes différentes. Quant au cas où E_k^m et E_s^m appartiennent à la même classe, on se rend compte facilement de l'exactitude de la formule (22), en remarquant que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\theta, \psi) \sin\theta \, d\theta \, d\psi = \int_0^{\zeta} d\gamma \int_0^{\eta} (\nu^2 - \mu^2) F[\mu, \nu] \, d\beta,$$

où $F[\mu, \nu]$ est la transformée de la fonction $F(\theta, \psi)$, et en se servant de l'égalité connue (²)

$$\int_0^{\zeta} d\gamma \int_0^{\eta} (\nu^2 - \mu^2) E_k^m(\mu) E_k^m(\nu) E_s^n(\mu) E_s^n(\nu) \, d\beta = 0$$

qui suppose que $m - n$ est un nombre pair, que E_k^m et E_s^n appartiennent à la même classe, et que, pour $m = n$, k n'est pas égal à s.

---

des fonctions de Lamé à argument réel, ont été encore découvertes par Liouville, il y a 40 ans. *Voir* LIOUVILLE, *Lettres sur diverses questions d'Analyse et de Physique mathématique concernant l'ellipsoïde* (*J. de Liouville*, t. XI, 1846, p. 217, 261), où il les démontre à l'aide du théorème de Green.

(¹) HEINE, *Hanb. d. Kugelf.*, I. Band, 1878, p. 358, 368-371.

(²) *Ibid.*, p. 379-380.

Ce que l'on vient de dire suffit pour transformer l'expression de la variation seconde de Π, pour les ellipsoïdes à trois axes. Dans les numéros qui suivent, nous exposerons les propriétés des fonctions de Lamé qui nous serviront pour la recherche de son signe.

22. On sait que toutes les racines de l'équation

$$\frac{E_k^m(x)}{x\sqrt{x^2-a^2}\sqrt{x^2-b^2}} = 0 \tag{23}$$

sont réelles, distinctes et comprises entre les limites $-a$ et $+a$, n'étant ni nulles, ni égales à b ou à a, et en outre étant telles qu'à chaque racine x_0 correspond une racine $-x_0$ (¹).

Klein a complété ce théorème en montrant comment ces racines sont réparties dans les intervalles $(0, b)$ et (b, a), ou $(0, -b)$ et $(-b, -a)$ (²). En remarquant que l'équation (23) se réduit à une équation de degré n en x^2, si $n+1$ est le nombre de toutes les fonctions de Lamé appartenant à la classe de la fonction E_k^m, Klein démontre que chacun des cas possibles de répartition des n racines de cette équation dans les intervalles $(0, b^2)$ et (b^2, a^2) se rencontre effectivement pour une, et cela s'entend, seulement pour une des $n+1$ fonctions de Lamé appartenant à la classe considérée. Pour cela, il considère la question sous une forme géométrique, mais le point essentiel de sa démonstration consiste dans le passage à la limite pour $b = a$.

Klein se borne à démontrer ce qu'on vient d'énoncer; cependant sa méthode permet de résoudre également la question de savoir à quel indice k correspond un nombre donné s de racines, dans l'intervalle entre 0 et b^2. Comme cette question a pour nous une grande importance, nous allons maintenant démontrer un théorème qui en donne la solution et qui doit être considéré comme un complément du théorème de Klein.

Théorème I. — *Si l'indice* (k), *susceptible des valeurs* (1), (2), (3), ..., *caractérise les fonctions* $E_{(k)}^m$ *appartenant à une seule et même classe, et cela de telle manière que*

$$\tau_{(1)}^m, \quad \tau_{(2)}^m, \quad \ldots, \quad \tau_{(k)}^m, \quad \ldots$$

soit une suite décroissante, l'équation

$$E_{(k)}^m(x) = 0$$

a $k-1$ *racines entre les limites* a *et* b *non égales à ces limites.*

(¹) *Ibid.*, p. 382-384.

(²) Felix Klein, *Ueber Lamé'sche Functionen* (*Mathem. Ann.*, Bd. XVIII, 1881).

Si nous faisons la transformation antérieure

$$\sqrt{\nu^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - b^2}\cos\varphi, \qquad \sqrt{a^2 - \nu^2} = \sqrt{a^2 - b^2}\sin\varphi,$$

et si nous posons

$$\cos^2\varphi = \xi,$$

nous aurons, d'après les formules (14) et (15),

$$\mathrm{E}^m_{(k)}(\nu) = \nu^{\sigma_1}\cos^{\sigma_2}\varphi\,\sin^{\sigma_3}\varphi\,\mathrm{G}^m_k(\xi),$$

où σ_1, σ_2, σ_3, comme précédemment, représentent des nombres égaux à 0 ou 1, et où $\mathrm{G}^m_k(\xi)$ est une fonction entière de degré n relativement à ξ, $n+1$ étant le nombre des fonctions de Lamé qui appartiennent à la classe considérée. D'ailleurs l'équation

$$\mathrm{G}^m_k(\xi) = 0 \tag{24}$$

a autant de racines, entre les limites 0 et 1, que l'équation

$$\mathrm{E}^m_k(x) = 0 \tag{25}$$

a de racines, entre les limites b et a, non égales à ces dernières.

Remarquons maintenant que les racines de l'équation (24) dépendent seulement du rapport $\frac{b^2}{a^2}$, et que nous pouvons les considérer comme des fonctions de g (*voir* la fin du n° 20). Donc tout ce que l'on sait relativement à l'équation (25) peut être exprimé de la façon suivante :

Tant que g est compris entre 0 et 1, toutes les racines de l'équation (24) sont comprises entre les limites $-\frac{1-g}{2g}$ et 1, et restent distinctes, différentes de zéro et différentes de ces limites.

Puis, on peut démontrer que, tant que g n'atteint pas 0, chaque racine demeure une fonction continue de g. D'après ce qu'on vient de dire au sujet des racines de l'équation (24), il suffit pour cela de démontrer que $\tau^m_{(k)}$ est une fonction continue de g, car, comme le montrent les formules (13), (14) et (15), l'équation (24) peut toujours être mise sous une forme telle que ses coefficients soient des fonctions entières de g et de z_k, si

$$z_k = 2\tau^m_{(k)} - m(m+1).$$

Quant à la continuité de z_k, et par conséquent de $\tau^m_{(k)}$, elle résulte, pour les valeurs considérées de g, des propriétés connues des racines de l'équation qui sert à déterminer z, et de ce que cette équation se met sous la forme

$$(26)\qquad (z+\varepsilon^2)\big(z+(\varepsilon+2)^2\big)\ldots\big(z+(\varepsilon+2n)^2\big)+g\,\psi(z)=0,$$

où $\psi(z)$ représente, d'une manière générale, une fonction entière de z, d'un degré ne dépassant pas n, dont tous les coefficients sont des fonctions entières de g, et ε un des nombres 0, 1, 2; 0 correspondant toujours à des fonctions K (pour lesquelles $n=\sigma$), 1 à des fonctions L et M (pour lesquelles $n=m-\sigma-1$), et 2 à des fonctions N (pour lesquelles $n=\sigma-1$).

De tout ce qui précède, nous tirons la conclusion suivante : si, en supposant g une quantité infiniment petite, nous trouvons que l'équation (24) n'a pas de racines tendant vers zéro, le nombre de ses racines, tendant vers des limites comprises entre 0 et 1, est égal au nombre des racines de l'équation (25) comprises entre b et a, et différentes de ces dernières.

Or l'équation (26) donne, pour $g=0$,

$$(27)\qquad \lim z_k=-(\varepsilon+2k-2)^2,$$

et, par suite, les équations (13), (14), (15) conduisent aux égalités suivantes :

$$\lim\frac{\alpha_0}{\alpha_{n-k+1}}=\lim\frac{\alpha_1}{\alpha_{n-k+1}}=\ldots=\lim\frac{\alpha_{n-k}}{\alpha_{n-k+1}}=0\qquad\text{pour}\qquad 1\leqq k<n+1,$$

$$\lim\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-k+1}}=\lim\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-k+1}}=\ldots=\lim\frac{\alpha_{n-k+2}}{\alpha_{n-k+1}}=0\qquad\text{pour}\qquad 1<k\leqq n+1,$$

auxquelles il faut ajouter des égalités semblables, après avoir remplacé dans celles-ci α_i par α'_i.

On voit par là que l'équation (24) peut être présentée sous l'une des formes

$$\cos(2k-2)\varphi+\psi(\xi)=0,$$

$$\frac{\cos(2k-1)\varphi}{\cos\varphi}+\psi(\xi)=0,$$

$$\frac{\sin(2k-1)\varphi}{\sin\varphi}+\psi(\xi)=0,$$

$$\frac{\sin 2k\varphi}{\sin 2\varphi}+\psi(\xi)=0,$$

où $\psi(\xi)$ désigne, d'une manière générale, une fonction entière de degré n de ξ, dont tous les coefficients peuvent être rendus aussi petits que l'on veut, par un choix de g suffisamment petit; et ceci fait voir que, quand g tend vers zéro, $n-k+1$ racines de l'équation (24) demeurent supérieures en valeur numérique à une quantité croissant indéfiniment. Quant à ses $k-1$ autres racines, elles tendent vers $k-1$ racines distinctes, non nulles et comprises entre o et 1, de l'équation

$$\cos\left[(2k-2)\arc\cos\sqrt{\xi}\right]=0,$$

ou, etc.

Tout ceci établit l'exactitude du théorème que nous voulions démontrer.

Corollaire. — Si k a la plus grande de toutes les valeurs correspondant à la classe à laquelle appartient la fonction $E_k^m(x)$, cette dernière ne change pas de signe, quand x croît de o à b; si, au contraire, k a la plus petite de ces valeurs, cette fonction ne change pas de signe quand x croît de b à a (*voir* n° 20).

23. Nous savons que, pour m donné, tous les τ_k^m appartenant à une même classe sont différents. Mais on peut se convaincre aussi que, si les deux inégalités

$$b>0 \quad \text{et} \quad b<a$$

sont satisfaites, deux τ_k^m, appartenant à des classes différentes, ne peuvent non plus être égaux entre eux pour une même valeur de m.

En effet, si l'on admet l'égalité $\tau_k^m=\tau_s^m$, l'équation (2) conduit à la suivante :

$$\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}\left\{E_s^m(x)\frac{dE_k^m(x)}{dx}-E_k^m(x)\frac{dE_s^m(x)}{dx}\right\}=A, \tag{28}$$

où A est une constante. Or, en examinant tous les cas possibles qui peuvent ici se présenter, on trouve que le premier membre s'annule certainement ou bien pour $x=0$, ou pour $x=b$, ou pour $x=a$. Nous devons donc poser $A=0$; et alors l'équation (28) conduira à l'égalité

$$\frac{E_k(x)}{E_s(x)}=\text{const.},$$

dont l'impossibilité est évidente, E_s et E_k appartenant à des classes différentes.

Par suite, sachant que τ_k^m est une fonction continue de b, nous pouvons ranger tous les τ_k^m, correspondant à un m donné, dans un ordre décroissant ou croissant. Pour cela, nous nous servirons de la même méthode que celle que nous avons employée pour démontrer le théorème du numéro précédent, et qui consiste dans l'examen des cas limites $b=a$ et $b=0$.

En entendant par i un des nombres 1, 2, 3, 4, convenons de représenter τ^m par (k, i), si cette constante est la $k^{\text{ième}}$ de toutes les constantes τ^m qui appartiennent, pour un m donné, à la $i^{\text{ième}}$ classe et sont rangées dans un ordre décroissant. Alors, en plaçant les quantités égales dans une même colonne verticale, nous aurons pour $b=a$, d'après la formule (27), la suite décroissante de quantités suivante :

$$(29)\quad \begin{cases} \qquad\quad (1,2),\ (1,4),\ (2,2),\ (2,4),\ (3,2),\ (3,4),\ \ldots, \\ (1,1),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,3),\ (4,1),\ \ldots, \end{cases}$$

dont les termes se succèdent suivant une loi évidente.

Pour arriver à l'autre cas limite, il est plus commode de se servir des formules (9), (10), (11) et (12), dans lesquelles, pour $b=0$, il faut poser $q=0$ et $p=a^2$. D'après cela, on trouve que les limites de τ_k^m, pour les fonctions des deux premières classes, satisfont à l'équation

$$(\tau-m^2)\big(\tau-(m-2)^2\big)\ldots(\tau-\varepsilon^2)=0,$$

et, pour les fonctions des deux autres classes, à l'équation

$$\big(\tau-(m-1)^2\big)\big(\tau-(m-3)^2\big)\ldots(\tau-\varepsilon^2)=0,$$

où ε représente, comme précédemment, un des nombres 0, 1, 2. On obtient ainsi, pour $b=0$, la suite décroissante de quantités suivante, analogue à celle (29) :

$$(30)\quad \begin{cases} (1,2),\ (1,4),\ (2,2),\ (2,4),\ (3,2),\ (3,4),\ \qquad \ldots, \\ (1,1),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,3),\ (4,1),\ \ldots. \end{cases}$$

La comparaison des séries (29) et (30) montre que, pour b positif et inférieur à a, les nombres τ_k^m, rangés dans l'ordre décroissant, forment la suite

$$(31)\quad (1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,1)\ \ldots,$$

dont les quatre derniers termes sont : pour m pair,

$$\left(\frac{m}{2},2\right),\quad \left(\frac{m}{2},3\right),\quad \left(\frac{m}{2},4\right),\quad \left(\frac{m}{2}+1,1\right),$$

et pour m impair,

$$\left(\frac{m-1}{2},4\right),\quad \left(\frac{m+1}{2},1\right),\quad \left(\frac{m+1}{2},2\right),\quad \left(\frac{m+1}{2},3\right).$$

La suite (31) met en évidence une loi très simple d'alternance des classes dans la série de tous les τ_k^m, rangés dans l'ordre décroissant.

Partout dans la suite, où nous aurons à considérer les fonctions $\mathbf{E}_k^m$ et E_k^m, nous donnerons à k les valeurs 1, 2, ..., $2m+1$, en supposant qu'*un accroissement de k corresponde à une diminution de* τ_k^m. Avec cette convention, la loi trouvée pourra être exprimée de la manière suivante :

Si l'on désigne par o *la quatrième classe des fonctions de Lamé, la fonction* E_k^m *appartiendra à la classe* i, *quand le nombre* k, *après division par* 4, *donne pour reste le nombre* i.

C'est ainsi que la fonction E_{2m+1}^m appartiendra à la première ou à la troisième classe, selon que m est pair ou impair.

Jusqu'ici, nous n'avons considéré τ_k^m que comme une fonction de k. En le considérant maintenant comme une fonction de m et de k, nous pourrons démontrer les théorèmes suivants :

Théorème II. — *Si* $f(m)$ *désigne une des fonctions* $2m-2$, $2m-1$, $2m$ *ou* $2m+1$, *on a*

$$\tau_{f(m+1)}^{m+1}-\tau_{f(m)}^{m}=2(m+1)\frac{b^2\theta}{a^2+b^2},$$

où θ *est une fraction positive.*

Remarquons, en effet, que si $\tau_{f(m)}^m$ appartient à la 1re, 2e, 3e ou 4e classe, $\tau_{f(m+1)}^{m+1}$, appartiendra respectivement à la 3e, 4e, 1re ou 2e classe, et que par conséquent l'expression

$$E_{f(m)}^m(\mu)\frac{d\,E_{f(m+1)}^{m+1}(\mu)}{d\beta}-E_{f(m+1)}^{m+1}(\mu)\frac{d\,E_{f(m)}^m(\mu)}{d\beta}$$

s'annulera aussi bien pour $\mu=0$ que pour $\mu=b$. Par suite, l'équation (5) conduit à l'égalité

$$\int_0^{\eta}[2(m+1)\mu^2-p(\tau_{f(m+1)}^{m+1}-\tau_{f(m)}^{m})]\,E_{f(m)}^m(\mu)\,E_{f(m+1)}^{m+1}(\mu)\,d\beta=0.$$

Or chacune des fonctions $E_k(\mu)$, qui figurent sous le signe de l'intégrale, correspond à la plus grande de toutes les valeurs que peut prendre k pour la classe de cette fonction et, par conséquent, en vertu du corollaire du théorème I, aucune d'elles ne change de signe entre les limites de l'intégration. L'égalité obtenue n'est donc possible que si la fonction

$$2(m+1)\mu^2-p(\tau_{f(m+1)}^{m+1}-\tau_{f(m)}^{m})$$

change de signe entre ces limites; d'où résulte l'exactitude de notre théorème.

Il faut remarquer que, tant que b n'est pas nul, θ ne peut ni s'annuler, ni devenir égal à l'unité.

Corollaire I. — Quel que soit l'entier positif n, on a

$$\tau_{f(m)}^{m}-\tau_{f(n)}^{n}=(m-n)(m+n+1)\frac{b^2\theta}{a^2+b^2},$$

où θ est une fraction positive.

Les formules (9) et (12) montrent que $\tau_1^1 = \tau_4^2 = 1$. En posant dans l'égalité précédente $f(m) = 2m$ et $n = 2$, nous obtenons donc encore ce qui suit :

Corollaire II. — Pour $m > 1$ et $k < 2m+1$, on a $\tau_k^m \geqq \tau_1^1 = 1$, où le signe de l'égalité se rapporte seulement au cas de $m = 2$, $k = 4$.

Théorème III. — *Si i est un des nombres* 1, 2, 3, 4, *on a*

$$\tau_i^{m+1} - \tau_i^m = 2(m+1)\frac{a^2\theta + b^2(1-\theta)}{a^2+b^2},$$

où θ est une fraction positive.

Comme, dans le cas considéré, les deux τ appartiennent à la même classe, l'expression

$$\mathrm{E}_i^m(\nu)\frac{d\,\mathrm{E}_i^{m+1}(\nu)}{d\gamma} - \mathrm{E}_i^{m+1}(\nu)\frac{d\,\mathrm{E}_i^m(\nu)}{d\gamma}$$

s'annule, tant pour $\nu = b$ que pour $\nu = a$, et par conséquent l'équation (6) conduit à l'égalité

$$\int_0^\zeta [p(\tau_i^{m+1} - \tau_i^m) - 2(m+1)\nu^2]\,\mathrm{E}_i^m(\nu)\,\mathrm{E}_i^{m+1}(\nu)\,d\gamma = 0.$$

En remarquant que, en vertu du corollaire du théorème I, les fonctions E_i^m et E_i^{m+1} ne changent pas de signe entre les limites d'intégration, nous concluons, en nous appuyant sur cette égalité, comme précédemment, à l'exactitude du théorème proposé.

Dans le cas considéré, θ ne peut devenir égal ni à 0, ni à 1, tant que $b < a$.

Corollaire I. — Si θ est une fraction positive, on a

$$\tau_i^m - \tau_i^n = (m-n)(m+n+1)\frac{a^2\theta + b^2(1-\theta)}{a^2+b^2}.$$

Corollaire II. — Pour $m > 0$, on a

$$\tau_k^m \leqq 1 + (m-1)(m+2)\frac{a^2}{a^2+b^2} \quad (^1),$$

où le signe d'égalité se rapporte seulement au cas de $m = k = 1$.

---

(1) Cette inégalité donne une valeur plus faible, pour la limite supérieure de τ_k^m, que celle qu'a trouvée Liouville, savoir $m(m+1)\dfrac{a^2}{a^2+b^2}$. *Voir* Liouville, *Lettres sur diverses questions d'Analyse et de Physique mathématique*, etc. (*J. de Liouville*, t. XI, 1846, p. 262-263).

24. Nous allons maintenant démontrer ce qui suit :

Lemme I. — *Si, pour $n \geqq m$, on a $\tau_s^n \geqq \tau_k^m$ (où les signes d'égalité ne doivent pas avoir lieu simultanément), et si le plus petit résidu positif du nombre $s-k$ suivant le module 4 est égal à $1-(-1)^{n-m}$ ou à $2-(-1)^{n-m+k}$, le rapport*

$$\frac{\mathbf{E}_s^n(\lambda)}{\mathbf{E}_k^m(\lambda)}$$

croît quand λ croît.

Remarquons, en effet, que la condition énoncée ici relativement à $s-k$ est équivalente à celle-ci : pour $n-m$ pair, les fonctions $\mathbf{E}_s^n$ et $\mathbf{E}_k^m$ ou bien appartiennent à la même classe, ou l'une à la première, l'autre à la quatrième, ou enfin l'une à la seconde, l'autre à la troisième, et, pour $n-m$ impair, l'une à la première ou à la quatrième classe, l'autre à la seconde ou à la troisième. Or, dans ces conditions, la fonction

$$\mathbf{E}_k^m(\lambda)\frac{d\,\mathbf{E}_s^n(\lambda)}{d\lambda} - \mathbf{E}_s^n(\lambda)\frac{d\,\mathbf{E}_k^m(\lambda)}{d\lambda}$$

s'annule pour $\lambda = 0$, et, par suite, l'équation (8) conduit à l'égalité

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_k^m(\lambda)\frac{d\,\mathbf{E}_s^n(\lambda)}{d\alpha} - \mathbf{E}_s^n(\lambda)\frac{d\,\mathbf{E}_k^m(\lambda)}{d\alpha}\\ = \int_0^\alpha [p(\tau_s^n - \tau_k^m) + (n-m)(n+m+1)\lambda^2]\,\mathbf{E}_k^m(\lambda)\,\mathbf{E}_s^n(\lambda)\,d\alpha,\end{aligned}$$

de laquelle résulte l'exactitude du lemme.

Corollaire I. — Si, pour $s > k$, la différence $s-k$, après division par 4, donne un reste égal à zéro ou à $2-(-1)^k$, le rapport

$$\frac{\mathbf{E}_s^m(\lambda)}{\mathbf{E}_k^m(\lambda)}$$

décroît quand λ croît.

Corollaire II. — Si $f(m)$ désigne une des fonctions $2m-2$, $2m-1$, $2m$ ou $2m+1$, le rapport

$$\frac{\mathbf{E}_{f(m+1)}^{m+1}(\lambda)}{\mathbf{E}_{f(m)}^m(\lambda)}$$

croît quand λ croît (théorème II).

Corollaire III. — Si i est un des nombres 1, 2, 3, 4, le rapport

$$\frac{\mathbf{E}_i^{m+2}(\lambda)}{\mathbf{E}_i^m(\lambda)}$$

croît quand λ croît (théorème III).

Corollaire IV. — Si, pour $m > 1$, le nombre k, après division par 4, donne pour reste $1 + (-1)^m$ ou $2 + (-1)^m$, le rapport

$$\frac{\mathbf{E}_k^m(\lambda)}{\mathbf{E}_1^1(\lambda)}$$

croît quand λ croît (corollaire II du théorème II).

Théorème IV. — *Le produit*

$$\frac{1}{2m+1}\mathbf{E}_k^m(\lambda)\,\mathbf{F}_k^m(\lambda)$$

croît, quand k augmente de $2 - (-1)^k$, et, pour k égal à l'un des nombres 1, 2, 3, 4, *décroît, quand m augmente de deux unités.*

Théorème V. — *Si $f(m)$ représente l'une des fonctions* $2m - 2$, $2m - 1$, $2m$ *ou* $2m + 1$, *l'expression*

$$\frac{1}{2m+1}\mathbf{E}_{f(m)}^m(\lambda)\,\mathbf{F}_{f(m)}^m(\lambda)$$

décroît quand m croît.

Théorème VI. — *Si, pour $m > 1$, le reste obtenu, après division de k par 4, est égal à $1 + (-1)^m$ ou à $2 + (-1)^m$, la fonction*

$$\frac{1}{3}\mathbf{E}_1^1(\lambda)\,\mathbf{F}_1^1(\lambda) - \frac{1}{2m+1}\mathbf{E}_k^m(\lambda)\,\mathbf{F}_k^m(\lambda)$$

conserve des valeurs positives pour toutes les valeurs positives finies de λ.

Nous nous servirons, pour démontrer ces théorèmes, de la formule (4), qui donne

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2m+1}\mathbf{E}_k^m(\lambda)\,\mathbf{F}_k^m(\lambda) - \frac{1}{2n+1}\mathbf{E}_s^n(\lambda)\,\mathbf{F}_s^n(\lambda)\\ &\quad = \int_\lambda^\infty \left[\frac{\mathbf{E}_k^m(\lambda)}{\mathbf{E}_s^n(x)}\right]^2 \left\{\left[\frac{\mathbf{E}_s^n(x)}{\mathbf{E}_k^m(x)}\right]^2 - \left[\frac{\mathbf{E}_s^n(\lambda)}{\mathbf{E}_k^m(\lambda)}\right]^2\right\} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}};\end{aligned}$$

et cette égalité, en vertu des corollaires I et III du lemme I, conduit au théorème IV, en vertu du corollaire II au théorème V, et en vertu du corollaire IV au théorème VI.

Il faut remarquer que dans les cas limites, $b = 0$ et $b = a$, l'accroissement et le décroissement peuvent se changer en invariabilité.

Nous pourrions terminer par là le Chapitre des fonctions de Lamé, car les propriétés énoncées suffisent pour résoudre la question de la stabilité des ellipsoïdes à trois axes. Mais il nous paraît opportun d'appeler ici l'attention sur les propriétés analogues des fonctions de Lamé à argument réel dépassant a. C'est pourquoi, avant de passer au Chapitre suivant, nous nous arrêterons sur ces propriétés, d'autant qu'elles peuvent jouer un rôle semblable pour la résolution de notre problème.

25. Nous supposerons dans ce numéro $\lambda > a$.

Dans cette hypothèse, on peut démontrer les propositions suivantes :

LEMME II. — *Si, pour $n \geqq m$,*

$$\tau_s^n - \tau_k^m \leqq (n-m)(n+m+1)\frac{a^2}{a^2+b^2}$$

(*où les signes d'égalité ne doivent pas avoir lieu simultanément*), *et si le plus petit résidu positif du nombre $s-k$ suivant le module 4 est égal à* 0 *ou à* $2+(-1)^k$, *le rapport*

$$\frac{E_s^n(\lambda)}{E_k^m(\lambda)}$$

croît quand λ croît.

Les conditions énoncées ici sont équivalentes aux suivantes : les fonctions E_s^n et E_k^m appartiennent ou bien à la même classe, ou l'une à la première, l'autre à la deuxième, ou enfin l'une à la troisième, l'autre à la quatrième. Comme, dans ces conditions, la fonction

$$E_k^m(\lambda)\frac{d\,E_s^n(\lambda)}{d\alpha_1} - E_s^n(\lambda)\frac{d\,E_k^m(\lambda)}{d\alpha_1}$$

s'annule pour $\lambda = a$, l'équation (7) conduit à l'égalité

$$\begin{aligned} & E_k^m(\lambda)\frac{d\,E_s^n(\lambda)}{d\alpha_1} - E_s^n(\lambda)\frac{d\,E_k^m(\lambda)}{d\alpha_1} \\ & \quad = \int_0^{\alpha_1} [(n-m)(n+m+1)\lambda^2 - p(\tau_s^n - \tau_k^m)]\, E_k^m(\lambda)\, E_s^n(\lambda)\, d\alpha_1, \end{aligned}$$

et de là résulte l'exactitude du lemme.

Corollaire I. — Si, pour $s > k$, la différence $s-k$, après division par 4, donne pour reste 0 ou $2+(-1)^k$, le rapport

$$\frac{E_s^m(\lambda)}{E_k^m(\lambda)}$$

croît quand λ croît.

Corollaire II. — Si i est un des nombres 1, 2, 3, 4, le rapport

$$\frac{E_i^{m+1}(\lambda)}{E_i^m(\lambda)}$$

croît quand λ croît (théorème III).

Corollaire III. — Si $f(m)$ désigne une des fonctions $2m-2$, $2m-1$, $2m$ ou $2m+1$, le rapport

$$\frac{E_{f(m+2)}^{m+2}(\lambda)}{E_{f(m)}^m(\lambda)}$$

croît quand λ croît (théorème II).

Corollaire IV. — Si, pour $m>1$, le nombre k, après division par 4, donne pour reste 0 ou 3, le rapport

$$\frac{E_k^m(\lambda)}{E_3^1(\lambda)}$$

croît quand λ croît (corollaire I du théorème III).

En s'appuyant sur ces résultats, on peut démontrer les théorèmes suivants :

Théorème VII. — *Le produit*

$$\frac{1}{2m+1} E_k^m(\lambda) F_k^m(\lambda)$$

décroît quand k croît de $2+(-1)^k$, et, pour k égal à l'un des nombres 1, 2, 3, 4, *décroît quand m croît.*

Théorème VIII. — *Si $f(m)$ désigne une des fonctions $2m-2$, $2m-1$, $2m$ ou $2m+1$, l'expression*

$$\frac{1}{2m+1} E_{f(m)}^m(\lambda) F_{f(m)}^m(\lambda)$$

décroît quand m croît de deux unités.

Théorème IX. — *Si, pour $m>1$, le nombre k, après division par 4, donne pour reste* 0 *ou* 3, *la fonction*

$$\frac{1}{3} E_3^1(\lambda) F_3^1(\lambda) - \frac{1}{2m+1} E_k^m(\lambda) F_k^m(\lambda)$$

conserve des valeurs positives pour toute valeur finie de λ dépassant a.

Pour démontrer ces théorèmes, on peut se servir de la formule (3).

Relativement aux cas limites, $b=0$ et $b=a$, on doit faire la remarque antérieure (n° **24**).

CHAPITRE V.

LA STABILITÉ DES ELLIPSOIDES A TROIS AXES INÉGAUX.

26. D'après les recherches de Meyer (1) et de Liouville (2) sur les figures ellipsoïdales d'équilibre à trois axes inégaux, découvertes par Jacobi (3), on sait que, à chaque vitesse angulaire ne dépassant pas $\sqrt{2\pi f\rho}\,\sqrt{0,18711\ldots}$, correspond toujours un ellipsoïde à trois axes et, d'ailleurs, un seul, dont le plus petit axe sert d'axe de rotation au liquide; au contraire, pour des vitesses angulaires supérieures, les ellipsoïdes à trois axes ne peuvent être des figures d'équilibre. L'ellipsoïde, correspondant à la valeur la plus grande de la vitesse angulaire, est l'ellipsoïde planétaire de révolution, dont l'excentricité est égale à 0,8126.... Pour une diminution continue de la vitesse angulaire à partir de son maximum, cet ellipsoïde de révolution se transforme d'une façon continue en un ellipsoïde à trois axes, dont le plus petit axe diminue constamment, dont l'axe moyen diminue encore plus vite, et dont le plus grand axe croît constamment, et quand la vitesse angulaire tend vers zéro, l'axe moyen tend aussi vers zéro et son rapport au plus petit tend vers la limite 1. Le liquide prend donc alors la forme d'un fuseau infiniment effilé. Quant au moment des quantités de mouvement, quand la vitesse angulaire décroît depuis son maximum jusqu'à zéro, il croît constamment depuis un certain minimum jusqu'à l'infini.

Nous prendrons l'équation de l'ellipsoïde sous la forme

$$\frac{x^2}{R^2+a^2}+\frac{y^2}{R^2+b^2}+\frac{z^2}{R^2}=1,$$

en supposant $a>b>0$ et $R>0$. Alors, si nous posons

$$D=\sqrt{(\lambda^2+a^2)(\lambda^2+b^2)},$$

(1) C.-O. Meyer, *De æquilibrii formis ellipsoidicis* (*Crelle's J.*, Bd. 24, 1842).

(2) *Journ. de l'École Polytechnique*, XXIII^e Cahier. — *Journ. de Liouville*, t. XVI, 1851.

(3) C.-G.-J. Jacobi, *Ueber die Figur des Gleichgewichts* (*Jacobi's Werke*, herausgegeben von Weierstrass, Bd. II, 1882).

les conditions d'équilibre s'exprimeront, comme on sait, par le système des deux équations suivantes :

$$(1)\qquad \frac{\omega^2}{4\pi f\rho R\sqrt{R^2+a^2}\sqrt{R^2+b^2}} = \frac{a^2}{R^2+a^2}\int_R^\infty \frac{(\lambda^2-R^2)\,d\lambda}{\lambda^2(\lambda^2+a^2)D} = \frac{b^2}{R^2+b^2}\int_R^\infty \frac{(\lambda^2-R^2)\,d\lambda}{\lambda^2(\lambda^2+b^2)D},$$

et, pour ce qui suit, il importe d'attirer l'attention sur ce fait que le résultat de l'élimination de ω^2 entre ces équations, pour des ellipsoïdes à trois axes, peut être mis sous la forme

$$(2)\qquad R^2\int_R^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 D} - (R^2+a^2)(R^2+b^2)\int_R^\infty \frac{d\lambda}{D^3} = 0.$$

Les égalités (1) définissent les rapports $\frac{a}{R}$ et $\frac{b}{R}$ en fonction de ω. Si l'on introduit, comme le font Meyer et Liouville, les rapports s et t des carrés des axes, en posant

$$(3)\qquad a^2 = \frac{1-t}{t}R^2, \qquad b^2 = \frac{1-s}{s}R^2,$$

et si l'on pose en outre

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = v,$$

les équations (1) prendront la forme suivante :

$$(4)\qquad v = (1-s)(1-t)\int_0^\infty \frac{u\,du}{\Delta^3}$$

et

$$(5)\qquad (1-s-t)\int_0^\infty \frac{u\,du}{\Delta^3} - st\int_0^\infty \frac{u^2\,du}{\Delta^3} = 0,$$

où

$$\Delta = \sqrt{(1+u)(1+su)(1+tu)}.$$

Après avoir déterminé s et t, d'après ces équations, pour une valeur donnée de v, on trouve R par la formule

$$(6)\qquad R = \sqrt[3]{\frac{3Q}{4\pi}}\,(st)^{\frac{1}{6}},$$

dans laquelle, comme précédemment, Q représente le volume du liquide.

Comme le montrent les formules (3), s et t sont des fractions positives, vérifiant l'inégalité $s > t$. D'ailleurs, d'après l'équation (5), elles doivent satisfaire à la condition

$$s + t \leqq 1,$$

où le signe d'égalité ne peut se rapporter qu'au cas de $t = 0$.

Dans son second Mémoire sur les ellipsoïdes de Jacobi, Liouville (¹) démontre que, quant v croît de 0 jusqu'à un certain maximum (0,18711...), t et st croissent constamment depuis 0, et s décroît depuis 1, et, quand v atteint sa plus grande valeur, s devient égal à t. Il résulte de là que, quand v croît depuis 0, R et $\frac{b}{R}$ croissent aussi constamment à partir de 0, et $\frac{a}{R}$ et a décroissent depuis ∞.

Après ces remarques préliminaires, revenons à notre problème, l'étude de la stabilité des ellipsoïdes de Jacobi.

27. Exprimons les coordonnées rectangulaires du point x, y, z, au moyen des coordonnées λ, θ, ψ ou λ, μ, ν, par les formules (16) du Chapitre précédent. L'équation de l'ellipsoïde considéré se ramènera à la forme $\lambda = R$, et si nous posons

$$\begin{aligned} \varkappa &= \sqrt{(R^2+\mu^2)(R^2+\nu^2)} \\ &= \sqrt{(R^2+a^2)(R^2+b^2)\cos^2\theta + R^2(R^2+a^2)\sin^2\theta\sin^2\psi + (R^2+b^2)R^2\sin^2\theta\cos^2\psi}, \end{aligned}$$

l'élément de surface de cet ellipsoïde s'exprimera de la manière suivante :

$$ds = (\nu^2 - \mu^2)\varkappa\, d\beta\, d\gamma = \varkappa \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Nous concluons de là, comme dans l'étude des ellipsoïdes de révolution, que, si l'on développe la fonction $\varkappa\,\delta n$ en série de fonctions sphériques de θ et ψ, pour que les conditions (23) et (24) du premier Chapitre soient satisfaites, cette série ne doit pas renfermer de fonctions sphériques d'ordre nul et du premier ordre.

Nous poserons par suite

$$(7) \qquad \varkappa\,\delta n = \sum_{m=2}^{m=\infty} Y_m(\theta, \psi) = \sum_{m=2}^{m=\infty} Y_m[\mu, \nu],$$

où $Y_m[\mu, \nu]$ est la transformée, pour les variables μ et ν, de la fonction sphérique de θ et ψ d'ordre m, $Y_m(\theta, \psi)$. Nous développerons cette fonction en série

(¹) *Mémoire sur les figures ellipsoïdales à trois axes inégaux, qui peuvent convenir à l'équilibre d'une masse liquide homogène, douée d'un mouvement de rotation* (*Journ. de Liouville*, t. XVI, 1851).

ordonnée suivant les produits de fonctions de Lamé (n° 21)

$$\text{(8)}\qquad Y_m[\mu, \nu] = \sum_{i=1}^{i=2m+1} \varepsilon_i^m \, E_i^m(\mu)\, E_i^m(\nu),$$

où ε_i^m sont des constantes.

Nous remarquons ensuite que, en vertu de la condition d'équilibre,

$$\frac{\partial U}{\partial n} = A\varkappa,$$

où A est une constante que nous pourrons déterminer en faisant dans cette équation $\theta = 0$. Nous aurons alors

$$\varkappa = \sqrt{(R^2 + a^2)(R^2 + b^2)},$$

et $\frac{\partial U}{\partial n}$ deviendra l'accélération de la pesanteur au pôle, c'est-à-dire

$$4\pi f\rho \sqrt{R^2 + a^2}\sqrt{R^2 + b^2}\, R^2 \int_R^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 D}.$$

Nous trouvons ainsi

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 4\pi f\rho\, R^2 \int_R^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 D}\,\varkappa.$$

Par suite, en posant

$$H_i^m = \varepsilon_i^m E_i^m(\mu)\, E_i^m(\nu),$$

nous aurons, d'après la formule (22) du Chapitre IV,

$$\int \frac{\partial U}{\partial n} (\delta n)^2\, ds = 4\pi f\rho R^2 \int_R^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 D} \sum_{m=2}^{m=\infty} \sum_{i=1}^{i=2m+1} \int (H_i^m)^2\, d\sigma,$$

où $d\sigma$, comme précédemment, représente un élément de la surface de la sphère de rayon 1, sur laquelle s'effectue l'intégration.

Puis, d'après les formules (21) et (22) du Chapitre précédent, il viendra

$$\int\int \frac{\delta n\, \delta n'\, ds\, ds'}{r} = 4\pi \sum_{m=2}^{m=\infty} \sum_{i=1}^{i=2m+1} \frac{E_i^m(R)\, F_i^m(R)}{2m+1} \int (H_i^m)^2 d\sigma,$$

et, par conséquent, les formules (27) et (39) du Chapitre I donneront

$$\text{(9)}\qquad \delta^2 \Pi_1 = 4\pi f\rho \sum_{m=2}^{m=\infty} \sum_{i=1}^{i=2m+1} T_i^m \int (H_i^m)^2 d\sigma + \Omega,$$

où

$$(10)\qquad T_i^m = R^2 \int_R^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 D} - \frac{1}{2m+1} E_i^m(R) F_i^m(R),$$

ce qui, d'après les formules (9) et (4) du Chapitre précédent, peut être aussi présenté sous la forme

$$(11)\qquad T_i^m = \frac{1}{3} E_1^1(R) F_1^1(R) - \frac{1}{2m+1} E_i^m(R) F_i^m(R).$$

Quant au terme Ω, nous remarquons que

$$E_1^2(\mu) = \mu^2 - k_1, \qquad E_3^2(\mu) = \mu^2 - k_3,$$

où

$$(12)\qquad k_1 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 3q}}{3}, \qquad k_3 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 3q}}{3},$$

et que par suite, d'après les formules (16) du Chapitre précédent,

$$(13)\qquad x^2 + y^2 = g_0 + g_1 E_1^2(\mu) E_1^2(\nu) + g_3 E_3^2(\mu) E_3^2(\nu),$$

où

$$g_0 = \frac{2R^2 + p}{3}, \qquad g_1 = -\frac{3}{2} \frac{R^2 k_3 + q}{q\sqrt{p^2 - 3q}}, \qquad g_3 = \frac{3}{2} \frac{R^2 k_1 + q}{q\sqrt{p^2 - 3q}}.$$

Par conséquent, en posant

$$(14)\qquad \int [E_1^2(\mu) E_1^2(\nu)]^2 \, d\sigma = G_1, \qquad \int [E_3^2(\mu) E_3^2(\nu)]^2 \, d\sigma = G_3,$$

nous trouverons, d'après la formule (28) du Chapitre I,

$$(15)\qquad \Omega = \frac{\omega^2}{S} (g_1 G_1 \varepsilon_1^2 + g_3 G_3 \varepsilon_3^2)^2.$$

La formule (9) montre que l'étude de la stabilité aboutit à la recherche des expressions T_i^m, analogues à celles auxquelles nous avons eu affaire dans le Chapitre sur les ellipsoïdes de révolution. Mais, avant de procéder à cette recherche, nous croyons nécessaire de montrer la signification géométrique des déplacements définis par les formules (7) et (8).

28. On voit facilement que les déplacements correspondant à une valeur quelconque de m changent la surface de l'ellipsoïde en une surface algébrique d'ordre m, différant infiniment peu de la première. Ceci résulte de ce que la fonction sphérique d'ordre m, $Y_m(\theta, \psi)$, peut toujours être mise sous la forme d'une fonction entière de degré m, de $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\psi$ et $\sin\theta\sin\psi$, et de ce que son degré ne peut être abaissé à l'aide de la relation liant ces trois quantités. On voit par là que si tous les déplacements se réduisent à ceux qui correspondent à une valeur donnée de m, $\varkappa\,\delta n$ pourra toujours être mis sous la forme d'une fonction entière de degré m, de x, y, z (coordonnées d'un point de la surface de l'ellipsoïde), et son degré ne pourra pas être abaissé à l'aide de l'équation de l'ellipsoïde, d'où résulte, en vertu des considérations développées au n° 16, ce qui a été énoncé plus haut.

Nous allons considérer maintenant les déplacements correspondant à $m = 2$, après lesquels l'ellipsoïde demeure encore un ellipsoïde. Ce nouvel ellipsoïde aura le même volume et le même centre que l'ellipsoïde primitif, et à ces conditions près, ce sera un ellipsoïde arbitraire dont la surface diffère infiniment peu de celle de l'ellipsoïde primitif.

A l'aide des formules (9), (10), (11), (12) du Chapitre IV, on trouve facilement

$$\begin{aligned}
E_1^2(\mu) &= \mu^2 - k_1,\\
E_2^2(\mu) &= \sqrt{b^2-\mu^2}\,\mu,\\
E_3^2(\mu) &= \sqrt{a^2-\mu^2}\,\mu,\\
E_4^2(\mu) &= \sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{b^2-\mu^2},\\
E_5^2(\mu) &= \mu^2 - k_5,
\end{aligned}$$

où k_1 et k_5 sont les quantités définies par les formules (12).

D'après cela, les formules (16) du Chapitre IV, où l'on posera $\lambda = R$, donnent

$$E_2^2(\mu)\,E_2^2(\nu) = ab^2\sqrt{a^2-b^2}\,\frac{y}{\sqrt{R^2+b^2}}\,\frac{z}{R},$$

$$E_3^2(\mu)\,E_3^2(\nu) = a^2b\sqrt{a^2-b^2}\,\frac{z}{R}\,\frac{x}{\sqrt{R^2+a^2}},$$

$$E_4^2(\mu)\,E_4^2(\nu) = ab(a^2-b^2)\,\frac{x}{\sqrt{R^2+a^2}}\,\frac{y}{\sqrt{R^2+b^2}},$$

$$E_1^2(\mu)\,E_1^2(\nu) = (k_1-b^2)k_1\frac{x^2}{R^2+a^2} + k_1(k_1-a^2)\frac{y^2}{R^2+b^2} + (k_1-a^2)(k_1-b^2)\frac{z^2}{R^2},$$

$$E_5^2(\mu)\,E_5^2(\nu) = (k_5-b^2)k_5\frac{x^2}{R^2+a^2} + k_5(k_5-a^2)\frac{y^2}{R^2+b^2} + (k_5-a^2)(k_5-b^2)\frac{z^2}{R^2}.$$

On voit par là que les déplacements, qui correspondent à l'indice inférieur égal à 2, 3 ou 4, peuvent toujours être considérés (si $b \neq 0$ et $b \neq a$) comme consistant en des rotations d'ensemble de toute la masse liquide respectivement autour des axes des x, des y et des z, et inversement, si tous les déplacements du liquide se réduisent à une rotation autour d'un axe quelconque, passant par l'origine des coordonnées, il n'y aura pas, dans les formules (7) et (8), d'autres termes en dehors de ceux que l'on obtient pour $m=2$ et $i=2, 3, 4$. Ainsi, par exemple, si tous les ε, à l'exception de ε_4^2, sont nuls, tous les déplacements, tant que b n'est pas égal à a, peuvent être considérés comme résultant d'une rotation de la masse liquide autour de l'axe des z, et inversement ([1]).

Puis, on voit que les déplacements correspondant à $i=1$ et $i=5$ changent l'ellipsoïde donné en un ellipsoïde concentrique, sans changer les directions de ses axes ([2]). On peut d'ailleurs trouver entre ε_1^2 et ε_5^2 une dépendance telle que le nouvel ellipsoïde représentera encore une figure d'équilibre. Comme, pour ce qui suit, il nous est nécessaire de connaître cette dépendance, nous nous occuperons maintenant de sa recherche. Mais, si nous procédions par voie directe, nous serions conduits, pour l'obtenir dans la forme sous laquelle nous aurons à nous en servir, à effectuer beaucoup de calculs. C'est pourquoi nous procéderons autrement, savoir, comme nous devrions opérer pour résoudre d'une façon générale la question des figures d'équilibre différant infiniment peu des figures ellipsoïdales.

Nous nous servirons de l'équation (35) du Chapitre I, dans laquelle $\delta\omega$ est un accroissement infiniment petit de la vitesse angulaire, définissant le passage de la figure d'équilibre considérée à la figure infiniment voisine cherchée. En remplaçant, dans cette équation, x^2+y^2 par son expression (13), et $\varkappa\,\delta n$ par le développement défini dans les formules (7) et (8), nous la mettrons facilement sous la forme

$$4\pi f\rho \sum_{m=2}^{m=\infty} \sum_{i=1}^{i=2m+1} \mathrm{T}_i^m \varepsilon_i^m \mathrm{E}_i^m(\mu)\mathrm{E}_i^m(\nu)$$
$$+\,\omega\left\{g_0+g_1\mathrm{E}_1^2(\mu)\mathrm{E}_1^2(\nu)+g_5\mathrm{E}_5^2(\mu)\mathrm{E}_5^2(\nu)\right\}\delta\omega=\frac{5}{3}\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{Q}}\,\omega\,\delta\omega;$$

et de là on tire, entre autres,

$$(16)\qquad \varepsilon_1^2=-\frac{\omega g_1\delta\omega}{4\pi f\rho\mathrm{T}_1^2},\qquad \varepsilon_5^2=-\frac{\omega g_5\delta\omega}{4\pi f\rho\mathrm{T}_5^2},$$

([1]) Pour $b=a$, les déplacements correspondant à $i=4$ ont une autre signification. (*Voir* n° 16.)

([2]) On peut remarquer que, entre les déplacements correspondant à $i=1$ et ceux qui correspondent à $i=5$, il y a une différence essentielle : les premiers changent dans le même sens le grand axe et l'axe moyen de l'ellipsoïde, et les seconds le petit et le moyen. (*Voir* corollaire du théorème I, n° 22.)

ce qui donne la dépendance cherchée

$$(17)\qquad T_1^2\frac{\varepsilon_1^2}{g_1}=T_5^2\frac{\varepsilon_5^2}{g_5}.$$

Revenons maintenant à la recherche du signe de l'expression (9).

29. En vertu du théorème VI (Chap. IV), l'expression (11) montre que T_i^m, pour $m>1$, demeure positive pour toute valeur de b non nulle, si i, après division par 4, donne pour reste $1+(-1)^m$ ou $2+(-1)^m$. Nous en concluons les inégalités suivantes :

$$T_2^2>0,\qquad T_3^2>0.$$

De plus, nous savons, d'après le théorème IV, que T_i^m décroît quand i croît de $2-(-1)^i$, et ceci conduit aux inégalités suivantes :

$$T_1^2>T_4^2>T_5^2.$$

Or, d'après la formule (10) et à l'aide des formules (4) et (12) du Chapitre précédent, on trouve

$$T_4^2=R^2\int_R^\infty\frac{d\lambda}{\lambda^2 D}-(R^2+a^2)(R^2+b^2)\int_R^\infty\frac{d\lambda}{D^3}.$$

Donc, en vertu de l'équation (2), on aura

$$(18)\qquad T_4^2=0$$

et, par conséquent [1],

$$T_1^2>0\qquad\text{et}\qquad T_5^2<0.$$

Nous allons maintenant montrer que, bien que T_5^2 soit une quantité négative, l'ensemble des termes de l'expression (9), dépendant de ε_1^2 et ε_5^2, ne peut prendre de valeurs négatives, et que, en outre, si l'on exclut les cas limites des ellipsoïdes de Jacobi, il ne peut s'annuler, ε_1^2 et ε_5^2 n'étant pas nuls simultanément.

Admettons, pour cela, que tous les ε, à l'exception de ε_1^2 et de ε_5^2, soient nuls. La formule (9), si l'on se sert de la formule (15), prendra alors la forme

$$(19)\qquad \delta^2\Pi_1=A_1(\varepsilon_1^2)^2-A_5(\varepsilon_5^2)^2+\Omega=A_1(\varepsilon_1^2)^2-A_5(\varepsilon_5^2)^2+(B_1\varepsilon_1^2+B_5\varepsilon_5^2)^2,$$

où

$$A_1=4\pi f\rho T_1^2 G_1,\qquad A_5=-4\pi f\rho T_5^2 G_5,$$

$$B_1=\frac{1}{\sqrt{S}}\omega g_1 G_1,\qquad B_5=\frac{1}{\sqrt{S}}\omega g_5 G_5,$$

---

(1) En excluant $b=a$, quand $T_5^2=0$.

de sorte que, d'après ce que l'on a démontré plus haut, A_1 et A_5 seront des quantités positives.

Nous remarquons maintenant que la formule (19) peut être mise sous la forme

$$(20) \qquad \delta^2\Pi_1 = \frac{A_1 B_5^2 - A_5 B_1^2 - A_1 A_5}{A_1 + B_1^2}(\varepsilon_5^2)^2 + \frac{[(A_1 + B_1^2)\varepsilon_1^2 + B_1 B_5 \varepsilon_5^2]^2}{A_1 + B_1^2}.$$

Or, nous savons, d'après la recherche du n° 8, que, si tous les déplacements se réduisent à des déplacements qui changent l'ellipsoïde en un autre ellipsoïde, représentant une nouvelle figure d'équilibre, l'expression $\delta^2\Pi_1 - \Omega$ prend la forme définie par la formule (37) du Chapitre I. Par suite, en posant dans l'égalité (19), conformément aux formules (16),

$$\varepsilon_1^2 = -\sqrt{S}\,\frac{B_1}{A_1}\,\delta\omega, \qquad \varepsilon_5^2 = \sqrt{S}\,\frac{B_5}{A_5}\,\delta\omega,$$

nous pouvons en conclure

$$\frac{A_1 B_5^2 - A_5 B_1^2}{A_1 A_5} = -\frac{\omega}{S}\,\frac{dS}{d\omega};$$

d'où

$$\frac{A_1 B_5^2 - A_5 B_1^2 - A_1 A_5}{A_1 A_5} = -\frac{1}{S}\,\frac{dJ}{d\omega},$$

J, comme précédemment, représentant $S\omega$. La formule (20) se réduit donc à

$$\delta^2\Pi_1 = -\frac{A_1 A_5}{S(A_1 + B_1^2)}\,\frac{dJ}{d\omega}(\varepsilon_5^2)^2 + \frac{[(A_1 + B_1^2)\varepsilon_1^2 + B_1 B_5 \varepsilon_5^2]^2}{A_1 + B_1^2}.$$

Mais, comme on l'a déjà remarqué plus haut, A_1 et A_5 sont des quantités positives; d'ailleurs, si l'on exclut les cas limites, ni A_1, ni A_5, ni B_1, ni B_5 ne peuvent s'annuler. On sait, en outre, d'après les recherches de Liouville, que $\frac{dJ}{d\omega}$ est une quantité négative qui ne peut s'annuler, quand $s > t > 0$ [1]. Nous arrivons donc à cette conclusion que $\delta^2\Pi_1$ ne peut prendre de valeurs négatives, et que, d'ailleurs, si l'on exclut les cas limites, l'égalité

$$\delta^2\Pi_1 = 0$$

a comme conséquence nécessaire les égalités : $\varepsilon_1^2 = 0$ et $\varepsilon_5^2 = 0$.

De ce que nous venons de montrer, il résulte que l'ensemble des termes de l'expression (9), dépendant des coefficients ε_i^2, ne peut prendre, pour $a > b > 0$,

---

[1] *Mémoire sur les figures ellipsoïdales, etc.* (*J. de Liouville*, t. XVI, 1851).

de valeurs négatives et s'annule seulement pour $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_3^2 = \varepsilon_5^2 = 0$. Or, le coefficient ε_4^2, demeurant en général différent de o, définit, comme nous l'avons vu, seulement une rotation de la masse liquide autour de l'axe des z. Nous en concluons donc que, *pour les déplacements et vitesses à l'instant initial, après lesquels la surface du liquide demeure ellipsoïdale pendant toute la durée du mouvement, tous les ellipsoïdes à trois axes de Jacobi sont des figures d'équilibre stable;* ce qui est conforme au résultat de Riemann, dans ses recherches sur la stabilité relativement à des déplacements et des vitesses satisfaisant aux hypothèses de Dirichlet ([1]).

30. L'analyse du Chapitre IV conduit à la conclusion que T_i^m, si l'on a simultanément $m > 2$ et $i < 2m+1$, demeure toujours positive. En effet, l'égalité (18), en vertu du théorème V, donne

$$T_{2m}^m > 0$$

pour toute valeur de m dépassant 2, et nous en déduisons, en vertu du théorème IV,

$$T_{2i}^m > 0 \quad \text{et} \quad T_{2i+1}^m > 0,$$

si i est de même parité que m et, pour la seconde inégalité, ne dépasse pas $m-2$. En rapprochant ceci de la remarque faite au commencement du numéro précédent, nous arrivons à la conclusion ci-dessus.

Il ne nous reste donc plus qu'à rechercher T_{2m+1}^m.

Les formules (4) et (11) du Chapitre précédent donnent l'expression suivante pour T_7^3 :

$$T_7^3 = R^2 \int_R^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 D} - (R^2+a^2)(R^2+h)^2 \int_R^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2+a^2)(\lambda^2+h)^2 D},$$

où h est la plus grande des racines de l'équation

$$5h^2 - 2(a^2+2b^2)h + a^2b^2 = 0,$$

laquelle, comme nous le savons, est comprise entre b^2 et a^2. Si, ensuite, on se sert de l'équation (18), cette expression se met facilement sous la forme

$$(21) \qquad T_7^3 = (R^2+a^2)\int_R^\infty \frac{(\lambda^2-R^2)[(R^2+b^2)(\lambda^2-R^2)+(R^2+h)(R^2+2b^2-h)]\,d\lambda}{(\lambda^2+h)^2 D^3}.$$

On voit par là que, tant que la condition

$$(22) \qquad R^2 + 2b^2 \geqq h$$

([1]) *B. Riemann's mathem. Werke* herausgegeben von Weber, 1876 (p. 196, 197).

est satisfaite, on a certainement $T_7^3 > 0$. Or, cette condition sera toujours satisfaite pour b suffisamment voisin de a. Par conséquent, nous pouvons affirmer que T_7^3 demeure positif, tant que le rapport du plus grand axe de l'ellipsoïde au moyen ne dépasse pas une certaine limite [en réalité supérieure à celle qui est donnée par la condition (22), conjointement avec l'équation (2)]. Pour montrer que l'inégalité $T_7^3 > 0$ n'a lieu que sous cette condition, nous allons maintenant établir que, si l'on considère T_7^3, en vertu des équations (3), (5) et (6), comme une fonction de s, l'équation

$$T_7^3 = 0 \tag{23}$$

a une racine, *et n'en a qu'une seule,* entre la plus petite valeur de s (quand $s = t = 0, 3\ldots$) et 1, différente de ces limites, et que, pour s dépassant cette racine, $T_7^3 \leqq 0$, le signe d'égalité se rapportant seulement au cas limite $s = 1$ (¹).

En posant

$$U = \frac{u}{\left(u + \frac{R^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(u + \frac{R^2 + a^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(u + \frac{R^2 + b^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(u + \frac{R^2 + h}{a^2}\right)^2},$$

$$X = \int_0^\infty \left(u + \frac{R^2 + h}{a^2}\right) U\, du, \qquad Y = \int_0^\infty U\, du,$$

nous pouvons mettre l'égalité (21) (en faisant la substitution $\lambda^2 = R^2 + a^2 u$) sous la forme suivante

$$\frac{2a^5}{(R^2 + a^2)(R^2 + b^2)} \frac{T_7^3}{Y} = \frac{X}{Y} - \frac{h - b^2}{a^2} \frac{R^2 + h}{R^2 + b^2}. \tag{24}$$

Nous savons que $\frac{R^2}{a^2}$ et $\frac{b^2}{a^2}$ sont des fonctions décroissantes de s (nº 26). En nous appuyant sur cela, nous pouvons démontrer que $\frac{h}{a^2}$ décroît, et que $\frac{h - b^2}{a^2}$

(¹) Comme

$$\int_R^\infty \frac{d\lambda}{D} = \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3Q}} (st)^{\frac{1}{3}} \int_0^\infty \frac{du}{\Delta},$$

on voit facilement que

$$\lim \left(\int_R^\infty \frac{d\lambda}{D} \right)_{t=0} = 0$$

et que, par conséquent,

$$\lim (T_l^m)_{t=0} = 0.$$

croît, quand s croît. A cet effet, il suffit de remarquer que

$$5\frac{h}{a^2} = 1 + 2\frac{b^2}{a^2} + \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} + 4\frac{b^4}{a^4}},$$

$$5\frac{h - b^2}{a^2} = 1 - 3\frac{b^2}{a^2} + \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} + 4\frac{b^4}{a^4}},$$

car

$$1 + 2x + \sqrt{1 - x + 4x^2}$$

est une fonction croissante de x, et

$$1 - 3x + \sqrt{1 - x + 4x^2}$$

une fonction décroissante.

Il en résulte que $\frac{h - b^2}{a^2}\,\frac{R^2 + h}{R^2 + b^2}$ croît, quand s croît, car

$$\frac{R^2 + h}{R^2 + b^2} = 1 + \frac{h - b^2}{a^2}\,\frac{a^2}{R^2 + b^2}.$$

Nous allons maintenant démontrer que $\frac{X}{Y}$ est une fonction décroissante de s.

En posant

$$\frac{X}{Y} = K \qquad \text{et} \qquad \frac{R^2 + h}{a^2} = \alpha,$$

nous trouvons

$$Y^2\frac{dK}{d\alpha} = Y^2 + \frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty U^2\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{U'}{U}\right)(u' - u)\,du\,du',$$

où U' est ce que devient U, après qu'on y a remplacé u par u'. Or, on a

$$\frac{U'}{U} = \frac{u'}{u}\left(\frac{u + \frac{R^2}{a^2}}{u' + \frac{R^2}{a^2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{u + \frac{R^2 + a^2}{a^2}}{u' + \frac{R^2 + a^2}{a^2}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{u + \frac{R^2 + b^2}{a^2}}{u' + \frac{R^2 + b^2}{a^2}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{u + \alpha}{u' + \alpha}\right)^2.$$

Donc, en vertu de ce que l'on a démontré plus haut, on peut conclure que, pour $u' > u$, $\frac{U'}{U}$ est une fonction croissante de α, et, par conséquent, que

$$(u' - u)\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{U'}{U}\right)$$

ne peut être négatif.

Nous voyons ainsi que K est une fonction croissante de α, d'où résulte ce que nous avions en vue de démontrer.

Ce que nous venons de montrer conduit à la conclusion que le second membre de l'égalité (24) est une fonction décroissante de s. Mais nous avons vu que, pour s suffisamment voisin de son minimum, il est positif; et, d'autre part, comme

$$\frac{h-b^2}{a^2}\,\frac{R^2+h}{R^2+b^2}$$

croît indéfiniment, quand s tend vers 1, on voit que, pour s suffisamment voisin de 1, il sera négatif. Par conséquent, T_7^3 étant une fonction continue de s, nous reconnaissons l'exactitude de ce qui a été dit relativement à l'équation (23).

Nous savons, d'après le théorème V, que T_{2m+1}^m (en excluant, bien entendu, le cas limite $s=1$) est une fonction croissante de m. Par conséquent, tant que $T_7^3>0$, tous les T_{2m+1}^m, qui correspondent à des valeurs de m dépassant 3, conserveront des valeurs positives, et, en vertu de tout ce qui précède, $\delta^2\Pi_1$ ne pourra prendre de valeurs négatives; d'ailleurs, si tous les ε_i^m, autres que ε_4^2, ne sont pas nuls simultanément, cette seconde variation ne pourra s'annuler (en excluant le cas limite $s=t$). Il résulte de là que la résolution de l'équation (23) doit donner une limite supérieure de s, ou une limite inférieure de t, pour tous les ellipsoïdes de Jacobi que nous avons le droit de regarder comme stables. Nous devons donc en venir maintenant à la résolution de cette équation ([1]).

31. En entendant par T_7^3 l'expression (21), et en nous servant de l'égalité identique ([2])

$$2h(a^2-h)(b^2-h)\int_R^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2+a^2)(\lambda^2+h)^2 D}$$

$$=(2b^2-3h)\int_R^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2+a^2)D}+b^2\int_R^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2+b^2)D}+\frac{h-b^2}{R^2+h}\,\frac{R}{\sqrt{(R^2+a^2)(R^2+b^2)}},$$

([1]) Les calculs qui constituent l'objet du numéro suivant ont été refaits, dans ces derniers temps, par M. Darwin. *Voir* son Mémoire : *On the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid* (*Phil. Trans.*, A, vol. CXCVIII, 1902). Sans doute, M. Darwin n'avait pas connaissance du présent travail, car il ne le cite pas. D'ailleurs, aux pages 321, 327 et 331 de son Mémoire, le savant anglais dit qu'il lui semble probable que l'équation dont il s'occupe n'a qu'une seule solution, mais qu'il ne l'a pas pu prouver; et cependant cette proposition se trouve établie dans ce travail, car l'équation dont parle M. Darwin n'est autre chose que l'équation (23). L.

([2]) Par égalité identique, nous entendons ici, et partout dans la suite, toute égalité, entre des quantités dépendant de s et de t, qui ne suppose aucune dépendance entre ces dernières.

nous obtenons l'égalité identique suivante :

$$\frac{a^2-b^2}{R^2+a^2}T_7^3=(R^2+b^2)\left\{\int_R^\infty\frac{d\lambda}{(\lambda^2+b^2)D}-\int_R^\infty\frac{d\lambda}{(\lambda^2+a^2)D}\right\}$$

$$-\frac{(a^2-b^2)(R^2+h)^2}{2h(a^2-h)(b^2-h)}\left\{(2b^2-3h)\int_R^\infty\frac{d\lambda}{(\lambda^2+a^2)D}\right.$$

$$\left.+b^2\int_R^\infty\frac{d\lambda}{(\lambda^2+b^2)D}+\frac{h-b^2}{R^2+h}\frac{R}{\sqrt{(R^2+a^2)(R^2+b^2)}}\right\}.$$

Si nous posons maintenant

$$\frac{h}{a^2}=y,\qquad \frac{a^2-b^2}{a^2}=k^2,\qquad \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}=\sin\varphi,$$

en supposant φ compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, et si nous introduisons les notations de Legendre pour les intégrales elliptiques de première et seconde espèces, avec module k et amplitude φ, cette égalité prendra la forme suivante

$$\frac{(s-t)^2}{st}\frac{a}{2}T_7^3=\frac{2-k^2}{2(1-k^2)}E(k,\varphi)-F(k,\varphi)-\frac{k^2}{1-k^2}\frac{\sqrt{s(1-t)}}{2}$$

$$-\frac{k^2(3y-1+k^2)st(1+x)^2}{4y(1-y)(y-1+k^2)(1-t)}\left[F(k,\varphi)-\frac{3y-1+2k^2}{3y-1+k^2}E(k,\varphi)+\frac{k^2\sqrt{1-t}}{(3y-1+k^2)(1+x)\sqrt{s}}\right],$$

où k et φ sont liés à s et t par les équations

$$k^2=\frac{s-t}{s(1-t)},\qquad t=\cos^2\varphi,$$

où y est la plus grande racine de l'équation

$$5y^2-2(3-2k^2)y+1-k^2=0,$$

et où

$$x=y\,\mathrm{tang}^2\varphi=y\frac{1-t}{t}. \tag{25}$$

On obtient de plus facilement l'égalité identique suivante :

$$\frac{(s-t)^2\sqrt{1-t}}{4t\sqrt{s}}\int_0^\infty\frac{(1-s-t-stu)u\,du}{\Delta^3}$$

$$=\frac{(s-t)^2+s+t-2st}{2t(1-s)}E(k,\varphi)-F(k,\varphi)-\frac{(s-t)(2s-t)\sqrt{1-t}}{2t(1-s)\sqrt{s}}.$$

Nous remarquons maintenant que l'intégrale, qui figure dans le premier membre de cette égalité, représente le premier membre de l'équation (5). Si donc nous posons

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2-k^2}{2(1-k^2)}E(k,\varphi) - F(k,\varphi) - \frac{k^2}{1-k^2}\frac{\sqrt{s(1-t)}}{2} \\
&\quad - \frac{k^2(3y-1+k^2)st(1+x)^2}{4y(1-y)(y-1+k^2)(1-t)}\left[F(k,\varphi) - \frac{3y-1+2k^2}{3y-1+k^2}E(k,\varphi) + \frac{k^2\sqrt{1-t}}{(3y-1+k^2)\sqrt{s}(1+x)}\right],
\end{aligned}$$

$$B = \frac{(s-t)^2+s+t-2st}{2t(1-s)}E(k,\varphi) - F(k,\varphi) - \frac{(s-t)(2s-t)\sqrt{1-t}}{2t(1-s)\sqrt{s}},$$

notre problème consistera dans la résolution des deux équations

$$A = 0, \tag{26}$$

$$B = 0 \tag{27}$$

avec deux inconnues s et t. La question se réduira donc à la recherche et au rapprochement successif des limites entre lesquelles sont comprises les racines de ces équations, et ce procédé reposera sur les considérations suivantes.

La fonction A conserve toujours le même signe que l'expression (24), et B le même signe que la fonction représentant le premier membre de l'équation (5). Quant à l'expression (24), on a démontré dans le numéro précédent que, si s et t sont liés entre eux par l'équation (5), c'est une fonction décroissante de s et, par conséquent, une fonction croissante de t. Or, cette démonstration était basée seulement sur ce que $\frac{R^2}{a^2}$ est une fonction croissante de t, et $\frac{b^2}{a^2}$ une fonction décroissante de s et une fonction croissante de t [1]. Nous pourrions donc démontrer, par le même procédé, que, si l'on considère s et t comme des variables indépendantes, l'expression (24) est une fonction décroissante de s et une fonction croissante de t. D'autre part, Liouville a démontré que la fonction représentant le premier membre de l'équation (5) décroît quand s et t croissent, et que, si l'on désigne par τ le nombre $(0,3\ldots)$, qui satisfait à cette équation dans l'hypothèse $s=t$, pour toute valeur de t ne dépassant pas τ, on peut trouver une valeur de s telle que cette équation se trouve satisfaite, ainsi que, pour toute valeur de s dépassant τ, on peut trouver une valeur de t telle qu'il en soit de même [2].

De ce qu'on vient de dire au sujet de A il résulte que, si la fonction A prend le signe $+$, pour des valeurs quelconques de s et t, elle le conservera, t étant invariable, pour toute valeur inférieure de s, et, s étant invariable, pour toute

[1] Nous conviendrons une fois pour toutes d'entendre par s et t des fractions positives, en supposant $s \geqq t$.

[2] *Mémoire sur les figures ellipsoïdales*, etc. (*J. de Liouville*, 1851, t. XVI).

valeur supérieure de t. Si, au contraire, la fonction A a le signe —, pour des valeurs données de s et t, elle le conservera, t étant fixé, pour toute valeur supérieure de s, et, s étant fixé, pour toute valeur inférieure de t.

Soient s_0 et t_0 les valeurs de s et t satisfaisant simultanément aux équations (26) et (27), et soient s_1 et t_1 des valeurs quelconques de s et t satisfaisant à la condition $s_1 > \tau$ et $t_1 < \tau$. Supposons que la substitution de ces valeurs, à la place de s et t, dans les fonctions A et B, donne pour les deux des résultats positifs. Dans ce cas, la fraction positive t'_1 qui, pour $s = s_1$, satisfait à l'équation (27), dépasse t_1 et, par conséquent, si la substitution de s_1 et t_1 dans la fonction A donne un résultat positif, la substitution de s_1 et t'_1 donnera encore un résultat positif, et nous en concluons, en vertu de ce que l'on a démontré au numéro précédent, que $s_1 < s_0$ et $t'_1 > t_0$. En raisonnant d'une manière semblable, dans chacun des trois autres cas qui peuvent se présenter pour la substitution considérée, nous formerons le Tableau suivant :

Signe de A.	Signe de B.	Limites des racines.
+	+	$s_0 > s_1$
—	—	$s_0 < s_1$
—	+	$t_0 > t_1$
+	—	$t_0 < t_1$

A l'aide de ce Tableau nous pouvons, par une série de substitutions successives, rapprocher autant que nous voulons les limites entre lesquelles sont comprises s_0 et t_0. Mais chaque substitution ne donne qu'une seule limite, et cela seulement pour une des inconnues; d'ailleurs nous ne pouvons dire par avance pour quelle inconnue on obtiendra une des limites par substitution des quantités données s_1 et t_1. Si donc on peut regarder, au point de vue théorique, ce procédé comme satisfaisant, on doit cependant avouer qu'il présente en pratique certains inconvénients.

Quant aux valeurs substituées de s et t, elles doivent satisfaire à certaines conditions. Les formules (3) et (25) donnent $x = \frac{h}{R^2}$. La condition (22) prend donc la forme :

$$\frac{2-s}{s} \geqq x,$$

et nous savons que, tant que cette condition est satisfaite, on a certainement $A > 0$. Il résulte de là que les valeurs de s et t, suffisamment voisines de s_0 et t_0, satisfont à l'inégalité

$$x > \frac{2-s}{s}, \tag{28}$$

ou, en tenant compte de ce que x est la plus grande racine de l'équation

$$(29) \qquad 5stx^2 - 2(s+2t-3st)x + (1-s)(1-t) = 0,$$

à l'inégalité

$$t < \frac{s(3-s)}{12-5s}.$$

En outre, on doit avoir en vue, qu'en général, les valeurs de s et t annulant B satisfont à l'inégalité

$$s + t < 1.$$

En employant le procédé qui vient d'être indiqué, et en nous servant de la Table des valeurs des intégrales elliptiques donnée par Legendre, nous avons obtenu ces inégalités :

$$0,637 < s_0 < 0,638,$$

$$0,119 < t_0 < 0,120.$$

Si nous désignons par ε_s et ε_t la plus petite et la plus grande des excentricités des ellipses obtenues dans les sections de l'ellipsoïde par des plans passant par le plus petit axe, nous en déduirons

$$0,6016 < \varepsilon_s < 0,6025,$$

$$0,9380 < \varepsilon_t < 0,9387.$$

Maintenant, nous devons en venir au calcul de la vitesse angulaire.

En entendant par v son expression (4), nous trouvons l'égalité identique suivante :

$$(30) \quad v = \frac{2t(2-s-t)}{(s-t)^2}\sqrt{\frac{s}{1-t}}\left\{\frac{(1+s)(1+t)(s+t)-8st}{t(1-s)(2-s-t)}E(k,\varphi) - F(k,\varphi) - \frac{(2s-t-st)(s-t)}{t(1-s)(2-s-t)}\sqrt{\frac{1-t}{s}}\right\}.$$

Comme l'expression (4) représente une fonction décroissante de s et t, en substituant dans la formule (30) des limites inférieures ou supérieures de s_0 et t_0, nous obtiendrons respectivement une limite supérieure ou inférieure de v.

On obtient une formule plus commode pour les calculs, en faisant disparaître de l'égalité (30) les intégrales elliptiques à l'aide des équations (26) et (27). Nous trouvons ainsi :

$$(31) \qquad v = \frac{4x}{4x + (1+x)(1+3x)(1+s+t)};$$

mais, pour le calcul avec cette formule, on doit opérer autrement que pour le calcul avec la formule (30) : si nous voulons obtenir une limite supérieure de v, nous devons y substituer une limite inférieure de s_0 et une limite supérieure de t_0, et, pour obtenir une limite inférieure de v, nous devons substituer une limite supérieure de s_0 et une limite inférieure de t_0, car nous allons démontrer tout à l'heure que, pour s et t suffisamment voisins de s_0 et t_0, le second membre de l'égalité (31) est une fonction décroissante de s et une fonction croissante de t.

Considérons, dans ce but, la fonction

$$z = \frac{(1+x)(1+3x)}{x}(1+s+t).$$

Nous démontrerons qu'au moins tant que s et t satisfont à la condition (28), z est une fonction décroissante de t, et si, en outre, s demeure supérieur à 0,6, elle est une fonction croissante de s.

En différentiant l'équation (29) et en éliminant ensuite t, on trouve

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -\frac{3x^2}{2[(5x^2+5x+2)s^2-(5x+4)s+2]},$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{[(5x^2+6x+1)s-4x-1]^2}{2[(5x^2+5x+2)s^2-(5x+4)s+2]},$$

et l'on peut remarquer que le dénominateur commun de ces expressions conserve des valeurs positives non seulement pour les valeurs considérées de x et s, mais en général pour toutes les valeurs réelles de x et s.

A l'aide de ces expressions on trouve

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{(1+x)(1+3x)}{x} - \frac{1+s+t}{2}\,\frac{3(3x^2-1)}{(5x^2+5x+2)s^2-(5x+4)s+2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{(1+x)(1+3x)}{x} - \frac{1+s+t}{2}\,\frac{3x^2-1}{x^2}\,\frac{[(5x^2+6x+1)s-4x-1]^2}{(5x^2+5x+2)s^2-(5x+4)s+2},$$

où les seconds termes sont négatifs, car l'inégalité (28) montre que $x > 1$.

Remarquons maintenant que, sous les conditions considérées,

$$\frac{(1+x)(1+3x)}{x} < 8x, \qquad \frac{1+s+t}{2} > \frac{1}{2}, \qquad \frac{3x^2-1}{x^2} > 2,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial z}{\partial t} < 8x - \frac{[(5x^2+6x+1)s-4x-1]^2}{(5x^2+5x+2)s^2-(5x+4)s+2},$$

ou bien

$$\frac{\partial z}{\partial t} < -\frac{(25x^4+20x^3+6x^2-4x+1)s^2-2(20x^3+9x^2-6x+1)s+(4x-1)^2}{(5x^2+5x+2)s^2-(5x+4)s+2}.$$

Or, en vertu de l'inégalité (28), on a

$$(25x^4+20x^3+6x^2-4x+1)s-2(20x^3+9x^2-6x+1) > \frac{2x(x-1)^2(5x+1)}{x+1}.$$

Donc il vient

$$\frac{\partial z}{\partial t} < -\frac{2x(x-1)^2(5x+1)s+(x+1)(4x-1)^2}{(x+1)[(5x^2+5x+2)s^2-(5x+4)s+2]},$$

et l'on voit ainsi que, sous les conditions considérées, z est une fonction décroissante de t.

D'autre part, l'expression obtenue plus haut pour $\frac{\partial z}{\partial s}$ peut être présentée de la manière suivante :

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{(1+x)(1+3x)[(5x^2+5x+2)s-5x-4]s-9x^3+6x^2+11x+2}{x[(5x^2+5x+2)s^2-(5x+4)s+2]}$$
$$+\frac{1-s-t}{2}\,\frac{3(3x^2-1)}{(5x^2+5x+2)s^2-(5x+4)s+2},$$

et comme, d'après l'inégalité (28)

$$(1+x)[(5x^2+5x+2)s-5x-4] > 5x^2+x,$$

nous en concluons l'inégalité suivante :

$$\frac{\partial z}{\partial s} > \frac{3(5s-3)x^3+2(4s+3)x^2+(s+11)x+2}{x[(5x^2+5x+2)s^2-(5x+4)s+2]},$$

laquelle montre que, pour $s > \frac{3}{5}$, z est une fonction croissante de s.

En prenant pour limites de s_0 les nombres 0,637 et 0,638, et pour limites de t_0 les nombres 0,119 et 0,120, nous trouvons, d'après la formule (30),

$$0,1403 < v < 0,1423$$

et, d'après la formule (31),

$$0,1419 < v < 0,1427.$$

On voit par là que, dans le cas considéré, la formule (31) a donné des limites plus étroites que celle (30). Mais cette dernière a donné une limite supérieure plus petite, et la première une limite inférieure plus grande. Si donc on veut obtenir pour v des limites plus resserrées, on doit se servir des deux formules à la fois. Nous trouvons ainsi

$$0,1419 < v < 0,1423.$$

32. Les recherches précédentes conduisent au résultat suivant :

Les ellipsoïdes de Jacobi auxquels correspondent des vitesses angulaires supérieures à une certaine limite, savoir $\sqrt{2\pi f\rho}\sqrt{0,14\ldots}$, *sont stables.*

Nous savons que, pour les ellipsoïdes de Jacobi, la vitesse angulaire ne dépasse pas $\sqrt{2\pi f\rho}\sqrt{0,187\ldots}$, et nous avons vu que la même quantité représente la limite supérieure de la vitesse angulaire, pour les ellipsoïdes de révolution stables. Donc, tant que la vitesse angulaire se trouve entre les limites $\sqrt{2\pi f\rho}\sqrt{0,14\ldots}$ et $\sqrt{2\pi f\rho}\sqrt{0,187\ldots}$, il y aura deux figures d'équilibre stables : un ellipsoïde de révolution et un ellipsoïde à trois axes inégaux.

On voit que la stabilité des ellipsoïdes à trois axes n'est établie que dans des limites assez étroites de la vitesse angulaire.

Nous devons maintenant en venir à la résolution de cette question : peut-on, en excluant les déplacements, correspondant à des valeurs de m, qui ne dépassent pas une certaine limite, arriver à ce que la variation seconde de Π_1 reste positive, pour tous les ellipsoïdes à trois axes; nous allons démontrer que la réponse est négative, comme pour les ellipsoïdes de révolution.

La formule (10) donne

$$T_{2m+1}^{m} = (K-1)\int_{R}^{\infty}\left[\frac{E_{2m+1}^{m}(R)}{E_{2m+1}^{m}(\lambda)}\right]^2\frac{d\lambda}{D},$$

où K peut être présenté de la manière suivante :

$$K = \frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{u^2\,du}{\sqrt{\left(\frac{R^2}{a^2}+u^2\right)\left(1+\frac{b^2}{R^2}u^2\right)}}}{\displaystyle\int_0^1\left[\frac{E_{2m+1}^{m}(R)}{E_{2m+1}^{m}\left(\frac{R}{u}\right)}\right]^2\frac{du}{\sqrt{\left(\frac{R^2}{a^2}+u^2\right)\left(1+\frac{b^2}{R^2}u^2\right)}}}.$$

D'ailleurs, selon que m est pair ou impair, on a

$$\frac{E_{2m+1}^{m}(R)}{E_{2m+1}^{m}\left(\frac{R}{u}\right)} = \frac{u^m\left[\left(\frac{R}{a}\right)^m+\frac{c_1}{a^2}\left(\frac{R}{a}\right)^{m-2}+\ldots+\frac{c_\sigma}{a^m}\right]}{\left(\frac{R}{a}\right)^m+\frac{c_1}{a^2}\left(\frac{R}{a}\right)^{m-2}u^2+\ldots+\frac{c_\sigma}{a^m}u^m}$$

ou

$$\frac{\mathrm{E}_{2m+1}^{m}(\mathrm{R})}{\mathrm{E}_{2m+1}^{m}\left(\frac{\mathrm{R}}{u}\right)} = u^m \left(\frac{\frac{\mathrm{R}^2}{a^2}+1}{\frac{\mathrm{R}^2}{a^2}+u^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{\mathrm{R}}{a}\right)^{m-1} + \frac{c_1}{a^2}\left(\frac{\mathrm{R}}{a}\right)^{m-3} + \ldots + \frac{c_\sigma}{a^{m-1}}}{\left(\frac{\mathrm{R}}{a}\right)^{m-1} + \frac{c_1}{a^2}\left(\frac{\mathrm{R}}{a}\right)^{m-3} u^2 + \ldots + \frac{c_\sigma}{a^{m-1}} u^{m-1}}.$$

Nous savons que lorsque t tend vers zéro, et par conséquent s vers 1, $\frac{\mathrm{R}}{a}$ et $\frac{b}{\mathrm{R}}$ tendent vers 0. On voit d'ailleurs par les formules (9) et (11) du Chapitre précédent que les rapports $\frac{c_i}{a^{2i}}$ tendent alors vers des limites déterminées qui ne sont nulles pour aucune valeur de i dans la suite 1, 2, ..., σ (car τ a pour limite 0 dans le cas considéré). On voit donc que pour toute valeur donnée non nulle de u

$$\lim \left[\frac{\mathrm{E}_{2m+1}^{m}(\mathrm{R})}{\mathrm{E}_{2m+1}^{m}\left(\frac{\mathrm{R}}{u}\right)}\right]_{t=0} = 1,$$

et, d'après cela, il est aisé de prouver que le dénominateur de l'expression K croît indéfiniment quand t tend vers 0. Quant au numérateur, il tend évidemment vers $\frac{1}{2}$. Nous trouvons donc

$$\lim \mathrm{K}_{t=0} = 0,$$

d'où il résulte que, pour t suffisamment voisin de 0, la fonction T_{2m+1}^{m} demeure négative.

De ce que l'on vient de démontrer, et des propriétés connues de l'expression T_{2m+1}^{m}, on déduit que, si l'on considère T_{2m+1}^{m}, en vertu de l'équation (5), comme une fonction de s, l'équation

$$\mathrm{T}_{2m+1}^{m} = 0,$$

dans le cas de $m > 3$, aura au moins une racine comprise entre 0,637..., c'est-à-dire la racine de l'équation

$$\mathrm{T}_7^3 = 0,$$

et 1, non égale à ces limites, et, s'il y a un plus grand nombre de racines, la plus petite d'entre elles sera une fonction croissante de m.

33. Nous remarquerons, en terminant, que c'est seulement pour conserver une plus grande symétrie dans les formules que nous avons introduit, dans notre calcul, les fonctions de Lamé à argument imaginaire; mais on pourrait conduire tout le calcul de manière à n'avoir affaire partout qu'à des fonctions de Lamé à argument réel. Pour cela, nous aurions dû prendre l'équation de l'ellipsoïde sous

la forme

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2-b^2}+\frac{z^2}{R^2-a^2}=1,$$

en supposant $R>a>b$, et exprimer les coordonnées rectangulaires d'un point de sa surface de la manière suivante

$$x=R\cos\theta=R\frac{\mu\nu}{ba},$$

$$y=\sqrt{R^2-b^2}\sin\theta\cos\psi=\sqrt{R^2-b^2}\,\frac{\sqrt{b^2-\mu^2}\sqrt{\nu^2-b^2}}{b\sqrt{a^2-b^2}},$$

$$z=\sqrt{R^2-a^2}\sin\theta\sin\psi=\sqrt{R^2-a^2}\,\frac{\sqrt{a^2-\mu^2}\sqrt{a^2-\nu^2}}{a\sqrt{a^2-b^2}},$$

où θ et ψ sont respectivement compris entre les limites 0 et π, 0 et 2π, μ entre les limites $-b$ et $+b$, et ν entre les limites a et b. En posant ensuite

$$\varkappa=\sqrt{(R^2-\mu^2)(R^2-\nu^2)},$$

nous aurions exprimé l'élément de surface de notre ellipsoïde de cette manière :

$$ds=\varkappa(\nu^2-\mu^2)\,d\beta\,d\gamma=\varkappa\sin\theta\,d\theta\,d\psi,$$

où β et γ ont les significations antérieures (n° 20), et nous aurions trouvé

$$\frac{\partial U}{\partial n}=4\pi f\rho(R^2-a^2)\int_R^\infty\frac{d\lambda}{(\lambda^2-a^2)D}\varkappa,$$

où

$$D=\sqrt{(\lambda^2-a^2)(\lambda^2-b^2)}.$$

Par conséquent, si nous avions développé $\varkappa\,\delta n$ en série de produits de fonctions de Lamé

$$\varkappa\,\delta n=\sum_{m=2}^{m=\infty}\sum_{i=1}^{i=2m+1}\varepsilon_i^m E_i^m(\mu)E_i^m(\nu),$$

nous aurions trouvé, par le même procédé qu'au n° 27,

$$\delta^2\Pi_1=4\pi f\rho\sum_{m=2}^{m=\infty}\sum_{i=1}^{i=2m+1}T_i^m\int(H_i^m)^2\,d\sigma+\Omega,$$

où

$$T_i^m=(R^2-a^2)\int_R^\infty\frac{d\lambda}{(\lambda^2-a^2)D}-\frac{E_i^m(R)F_i^m(R)}{2m+1},$$

ou bien

$$T_i^m = \frac{E_3^1(R)F_3^1(R)}{3} - \frac{E_i^m(R)F_i^m(R)}{2m+1},$$

et où H_i^m a la signification antérieure. La discussion du signe de $\delta^2\Pi_1$ serait basée ensuite sur les théorèmes du n° 25.

CHAPITRE VI.

LA STABILITÉ DE L'ELLIPSOIDE DE RÉVOLUTION DE JACOBI.

34. Dans l'étude précédente nous n'avons considéré que les variations secondes de Π_1. Par suite, nous n'avons pu résoudre les questions de stabilité des ellipsoïdes qui servent de *limites* aux ellipsoïdes stables. Ainsi, nous avons trouvé, par exemple, que les ellipsoïdes de révolution, dans l'hypothèse générale relative aux déplacements, sont stables, tant que leurs excentricités sont *inférieures* à l'excentricité de l'ellipsoïde de révolution de Jacobi (0,8126....). Quant à ce dernier, nous n'avons pu rien dire sur sa stabilité. Puis, nous avons trouvé que les ellipsoïdes de révolution sont stables, sous la condition que la surface du liquide reste toujours une surface de révolution, si leurs excentricités sont *inférieures* à la racine d'une certaine équation transcendante (0,985225...); mais nous n'avons pu résoudre la question de la stabilité de l'ellipsoïde dont l'excentricité est égale à cette racine; etc.

La résolution de toutes ces questions dépend de l'étude des termes de l'accroissement de Π, qui ont été laissés de côté au n° 6, dans la recherche de la variation seconde de Π, comme étant des infiniment petits par rapport à cette dernière, et présente d'assez grandes difficultés. A vrai dire, pour résoudre les questions considérées, il n'est pas besoin d'avoir des expressions générales de ces termes; il suffit d'étudier seulement les expressions que l'on obtient dans l'hypothèse où les variations δn satisfont à l'équation

$$\frac{\partial U}{\partial n}\delta n - f\rho\int\frac{\delta n'\,ds'}{r} = 0,$$

qui détermine des figures du liquide, infiniment voisines de la figure d'équilibre considérée, pour lesquelles, *à une première approximation, la condition d'équilibre est satisfaite* [n° 8, form. (35)]. Le problème est par là considérablement simplifié; mais il demeure encore très difficile. Toutefois, dans un cas particulier, savoir pour l'ellipsoïde de révolution de Jacobi, on peut se servir, pour le résoudre, d'un procédé particulier, qui ne présente aucune difficulté théorique et demande seulement des calculs assez compliqués. C'est ce cas que nous avons l'intention de traiter maintenant.

Nous avons vu (nº 14 et nº 16) que, pour l'ellipsoïde de révolution de Jacobi, la variation seconde de Π_1 reste en général positive, et ne s'annule que quand la surface du liquide se change (à une première approximation) en une surface d'ellipsoïde à trois axes, ayant même axe minimum. Or, si nous prenons l'écart, entre cette surface et la surface de l'ellipsoïde de révolution de Jacobi, pour quantité infiniment petite du premier ordre, dans la série des figures ellipsoïdales d'équilibre à trois axes inégaux, on pourra toujours en trouver une dont l'écart, à partir de la surface de l'ellipsoïde à trois axes mentionné à l'instant, soit une quantité infiniment petite d'ordre supérieur. Il suffit donc, pour résoudre notre problème, de rechercher le signe de l'accroissement de Π_1, dans l'hypothèse où la surface du liquide se change en une surface infiniment voisine dont l'écart à partir de la surface d'un ellipsoïde à trois axes, *représentant une figure d'équilibre,* soit une quantité infiniment petite d'ordre supérieur. Quant à cet accroissement, il peut être considéré comme la somme : 1º de l'accroissement de Π_1 dans le passage de l'ellipsoïde de révolution à l'ellipsoïde à trois axes; 2º de l'accroissement de Π_1 dans le passage de ce dernier à la surface considérée.

Le problème de la recherche de l'accroissement de Π_1 se partage donc en deux, dont l'un consiste dans la recherche de l'accroissement d'une certaine fonction, et l'autre peut être résolu en s'appuyant sur ce qui a été montré au nº 27.

35. Si nous posons, avec les notations du nº 26,

$$\frac{1}{t} = 1 + \frac{a^2}{R^2} = x, \qquad \frac{1}{s} = 1 + \frac{b^2}{R^2} = y,$$

nous aurons, pour un ellipsoïde quelconque de Jacobi,

$$S = \frac{Q}{5}\left(\frac{3Q}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{x+y}{(xy)^{\frac{1}{3}}}, \qquad \int V\,d\tau = \frac{3}{5} f\rho Q^2 \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3Q}}\,(xy)^{\frac{1}{6}} H,$$

où

$$H = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(1+u)(x+u)(y+u)}}. \tag{1}$$

En portant ces valeurs de S et de $\int V\,d\tau$ dans la formule

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{J^2}{S} - \int V\,d\tau\right)$$

du n° 8, et en y remplaçant ensuite J par sa valeur J_0 correspondant à l'ellipsoïde de révolution de Jacobi, nous désignerons le résultat par (Π_1). Nous aurons donc

$$(2)\qquad (\Pi_1) = \frac{3}{10} f\rho Q^2 \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3Q}} \left(K \frac{(xy)^{\frac{1}{3}}}{x+y} - (xy)^{\frac{1}{6}} H \right),$$

où

$$(3)\qquad K = \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3Q}} \frac{25 J_0^2}{3 f\rho Q^5}.$$

On trouve en outre facilement, d'après les formules (4) et (5) du Chapitre précédent, qu'en général, pour un ellipsoïde quelconque de Jacobi,

$$J^2 = 2\pi f\rho S^2 st \int_0^\infty \frac{u\,du}{(1+u)^{\frac{1}{2}}(1+su)^{\frac{3}{2}}(1+tu)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui se ramène à

$$(4)\qquad J^2 = -\frac{3Q^3}{50} f\rho \sqrt[3]{\frac{3Q}{4\pi}} (xy)^{-\frac{1}{6}} (x+y)^2 \left[\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} + 2(x+y)\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y} \right].$$

Quant aux variables x et y, qui entrent dans ces formules, elles sont liées par l'équation

$$(5)\qquad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - 2xy \frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y} + (xy)^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

que l'on déduit facilement de l'équation (5) du Chapitre précédent. En y faisant $y = x$, nous obtiendrons une équation qui détermine la valeur de x pour l'ellipsoïde de révolution de Jacobi. Nous désignerons par ξ cette valeur de x. Sachant que l'excentricité de cet ellipsoïde est comprise entre les limites 0,8126 et 0,8127, on trouve facilement que

$$(6)\qquad 2,94 < \xi < 2,95.$$

Dans la suite nous allons considérer y comme une fonction de x, définie par l'équation (5), et il est important de remarquer que pour $x = \xi$ on a $y' = -1$.

Si l'on fait $x = \xi$ dans la formule (4), cette formule donnera J_0, dont une des expressions, sous forme de fonction algébrique de ξ, sera obtenue au numéro suivant.

Désignons par α l'accroissement infiniment petit qu'on doit donner à x, à partir de $x = \xi$, pour obtenir l'ellipsoïde de Jacobi [1], par lequel, conformément à ce qui précède, on doit passer de l'ellipsoïde de révolution à la figure du

---

[1] Nous désignerons cet ellipsoïde, pour abréger, par ellipsoïde (α).

liquide considérée, et par $\Pi_1^{(\alpha)}$, l'expression Π_1 dans laquelle J a la valeur correspondant à cet ellipsoïde de Jacobi. Puis, convenons d'entendre par $\Delta_1 F$ et $\Delta_2 F$ les accroissements d'une expression quelconque F, dépendant de la figure du liquide, respectivement pour le premier et le second des deux passages dont il a été parlé à la fin du numéro précédent. Avec ces notations, l'accroissement de Π_1, dont nous devons rechercher le signe, se présentera sous la forme :

$$\Delta\Pi_1 = \Delta_1(\Pi_1) + \frac{1}{2}\frac{\Delta_1 J^2 \Delta_2 S}{S(S+\Delta_2 S)} + \Delta_2 \Pi_1^{(\alpha)},$$

où S est le moment d'inertie de l'ellipsoïde (α).

Ici $\Delta_1(\Pi_1)$ et $\Delta_1 J^2$ sont les accroissements des fonctions (2) et (4) de x, lors du passage de $x = \xi$ à $x = \xi + \alpha$. Comme J^2 est une fonction symétrique de x et y, la dérivée $\frac{dJ^2}{dx}$, d'après ce qu'on a remarqué au sujet de y, s'annulera pour $x = \xi$. Or, nous verrons dans la suite qu'on aura alors $\frac{d^3(\Pi_1)}{dx^3} = 0$, et que $\frac{d^2 J^2}{dx^2}$ et $\frac{d^4(\Pi_1)}{dx^4}$ ne s'annuleront pas. Par suite, $\Delta_1(\Pi_1)$ et $\Delta_1 J^2$ différeront, par des quantités infiniment petites d'ordre supérieur, respectivement des valeurs de

$$\frac{1}{24}\frac{d^4(\Pi_1)}{dx^4}\alpha^4 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\frac{d^2 J^2}{dx^2}\alpha^2$$

pour $x = \xi$.

En ce qui concerne les expressions $\Delta_2 S$ et $\Delta_2 \Pi_1^{(\alpha)}$, nous supposerons, pour les évaluer, comme au n° 27, que le segment de la normale à la surface de l'ellipsoïde (α), découpé par la surface considérée du liquide, diffère, par une quantité infiniment petite d'ordre supérieur, de l'expression

$$(7) \qquad \frac{1}{\varkappa}\sum_{n=2}^{n=\infty}\sum_{i=1}^{i=2n+1} H_i^n = \frac{1}{\varkappa}\sum_{n=2}^{n=\infty}\sum_{i=1}^{i=2n+1} \varepsilon_i^n E_i^n(\mu) E_i^n(\nu),$$

dans laquelle tous les termes seront supposés infiniment petits par rapport à α. On doit appeler ici l'attention sur ce fait que, pour $\alpha = 0$, les variables μ et ν perdent la signification de coordonnées d'un point de la surface de l'ellipsoïde. Nous considérerons donc l'expression (7) comme une fonction de θ et ψ d'après les formules (16) du Chapitre IV. La plus grande de toutes les valeurs numériques de cette fonction sera désignée par ζ. Ce sera une quantité infiniment petite par rapport à α, dont nous laisserons l'ordre indéterminé.

Nous remarquons ensuite que, pour α infiniment petit, tous les produits $E_i^n(\mu) E_i^n(\nu)$, à l'exception de ceux qui correspondent à $i = 1$, deviennent également des quantités infiniment petites, pour toutes les valeurs de θ et ψ. Ainsi, $E_3^2(\mu) E_3^2(\nu)$ est *en général* (c'est-à-dire pour θ et ψ arbitraires) une quantité infiniment petite de même ordre que α, tandis que $E_1^2(\mu)\,E_1^2(\nu)$ n'est pas *en général* une quantité infiniment petite.

Nous supposerons que tous les termes de l'expression (7) (dans laquelle il peut ne pas se trouver de termes correspondant à certaines combinaisons de n et i) sont *en général* des infiniment petits de même ordre que ζ. Donc, d'après ce que l'on vient de remarquer, ε_3^2 sera une quantité infiniment petite de même ordre que $\dfrac{\zeta}{\alpha}$, et ε_1^2 de même ordre que ζ. Il résulte de là que, dans l'expression (15) du Chapitre précédent, le terme $g_3 G_3 \varepsilon_3^2$ sera une quantité infiniment petite par rapport au terme $g_1 G_1 \varepsilon_1^2$, car G_3, défini par la formule (14) du même Chapitre, est une quantité infiniment petite de même ordre que α^2, et g_1, G_1, g_3, pour $\alpha = 0$, tendent vers des limites finies différentes de zéro.

Nous arrivons donc à cette conclusion que $\Delta_2 S$ diffère, par une quantité infiniment petite d'ordre supérieur, de $g_1 G_1 \varepsilon_1^2$. Nous désignerons, pour abréger, cette dernière quantité par β.

Enfin, on s'assure facilement que T_3^2 est une quantité infiniment petite de même ordre que α^2, et que tous les autres T_i^n, à l'exception de T_4^2 qui est toujours nul, ne sont pas des quantités infiniment petites. Nous en concluons que $\Delta_2 \Pi_1^{(\alpha)}$ diffère, par une quantité infiniment petite d'ordre supérieur, de l'expression

$$\left(2\pi f\rho\,\frac{T_1^2}{g_1^2 G_1} + \frac{1}{2}\,\frac{\omega^2}{S}\right)\beta^2 + 2\pi f\rho\left[T_2^2\int (H_2^2)^2\,d\sigma + T_3^2\int (H_3^2)^2\,d\sigma\right] + 2\pi f\rho \sum_{n=3}^{n=\infty}\ \sum_{i=1}^{i=2n+1} T_i^n \int (H_i^n)^2\,d\sigma,$$

dont tous les termes sont de même ordre que ζ^2.

Tout ce qui précède fait voir que la question aboutit à la recherche du signe de l'expression

$$(8)\quad \Delta\Pi_1 = \frac{1}{24}\,\frac{d^4(\Pi_1)}{dx^4}\,\alpha^4 + \frac{1}{4}\,\frac{d^2 J^2}{dx^2}\,\frac{1}{S^2}\,\alpha^2\beta + \left(2\pi f\rho\,\frac{T_1^2}{g_1^2 G_1} + \frac{1}{2}\,\frac{J^2}{S^3}\right)\beta^2 + 2\pi f\rho\left[T_2^2\int (H_2^2)^2\,d\sigma + T_3^2\int (H_3^2)^2\,d\sigma + \sum_{n=3}^{n=\infty}\ \sum_{i=1}^{i=2n+1} T_i^n \int (H_i^n)^2\,d\sigma\right] + \tau,$$

dans laquelle τ est une quantité infiniment petite par rapport à celui des deux infiniment petits α^4 et ζ^2 dont l'ordre est le plus bas.

On voit d'ailleurs que, dans les trois premiers termes, on peut poser $x = \xi$.

La formule (8) montre que, si α^2 n'est pas une quantité infiniment petite par rapport à ζ, la question se réduit à la recherche du signe de la forme quadratique en α^2 et β,

$$A\alpha^4 + B\alpha^2\beta + C\beta^2,$$

où

$$(9)\quad A=\frac{1}{24}\left[\frac{d^4(\mathrm{H}_1)}{dx^4}\right]_{x=\xi},\qquad B=\frac{1}{4}\left(\frac{d^2\mathrm{J}^2}{dx^2}\frac{1}{\mathrm{S}^2}\right)_{x=\xi},\qquad C=\left(2\pi f\rho\frac{\mathrm{T}_1^2}{g_1^2\mathrm{G}_1}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{J}^2}{\mathrm{S}^3}\right)_{x=\xi}.$$

Nous avons donc maintenant à former les coefficients de cette forme quadratique.

En ce qui concerne le cas où α^2 est une quantité infiniment petite par rapport à ζ, nous en parlerons plus tard.

36. Avant tout, nous allons chercher les valeurs, pour $x=\xi$, des dérivées partielles par rapport à x et y de la fonction H, définie par la formule (1).

On peut facilement se convaincre que cette fonction satisfait à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(10)\qquad (x-1)\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}+\frac{1}{2}\mathrm{H}=(xy)^{-\frac{1}{2}}.$$

Puis, en posant

$$\left(\frac{\partial^n \mathrm{H}}{\partial x^n}\right)_{x=\xi}=u_n,$$

on trouve facilement

$$(11)\qquad \left(\frac{\partial^{m+n}\mathrm{H}}{\partial x^m\partial y^n}\right)_{x=\xi}=\frac{1.3\ldots(2m-1).1.3\ldots(2n-1)}{1.3\ldots(2m+2n-1)}u_{m+n}.$$

Par suite, l'équation (10) donne, pour u_n, l'équation suivante aux différences finies

$$(12)\qquad 2^n n(\xi-1)\,u_n+2^{n-2}(2n-1)^2u_{n-1}=(-1)^{n-1}.1.3\ldots(2n-1)\,\xi^{-n},$$

dans laquelle n peut avoir toutes les valeurs entières positives. On doit ajouter à cette équation la condition

$$(13)\qquad 2\xi u_1-\tfrac{2}{3}\xi^3u_2+1=0$$

qui découle de l'équation (5).

Il n'est assurément pas difficile de trouver, pour l'équation linéaire du premier ordre (12), une intégrale générale, dans laquelle la constante arbitraire sera déterminée par la condition (13). Mais, comme nous n'avons pas besoin de l'expression générale de u_n, nous ne l'indiquerons pas.

Nous trouvons, par la résolution successive des équations (13) et (12) pour

$n = 1, 2, 3$ et 4 :

$$(14)\quad \begin{cases} u_0 = 2\dfrac{13\xi - 10}{3\xi^2 + 8\xi - 8}, & u_1 = -\dfrac{5\xi - 4}{\xi(3\xi^2 + 8\xi - 8)}, \\ u_2 = \dfrac{3}{2}\dfrac{3\xi - 2}{\xi^2(3\xi^2 + 8\xi - 8)}, & u_3 = -\dfrac{5}{4}\dfrac{6\xi^2 - 9\xi + 4}{\xi^3(\xi - 1)(3\xi^2 + 8\xi - 8)}, \\ u_4 = \dfrac{35}{64}\dfrac{33\xi^3 - 78\xi^2 + 76\xi - 24}{\xi^4(\xi - 1)^2(3\xi^2 + 8\xi - 8)}. \end{cases}$$

A l'aide de ces formules, nous obtiendrons, d'après (3) et (4), l'expression suivante pour K,

$$(15)\qquad \mathrm{K} = 8\xi^{\frac{2}{3}}\frac{\xi - 1}{3\xi^2 + 8\xi - 8}.$$

Pour former les dérivées de y par rapport à x, nous remarquerons que, si $\mathrm{F}(x, y)$ est une fonction symétrique quelconque de x et y, et si F', F'', etc. représentent ses dérivées par rapport à x, prises dans l'hypothèse où y est une fonction de x, définie par l'équation (5), on aura, pour $x = \xi$,

$$\mathrm{F}' = 0, \qquad \mathrm{F}'' = 2\left(\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x\, \partial y}\right) + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}y'',$$

$$\mathrm{F}''' = -3\left(\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x\, \partial y}\right)y'' + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}y''',$$

$$\begin{aligned} \mathrm{F}^{\mathrm{IV}} = {} & 2\left(\frac{\partial^4 \mathrm{F}}{\partial x^4} - 4\frac{\partial^4 \mathrm{F}}{\partial x^3\, \partial y} + 3\frac{\partial^4 \mathrm{F}}{\partial x^2\, \partial y^2}\right) \\ & + 6\left(\frac{\partial^3 \mathrm{F}}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \mathrm{F}}{\partial x^2\, \partial y}\right)y'' - 4\left(\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x\, \partial y}\right)y''' + 3\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2}y''^2 + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}y^{\mathrm{IV}}. \end{aligned}$$

En substituant à la place de F le premier membre de l'équation (5) et en nous servant des formules (11) et (14), nous trouvons, pour $x = \xi$,

$$(16)\qquad y'' = \frac{39\xi^3 - 130\xi^2 + 108\xi - 24}{4\xi(\xi - 1)(3\xi^2 - 8\xi + 4)}, \qquad y''' = -\frac{3}{2}y''^2.$$

Nous ne formerons pas l'expression très compliquée de y^{IV}, parce que le besoin ne s'en présentera pas.

Remarquons qu'il résulte déjà de ces formules l'exactitude de ce qui a été dit plus haut, relativement à $\dfrac{d^3(\Pi_1)}{dx^3}$, car (Π_1) est une fonction symétrique de x et y, et ces formules montrent que $\mathrm{F}''' = 0$, chaque fois que $\mathrm{F}'' = 0$.

Nous remarquons ensuite que si

$$\mathrm{F}(x, y) = \frac{(xy)^{\frac{1}{3}}}{x + y},$$

on aura, pour $x = \xi$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{12}\xi^{-\frac{4}{3}}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{36}\xi^{-\frac{7}{3}},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{6}\xi^{-\frac{7}{3}}, \qquad \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{7}{18}\xi^{-\frac{10}{3}},$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 4\frac{\partial^4 F}{\partial x^3\,\partial y} + 3\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\,\partial y^2} = -\frac{2}{3}\xi^{-\frac{13}{3}},$$

et que si

$$F(x, y) = (xy)^{\frac{1}{6}} H,$$

les formules (11) et (14) donneront, pour $x = \xi$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{2}{3}\xi^{-\frac{2}{3}}\frac{\xi - 1}{3\xi^2 + 8\xi - 8}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{9}\xi^{-\frac{5}{3}}\frac{7\xi - 10}{3\xi^2 + 8\xi - 8},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = -\frac{4}{3}\xi^{-\frac{5}{3}}\frac{\xi - 1}{3\xi^2 + 8\xi - 8}, \qquad \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{1}{9}\xi^{-\frac{8}{3}}\frac{35\xi^2 - 76\xi + 32}{(\xi - 1)(3\xi^2 + 8\xi - 8)},$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 4\frac{\partial^4 F}{\partial x^3\,\partial y} + 3\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\,\partial y^2} = -\frac{1}{24}\xi^{-\frac{11}{3}}\frac{367\xi^3 - 1122\xi^2 + 972\xi - 280}{(\xi - 1)^2(3\xi^2 + 8\xi - 8)}.$$

Si donc nous posons

$$G = K\frac{(xy)^{\frac{1}{3}}}{x + y} - (xy)^{\frac{1}{6}} H,$$

et si nous tenons compte de l'expression (15), nous verrons que, pour $x = \xi$, $\frac{\partial G}{\partial x} = 0$. Il se trouve par suite qu'il est suffisant d'avoir les expressions (16) pour former G^{IV}. Ainsi les formules obtenues donneront

$$G' = 0, \qquad G'' = 0, \qquad G''' = 0,$$

$$G^{\text{IV}} = \frac{1}{48}\xi^{-\frac{11}{3}}\frac{\mathfrak{I}(\xi)}{(\xi - 1)^2(3\xi^2 + 8\xi - 8)(3\xi^2 - 8\xi + 4)^2},$$

où

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}(x) &= (5x - 8)(39x^3 - 130x^2 + 108x - 24)^2 \\
&\quad - 8(7x^2 - 20x + 4)(3x^2 - 8x + 4)(39x^3 - 130x^2 + 108x - 24) \\
&\quad + 4(3x^2 - 8x + 4)^2(239x^3 - 738x^2 + 588x - 152) \\
&= 9657x^7 - 77292x^6 + 253548x^5 \\
&\quad - 444480x^4 + 452976x^3 - 268608x^2 + 85568x - 11264,
\end{aligned}$$

et l'on aura pour A [formules (2) et (9)] l'expression suivante :

$$A = \frac{1}{80.48} f\rho Q^2 \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3Q}} \frac{\xi^{-\frac{11}{3}} \mathfrak{S}(\xi)}{(\xi-1)^2(3\xi^2+8\xi-8)(3\xi^2-8\xi+4)^2}.$$

Quant au coefficient B, en remarquant que, pour $x = \xi$,

$$S = \frac{2}{5} Q \left(\frac{3Q}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \xi^{\frac{1}{3}},$$

nous déduisons de l'égalité (4), à l'aide des formules trouvées,

$$B = \frac{\pi f\rho}{12} \frac{\varphi(\xi)}{\xi^2(\xi-1)(3\xi^2+8\xi-8)(3\xi^2-8\xi+4)}$$

où

$$\varphi(x) = 111x^4 - 498x^3 + 780x^2 - 536x + 128.$$

Enfin, pour former le coefficient C, nous remarquons que, pour $x = \xi$,

$$\frac{J^2}{S^3} = 15 f\rho \left(\frac{4\pi}{3Q}\right)^{\frac{5}{3}} \xi^{-\frac{1}{3}} \frac{\xi-1}{3\xi^2+8\xi-8},$$

et que, d'après les formules du n° **27**,

$$G_1 g_1^2 = \frac{16\pi}{45} \left(\frac{3Q}{4\pi}\right)^{\frac{4}{3}} \xi^{\frac{2}{3}}.$$

En remarquant ensuite que, dans le cas considéré, $a T_1^2$ se réduit à l'expression T_0^2 du n° **17**, où l'on doit poser

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\xi-1}},$$

et tenant compte de l'égalité

$$\sqrt{\xi-1}\,(13\xi-10) - (3\xi^2+8\xi-8) \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\xi-1} = 0,$$

qui découle de celle (5) et n'est autre chose que l'équation (22) du Chapitre III, nous trouvons

$$T_1^2 = 2 \left(\frac{4\pi}{3Q}\right)^{\frac{1}{3}} \xi^{\frac{1}{3}} \frac{\xi-2}{3\xi^2+8\xi-8}.$$

Par suite, la troisième des formules (9) donne

$$C = \frac{15 f\rho}{4} \left(\frac{4\pi}{3Q}\right)^{\frac{5}{3}} \xi^{-\frac{1}{3}} \frac{5\xi-8}{3\xi^2+8\xi-8}.$$

37. Comme C représente évidemment une quantité positive, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction

$$A\alpha^4 + B\alpha^2\beta + C\beta^2$$

reste positive, pour toutes les valeurs réelles de α et β, en s'annulant seulement quand on a simultanément $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, est donnée, comme on sait, par l'inégalité

$$B^2 - 4AC < 0,$$

qui, en vertu des expressions trouvées pour A, B, C, prend la forme

$$(5\xi - 8)\mathfrak{I}(\xi) - [\varphi(\xi)]^2 > 0. \tag{17}$$

Nous allons démontrer que cette inégalité a effectivement lieu.

En remarquant que

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(x+2) = 9657x^7 + \ 57906x^6 + 137232x^5 \\ + 157440x^4 + 80256x^3 + 4992x^2 - 6400x + 512,\end{aligned}$$

nous concluons que, pour x dépassant $2 + \frac{25}{39}$, $\mathfrak{I}(x)$ est une fonction croissante de x. Puis, en remarquant que

$$\varphi(x+2) = 111x^4 + 390x^3 + 456x^2 + 160x - 32,$$

nous voyons que, pour x dépassant 2, $\varphi(x)$ est une fonction croissante, et qu'en outre $\varphi(2,5) > 0$.

Nous en déduisons, en tenant compte des inégalités (6), l'inégalité suivante :

$$(5\xi - 8)\mathfrak{I}(\xi) - [\varphi(\xi)]^2 > 5\mathfrak{I}(2,9) - [\varphi(3)]^2,$$

et de là on conclut l'inégalité (17), car, en faisant le calcul, on trouve

$$5\mathfrak{I}(2,9) - [\varphi(3)]^2 > 207900.$$

Si nous revenons maintenant à la formule (8), nous voyons que, d'après ce que l'on vient de démontrer, $\Delta\Pi_1 - \tau$ est une quantité positive qui, pour α non nul, ne peut s'annuler, et cela suffit, à condition que α^2 ne soit pas une quantité infiniment petite par rapport à ζ, pour que $\Delta\Pi_1$ reste positif pour toutes les valeurs suffisamment petites de α.

Nous ne pouvons pas affirmer ce dernier fait, quand α^2 est une quantité infiniment petite par rapport à ζ, car alors τ peut contenir des termes par rapport auxquels α^4 sera une quantité infiniment petite. Donc $\Delta\Pi_1 - \tau$ ne déterminera pas le signe de $\Delta\Pi_1$ quand, dans l'expression (7), tous les ε_i^n sont nuls, à l'exception de ε_3^2 (nous pouvons toujours supposer ε_4^2 égal à zéro). Mais on peut se convaincre facilement que ce cas ne présente aucune difficulté sérieuse. En effet, si tous les ε_i^n, à l'exception de ε_5^2, sont nuls, alors, comme on le voit par la formule (17) du Chapitre précédent, on peut trouver un ellipsoïde de Jacobi, pour lequel l'écart entre la surface du liquide et sa surface soit une quantité infiniment petite par rapport à ζ, et, au lieu de l'ellipsoïde (α), on pourrait prendre cet ellipsoïde pour passer de l'ellipsoïde de révolution à la surface du liquide. On voit par là que le cas considéré ne peut se présenter, si α est déterminé par la condition que l'écart, entre la surface du liquide et la surface de l'ellipsoïde (α), soit le plus petit possible.

Nous arrivons donc définitivement à la conclusion que l'*ellipsoïde de révolution de Jacobi est une figure d'équilibre stable.*

Par suite, le résultat essentiel du Chapitre III (n° 14) peut être énoncé maintenant comme il suit :

Tous les ellipsoïdes de révolution planétaires, dont les excentricités ne dépassent pas l'excentricité de l'ellipsoïde de révolution de Jacobi, sont des figures d'équilibre stables.

THÈSES [1].

I. Il n'existe aucune figure d'équilibre, pour laquelle l'énergie totale puisse atteindre sa plus petite valeur possible pour une valeur donnée *non nulle* du moment des quantités de mouvement.

II. La vitesse angulaire étant nulle, s'il existe une figure d'équilibre, pour laquelle l'énergie potentielle des forces newtoniennes atteint sa plus petite valeur possible, cette figure est stable en ce sens que, après que l'on a communiqué aux molécules du liquide des déplacements et des vitesses suffisamment petits, la *déviation* de la figure du liquide à partir de la figure d'équilibre et la force

(1) D'après l'usage adopté dans les Universités russes, tout travail qui représente ce que l'on appelle en France *Thèse,* et ce que l'on appelle en Russie *Dissertation,* doit être accompagné d'un certain nombre de propositions énoncées sans démonstration. Ces propositions, qui constituent ce que l'on appelle en Russie *Thèses,* ne sont le plus souvent que des compléments à ce qui a été développé dans la Dissertation. Mais elles peuvent se rapporter aussi à une tout autre branche de la Science. L.

vive du mouvement qui s'ensuit ne surpasseront pas des limites assignées à l'avance et aussi petites qu'on veut, *pendant toute la durée du mouvement* (¹).

III. En entendant par J_0 le minimum du moment des quantités de mouvement pour les ellipsoïdes de Jacobi, désignons par J_1 le produit de J_0 par le nombre $1,2\ldots(1,28)$. Cela posé, à toute valeur du moment des quantités de mouvement, qui est inférieure à J_1, il correspondra une figure ellipsoïdale d'équilibre stable, et cette figure sera celle à trois axes inégaux, dès qu'une telle figure d'équilibre est possible.

IV. Étant donné un entier n quelconque, surpassant 2, on peut trouver $E\frac{n}{2}+2$ surfaces algébriques d'ordre n infiniment voisines de celles des figures ellipsoïdales d'équilibre et vérifiant, à une première approximation, la condition d'équilibre. Parmi les figures délimitées par ces surfaces, *une* est infiniment voisine d'un ellipsoïde de Jacobi, et les $E\frac{n}{2}+1$ autres sont infiniment voisines des ellipsoïdes de Maclaurin.

(¹) L'auteur a établi depuis que le minimum de l'énergie potentielle ne peut avoir lieu que pour la sphère (*Communications de la Société mathématique de Kharkow*, 1re série, 1886). Il en résulte que, *s'il existe une figure pour laquelle l'énergie potentielle atteint sa plus petite valeur possible* (valeur dont l'existence est évidente), cette figure ne peut être que sphérique. *Voir,* à ce sujet, une Note de M. Poincaré, insérée dans les *Comptes rendus* pour 1887 (t. CIV). M. Poincaré donne à cette proposition un autre énoncé. Mais l'auteur croit que l'énoncé précédent est plus conforme à ce qui est établi. L.