

K.M. PETERSON

## Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2<sup>e</sup> série*, tome 7, n° 2 (1905), p. 109-165

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1905\\_2\\_7\\_2\\_109\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1905_2_7_2_109_0)

© Université Paul Sabatier, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

SUR L'INTÉGRATION  
DES  
ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES,

PAR K. M. PETERSON.

---

PREMIER MÉMOIRE.

---

Traduit du russe par M. Édouard DAVAUX,

Ingénieur de la Marine, à Toulon (1).

---

Intégrer une équation aux dérivées partielles signifie, d'une façon générale, éliminer de cette équation toutes les dérivées partielles au moyen de leurs valeurs. Les valeurs des dérivées sont déterminées par des équations différentielles et, dans le cas où ces dernières sont intégrables, leur élimination peut être faite effectivement. Mais ces équations différentielles se distinguent par ce fait que, dans leurs intégrales, au lieu de constantes arbitraires entrent des fonctions arbitraires. Cette propriété résulte de la forme particulière de ces équations, que nous allons considérer tout d'abord.

I. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES CONDITIONNELLES.

Si, entre des variables quelconques  $x, y, z, p, \dots$ , est donnée une équation  $f = 0$ , dans laquelle entre une constante arbitraire  $c$ , alors en éliminant  $c$

---

(1) Le premier Mémoire de K. M. Peterson, ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ СЪ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, a paru dans le Tome VIII (p. 291-361) du *Recueil mathématique* (МАТЕМАТИЧЕСКІЙ СВОРНИКЪ) publié par la *Société mathématique de Moscou*; il a été lu le 18 septembre 1876.

entre les équations  $f=0$  et  $df=0$ , nous obtiendrons l'équation différentielle  $D=0$ , dont  $f=0$  sera l'intégrale. Mais si, dans l'équation donnée  $f=0$ , au lieu d'une constante arbitraire  $c$ , entre une fonction arbitraire  $\varphi a$ , nous ne pourrions éliminer cette fonction entre les équations  $f=0$  et  $df=0$  que si nous considérons son argument  $a$  comme une constante. Mais l'équation différentielle  $D=0$  ainsi obtenue ne sera plus absolument légitime; son existence dépendra de l'hypothèse que  $a$  ne varie pas ou que  $da=0$ .

Comme  $a$  est une fonction donnée des variables  $x, y, z, p, \dots$ , ou, plus généralement, est définie par une équation quelconque, la condition  $da=0$ , en général, la forme d'une équation différentielle  $A=0$  entre les variables  $x, y, z, p, \dots$ . Nous en concluons que l'équation donnée  $f=0$ , qui contient une fonction arbitraire, représente l'intégrale d'une certaine équation différentielle  $D=0$ , existant seulement sous une condition exprimée par une autre équation différentielle  $A=0$ . Nous appellerons *conditionnelle* une équation telle que  $D=0$ , et *condition* l'équation  $A=0$ .

Une équation conditionnelle exprime donc une dépendance entre deux expressions différentielles  $D$  et  $A$  telle que l'une des expressions s'annule, si l'on égale l'autre à zéro. L'intégrale d'une équation conditionnelle se présente sous la forme de deux équations finies  $f=0$  et  $\varphi=0$ , contenant deux nouvelles variables  $b$  et  $a$ , dont l'une est une fonction arbitraire de l'autre. Les équations  $f=0$  et  $\varphi=0$  sont les intégrales compatibles des équations  $D=0$  et  $A=0$ ; les variables  $b$  et  $a$  sont les constantes d'intégration.

Une équation conditionnelle peut aussi être donnée sous plusieurs conditions.

Si, entre des variables quelconques  $x, y, z, p, \dots$ , est donnée une équation différentielle non conditionnelle  $D=0$ , la constante d'intégration  $k$  ne change pas. Mais si l'équation  $D=0$  est donnée sous condition, c'est seulement sous cette même condition que  $k$  ne changera pas. Si cette condition est exprimée par l'équation différentielle  $A=0$ , dans l'intégrale de laquelle entre une constante arbitraire  $a$ , alors  $k$  et  $a$  seront des variables, mais  $k$  ne changera pas quand  $a$  ne change pas, ce qui signifie que  $k$  dépend seulement de  $a$ , c'est-à-dire sera une fonction arbitraire  $\varphi a$ . Si l'équation différentielle  $D=0$  est donnée sous deux conditions, exprimées par deux équations différentielles  $A=0$  et  $B=0$  dans les intégrales desquelles entrent les constantes d'intégration  $a$  et  $b$ , la constante d'intégration  $k$  de l'équation  $D=0$  ne changera pas, quand  $a$  et  $b$  ne changeront pas; par conséquent  $k$  sera une fonction arbitraire des deux variables  $a$  et  $b$ , que nous appellerons les arguments des conditions  $A=0$  et  $B=0$ .

Nous concluons de même, d'une façon générale, que la constante d'intégration  $k$ , dans l'intégrale de toute équation différentielle conditionnelle donnée  $D=0$ , sera une fonction arbitraire de tous les arguments des conditions sous lesquelles elle est donnée.

## II. — INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES CONDITIONNELLES.

Si, entre des variables quelconques  $x, y, z, p, \dots$ , sont données plusieurs équations différentielles conditionnelles, les constantes d'intégration, dans les intégrales des conditions, seront, d'après ce qui précède, les variables dont dépendront les constantes d'intégration dans les intégrales des équations conditionnelles. Mais toutes ces intégrales s'obtiennent rarement par l'intégration isolée de chaque équation; en général, on les trouve par une intégration d'ensemble, dans laquelle elles sont obtenues toutes en même temps, ou par une intégration successive, dans laquelle l'intégrale d'une équation s'obtient au moyen des intégrales déjà trouvées des autres équations.

Chaque intégrale trouvée est une équation finie, au moyen de laquelle une variable est éliminée, et chaque équation différentielle  $D = 0$ , qui ne s'intègre pas d'elle-même, peut être intégrée par suite d'une élimination de variables, parce que le nombre des conditions d'intégrabilité de l'équation  $D = 0$  diminue avec le nombre des variables.

Nous considérerons ici l'intégration successive des équations différentielles dont chacune est donnée sans condition ou sous une condition seulement, mais qui, étant liées entre elles, conduisent, en général, à des équations assujetties à plusieurs conditions.

Si plusieurs équations conditionnelles sont données sous une seule et même condition, nous les appellerons équations conditionnelles d'un seul et même système.

Supposons que nous ayons, entre les variables  $x, y, z, p, \dots$ , outre des équations différentielles non conditionnelles, encore des systèmes différents d'équations conditionnelles.

$$\begin{array}{llll} B = 0, & C = 0, & \dots, & \text{sous la condition} & A = 0, \\ \mathfrak{B} = 0, & \mathfrak{C} = 0, & \dots, & \text{»} & \mathfrak{A} = 0, \\ B = 0, & C = 0, & \dots, & \text{»} & A = 0, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \text{»} & \dots, \end{array}$$

nous appellerons *compatibles* toutes ces équations différentielles. Les équations différentielles, au moyen desquelles sont intégrées les équations aux dérivées partielles, et que nous considérerons au paragraphe IV, ont précisément cette forme.

Nous examinerons deux procédés d'intégration successive d'équations différentielles compatibles.

1. Dans le premier procédé, nous intégrerons chaque équation différentielle

strictement telle qu'elle est donnée, par conséquent sans lier l'intégration aux équations conditionnelles des différents systèmes, attendu que cela nous conduirait à des équations assujetties à plusieurs conditions qui ne figurent pas dans les données par hypothèse. Suivant ce procédé, nous déterminerons d'abord l'argument de la condition d'un système d'équations conditionnelles, et pour cela nous pourrons transformer la condition donnée  $A = 0$ , à volonté au moyen d'équations non conditionnelles ou d'équations conditionnelles du système lui-même.

Toute équation différentielle  $D = 0$  que nous obtenons de cette manière a lieu sous la condition  $A = 0$ ; elle exprime cette condition elle-même et, dans le cas où elle est intégrable, nous pouvons considérer la constante  $a$  de son intégration comme l'argument de la condition  $A = 0$ .

En considérant  $a$  comme une constante, nous pourrons déjà, au moyen de l'intégrale trouvée, éliminer une variable dans les équations conditionnelles  $B = 0$  et  $C = 0$  du système, et, si nous obtenons par cette voie une seconde équation qui peut être intégrée, la constante d'intégration  $b$  dans l'intégrale obtenue sera une fonction arbitraire de l'argument  $a$ . Au moyen de cette seconde intégrale, nous pourrons, pour  $a$  et  $b$  constants, éliminer encore une variable, et la constante d'intégration  $c$  dans la troisième intégrale sera une seconde fonction arbitraire de  $a$ .

Si, dans ce premier système, outre  $B = 0$  et  $C = 0$  sous la condition  $A = 0$ , nous n'avons plus d'équations conditionnelles, toutes les équations différentielles restantes ont lieu non seulement sous la condition  $A = 0$ , c'est-à-dire pour  $a$  constant, mais aussi pour  $a$  variable, et par conséquent, pour leur intégration, nous devons considérer  $a$  comme variable. Au moyen des trois intégrales trouvées, nous pourrons éliminer, de toutes les équations différentielles restantes, trois variables, en y introduisant seulement une nouvelle variable  $a$ . Par une telle transformation, chacune des équations différentielles qui y sont soumises, sans rien changer à sa signification primitive, prend la forme  $D + G da = 0$ , où  $D$  est la partie qui contient les différentielles des variables principales et où  $G$  contient, en général, les dérivées  $b'$  et  $c'$  des fonctions arbitraires  $b$  et  $c$ . Si une telle équation  $D + G da = 0$  peut être intégrée sous cette forme, les fonctions arbitraires  $b$  et  $c$  dans l'intégrale trouvée prendront toujours de nouvelles formes sous le signe  $\int$ , parce que la quadrature mécanique ne s'effectue pas sur elles. La constante d'intégration dans cette intégrale dépend de la signification qu'a l'équation intégrée  $D + G da = 0$ . Si cette équation est non conditionnelle, la constante d'intégration sera une quantité constante et n'apparaîtra pas du tout, étant renfermée dans le signe indéfini  $\int$ . Mais si l'équation intégrée  $D + G da = 0$  est assujettie à une condition, la constante sera, dans son intégrale, ou l'argument de

cette condition, ou une fonction arbitraire de cet argument, si ce dernier est déjà défini par une autre intégrale du système.

De la même manière, toute intégrale d'une équation conditionnelle ou non conditionnelle peut servir à l'intégration des équations restantes, conditionnelles et non conditionnelles. Pour obtenir l'intégrale d'une équation non conditionnelle, nous pouvons, dans l'intégration, lier entre elles seulement les équations non conditionnelles, et, pour la transformation au moyen des intégrales déjà trouvées, nous devons considérer tous les arguments comme des variables. Pour obtenir l'intégrale d'une équation conditionnelle ou d'une condition d'un système quelconque, nous pouvons, dans l'intégration, lier entre elles la condition et les équations conditionnelles de ce système, ainsi que toutes les équations non conditionnelles, et, pour la transformation au moyen des intégrales déjà trouvées, nous pouvons prendre simplement comme constant un argument du système.

La constante d'intégration d'une condition sera l'argument de cette condition; la constante d'intégration d'une équation conditionnelle sera une fonction arbitraire de l'argument de sa condition, et la constante d'intégration d'une équation non conditionnelle n'apparaît pas explicitement, si nous supposons que l'équation ne s'intègre pas d'elle-même; les équations non conditionnelles qui se présentent au paragraphe IV possèdent, en effet, cette propriété.

2. Pour l'intégration d'équations différentielles compatibles, d'après le second procédé, nous pouvons prendre les arguments que nous voulons pour constantes, et, dans l'intégration, lier les équations différentielles que nous voulons, en définissant ensuite les constantes d'intégration dans les intégrales ainsi obtenues. Si, par exemple, au moyen des équations différentielles de deux systèmes :  $B=0$  si  $A=0$  et  $\mathfrak{B}=0$  si  $\mathfrak{A}=0$ , nous formons, dans le cours de l'intégration, une équation différentielle  $D=0$  qui peut être intégrée, cette équation différentielle ne sera exacte que sous les deux conditions  $A=0$  et  $\mathfrak{A}=0$ , et par conséquent la constante d'intégration  $k$  dans l'intégrale trouvée sera une fonction des deux arguments de ces conditions. Nous devons considérer cette fonction non comme arbitraire, mais comme une fonction indéterminée dont la forme doit être définie de façon que les équations données soient satisfaites. L'équation  $D=0$  a une signification plus générale que les équations données et, par conséquent, une forme particulière seulement de son intégrale satisfera à ces dernières. Si même cette intégrale est en outre obtenue pour des valeurs constantes d'autres arguments encore,  $k$  sera ainsi une fonction indéterminée de ces arguments, dont il est nécessaire de définir d'abord la forme de façon que l'équation  $D$  soit satisfaite.

Soit  $f=0$  l'intégrale de l'équation non conditionnelle donnée  $D=0$  obtenue par le second procédé; la constante d'intégration  $k$  qui y entre sera une fonction indéterminée des arguments des équations conditionnelles avec lesquelles on a lié

l'équation  $D = 0$  dans le cours de l'intégration, et aussi des arguments que l'on a pris comme constants pour l'intégration.

En différentiant  $f = 0$  par rapport à toutes les variables qui y entrent, nous obtiendrons l'équation  $df = 0$ , dans laquelle, en vertu de  $D = 0$ , disparaissent les différentielles de toutes les variables dont  $k$  ne dépend pas et qui, par conséquent, prend la forme

$$L da + M d\alpha + N da + \dots = 0,$$

où  $a, \alpha, a, \dots$  sont les arguments dont  $k$  dépend, et où  $L, M, N, \dots$  sont des expressions contenant en général, outre les variables principales, les dérivées de  $k$  par rapport aux arguments  $a, \alpha, a, \dots$ .

Comme l'équation donnée  $D = 0$  est non conditionnelle, l'intégrale trouvée doit lui satisfaire pour  $da, d\alpha, da, \dots$ , arbitraires. Nous déduirons de là les nouvelles équations finies

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad \dots,$$

qui, pour la forme cherchée de la fonction  $k$ , se transforment dans les intégrales des équations compatibles, parce qu'il n'y a pas d'équations finies en dehors des intégrales. Il est évident que ce sont ces intégrales qui servent uniquement à découvrir, par le premier procédé, l'intégrale  $f = 0$  de l'équation non conditionnelle  $D = 0$ . Si ces intégrales sont déjà trouvées, les variables principales peuvent être par elles éliminées des équations  $L = 0, M = 0, N = 0, \dots$ , et les dérivées partielles de  $k$  par rapport à tous les arguments dont il dépend sont déterminées; par conséquent  $k$  est, dans ce cas, obtenu par une quadrature mécanique. Il en sera de même si l'équation donnée  $D = 0$ , dont l'intégrale  $f = 0$  est obtenue par le second procédé, est une équation conditionnelle d'un système quelconque, dont l'argument est  $a$ , par exemple. En considérant alors  $a$  comme une constante dans l'équation  $df = 0$ , nous déterminerons  $k$ , par la même voie, comme fonction des arguments restants, et nous ajouterons une constante au signe indéfini  $\int$  par lequel est exprimé  $k$ , qui, ou bien sera  $a$ , si nous n'avons pas encore  $a$ , ou bien sera une fonction arbitraire de  $a$ , si  $a$  est déjà déterminé par une autre intégrale.

Mais, en général, on n'a pas toutes les intégrales à l'aide desquelles les inconnues principales sont éliminées des équations

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad \dots,$$

cette élimination doit alors être effectuée dans les équations différentielles

$$dL = 0, \quad dM = 0, \quad dN = 0, \quad \dots,$$

à l'aide des équations différentielles données, et la détermination de  $k$  se ramène

à l'intégration d'équations aux dérivées partielles. Nous ne considérerons pas ici ce cas.

Nous pourrions quelquefois, ayant obtenu par le second procédé l'intégrale  $f=0$  d'une équation conditionnelle ou non conditionnelle, trouver la constante  $k$  par des considérations étrangères, et, dans un tel cas, nous n'avons pas seulement cette intégrale  $f=0$ , mais aussi en même temps toutes les intégrales

$$L=0, \quad M=0, \quad N=0, \quad \dots,$$

à l'aide desquelles est obtenue, par le premier procédé, l'intégrale  $f=0$ .

Si  $k$  dépend d'un seul argument  $a$ , la détermination de  $k$  est alors très simple. Dans ce cas, pour obtenir l'intégrale  $f=0$ , par le premier procédé, une seule intégrale  $L=0$  est nécessaire, dans laquelle entre une fonction arbitraire  $b$  de  $a$ . Si nous avons cette intégrale  $L=0$ ,  $k$  est déterminé comme une nouvelle forme de la fonction  $b$  sous le signe  $\int$ ; mais si nous n'avons pas cette intégrale, cela signifie que nous n'avons pas une seule fonction arbitraire; nous pouvons alors considérer  $k$  comme une nouvelle fonction arbitraire de  $a$ , et la dérivée  $k'$  de  $k$  par rapport à  $a$ , qui entre dans l'intégrale  $L=0$  trouvée en même temps, comme une nouvelle forme de la fonction arbitraire  $k$ , mais sans signe  $\int$ .

### III. — FORME NORMALE DES INTÉGRALES D'ÉQUATIONS COMPATIBLES.

Pour l'intégration d'une équation différentielle donnée  $D=0$ , à l'aide de l'intégrale d'une équation conditionnelle  $B=0$ , si  $A=0$ , qui se compose de deux équations finies, nous éliminerons deux variables principales de l'équation  $D=0$ , en introduisant dans cette équation une nouvelle variable, savoir l'argument de la condition  $A=0$ . Si ces deux variables principales entrent sans différentielles dans l'équation  $D=0$ , après leur élimination cette équation ne contient pas la différentielle  $da$ , et, par conséquent, l'intégrale  $f=0$  de l'équation  $D=0$  a dans ce cas une forme pour laquelle  $\frac{df}{da}=0$ , car les équations  $df=0$  et  $D=0$  sont identiques. Nous dirons que cette forme de l'intégrale  $f=0$  est normale par rapport à l'argument  $a$ .

Mais si, dans l'équation  $D=0$ , entrent les différentielles des variables principales éliminées, elle prend alors, après l'élimination de ces dernières, la forme  $D_1 + G da = 0$ , et son intégrale  $f=0$  n'a pas la forme normale par rapport à  $a$ . Néanmoins l'intégrale trouvée  $f=0$  peut, dans ce cas, être amenée à la forme normale.

Soit  $U=0$  l'intégrale de la condition  $A=0$  au moyen de laquelle est déterminé



l'argument  $a$ ; d'après l'origine et la signification de l'intégrale  $U = 0$ ,  $\frac{dU}{da}$  ne sera pas nul, car  $a$  est une constante par rapport à l'équation  $A = 0$ , et par conséquent l'identité des équations  $dU + \frac{dU}{da} da = 0$  et  $A = 0$  doit avoir lieu seulement pour  $da = 0$ .

Cela posé, si  $\frac{df}{da}$  ne s'annule pas, et si

$$f_1 = f \frac{dU}{da} - U \frac{df}{da},$$

on obtient l'intégrale  $f = 0$ , sous la forme normale  $f_1 = 0$  par rapport à  $a$ , parce que  $f_1$  s'annule toujours et seulement en vertu de  $f = 0$ , et que, en outre,

$$\frac{df_1}{da} = f \frac{d^2U}{da^2} - U \frac{d^2f}{da^2} = 0.$$

Nous pouvons donc amener à la forme normale, par rapport à tous les arguments, toutes les intégrales des équations compatibles qui n'ont pas cette forme, à l'exception seulement des intégrales des conditions, par lesquelles sont définis ces arguments, et qui n'ont pas la forme normale seulement par rapport à leurs arguments.

En effet, supposons que  $f_1 = 0$  et  $V_1 = 0$  soient les formes normales par rapport à  $a$  de l'intégrale  $f = 0$  d'une des équations conditionnelles ou non conditionnelles et de l'intégrale  $V = 0$  d'une des conditions, par laquelle est défini l'argument  $a$  de cette condition.

Posons

$$f_2 = f_1 \frac{dV_1}{d\alpha} - V_1 \frac{df_1}{d\alpha};$$

nous obtenons l'intégrale  $f = 0$  sous la forme  $f_2 = 0$  normale par rapport aux deux arguments  $a$  et  $\alpha$ , parce que l'équation  $f_2 = 0$  est identique à l'équation  $f_1 = 0$ , et que non seulement

$$\frac{df_2}{d\alpha} = 0,$$

mais aussi

$$\frac{df_2}{da} = f_1 \frac{d^2V_1}{da d\alpha} - V_1 \frac{d^2f_1}{da d\alpha} = 0.$$

Toute intégrale  $f = 0$  de forme normale par rapport à tous les arguments possède deux propriétés remarquables.

1. Elle représente par elle-même une équation finie entre les variables principales, parce que tous les arguments  $a, \alpha, \dots$  qui y entrent sont déterminés par les équations  $\frac{df}{da} = 0, \frac{df_1}{d\alpha} = 0, \dots$

2. Pour sa différentiation, on peut considérer les arguments variables comme des constantes.

Dans toute intégrale, sans exclure les intégrales des conditions, tous les arguments, en même temps que leurs fonctions arbitraires, peuvent entrer sous différentes formes sous le signe  $\int$ , et l'expression algébrique de ces arguments est alors impossible. Mais, si un argument est déterminé comme une fonction des inconnues principales et des arguments restants, il peut être éliminé de toutes les intégrales et la forme de ces dernières, par rapport à cet argument, présente un cas particulier de la forme normale, car, si un argument quelconque  $\alpha$  n'entre pas dans l'intégrale  $f = 0$ , alors  $\frac{df}{d\alpha}$  sera nul.

Chaque signe d'intégration  $\int$ , dans l'intégrale d'équations compatibles, ne se rapporte qu'à un argument et exige des quadratures relativement à cet argument. Nous pouvons aussi amener les variables principales sous un tel signe  $\int$ , et nous dirons alors que la forme de l'intégrale est composée.

Si nous intégrons une équation conditionnelle, par exemple  $B = 0$  si  $A = 0$ , dont l'argument est  $\alpha$ , au moyen de l'intégrale d'une autre équation conditionnelle dans laquelle entre une fonction arbitraire  $\beta$  de l'argument  $\alpha$ , nous introduisons les variables  $\alpha$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  dans l'équation différentielle  $B = 0$ . Pour l'intégration,  $\alpha$  est considéré comme une constante, et la constante d'intégration sera une fonction arbitraire  $b$  de  $\alpha$ . Mais l'argument  $\alpha$  est ici variable, et par conséquent  $\beta$  prend une nouvelle forme sous le signe  $\int$ , sous lequel  $\alpha$  peut évidemment entrer comme constante. Dans une telle nouvelle forme de la fonction arbitraire  $\beta$ , nous dirons que  $\alpha$  est le module de cette forme.

#### IV. — DÉDUCTION DES ÉQUATIONS COMPATIBLES.

Soit donnée une équation  $F = 0$  aux dérivées partielles d'ordre  $n$  de  $z$  par rapport à deux variables indépendantes  $x$  et  $y$ ; nous pouvons alors considérer  $x$ ,  $y$ ,  $z$  et toutes les  $\frac{n(n+3)}{2}$  dérivées partielles jusqu'au  $n^{\text{ième}}$  ordre inclusivement, savoir

$$z', z_1, z'', z'_1, z_{11}, \dots; z^{(n)}, z_1^{(n-1)}, z_2^{(n-2)}, \dots, z'_{n-1}, z_n;$$

comme des variables entre lesquelles existent les équations suivantes :

1° L'équation donnée  $F = 0$ ;

*Fac. de T., 2<sup>e</sup> S., VII.*

2°  $\frac{n(n+1)}{2}$  équations non conditionnelles de la forme

$$\begin{aligned} dz &= z' dx + z_1 dy, \\ dz' &= z'' dx + z'_1 dy, \\ &\dots\dots\dots, \\ dz_{n-1} &= z'_{n-1} dx + z_n dy; \end{aligned}$$

3° Les équations  $\frac{dF}{dx} = 0$  ou  $\frac{dF}{dy} = 0$ , qui sont identiques entre elles, en vertu de  $F = 0$ , et indiquent que cette dernière a lieu pour  $x$  et  $y$  arbitraires. Dans ces équations, entrent les dérivées partielles du  $(n+1)^{i\text{e}m.e}$  ordre, entre lesquelles nous avons encore :

4°  $n+1$  équations différentielles non conditionnelles de la forme

$$\begin{aligned} dz^{(n)} &= z^{(n+1)} dx + z_1^{(n)} dy, \\ &\dots\dots\dots, \\ dz_{(n)} &= z'_n dx + z_{n+1} dy. \end{aligned}$$

Notre problème consiste dans l'élimination, entre les équations 3° et 4°, des dérivées partielles du  $(n+1)^{i\text{e}m.e}$  ordre, afin d'obtenir des relations entre toutes les variables restantes que nous appellerons *principales*.

Posons pour cela

$$dF = X dx + Y dy + Z^{(n)} dz^{(n)} + Z_1^{(n-1)} dz_1^{(n-1)} + \dots + Z_n dz_n;$$

nous aurons

$$\frac{dF}{dy} = Y + Z^{(n)} z_1^{(n)} + Z_1^{(n-1)} z_2^{(n-2)} + \dots + Z_n z_{n+1} = 0.$$

En désignant  $\frac{dy}{dx}$  par  $u$ , nous pouvons, à l'aide des équations 4°, exprimer successivement toutes les dérivées partielles du  $(n+1)^{i\text{e}m.e}$  ordre au moyen de  $z_{n+1}$ , sous la forme

$$z'_n = \frac{dz_n}{dx} + u z_{n+1}, \quad z''_{n-1} = \frac{dz'_{n-1}}{dx} + u z'_n = \frac{dz'_{n-1}}{dx} + u \frac{dz_n}{dx} + u^2 z_{n+1}, \quad \dots$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation  $\frac{dF}{dy} = 0$ , nous obtenons une équation de la forme

$$M + N z_{n+1} = 0,$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{Z}^{(n)} u^n + \mathbf{Z}_1^{(n-1)} u^{n-1} + \mathbf{Z}_2^{(n-2)} u^{n-2} + \dots + \mathbf{Z}_n, \\ \mathbf{M} dx &= \mathbf{Y} dx + \mathbf{Z}^{(n)} dz_1^{(n-1)} \\ &+ (\mathbf{Z}^{(n)} u + \mathbf{Z}_1^{(n-1)}) dz_2^{(n-2)} + (\mathbf{Z}^{(n)} u^2 + \mathbf{Z}_1^{(n-1)} u + \mathbf{Z}_2^{(n-2)}) dz_3^{(n-3)} + \dots \end{aligned}$$

Mais de l'équation  $\mathbf{M} + \mathbf{N} z_{n+1} = 0$ , d'où  $z_{n+1}$  n'est pas éliminée, nous pouvons seulement, en ce qui concerne les variables principales, conclure que  $\mathbf{M}$  s'annule, si nous égalons à zéro l'expression  $\mathbf{N}$ .

Or  $\mathbf{N}$ , comme terme multiple d'ordre  $n$  par rapport à  $u$ , se décompose en  $n$  facteurs de la forme  $u - u_1, u - u_2, \dots, u - u_n$ , où  $u = -\frac{dy}{dx}$  et  $u_1, u_2, \dots, u_n$  sont les racines de l'équation  $\mathbf{N} = 0$  par rapport à  $u$ . L'expression  $\mathbf{N}$  s'annule donc chaque fois que nous égalons à zéro un de ces facteurs, c'est-à-dire si nous posons

$$dy + u_1 dx = 0 \quad \text{ou} \quad dy + u_2 dx = 0, \quad \dots$$

En introduisant dans l'expression  $\mathbf{M} dx$  successivement  $u_1, u_2, \dots$ , au lieu de  $u$ , nous obtenons  $n$  expressions différentielles  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_n$  avec les différentielles  $dz_n, dz_{n-1}, \dots$  des dérivées partielles d'ordre  $n$ .

Nous tirons ainsi de l'équation  $\mathbf{M} + \mathbf{N} z_{n+1} = 0$ ,  $n$  équations différentielles conditionnelles,

$$\begin{array}{lll} \mathbf{M}_1 = 0 & \text{si} & dy + u_1 dx = 0, \\ \mathbf{M}_2 = 0 & \text{si} & dy + u_2 dx = 0, \\ \dots & & \dots \\ \mathbf{M}_n = 0 & \text{si} & dy + u_n dx = 0. \end{array}$$

Nous dirons que ces  $n$  équations conditionnelles, en même temps que les  $\frac{n(n+1)}{2}$  équations non conditionnelles  $z^n$ , sont compatibles. Elles ont la forme pour laquelle au paragraphe III nous avons déjà exposé leur intégration, car chaque équation conditionnelle est donnée sous une condition seulement.

Nous avons tiré les équations conditionnelles des équations non conditionnelles d'ordre  $n$ , au moyen de l'équation  $\frac{d\mathbf{F}}{dy} = 0$ . Au moyen de l'équation  $\frac{d\mathbf{F}}{dx} = 0$ , nous les obtiendrions sous une autre forme, mais identique à celle trouvée, en vertu de  $\mathbf{F} = 0$ .

Toutes les équations compatibles se partagent, d'après leur signification, en conditions, et en équations conditionnelles et non conditionnelles. D'après leur forme, nous pouvons les diviser en ordres, suivant l'ordre des dérivées partielles dont les différentielles entrent dans ces équations.

Si donc on donne l'équation aux dérivées partielles d'ordre  $n$ ,  $F = 0$ , nous avons les équations compatibles suivantes :

I.  $\frac{n(n+1)}{2}$  équations non conditionnelles, savoir

$$\begin{aligned}
 n \text{ équations non conditionnelles d'ordre } (n-1) & \left\{ \begin{aligned} dz^{(n-1)} &= z^{(n)} dx + z_1^{(n-1)} dy, \\ dz_1^{(n-2)} &= z_1^{(n-1)} dx + z_2^{(n-2)} dy, \\ &\dots\dots\dots, \\ dz_{n-1} &= z'_{n-1} dx + z_n dy; \end{aligned} \right. \\
 (n-1) \text{ équations non conditionnelles d'ordre } (n-2) & \left\{ \begin{aligned} dz^{(n-2)} &= z^{n-1} dx + z_1^{n-2} dy, \\ dz_1^{(n-3)} &= z_1^{n-2} dx + z_2^{n-3} dy, \\ &\dots\dots\dots, \\ dz_{n-2} &= z'_{n-2} dx + z_{n-1} dy, \end{aligned} \right. \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

une équation non conditionnelle d'ordre 0,

$$dz = z' dx + z_1 dy.$$

Ayant posé

$$dF = X dx + Y dy + Z^{(n)} dz^{(n)} + Z_1^{(n-1)} dz_1^{(n-1)} + \dots + Z_n dz_n,$$

nous obtenons l'équation

$$Z^{(n)} u^n + Z_1^{(n-1)} u^{n-1} + \dots + Z_n = 0,$$

que nous appellerons l'équation aux racines, et par laquelle seront déterminées les  $n$  racines relatives à  $u$ ,

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n.$$

Au moyen de ces racines nous mettrons les  $n$  conditions sous la forme suivante,

II.  $dy + u_1 dx = 0, \quad dy + u_2 dx = 0, \quad \dots, \quad dy + u_n dx = 0.$

Les équations conditionnelles ont deux formes identiques entre elles, en vertu de l'équation  $dF = 0$ ,

III<sup>a</sup>.  $Y dx + Z^{(n)} dz_1^{(n-1)} + (Z^{(n)} u_1 + Z_1^{(n-1)}) dz_2^{(n-2)} + (Z^{(n)} u_1^2 + Z_1^{(n-1)} u_1 + Z_2^{(n-2)}) dz_3^{(n-3)} + \dots = 0$   
 si  $dy + u_1 dx = 0.$

III<sup>b</sup>.  $X dy + Z_n dz'_{n-1} + \left( Z_n \frac{1}{u_1} + Z'_{n-1} \right) dz_{n-2}^2 + \left( Z_n \frac{1}{u_1^2} + Z'_{n-1} \frac{1}{u_1} + Z_{n-2}^2 \right) dz_{n-3}^3 + \dots = 0$   
 si  $dy + u_1 dx = 0.$

Les  $(n - 1)$  équations conditionnelles restantes s'obtiennent sous les deux formes en remplaçant successivement  $u_1$  par  $u_2, u_3, \dots, u_n$ . Ces équations conditionnelles sont du  $n^{\text{ième}}$  ordre, car elles contiennent les différentielles des dérivées partielles du  $n^{\text{ième}}$  ordre.

Les équations compatibles ainsi obtenues, dont le nombre est  $\frac{n(n+1)}{2} + 2n$ , expriment, comme nous l'avons vu, la dépendance entre toutes les  $\frac{n(n+3)}{2}$  dérivées partielles qui découle de leur signification.

Si toutes ces  $\frac{n(n+1)}{2} + 2n$  équations compatibles sont intégrées, alors leurs intégrales représentent un nombre suffisant d'équations finies pour la détermination des  $n$  arguments qui y entrent et des  $\frac{n(n+3)}{2}$  dérivées partielles; le système d'équations, constitué par ces intégrales jointes à l'équation donnée  $F = 0$ , exprime sous une forme finie la dépendance entre  $x, y, z$  qui existe en vertu de l'équation donnée  $F = 0$ . Nous dirons que ce système d'équations est l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles  $F = 0$ . Quand l'élimination des arguments et des dérivées partielles entre les équations de ce système est effectivement réalisée, l'intégrale générale prend alors la forme d'une équation  $f = 0$  entre  $x, y, z$ .

V. — INTÉGRABILITÉ DES ÉQUATIONS CONDITIONNELLES.

Dans le système d'équations différentielles compatibles présenté au paragraphe IV, les conditions contiennent seulement  $dx$  et  $dy$  parmi les différentielles des variables principales. Si donc une condition s'intègre d'elle-même, l'argument est déterminé comme une fonction de  $x$  et  $y$ ; si, au contraire, elle s'intègre au moyen d'autres équations compatibles, alors les dérivées partielles entrent dans son intégrale; si enfin, pour son intégration, on s'est servi des intégrales d'autres équations compatibles, son intégrale contient des fonctions arbitraires.

Les équations conditionnelles contiennent les différentielles de toutes les dérivées partielles d'ordre  $n$ . Dans l'intégrale d'une équation conditionnelle entrent donc nécessairement les dérivées partielles d'ordre  $n$  et une fonction arbitraire de l'argument de sa condition, cette fonction, comme constante d'intégration, ayant toujours seulement une forme.

Une équation non conditionnelle ne s'intègre jamais d'elle-même, car des cinq variables entrant dans sa forme générale,

$$dz^{(u)} = z_{v+1}^{(u+1)} dx + z_{v+1}^{(u)} dy,$$

deux,  $z_{y^{(k+1)}}$  et  $z_{y^{(k)}}$ , entrent sans différentielles et exigent une élimination préalable. Mais il est nécessaire pour cela d'avoir deux équations finies, c'est-à-dire, outre celle donnée  $F = 0$ , au moins encore une intégrale. Dans l'intégrale d'une équation non conditionnelle entrent donc au moins une fonction arbitraire dans la nouvelle forme sous le signe  $\int$ , et la constante d'intégration impliquée dans ce signe.

Si nous avons des intégrales de toutes les conditions et de toutes les équations conditionnelles, alors, au moyen des intégrales des premières, sont déterminés tous les  $n$  arguments et les intégrales des dernières, jointes à l'équation donnée, servent pour la détermination des  $(n + 1)$  dérivées partielles d'ordre  $n$ ,

$$z^{(n)}, z_1^{(n-1)}, \dots, z'_{n-1}, z_n.$$

Il existe entre ces dérivées partielles, en vertu de leur signification,  $n$  équations finies

$$(A) \quad \frac{dz^{(n)}}{dy} = \frac{dz_1^{(n-1)}}{dx}, \quad \frac{dz_1^{(n-1)}}{dy} = \frac{dz_2^{(n-2)}}{dx}, \quad \dots, \quad \frac{dz'_{n-1}}{dy} = \frac{dz_n}{dx},$$

qui ne peuvent être que des intégrales des équations compatibles ou identiques à ces intégrales, attendu qu'il n'existe pas d'autres équations finies.

En se rappelant que les intégrales de toutes les équations conditionnelles contiennent des formes de fonctions arbitraires qui n'apparaissent pas ici, on conclut que ces  $n$  équations (A), aux arguments près, doivent être identiques aux  $n$  intégrales des équations conditionnelles.

En introduisant, dans les équations non conditionnelles d'ordre  $n - 1$ , les valeurs des dérivées partielles d'ordre  $n$ , déterminées par les intégrales des équations conditionnelles, nous obtenons des équations différentielles dont les conditions d'intégrabilité, par rapport aux variables indépendantes  $x$  et  $y$ , sont exprimées par les équations (A), c'est-à-dire par les intégrales mêmes des équations conditionnelles. Nous concluons de là que, si nous avons les intégrales de toutes les conditions et équations conditionnelles, toutes les équations non conditionnelles d'ordre  $n - 1$  sont certainement intégrables, sinon séparément, au moins toutes ensemble.

Au moyen des  $n$  intégrales de toutes les équations non conditionnelles d'ordre  $(n - 1)$ , toutes les  $n$  dérivées partielles d'ordre  $(n - 1)$  sont déterminées et, ayant introduit leurs valeurs dans les équations non conditionnelles d'ordre  $(n - 2)$ , nous obtenons de nouveau des équations différentielles dont les conditions d'intégrabilité sont satisfaites par les intégrales que l'on a déjà et qui, par conséquent, sont intégrables. Nous obtenons ainsi successivement les intégrales compatibles de tous les ordres des équations non conditionnelles, tant

que nous ne poussons pas jusqu'à l'équation non conditionnelle d'ordre nul  $dz = z' dx + z_1 dy$ , dont l'intégrale sera l'intégrale générale  $f(x, y, z) = 0$ .

En ce qui concerne la forme de toutes les intégrales, les intégrales des conditions et des équations conditionnelles n'ont pas la forme normale, et les intégrales des équations non conditionnelles sont toujours obtenues sous la forme normale, par rapport à tous les arguments. En effet, si l'équation différentielle  $D = 0$  est donnée sous la condition  $da = 0$ , il faut seulement que son intégrale  $F = 0$  lui satisfasse pour  $da = 0$  ou si, dans l'équation  $dF + \frac{dF}{da} da = 0$ ,  $\frac{dF}{da}$  n'est pas égal à zéro. Pour l'intégration d'une équation non conditionnelle, d'ordre  $m$  par exemple, nous éliminerons, d'après ce qui précède, les dérivées partielles d'ordre  $m + 1$ , qui y entrent sous forme finie, au moyen d'équations finies; par conséquent, nous n'introduirons pas les différentielles des arguments dans les équations non conditionnelles. Si, par conséquent,  $F = 0$  est l'intégrale de l'équation non conditionnelle  $D = 0$ , pour que l'équation

$$dF + \frac{dF}{da} da + \frac{dF}{dz} dz + \dots = 0$$

soit identique à l'équation  $D = 0$ , qui ne contient pas  $da, dz, \dots$ , il faut que l'on ait

$$\frac{dF}{da} = 0, \quad \frac{dF}{dz} = 0, \quad \dots$$

Si, pour l'intégration d'une équation non conditionnelle, nous nous servons d'un des arguments comme variable indiquée, cette variable est toujours éliminée dans ce cas de l'intégrale trouvée et, par suite, la forme normale de l'intégrale est rétablie.

Nous pouvons aussi amener, d'après le paragraphe III, l'intégrale de l'équation conditionnelle à la forme normale, mais seulement au moyen des dérivées des fonctions arbitraires.

D'après le procédé d'intégration successive, toute fonction arbitraire apparaît la première fois dans l'intégrale de l'équation conditionnelle, et ici elle a toujours une seule forme; par la suite de l'intégration, elle prend de nouvelles formes sous le signe  $\int$ , mais ses dérivées n'entrent nulle part ou paraissent seulement pour disparaître ensuite au moment de la réduction.

Dans l'intégrale d'une équation non conditionnelle d'ordre  $m$ , les dérivées partielles d'ordre  $m$  entrent nécessairement et les dérivées d'ordre supérieur n'entrent pas. Nous appellerons une telle intégrale, *une intégrale d'ordre  $m$* .

L'intégrale d'ordre  $m$ ,  $F = 0$ , sous la forme normale, représente par elle-même



une équation aux dérivées partielles d'ordre  $m$ , parce que les arguments  $a, z, \dots$  qui y entrent sont déterminés par les équations  $\frac{dF}{da} = 0, \frac{dF}{dz} = 0, \dots$

Dans chaque intégrale  $F = 0$  d'ordre  $m$ , les  $n$  fonctions arbitraires entrent toutes en général et, dans ce cas, elle a un sens plus général que l'équation donnée  $F = 0$  ou l'intégrale générale  $f = 0$ , parce que l'intégrale générale de l'équation  $F = 0$  contient, outre  $n$  fonctions arbitraires, encore  $m$  indéterminées et se change seulement pour des valeurs particulières de ces dernières en l'intégrale générale  $f = 0$  de l'équation donnée  $F = 0$ .

Le plus petit nombre de fonctions arbitraires, que doit nécessairement contenir l'intégrale d'ordre  $m$ , est évidemment  $n - m$  et, dans ce cas, nous la nommerons une *intégrale intermédiaire d'ordre  $m$* .

Toute intégrale intermédiaire remplace entièrement l'équation donnée aux dérivées partielles d'ordre  $n$ ,  $F = 0$ , et exprime entre  $x, y, z$  la même dépendance que l'équation  $F = 0$  et son intégrale générale  $f = 0$ .

Suivant le procédé d'intégration successive, nous obtenons ainsi d'abord les intégrales de toutes les conditions et équations conditionnelles, et ensuite successivement les intégrales de tous les ordres des équations non conditionnelles sous la forme normale, et la dernière intégrale, celle de l'équation non conditionnelle

$$dz = z' dx + z_1 dy,$$

sera l'intégrale générale  $f = 0$ .

Si nous prenons successivement toutes les dérivées partielles par rapport à  $x$  et  $y$  de cette intégrale générale  $f = 0$ , jusqu'à l'ordre  $n$  inclusivement, nous obtenons autant d'équations que nous avons de dérivées partielles, par conséquent autant que d'intégrales des équations conditionnelles et non conditionnelles. Suivant l'ordre des dérivées partielles qui y entrent, nous concluons que l'ensemble des  $n + 1$  dérivées d'ordre  $n$ ,

$$\frac{d^n f}{dx^n} = 0, \quad \frac{d^n f}{dx^{n-1} dy} = 0, \quad \dots, \quad \frac{d^n f}{dy^n} = 0$$

doit être identique à l'équation donnée  $F = 0$  et à  $n$  intégrales des équations conditionnelles; qu'en général, l'ensemble des  $(m + 1)$  dérivées d'une équation d'ordre quelconque  $m$  est identique aux  $(m + 1)$  intégrales des équations conditionnelles d'ordre  $m$ ; et, par suite, que les équations

$$\frac{df}{da} = 0, \quad \frac{df}{dz} = 0, \quad \dots$$

seront les intégrales des conditions, non sous la forme primitive, mais sous celle qu'elles prennent par élimination des dérivées partielles.

VI. — ÉQUATIONS COMPATIBLES ENTRE LES DÉRIVÉES PARTIELLES  
DES TROIS PREMIERS ORDRES.

## I.

Soit  $F = 0$  une équation aux dérivées partielles du premier ordre; en désignant  $\frac{dz}{dx}$  par  $p$ ,  $\frac{dz}{dy}$  par  $q$  et en posant

$$dF = X dx + Y dy + P dp + Q dq = 0,$$

nous obtiendrons, d'après le paragraphe IV, les équations compatibles suivantes :  
Une équation non conditionnelle

$$dz = p dx + q dy;$$

une équation conditionnelle

$$(1) \quad Y dx + P dq = 0 \quad \text{si} \quad P dy - Q dx = 0.$$

Nous pouvons exprimer la seconde forme

$$X dy + Q dp = 0$$

de cette équation conditionnelle, sous la forme symétrique

$$(2) \quad Y dp - X dq = 0 \quad \text{si} \quad P dy - Q dx = 0.$$

## II.

Soit  $F = 0$  une équation aux dérivées partielles du second ordre; en désignant

$$\frac{d^2 z}{dx^2}, \quad \frac{d^2 z}{dx dy}, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} \quad \text{par} \quad r, \quad s, \quad t$$

et, en posant

$$dF = X dx + Y dy + R dr + S ds + T dt = 0,$$

nous aurons, d'après le paragraphe IV, les équations compatibles suivantes :

Trois équations non conditionnelles

$$dz = p dx + q dy, \quad dp = r dx + s dy, \quad dq = s dx + t dy;$$

Fac. de T., 2<sup>e</sup> S., VII.

deux équations conditionnelles

$$(3) \quad \begin{cases} Y dx + R ds - \frac{T dt}{u_1} = 0 & \text{si } dy + u_1 dx = 0, \\ Y dx + R ds - \frac{T dt}{u_2} = 0 & \text{si } dy + u_2 dx = 0, \end{cases}$$

dont les formes identiques sont

$$(4) \quad \begin{cases} X dy + T ds - u_1 R dr = 0 & \text{si } dy + u_1 dx = 0, \\ X dy + T ds - u_2 R dr = 0 & \text{si } dy + u_2 dx = 0, \end{cases}$$

$u_1$  et  $u_2$  sont les racines de l'équation aux racines

$$(5) \quad Ru^2 + Su + T = 0.$$

Si, dans l'équation donnée  $F = 0$ , n'entrent ni  $r$ , ni  $t$ , alors  $R$  et  $T$  s'annulent, et nous aurons, dans ce cas :

Racines.....	$u_1 = 0,$	$u_2 = \infty,$
Conditions.....	$dy = 0,$	$dx = 0,$
Arguments.....	$y$	et $x;$

mais les deux formes (3) et (4) des équations conditionnelles de ce paragraphe se changent dans les identités  $0 = 0$ .

De la forme primitive qu'ont ces équations conditionnelles dans le paragraphe IV, nous tirerons, dans ce cas,

$$(6) \quad \begin{cases} Y dx + S dt = 0 & \text{si } dy = 0, \\ X dy + S dr = 0 & \text{si } dx = 0. \end{cases}$$

### III.

Soit  $F = 0$  une équation aux dérivées partielles du troisième ordre; en désignant

$$\frac{d^3 z}{dx^3}, \quad \frac{d^3 z}{dx^2 dy}, \quad \frac{d^3 z}{dx dy^2}, \quad \frac{d^3 z}{dy^3} \quad \text{par } g, h, k, l$$

et en posant

$$dF = X dx + Y dy + G dg + H dh + K dk + L dl = 0,$$

enfin, en déterminant les racines  $u_1, u_2, u_3$  de l'équation aux racines

$$Gu^3 + Hu^2 + Ku + L = 0,$$

nous aurons, d'après le paragraphe IV, les équations compatibles suivantes :

Six équationnelles

$$\begin{aligned} dz &= p dx + q dy, & dp &= r dx + s dy, & dq &= s dx + t dy, \\ dr &= g dx + h dy, & ds &= h dx + k dy, & dt &= k dx + l dy; \end{aligned}$$

trois équations conditionnelles

$$(7) \quad Y dx + G dh + (G u_1 + H) dk - \frac{L dl}{u_1} = 0 \quad \text{si} \quad dy + u_1 dx = 0,$$

.....

*Exemple I.*

$$p^2 + q^2 = fx + \varphi y,$$

où  $f$  et  $\varphi$  sont des fonctions arbitraires.

En posant

$$F = p^2 + q^2 - fx - \varphi y = 0,$$

$$dF = 2p dp + 2q dq - f' x dx - \varphi' y dy,$$

nous aurons, d'après le paragraphe VI, équation (1), l'équation conditionnelle

$$2p dq - \varphi' y dx = 0 \quad \text{si} \quad p dy - q dx = 0,$$

qui se ramène à la forme

$$2q dq = \varphi' y dy$$

et nous donne l'intégrale

$$(1) \quad q^2 = \varphi y + b,$$

où  $b$  est une fonction arbitraire de l'argument  $a$ .

En déterminant  $p$  et  $q$  par les équations (1) et  $F = 0$ , nous pouvons mettre la condition  $p dy - q dx = 0$  sous la forme

$$\sqrt{fx - b} dy - \sqrt{\varphi y + b} dx = 0$$

et nous obtenons, par suite, l'intégrale

$$(2) \quad \int \frac{dy}{\sqrt{\varphi y + b}} - \int \frac{dx}{\sqrt{fx - b}} = 2a,$$

par laquelle l'argument  $a$  est déterminé.

Mais l'équation non conditionnelle  $dz = p dx + q dy$  peut être intégrée, sans cette intégrale (2), d'après le second procédé. En effet, en y portant les valeurs

de  $p$  et  $q$ , nous aurons

$$dz = \sqrt{fx - b} dx + \sqrt{\varphi y + b} dy,$$

et, pour  $a$  constant, nous obtenons l'intégrale

$$(3) \quad z = \int \sqrt{fx - b} dx + \int \sqrt{\varphi y + b} dy + c,$$

où  $c$  est une fonction indéterminée de l'argument  $a$ . En différentiant l'intégrale (3), nous obtenons

$$dz = p dx + q dy + \left( \int \frac{dy}{\sqrt{\varphi y + b}} - \int \frac{dx}{\sqrt{fx - b}} + z \frac{dc}{db} \right) \frac{db}{2},$$

pour  $db$  arbitraire, parce que  $dz = p dx + q dy$  sans condition. Nous concluons de là, au moyen de l'intégrale (2),

$$\frac{dc}{db} = -a;$$

par suite,

$$c = - \int a db,$$

et nous obtenons, au moyen de l'intégrale (3), l'intégrale générale sous la forme normale

$$z = \int \sqrt{fx - b} dx + \int \sqrt{\varphi y + b} dy - \int a db.$$

L'équation dérivée détermine l'argument  $a$  et sera l'intégrale (2).  $\int \sqrt{fx - b} dx$ ,  $\int \sqrt{\varphi y + b} dy$ ,  $\int a db$  sont ici les nouvelles formes sous le signe  $\int$  des fonctions arbitraires  $fx$ ,  $\varphi y$  et  $b$ ; dans les deux premières formes entre le module  $b$ .

De la même manière que l'équation

$$p^2 + q^2 = fx + \varphi y,$$

on peut aussi intégrer l'équation

$$fp + fq = \psi x + \varphi y,$$

dont l'intégrale générale sous la forme normale est

$$z = \int \mathfrak{J}(\psi x + b) dx + \int \mathfrak{f}(\varphi y - b) dy - \int a db,$$

où  $f$ ,  $\mathfrak{f}$ ,  $\psi$  et  $\varphi$  sont des fonctions arbitrairement données;  $\mathfrak{J}$ ,  $\mathfrak{f}$  sont les fonctions inverses de  $f$ ,  $\mathfrak{f}$ .

L'équation  $p^2 + q^2 = f(y, x)$  représente, en Géométrie, l'ensemble des lignes géodésiques sur une surface donnée arbitrairement et, en Analyse, elle est une forme fondamentale à laquelle se ramènent les équations aux dérivées partielles du premier ordre et du deuxième ordre.

*Exemple II.*

$$z = f(p, q).$$

En posant

$$\mathbf{F} = f(p, q) - z = 0,$$

$$d\mathbf{F} = f'(p, q) dp + f_1(p, q) dy - p dx - q dy = 0,$$

nous obtenons, d'après le paragraphe VI, l'équation conditionnelle

$$p dq - q dp = 0 \quad \text{si} \quad dx - \frac{f'(p, q) dp}{p} = 0$$

et de là les deux intégrales

$$(1) \quad \frac{q}{p} = a,$$

$$(2) \quad x = \int_{p=0}^{p=p} f'(p, ap) \frac{dp}{p} + b,$$

où  $b$  est une fonction arbitraire de l'argument  $a$  et où  $\int_{p=0}^{p=p}$  représente une quadrature pour  $a$  constant. Pour intégrer l'équation non conditionnelle

$$dz = p dx + q dy,$$

d'après le premier procédé pour  $a$  variable, remarquons que la différentielle totale de l'intégrale (2) est

$$dx = f'(p, q) \frac{dp}{p} + \left[ \int_{p=0}^{p=p} f_1'(p, ap) dp + b' \right] da,$$

où

$$b' = \frac{db}{da}, \quad f_1' = \frac{d^2 f}{dp dq}.$$

Avec cette valeur de la différentielle  $dx$ , l'équation non conditionnelle

$$p dx + q dy = dz = f'(p, q) + f_1(p, q) dq$$

prend la forme

$$dy = f_1(p, q) \frac{dq}{q} - \left[ \int_{p=0}^{p=p} f_1'(p, q) dp + b' \right] \frac{da}{a}$$

et nous obtenons, par suite, l'intégrale

$$(3) \quad y = \int_{q=0}^{q=q} f_1\left(\frac{q}{a}, q\right) \frac{dq}{q} - \int \frac{db}{a},$$

où  $\int \frac{db}{a}$  est la nouvelle forme de la fonction arbitraire  $b$ . L'équation donnée  $z = f(p, q)$ , avec les intégrales (1), (2) et (3), représente l'intégrale générale, laquelle, après élimination des variables  $p, q, a$ , s'exprime par une équation entre  $x, y, z$ .

*Exemple III.*

$$r^3 t = \text{const.}$$

En remplaçant  $y$  par  $ky$ , où  $k$  est une constante, nous pouvons mettre l'équation donnée sous une forme plus commode,

$$\mathbf{F} = t + \frac{r^{-3}}{3} = 0.$$

Au moyen de la différentielle totale

$$dt - \frac{dr}{r^4} = d\mathbf{F} = 0,$$

nous obtenons, d'après le paragraphe VI, équation (4), les deux équations conditionnelles,

$$\frac{dr}{r^2} - ds = 0 \quad \text{si} \quad dy - r^2 dx = 0,$$

$$\frac{dr}{r^2} + ds = 0 \quad \text{si} \quad dy + r^2 dx = 0,$$

dont les intégrales sont

$$(1) \quad \frac{1}{r} + s = 2b,$$

$$(2) \quad \frac{1}{r} - s = 2\beta,$$

où  $b$  et  $\beta$  sont des fonctions arbitraires des arguments  $a$  et  $\alpha$ .

Les deux conditions,

$$dy - r^2 dx = 0 \quad \text{et} \quad dy + r^2 dx = 0,$$

par suite de l'équation

$$dp = r dx + s dy$$

et par suite des intégrales (1) et (2), prennent la forme

$$dp = \left( \frac{1}{r} + s \right) dy = 2b dy, \quad dp = \left( s - \frac{1}{r} \right) dy = -2\beta dy,$$

et nous obtenons ainsi leurs intégrales

$$(3) \quad p - 2by = 2a,$$

$$(4) \quad p + 2\beta y = 2\alpha,$$

par lesquelles sont déterminés les arguments  $a$  et  $\alpha$ .

Au moyen de ces quatre intégrales, et à l'aide de l'équation donnée

$$t + \frac{r^{-3}}{3} = 0,$$

nous obtenons

$$r = \frac{1}{b + \beta}, \quad s = b - \beta, \quad t = -\frac{(b + \beta)^3}{3}, \quad y = \frac{\alpha - a}{b + \beta}, \quad p = \frac{2(\alpha b + a\beta)}{b + \beta}.$$

L'intégration des équations non conditionnelles,

$$dp = r dx + s dy, \quad dq = s dx + t dy, \quad dz = p dx + q dy,$$

après y avoir introduit les valeurs des variables

$$r, \quad s, \quad t, \quad y, \quad p,$$

conduit à une quadrature mécanique par rapport à  $a$  et  $\alpha$ , et nous obtenons, par suite, les intégrales

$$(5) \quad x = (a + \alpha)(b + \beta) - 2 \int a db - 2 \int \alpha d\beta,$$

$$(6) \quad q = (b + \beta) \left[ (a + \alpha)(b - \beta) + \frac{(a - \alpha)(b + \beta)}{3} \right] - 4 \int ab db + 4 \int \alpha \beta d\beta,$$

$$(7) \quad z - qy = \frac{2(b + \beta)}{3} (a^2 + a\alpha + \alpha^2) - 2 \int a^2 db - 2 \int \alpha^2 d\beta.$$

L'intégrale générale de l'équation

$$t + \frac{r^{-3}}{3} = 0$$

est exprimée au moyen des intégrales (5), (6), (7) et à l'aide de l'équation

$$y = \frac{\alpha - a}{\beta + b}.$$



En remplaçant  $ky$  par  $y$ , nous obtenons l'intégrale générale de l'équation

$$r^3 t = -\frac{k^2}{3} = \text{const.}$$

*Exemple IV.*

$$r + te^{2s} = 0.$$

Au moyen de la différentielle totale

$$dr + 2te^{2s} ds + e^{2s} dt = 0,$$

nous obtenons les racines

$$u_1 = r + \sqrt{r^2 - e^{2s}}, \quad u_2 = r - \sqrt{r^2 - e^{2s}},$$

et, par suite, d'après le paragraphe VI, équation (4), les deux équations conditionnelles

$$\begin{aligned} -e^{2s} ds + u_1 dr = 0 & \quad \text{si} \quad dy + u_1 dx = 0, \\ -e^{2s} ds + u_2 dr = 0 & \quad \text{si} \quad dy + u_2 dx = 0, \end{aligned}$$

dont les intégrales sont

$$(1) \quad r + \sqrt{r^2 - e^{2s}} = 2^{2\alpha},$$

$$(2) \quad r - \sqrt{r^2 - e^{2s}} = e^{2\alpha}.$$

Les conditions

$$dy + u_1 dx = 0 \quad \text{et} \quad dy + u_2 dx = 0$$

prennent par conséquent la forme

$$dy + e^{2\alpha} dx = 0, \quad dy + e^{2\alpha} dx = 0,$$

et leurs intégrales sont, par suite,

$$(3) \quad ye^{-\alpha} + xe^{\alpha} = b,$$

$$(4) \quad ye^{-\alpha} + xe^{\alpha} = \beta.$$

Au moyen des intégrales (1) et (2) et de l'équation donnée, nous obtenons

$$r = \frac{e^{2\alpha} + e^{+2\alpha}}{2}, \quad s = \alpha + \alpha, \quad t = -\frac{e^{-2\alpha} + e^{-2\alpha}}{2}.$$

Par suite de ces équations et des intégrales (3) et (4), l'équation non condi-

tionnelle

$$dp = r dx + s dy$$

se ramène à la forme

$$dp = d(rx + sy) - x dr - y ds = d(rx + sy) - be^a da - \beta e^\alpha d\alpha$$

et nous obtenons ainsi l'intégrale

$$p = rx + sy - \int b de^a - \int \beta de^\alpha,$$

laquelle, après introduction des valeurs des variables  $r$  et  $s$ , prend la forme normale

$$p = \frac{e^{2a} + e^{2\alpha}}{2} x + (a + \alpha)y - \int b de^a - \int \beta de^\alpha,$$

et peut s'exprimer sous la forme

$$(5) \quad p = \int (e^a x + e^{-a} y - b) de^a + \int (e^\alpha x + e^{-\alpha} y - \beta) de^\alpha,$$

où  $x$  et  $y$ , comme constantes, sont amenées sous le signe  $\int$ . La forme reste normale.

Nous obtenons aussi de la même manière l'intégrale de l'équation non conditionnelle

$$dq = s dx + t dy,$$

sous la forme

$$(6) \quad q = \int (e^a x + e^{-a} y - b) de^{-a} + \int (e^\alpha x + e^{-\alpha} y - \beta) de^{-\alpha}.$$

L'équation non conditionnelle

$$dz = p dx + q dy$$

se ramène à la forme

$$\begin{aligned} d(px + qy - z) &= x dp + y dq \\ &= \frac{(e^{2a} + e^{2\alpha})}{2} x dx + (a + \alpha) dx y + \left( \frac{e^{-2a} + e^{-2\alpha}}{2} \right) y dy \\ &= d \left[ (e^{2a} + e^{2\alpha}) \frac{x^2}{4} + (a + \alpha) xy + (e^{-2a} + e^{-2\alpha}) \frac{y^2}{4} \right] - \frac{b^2}{2} da - \frac{\beta^2}{2} d\alpha. \end{aligned}$$

En intégrant et en faisant passer  $x$  et  $y$  sous le signe  $\int$ , nous obtenons l'intégrale générale sous la forme

$$z = \int \frac{(e^a x + e^{-a} y - b)^2}{2} da + \int \frac{(e^\alpha x + e^{-\alpha} y - \beta)^2}{2} d\alpha.$$

Les intégrales des conditions

$$e^a x + e^{-a} y - b = 0 \quad \text{et} \quad e^\alpha x + e^{-\alpha} y - \beta = 0,$$

par lesquelles sont déterminés les arguments, sont les dérivées de l'intégrale générale; nous ne les exprimerons pas sous leur forme générale.

De la même manière est intégrée l'équation

$$e^r - e^{-t} = \cos s$$

dont l'intégrale est

$$z = \int (y \cos a + x \sin a - b)^2 \frac{da}{\sin 2a} + \int (y \cos \alpha + x \sin \alpha - \beta)^2 \frac{d\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

*Exemple V.*

$$s \cos^2(x + y) = 2z.$$

D'après le paragraphe VI, équation (6), nous avons les équations conditionnelles

$$\cos^2(x + y) dr - [s \sin 2(x + y) + 2p] dy = 0 \quad \text{si} \quad dx = 0,$$

$$\cos^2(x + y) dt - [s \sin 2(x + y) + 2q] dx = 0 \quad \text{si} \quad dy = 0$$

qu'au moyen de

$$dp = s dy \quad \text{si} \quad dx = 0,$$

$$dq = s dx \quad \text{si} \quad dy = 0,$$

nous amenons à la forme

$$d\{r - 2p \operatorname{tang}(x + y)\} = 0 \quad \text{si} \quad dx = 0,$$

$$d\{t - 2q \operatorname{tang}(x + y)\} = 0 \quad \text{si} \quad dy = 0$$

et, par suite, nous obtenons les intégrales

$$(1) \quad r - 2p \operatorname{tang}(x + y) = \int f' x + f'' x,$$

$$(2) \quad t - 2q \operatorname{tang}(x + y) = \int \varphi' y + \varphi'' y.$$

Au moyen de l'intégrale (1), est intégrée l'équation non conditionnelle

$$dp = r dx + s dy,$$

d'après le second procédé pour  $y$  constant. En effet, en multipliant l'intégrale (1) par  $\cos^2(x + y) dx$ , nous obtenons, par suite de  $dp = r dx$ ,

$$d[p \cos^2(x + y)] = (\int f' x + f'' x) \cos^2(x + y) dx \quad \text{si} \quad dy = 0$$

et nous trouvons ainsi l'intégrale

$$(3) \quad (p - f''x) \cos^2(x + y) = \sin 2(x + y) f'x + 2fx + k,$$

où  $k$  est une fonction indéterminée de  $y$ .

De la même manière, nous obtenons l'intégrale de l'équation non conditionnelle  $dq = s dx + t dy$

$$(4) \quad (q - \varphi''y) \cos^2(x + y) = \sin 2(x + y) \varphi'y + 2\varphi y + h,$$

où  $h$  est une fonction indéterminée de  $x$ .

En déterminant par là  $p$  et  $q$ , nous obtenons, au moyen de l'identité  $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$ , les deux fonctions indéterminées

$$h = 2fx, \quad k = 2\varphi y,$$

et, par suite, l'intégrale de l'équation non conditionnelle

$$dz = p dx + q dy,$$

qui sera l'intégrale générale

$$z = 2(fx + \varphi y) \operatorname{tang}(x + y) + f'x + \varphi'y.$$

Si dans l'équation donnée et dans son intégrale générale, nous remplaçons  $x$ ,  $y$ ,  $z$  par  $\frac{x}{2}$ ,  $\frac{y}{2}$ ,  $2z \operatorname{tang} \frac{x+y}{2}$ , nous obtenons l'équation

$$s \sin(x + y) = p + q,$$

avec l'intégrale générale

$$z = fx + \varphi y + (f'x + \varphi'y) \cot \frac{x+y}{2}.$$

*Exemple VI.*

$$s(x + y) = 2\sqrt{pq}.$$

D'après le paragraphe VI, équation (6), nous avons les équations conditionnelles

$$(x + y) dt + \left( s - s\sqrt{\frac{q}{p}} - t\sqrt{\frac{p}{q}} \right) dx = 0 \quad \text{si} \quad dy = 0,$$

$$(x + y) dr + \left( s - s\sqrt{\frac{p}{q}} - r\sqrt{\frac{q}{p}} \right) dy = 0 \quad \text{si} \quad dx = 0.$$

La première équation conditionnelle, après division par  $(x + y)\sqrt{q}$ , se ramène,

par suite de  $s(x+y) = 2\sqrt{pq}$ , à la forme

$$d\left(\frac{t}{\sqrt{q}} + \frac{2\sqrt{q}}{x+y}\right) = 0, \quad \text{si} \quad dy = 0,$$

et nous obtenons aussi l'intégrale

$$(1) \quad \frac{t}{\sqrt{q}} + \frac{2\sqrt{q}}{x+y} = 2\varphi'' y.$$

Nous obtenons de la même manière l'intégrale de la seconde équation conditionnelle

$$(2) \quad \frac{r}{\sqrt{p}} + \frac{2\sqrt{p}}{x+y} = 2f'' x.$$

Au moyen de l'intégrale (1), est intégrée l'équation conditionnelle  $dq = sdx + tdy$  pour  $x$  constant

En effet, l'intégrale (1), après multiplication par  $\frac{(x+y)dy}{2}$ , prend, par suite de  $dq = t dy$ , la forme

$$d(x+y)\sqrt{q} = (x+y)\varphi'' y dy \quad \text{si} \quad dx = 0,$$

et nous obtenons, par suite, l'intégrale

$$(3) \quad (x+y)\sqrt{q} = (x+y)\varphi' y - \varphi y - k,$$

et, de la même manière, l'intégrale de l'équation non conditionnelle  $dp = r dx + s dy$

$$(4) \quad (x+y)\sqrt{p} = (x+y)f' x - f x - h,$$

où  $k$  est une fonction indéterminée de  $x$ ,  $h$  de  $y$ . En déterminant  $p$  et  $q$  au moyen des intégrales (3) et (4), nous obtenons, par l'identité  $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$ ,

$$k = fx, \quad h = \varphi y$$

et, par suite, au moyen de la quadrature de l'équation non conditionnelle

$$dz = p dx + q dy,$$

nous trouvons l'intégrale générale

$$z = \int (f' x)^2 dx + \int (\varphi' y)^2 dy - \frac{(fx + \varphi y)^2}{x+y}.$$

*Exemple VII.*

$$s = e^z.$$

D'après le paragraphe IV, équation (6), nous avons ici les équations conditionnelles

$$\begin{aligned} sq \, dx - dt = 0 & \quad \text{si} \quad dy = 0, \\ sp \, dy - dr = 0 & \quad \text{si} \quad dx = 0. \end{aligned}$$

Par suite de  $dq = s \, dx$ , si  $dy = 0$ , et de  $dp = s \, dy$ , si  $dx = 0$ , ces équations conditionnelles prennent la forme

$$q \, dq - dt = 0 \quad \text{si} \quad dy = 0; \quad p \, dp - dr = 0 \quad \text{si} \quad dx = 0$$

et nous obtenons, par conséquent, les intégrales

$$(1) \quad q^2 = 2t + \left(\frac{\varphi'' y}{\varphi' y}\right)^2 - 2 \frac{d\left(\frac{\varphi'' y}{\varphi' y}\right)}{dy},$$

$$(2) \quad p^2 = 2r + \left(\frac{f'' x}{f' x}\right)^2 - 2 \frac{d\left(\frac{f'' x}{f' x}\right)}{dx},$$

et de là se déduit, comme dans les exemples précédents, l'intégrale générale

$$e^z = \frac{2 f' x \varphi' y}{(f' x + \varphi' y)^2}.$$

## VII. — ÉQUATIONS CONDITIONNELLES DE DIFFÉRENTS ORDRES.

Pour l'intégration de l'équation aux dérivées partielles  $F = 0$  d'ordre  $n$ , nous avons exposé au paragraphe IV un procédé suivant lequel son intégrale générale avec  $n$  fonctions arbitraires peut être obtenue par intégration d'un système d'équations compatibles entre toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $n$  inclusivement. Mais le système des dérivées partielles qui entrent dans ces équations ne dépend pas au fond de la méthode même; pour développer cette méthode rien n'oblige d'introduire d'un côté toutes les dérivées partielles de l'ordre 0 à  $n$ , d'éliminer d'un autre côté toutes les dérivées d'ordres supérieurs. Il se pose, par suite, une question :

Le but ne peut-il être atteint au moyen d'autres systèmes d'équations compatibles, dans lesquelles le système des dérivées est plus réduit en nombre et en ordre, ou renferme également des dérivées supérieures. Dans le premier cas, le système conduisant à la découverte de l'intégrale générale représenterait une solu-



A l'aide de ces  $n$  équations, nous pouvons exprimer en fonction de  $z_n$  toutes les dérivées partielles restantes  $z^{(n)}, \dots, z'_{n-1}$ , et, en portant leurs valeurs dans l'équation

$$F dx = (Z + Z^{(n)} z^{(n)} + Z_1^{(n-1)} z_1^{(n-1)} + \dots + Z_n) dx = 0,$$

nous obtenons une équation de la forme

$$F dx = L + N dx = 0,$$

où

$$\begin{aligned} L = & Z dx + Z^{(n)} dz^{(n-1)} + (Z^{(n)} u_1 + Z_1^{(n-1)}) dz_1^{(n-2)} \\ & + (Z^{(n)} u_1^2 + Z_1^{(n-1)} u_1 + Z_2^{(n-2)}) dz_2^{(n-3)} + \dots \end{aligned}$$

et où  $N$  a la même expression que celle par laquelle est donnée l'équation aux racines  $N = 0$ .

Comme  $dy + u_1 dx$  est facteur dans l'expression  $N$ , alors par suite de l'équation

$$F dx = L + N dx = 0$$

pour  $dy + u_1 dx = 0$ ,  $L$  passe dans  $F dx$  et s'annule. Nous déduisons de là une équation conditionnelle du  $(n - 1)$ <sup>ième</sup> ordre

II.  $F dx = 0$  si  $dy + u_1 dx = 0,$

que nous pouvons exprimer sous la forme

III.  $Z dx + Z^{(n)} dz^{(n)} + (Z^{(n)} u_1 + Z_1^{(n-1)}) dz_1^{(n-1)} + \dots = 0$  si  $dy + u_1 dx = 0$

et nous obtenons sous la même forme les équations conditionnelles du  $(n - 1)$ <sup>ième</sup> ordre, sous toutes les conditions restantes

$$dy + u_2 dx = 0, \quad \dots, \quad dy + u_n dx = 0,$$

de l'équation linéaire donnée  $F = 0$ .

Si toutes ces  $n$  équations conditionnelles du  $(n - 1)$ <sup>ième</sup> ordre sont intégrées, toutes les  $n$  dérivées partielles du  $(n - 1)$ <sup>ième</sup> ordre sont alors déterminées au moyen de leurs intégrales. Dans un tel cas, d'après le paragraphe V, toutes les équations non conditionnelles peuvent être certainement intégrées, et nous obtenons par suite l'intégrale générale, sans l'aide des intégrales d'ordre  $n$ . Les équations compatibles ne contiennent pas, dans ce cas, de dérivées d'ordre  $n$ .

Toute intégrale d'une de ces équations conditionnelles d'ordre  $n - 1$  qui est intégrée séparément représente une intégrale intermédiaire d'ordre  $n - 1$ , et exprime entre  $x, y, z$  la même dépendance que l'équation donnée  $F = 0$ .

Si l'équation donnée  $F = 0$ , aux dérivées partielles d'ordre  $n$ , n'a pas la forme



linéaire, ses équations dérivées

$$\frac{dF}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dy} = 0$$

ont certainement la forme linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre  $(n + 1)$ , et par conséquent se changent, après multiplication par  $dx$ , en des équations conditionnelles d'ordre  $n$ ,

$$\frac{dF}{dx} dx = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dy} dx = 0.$$

Ces deux formes d'équations conditionnelles, existant sous chaque condition de l'équation aux dérivées partielles d'ordre  $n$  donnée  $F = 0$ , sont, il est vrai, les deux formes identiques de l'équation conditionnelle que nous avons considérée jusqu'à présent.

Mais non seulement les premières équations dérivées

$$\frac{dF}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dy} = 0,$$

qui sont des équations d'ordre  $(n + 1)$ , mais aussi toute équation dérivée supérieure

$$\Phi = \frac{d^m F}{dx^\mu dy^{m-\mu}} = 0,$$

d'un ordre quelconque  $(n + m)$  a une forme linéaire relativement aux dérivées partielles les plus élevées et se change, par conséquent, sous chacune de ses conditions, en l'équation conditionnelle

$$\Phi dx = 0.$$

Une telle équation dérivée  $\Phi = 0$ , d'ordre  $(n + m)$ , a, comme conséquence de l'équation donnée  $F = 0$ , un sens plus général que cette dernière, et, par conséquent, son intégrale générale contient, parmi ses  $n + m$  fonctions arbitraires, certainement toutes les  $n$  fonctions arbitraires de l'intégrale générale de l'équation donnée  $F = 0$ , dont les arguments sont déterminés par les équations

$$dy + u_1 dx = 0, \quad \dots, \quad dy + u_n dx = 0.$$

Sous chacune de ces  $n$  conditions, nous obtenons donc l'équation conditionnelle, d'ordre  $n + m - 1$ ,

$$\Phi dx = 0,$$

dans laquelle entrent les dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $n + m - 1$ , et nous

pouvons la considérer comme une équation conditionnelle d'ordre  $(n + m - 1)$  de l'équation donnée  $F = 0$ , si, dans le système d'équations compatibles, sont introduites toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $(n + m - 1)$ .

Toute équation conditionnelle  $\Phi dx = 0$ , d'ordre  $(n + m - 1)$ , que nous obtenons ainsi, sous chacune des  $n$  conditions

$$dy + u_1 dx = 0, \quad \dots, \quad dy + u_n dx = 0$$

a  $(m + 1)$  formes différentes, parce qu'il existe  $(m + 1)$  équations dérivées différentes  $\Phi = 0$  d'ordre  $(n + m)$ , savoir

$$\text{III.} \quad \frac{d^m F}{dx^m} = 0, \quad \frac{d^m F}{dx^{m-1} dy} = 0, \quad \dots, \quad \frac{d^m F}{dy^m} = 0.$$

Si toutes les  $n$  équations conditionnelles d'un ordre  $(n + m - 1)$  sont intégrées, alors, outre leurs  $n$  intégrales qui sont toutes d'ordre  $(n + m - 1)$ , nous avons encore  $m$  équations finies du même ordre  $(n + m - 1)$ ,

$$\text{IV.} \quad \frac{d^{m-1} F}{dx^{m-1}} = 0, \quad \frac{d^{m-1} F}{dx^{m-2} dy} = 0, \quad \dots, \quad \frac{d^{m-1} F}{dy^{m-1}} = 0.$$

Au moyen de ces  $(n + m)$  équations finies, les  $(n + m)$  dérivées partielles d'ordre  $(n + m - 1)$  sont toutes déterminées, et, par conséquent, d'après le paragraphe V, toutes les équations non conditionnelles d'ordre inférieur sont intégrées, et par suite on obtient l'intégrale générale de l'équation donnée  $F = 0$ , au moyen d'un système d'équations compatibles contenant les dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $(n + m - 1)$  inclusivement.

Au moyen des équations conditionnelles d'ordre  $n + m - 1$ , nous intégrons évidemment, au lieu de l'équation donnée  $F = 0$ , l'équation dérivée  $\Phi = 0$ . Mais cette dernière a, outre les  $n$  racines de l'équation donnée, encore  $m$  autres racines; son intégrale contient donc  $m$  fonctions arbitraires de plus, et c'est seulement pour des valeurs particulières de ces fonctions qu'elle devient l'intégrale générale de l'équation donnée  $F = 0$ . Ces fonctions en excès entrent dans l'intégrale générale de l'équation  $\Phi = 0$ , par les intégrales des équations conditionnelles en excès correspondant aux racines en excès, et, si nous déterminons par l'intégration ces fonctions en excès, nous obtenons alors l'intégrale générale de l'équation donnée  $F = 0$ .

Mais il n'est besoin ni de l'intégration des équations conditionnelles en excès, ni de la détermination des fonctions en excès : les équations finies IV représentent ces intégrales avec des fonctions déjà déterminées, parce qu'il existe seulement  $m + n$  intégrales ou équations finies d'ordre  $m + n - 1$ . Ainsi les fonctions en excès disparaissent d'elles-mêmes par intégration successive des équations condi-

tionnelles supérieures. Le nombre des équations intégrables doit être  $n$ ; il n'est pas besoin d'examiner de quelle forme elles sont, et si elles proviennent effectivement d'une même équation dérivée  $\Phi = 0$ , car leurs  $n$  intégrales, par suite des différentes fonctions arbitraires qui y entrent, ne peuvent être identiques, et contiennent toujours, avec les  $m$  équations IV, les  $m + n$  équations du  $(m + n - 1)^{\text{ième}}$  ordre qui existent en général.

Chaque intégrale du  $m^{\text{ième}}$  ordre obtenue  $\mathcal{F} = 0$  d'une des équations compatibles représente (pour une forme normale par elle-même, et pour une forme non normale, après détermination de tous les arguments qui y entrent), une équation aux dérivées partielles d'ordre  $m$ .

Une telle intégrale  $\mathcal{F} = 0$  a ou bien le même sens que l'équation donnée  $F = 0$ , ou un sens plus général; dans chaque cas son intégrale générale contient au moins les mêmes fonctions arbitraires que l'intégrale générale de l'équation donnée  $F = 0$ . Si donc dans l'intégrale  $\mathcal{F} = 0$  n'entre pas une fonction arbitraire de l'intégrale générale cherchée, alors, sous une condition correspondant à l'argument de cette fonction, l'équation  $\mathcal{F} = 0$  a certainement les deux formes  $\frac{d\mathcal{F}}{dx} dx = 0$  et  $\frac{d\mathcal{F}}{dy} dy = 0$  d'une équation conditionnelle d'ordre  $m$ ; et, pour une forme linéaire, encore une équation conditionnelle  $\mathcal{F} dx = 0$  d'ordre  $m - 1$ , lesquelles peuvent être considérées comme des équations conditionnelles de l'équation donnée  $\mathcal{F} = 0$ .

Il est ainsi évidemment possible d'obtenir, au moyen des intégrales trouvées, sous chaque condition de l'équation donnée  $F = 0$ , les équations conditionnelles de tous les ordres depuis 0 jusqu'à  $n$ ; au moyen des équations dérivées, nous obtenons toujours, sous les différentes formes, les équations conditionnelles de tous les ordres depuis  $n$  jusqu'à  $\infty$ .

Sous chacune des  $n$  conditions de l'équation aux dérivées partielles d'ordre  $n$  donnée  $F = 0$ , existe par conséquent une série infinie d'équations conditionnelles de tous les ordres depuis 0 jusqu'à  $\infty$ . Si une équation conditionnelle est intégrée dans chaque série, nous avons alors en général  $n$  intégrales d'ordre différent, dont chacune contient une *nouvelle* fonction arbitraire. Si l'ordre de toutes ces  $n$  intégrales n'est pas supérieur à  $n$ , nous obtenons, en les amenant au moyen d'une différentiation à l'ordre  $n$ ,  $n$  équations d'ordre  $n$  qui, contenant chacune une fonction arbitraire particulière, ne sont pas identiques entre elles. Ces  $n$  équations, avec l'équation donnée  $F = 0$ , contiennent les  $n + 1$  équations d'ordre  $n$ , par lesquelles sont déterminées toutes les  $n + 1$  dérivées partielles d'ordre  $n$ . D'après le paragraphe V, toutes les équations compatibles d'ordre inférieur peuvent alors être intégrées et l'intégrale générale est obtenue avec  $n$  fonctions arbitraires différentes. Si l'ordre de l'une des  $n$  intégrales trouvées, de plusieurs, ou de toutes les  $n$  surpasse  $n$ , en les amenant au moyen d'une différentiation au

même ordre  $n + m$ , c'est-à-dire à l'ordre le plus élevé de ces intégrales, nous obtenons  $n$  équations d'ordre  $n + m$  qui, avec les  $m + 1$  équations dérivées

$$\frac{d^m \mathbf{F}}{dx^m} = 0, \quad \dots, \quad \frac{d^m \mathbf{F}}{dy^m} = 0,$$

constituent toutes les  $n + m + 1$  équations non identiques d'ordre  $n + m$ . D'après le paragraphe V, toutes les équations d'ordre supérieur sont intégrées dans le même cas, et l'intégrale générale est obtenue avec  $n$  fonctions arbitraires.

### VIII. — DES RACINES MULTIPLES DE L'ÉQUATION AUX RACINES.

L'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles d'ordre  $n$  donnée  $\mathbf{F} = 0$ , obtenue au moyen de l'intégration des équations compatibles, contient en général  $n$  fonctions arbitraires dont les arguments sont déterminés par les intégrales des conditions. Ces conditions sont exprimées au moyen des  $n$  racines de l'équation aux racines.

Si, par conséquent, dans l'équation aux racines,  $m$  racines se confondent, alors  $m$  arguments se changent en un seul argument, et de ce seul argument dépendent  $m$  fonctions arbitraires dans l'intégrale générale.

Soit  $a$  cet argument; nous allons évidemment avoir alors, pour la condition  $da = 0$ ,  $n$  équations conditionnelles qui s'intègrent, par lesquelles s'introduisent ces fonctions arbitraires. Si ces  $m$  équations conditionnelles sont intégrées séparément, elles peuvent être des formes différentes de même ordre ou d'ordre différent; en général elles sont intégrées l'une au moyen de l'autre. Dans un tel cas, l'intégration des équations conditionnelles, au moyen d'intégrales contenant des fonctions arbitraires de  $a$ , sert à l'introduction de nouvelles fonctions du même argument  $a$ . Si, d'après le second procédé d'intégration successive, une équation non conditionnelle est intégrée pour une valeur constante du seul argument  $a$ , alors, comme nous l'avons vu, la constante d'intégration  $k$  est une fonction indéterminée de  $a$ ; si  $a$  correspond à une racine multiple,  $k$  sera en général une nouvelle forme de toutes les fonctions arbitraires dépendant de  $a$ ; par conséquent, quand nous n'avons pas une seule de ces fonctions, nous pouvons considérer  $k$  comme une fonction arbitraire, et nous obtenons ainsi une nouvelle fonction arbitraire de  $a$  sans équation conditionnelle particulière.

Il peut y avoir plusieurs racines multiples dans l'équation aux racines; de l'argument correspondant à chacune d'elles dépendent plusieurs fonctions arbitraires dans l'intégrale générale.

EXEMPLES D'INTÉGRATION AU MOYEN D'ÉQUATIONS CONDITIONNELLES  
DE DIFFÉRENTS ORDRES.

*Exemple I.*

$$hp + kq + s(r + t) = 0.$$

Cette équation du troisième ordre s'intègre au moyen d'une équation conditionnelle du deuxième ordre et de deux équations conditionnelles du premier ordre.

Ces équations sont ici  $dy = 0$ ,  $dx = 0$ ,  $p dy - q dx = 0$ . Multiplions l'équation donnée par  $dx$ , nous obtenons, sous la condition  $dy = 0$ ,

$$p ds + q dt + s dp + t dq = 0 \quad \text{si} \quad dy = 0$$

et de là l'intégrale intermédiaire

$$ps + qt = \frac{\varphi' y}{2}.$$

Ayant multiplié cette intégrale par  $dy$ , nous obtenons, sous la condition  $dx = 0$ ,

$$p dp + q dq = \frac{\varphi' y dy}{2}$$

et de là l'intégrale intermédiaire

$$p^2 + q^2 = fx + \varphi y,$$

que l'on a déjà intégrée dans l'exemple I du paragraphe VI, au moyen d'une équation conditionnelle du premier ordre.

*Exemple VIII.*

$$s(x + y) = mp + nq,$$

où  $m$  et  $n$  sont des constantes.

Cette équation du second ordre s'intègre par intégration successive seulement quand une des constantes,  $n$  par exemple, est un nombre entier positif, et, dans ce cas, au moyen de deux équations conditionnelles du  $(n + 1)^{\text{ième}}$  et du  $n^{\text{ième}}$  ordre. Si cette condition n'est pas satisfaite, l'intégrale générale sera obtenue au paragraphe suivant.

Les conditions sont ici

$$dx = 0, \quad dy = 0.$$

Ayant mis l'équation donnée sous la forme

$$F = z'_1(x + y) - m z'_1 - n z_1 = 0,$$

nous obtenons une première équation dérivée par rapport à  $x$ ,

$$F' = z_1''(x+y) - m z'' - (n-1) z_1' = 0,$$

et de là nous tirons la loi générale de toutes les équations dérivées

$$(1) \quad F_v^{(u)} = z_{v+1}^{(u+1)}(x+y) - (m-v) z_v^{(u+1)} - (n-u) z_{v+1}^{(u)} = 0.$$

En faisant  $u = n$ ,  $v = 0$ , nous obtenons la  $n^{\text{ième}}$  équation dérivée par rapport à  $x$

$$F^{(n)} = z_1^{(n+1)}(x+y) - m z^{(n+1)} = 0.$$

Sous la condition  $dx = 0$ , nous obtenons de là, après multiplication par  $dy$ , une équation conditionnelle d'ordre  $n+1$ ,

$$(x+y) dz^{(n+1)} - m z^{(n+1)} dy = 0 \quad \text{si} \quad dx = 0,$$

dont l'intégrale sera

$$(2) \quad z^{(n+1)} = (x+y)^m f x.$$

De là nous obtenons, sous la condition  $dy = 0$ , après multiplication par  $dx$ , une équation conditionnelle d'ordre  $n$ ,

$$dz^{(n)} = (x+y)^m f x dx,$$

dont l'intégrale est

$$(3) \quad z^{(n)} = \int (x+y)^m f x dx + \varphi y;$$

d'où l'on déduit l'intégrale générale au moyen d'une quadrature, laquelle, à l'aide de l'équation (1), se simplifie de la manière suivante :

De  $z^{(n)}$  nous déduisons  $z_1^{(n)}$  au moyen d'une différentiation par rapport à  $y$ ; de  $z_1^{(n)}$  et  $z^{(n)}$  nous déduisons  $z^{(n-1)}$  au moyen de l'équation (1); de  $z^{(n)}$  et  $z_1^{(n-1)}$  nous déduisons  $z^{(n-1)}$  sous la forme déterminée au moyen d'une quadrature. Nous obtenons de la même manière  $z^{(n-2)}$ ,  $z^{(n-3)}$ , ... et enfin  $z$ , c'est-à-dire l'intégrale générale

$$z = X + Y_1,$$

où

$$\begin{aligned} 1.2 \dots n X &= (x+y)^n \int (x+y)^m f x dx - n(x+y)^{n-1} \int (x+y)^{m+1} f x dx \\ &+ \frac{n(n-1)}{1.2} (x+y)^{n-2} \int (x+y)^{m+2} f x dx - \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2 \dots n Y_1 &= (x+y)^n \varphi y + A(x+y)^{n-1} \int \varphi y dy \\ &+ B(x+y)^{n-2} \int \int \varphi y dy^2 + C(x+y)^{n-2} \int \int \int \varphi y dy^3 + \dots, \end{aligned}$$

$$A = -n(m+1), \quad 2B = (1-n)(m+2)A, \quad 3C = (2-n)(m+3)B, \quad \dots,$$

Les deux expressions  $X$  et  $Y_1$  sont finies, si  $n$  est un nombre entier positif. Si, dans l'équation donnée

$$s(x + y) = mp + nq,$$

$m$  et  $n$  sont des nombres positifs et entiers, l'intégrale générale s'obtient sous les quatre formes

$$z = X + Y_1, \quad z = X_1 + Y, \quad z = X + Y, \quad z = X_1 + Y_1,$$

qui se ramènent, par conséquent, à une seule forme

$$z = X_1 + Y_1,$$

et cette forme, comme nous le verrons au paragraphe suivant, représente l'intégrale générale de l'équation

$$s(x + y) = mp + nq,$$

pour toutes les valeurs des constantes  $m$  et  $n$ .

#### IX. — DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS COMPATIBLES.

En introduisant les équations conditionnelles des différents ordres dans les équations compatibles, nous obtenons ainsi, en général, les intégrales de tous les ordres différents de 0 à  $\infty$ . Chacune de ces intégrales a le même sens ou un sens plus général que l'équation donnée, et dans le premier cas nous l'appellerons *intégrale intermédiaire*, dans le second cas *intégrale conditionnelle* de l'équation aux dérivées partielles donnée. En considérant comme des fonctions arbitraires d'une équation aux dérivées partielles quelconque, non seulement les fonctions arbitraires qui entrent déjà ici explicitement, mais aussi toutes les fonctions arbitraires d'intégration qui ne sont pas encore exprimées explicitement, nous pouvons dire que l'intégrale intermédiaire a les mêmes fonctions arbitraires que l'équation donnée et que l'intégrale conditionnelle contient des fonctions arbitraires en plus. Par intégration successive de l'équation donnée, ces fonctions superflues ne deviennent pas explicites, parce que, dans ce procédé, nous n'intégrons pas sous des conditions en plus. Seulement, quand, au lieu de l'équation donnée, nous intégrons son intégrale conditionnelle, nous obtenons des fonctions arbitraires en excès dans l'intégrale générale trouvée, et la condition sous laquelle cette intégrale conditionnelle devient une équation équivalente à l'équation donnée consiste en ce que ces fonctions arbitraires en excès prennent des valeurs déterminées pour lesquelles l'intégrale générale trouvée se change en intégrale générale de l'équation donnée.

Comme forme particulière des intégrales intermédiaires et conditionnelles, nous devons considérer toutes les équations dérivées de l'équation donnée. Si une équation aux dérivées partielles du  $n^{\text{ième}}$  ordre  $F = 0$  nous est donnée, toute équation qui est formée au moyen des équations  $F = 0$ ,  $\frac{dF}{dx} = 0$  et  $\frac{dF}{dy} = 0$ , est appelée équation dérivée du  $(n + 1)^{\text{ième}}$  ordre de  $F = 0$ , et sera une intégrale conditionnelle du  $(n + 1)^{\text{ième}}$  ordre, dans laquelle le nombre des fonctions arbitraires d'intégration est égal à 0. Si, au moyen des équations  $\frac{dF}{dx} = 0$  et  $\frac{dF}{dy} = 0$ , on réussit à éliminer de l'équation  $F = 0$  une fonction arbitraire qui peut y entrer sous des formes quelconques arbitraires, nous obtenons une équation dérivée équivalente à l'équation donnée, c'est-à-dire une intégrale intermédiaire du  $(n + 1)^{\text{ième}}$  ordre.

Outre les intégrales intermédiaires et conditionnelles, nous devons encore considérer les intégrales des équations compatibles dans lesquelles il n'y a pas assez de fonctions arbitraires. De telles intégrales se nomment *intégrales particulières* de l'équation donnée et s'obtiennent par intégration successive, quand l'intégration des équations compatibles, pour des valeurs arbitraires des fonctions qui y entrent, ne réussit pas, mais est possible pour des valeurs particulières.

En même temps apparaissent aussi, avec ces intégrales particulières, les intégrales dans lesquelles, avec un manque de quelques fonctions arbitraires, entrent des fonctions arbitraires superflues d'autres arguments. Nous appellerons de telles intégrales *intégrales compatibles* de l'équation donnée, si elles contiennent des fonctions arbitraires qui entrent aussi dans l'équation donnée, *intégrales non compatibles* si elles n'ont pas du tout de fonctions arbitraires communes avec l'équation donnée. Toutes les intégrales des équations compatibles sont compatibles avec l'équation donnée et, en général, compatibles entre elles.

Si, au moyen d'équations compatibles, nous intégrons l'équation aux dérivées partielles du  $n^{\text{ième}}$  ordre  $F = 0$ , alors toute fonction arbitraire d'intégration apparaît pour la première fois dans l'intégrale d'une équation conditionnelle d'ordre déterminé. Si, au moyen de cette intégrale, des intégrales d'ordre supérieur sont obtenues, la fonction arbitraire prend ici des formes inférieures avec les signes des dérivées, mais, en général, elle prend seulement des formes supérieures sous le signe  $\int$  par le passage à des intégrales d'ordre supérieur. En tout cas le nombre des formes que cette fonction arbitraire a dans l'intégrale générale dépend de l'ordre de l'équation conditionnelle qui s'intègre, et, entre les limites 1 et  $\infty$ , n'est limitée par rien; il peut non seulement être infini, mais, en général, il sera évidemment infini.

Nous appellerons l'intégrale générale *rationnelle*, si toutes les fonctions dérivées qui y entrent ont un nombre fini de formes différentes, et *irrationnelle* s'il y entre des fonctions arbitraires avec un nombre infini de formes différentes, une telle intégrale n'étant pas obtenue par intégrations successives.



L'intégrale générale de l'équation du second ordre

$$t = r x^{2n} \quad (\text{voir exemple IX})$$

reste irrationnelle pour toutes les valeurs de  $n$ , en excluant les valeurs

$$\dots, \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, 2, 0, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \dots,$$

pour lesquelles elle devient rationnelle

Mais, pour  $n = 1$ , cette intégrale générale ne s'exprime pas du tout par des fonctions arbitraires.

L'intégrale générale avec des fonctions arbitraires n'est pas à beaucoup près la forme générale de l'intégrale générale. L'intégrale générale de l'équation  $t = r x^{2n}$  s'exprime, pour toutes les valeurs de  $n$ , par des intégrales définies.

L'intégrale générale de l'équation  $s = \sin z$  qui, en Géométrie, représente toutes les surfaces s'appliquant sur une sphère, ne s'exprime pas par des fonctions arbitraires, mais s'exprime au moyen de deux séries indéfinies avec des constantes arbitraires.

Par de telles séries infinies de constantes arbitraires s'exprime aussi toute intégrale générale avec des fonctions arbitraires, le nombre de ces séries étant toujours égal à l'ordre de l'équation aux dérivées partielles intégrée. Pour obtenir de telles séries dans l'intégrale générale, au lieu de fonctions arbitraires, nous pouvons développer chacune de ces fonctions arbitraires en série, suivant les puissances de l'argument, avec des coefficients constants indéterminés. Une fonction arbitraire, avec un nombre infini de formes différentes d'un tel développement en série, n'exige pas de constante arbitraire; si nous lui ajoutons une valeur constante arbitraire, alors les constantes arbitraires restantes se cachent sous le signe  $\int$  dans les différentes formes de cette fonction.

Les intégrales déjà définies à l'origine présentent de telles séries infinies de constantes arbitraires.

En outre, nous obtenons des intégrales générales avec des séries de constantes arbitraires, au moyen des intégrales particulières avec constantes arbitraires. Si l'équation donnée est linéaire, son intégrale générale sera alors la somme des intégrales particulières. Des séries infinies de constantes dans l'intégrale générale sont parfois additionnées et s'expriment au moyen de fonctions arbitraires. Un exemple d'une telle composition est le suivant :

*Exemple VIII.*

$$s(x + y) = mp + nq,$$

ù  $m$  et  $n$  sont des constantes.

L'intégrale particulière

$$z = (x + a)^n (y - a)^m$$

satisfait à l'équation donnée pour toutes les valeurs de la constante  $a$ , et, comme l'équation donnée est linéaire, nous déduisons de là une intégrale plus générale

$$(1) \quad z = b(x + a)^n (y - a)^m + b_1(x + a_1)^n (y - a_1)^m + b_2(x + a_2)^n (y - a_2)^m + \dots,$$

avec deux séries de constantes arbitraires  $a, a_1, \dots, b, b_1, \dots$ . Nous pouvons considérer cette intégrale comme l'intégrale générale seulement quand ni  $m$ , ni  $n$  n'est un nombre entier positif, parce que seulement alors les deux séries ne discontinuent pas, ni ne se changent en une seule série.

En désignant  $x + y$  par  $u$  et en ordonnant l'intégrale (1) suivant les puissances de  $u$ , nous l'obtenons, après avoir remplacé  $y$  par  $u - x$ , sous la forme suivante :

$$(2) \quad \begin{aligned} z &= u^m f x + u^{m-1} f_1 x + u^{m-2} f_2 x + \dots; \\ f x &= b(x + a)^n + b_1(x + a_1)^n + \dots, \\ -f_1 x &= m \{ b(x + a)^{n+1} + b_1(x + a_1)^{n+1} + \dots \}, \\ +f_2 x &= \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \{ b(x + a)^{n+2} + b_1(x + a_1)^{n+2} + \dots \}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Si  $n$  n'est pas un nombre entier positif, alors  $f x$  est entièrement une fonction arbitraire de  $x$ , développée en une série infinie suivant les puissances de  $x$ .

Des séries, par lesquelles s'expriment les fonctions  $f_1 x, f_2 x, \dots$ , résulte

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} f_1 x &= -m(n+1) \int f x dx, \\ 2f_2 x &= -m(1-m)(n+1)(n+2) \iint f x dx^2, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (2) nous obtenons une partie de l'intégrale générale. En ordonnant l'équation (1) suivant les puissances de  $u$ , après avoir remplacé  $x$  par  $u - y$ , nous obtenons la seconde partie de l'intégrale sous la forme

$$u^n \varphi y + u^{n-1} \varphi_1 y + u^{n-2} \varphi_2 y + \dots,$$

où  $\varphi y$  est une fonction arbitraire de  $y$ ,

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1 y &= -n(m+1) \int \varphi y dy, \\ 2\varphi_2 y &= -n(1-n)(m+1)(m+2) \iint \varphi y dy^2, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

Nous déduisons de là l'intégrale générale

$$z = u^m f x + u^{m-1} f_1 x + u^{m-2} f_2 x + \dots, \\ + u^n \varphi y + u^{n-1} \varphi_1 y + u^{n-2} \varphi_2 y + \dots,$$

sous l'hypothèse que ni  $m$ , ni  $n$  n'est un nombre entier positif, et alors le nombre des formes différentes des fonctions arbitraires  $f$  et  $\varphi$  est infini. Nous avons obtenu cette même intégrale générale, dans l'exemple VIII (§ VIII), sous la forme

$$z = X_1 + Y_1,$$

mais seulement sous l'hypothèse que  $m$  ou  $n$  est un nombre entier positif, et dans ce cas l'intégrale générale devient rationnelle, parce que ses deux parties s'arrêtent.

*Exemple IX.*

$$Rr + Ss + Tt = 0,$$

où  $R$ ,  $S$  et  $T$  sont des fonctions données de  $x$  et  $y$  ou de  $p$  et  $q$ .

En désignant par  $e$  et  $\varepsilon$  les racines de cette équation du second ordre, nous la mettons sous la forme

$$F = r - s(e + \varepsilon) + te\varepsilon = 0.$$

Les deux équations conditionnelles de la forme  $F dx = 0$  que nous en déduisons, d'après le paragraphe VII, sont

$$dp - \varepsilon dq = 0 \quad \text{si} \quad dy + e dx = 0, \\ dp - e dq = 0 \quad \text{si} \quad dy + \varepsilon dx = 0.$$

Supposons d'abord que  $R$ ,  $S$ ,  $T$  et, par conséquent,  $e$  et  $\varepsilon$ , soient donnés comme fonctions de  $x$  et  $y$ .

Alors les équations

$$dy + e dx = 0 \quad \text{et} \quad dy + \varepsilon dx = 0$$

s'intègrent comme de simples équations différentielles, et, au moyen des intégrales trouvées, nous déterminerons  $x$  et  $y$  comme des fonctions des constantes d'intégration  $\alpha$  et  $\alpha$ . Pour intégrer les équations conditionnelles

$$dp - \varepsilon dp = 0 \quad \text{si} \quad d\alpha = 0, \\ dp - e dq = 0 \quad \text{si} \quad d\alpha = 0,$$

nous les combinons suivant le second procédé d'intégrations successives et nous

obtiendrons

$$dp = 0, \quad dq = 0,$$

d'où les intégrales  $p = \text{const.}$ ,  $q = \text{const.}$

Les deux constantes d'intégration  $p$  et  $q$ , par conséquent les fonctions indéterminées des deux arguments  $a$  et  $\alpha$  aussi, s'expriment indépendamment de la variable principale  $z$ . En désignant par  $p'$ ,  $q'$ ,  $p_1$ ,  $q_1$  les dérivées de  $p$  et  $q$  par rapport aux arguments  $a$  et  $\alpha$ , nous amenons l'équation

$$dp - \varepsilon dq = 0,$$

qui est exacte si  $a$  ne change pas, c'est-à-dire si  $\alpha$  seulement varie, à la forme suivante

$$(p_1 - \varepsilon q_1) d\alpha = 0.$$

De la même manière, l'équation

$$dp - e dq = 0 \quad \text{si} \quad d\alpha = 0,$$

est également mise sous la forme

$$(p' - eq') da = 0,$$

et nous obtenons, par suite, les deux équations

$$(1) \quad p' - eq' = 0,$$

$$(2) \quad p_1 - \varepsilon q_1 = 0.$$

En prenant les dérivées de la première équation par rapport à  $\alpha$ , de la seconde équation par rapport à  $a$  et en les retranchant, nous obtenons l'équation aux dérivées partielles du second ordre de  $q$  par rapport à  $a$  et  $\alpha$

$$(3) \quad q'_1 = \frac{eq'}{\varepsilon - e} + \frac{\varepsilon' q_1}{e - \varepsilon},$$

qui ne s'intègre pas sous la forme générale au moyen des équations compatibles.

En revenant à la notation ordinaire,  $z$ ,  $x$  et  $y$  au lieu de  $q$ ,  $a$  et  $\alpha$ , nous mettons l'équation (3) sous la forme

$$s = p f(x, y) + q \varphi(x, y).$$

Cette équation, comme nous le voyons, s'intègre sous la forme générale, mais l'intégrale générale qu'on obtient est irrationnelle. Mais nous pouvons l'intégrer d'abord pour des valeurs de  $\varphi$  et de  $f$  pour lesquelles l'intégrale générale est obtenue sous la forme rationnelle et nous rapprocher par voie de généralisation de la forme générale.

Ayant déterminé  $q$  au moyen de l'intégration de l'équation (3), nous obtenons au moyen des équations (1) et (2)

$$dp = eq' da + \varepsilon q_1 dx$$

et, par suite,  $p$  au moyen d'une quadrature mécanique.

L'intégrale générale se déduit alors, au moyen d'une quadrature, de l'équation

$$dz = p dx + q dy = (px' + qy') da + (px_1 + qy_1) dx.$$

Si, dans l'équation donnée,  $R$ ,  $S$  et  $T$  sont donnés comme des fonctions de  $p$  et  $q$ , nous avons les mêmes équations, mais avec  $p$  et  $q$  au lieu de  $y$  et  $x$ , et, par conséquent, nous obtenons, de la même manière, l'intégrale générale.

En posant

$$R = x^{2n}, \quad S = 0, \quad T = -1,$$

nous obtenons l'équation

$$t = r x^{2n}.$$

Les racines sont ici

$$e = x^{-n}, \quad \varepsilon = -x^{-n};$$

par conséquent les équations conditionnelles sont

$$\begin{aligned} dp + x^{-n} dq = 0 & \quad \text{si} \quad dy + x^{-n} dx = 0, \\ dp - x^{-n} dq = 0 & \quad \text{si} \quad dy - x^{-n} dx = 0. \end{aligned}$$

Les intégrales des conditions sont

$$y + \frac{x^{1-n}}{1-n} = 2a \quad \text{et} \quad y - \frac{x^{1-n}}{1-n} = -2\alpha;$$

d'où nous tirons

$$y = (a - \alpha), \quad x = [(1-n)(a + \alpha)]^{\frac{1}{1-n}}, \quad e = -\varepsilon = [(1-n)(a + \alpha)]^{\frac{n}{n-1}}$$

et, d'après ces valeurs, l'équation (3) prend la forme

$$q'_1 = \frac{m(q' + q_1)}{a + \alpha} \quad \text{où} \quad m = \frac{n}{2(1-n)}.$$

Nous avons déjà intégré cette équation dans l'exemple VIII et, par conséquent, nous avons l'intégrale générale de l'équation  $t = r x^{2n}$ .

En posant  $m = n$  dans la forme  $z = X_1 + Y_1$  de l'exemple VIII, nous obtenons l'équation

$$s = \frac{m(p + q)}{x + y}$$

et l'intégrale générale

$$z = (x + y)^m (fx + \varphi y) + A(x + y)^{m-1} \left( \int fx \, dx + \int \varphi y \, dy \right) \\ + B(x + y)^{m-2} \left( \int \int fx \, dx^2 + \int \int \varphi y \, dy^2 \right) + \dots,$$

$$A = -m(m+1), \quad 2B = (1-m)(m+2)A, \quad 3C = (2-m)(m+3)B, \quad \dots$$

qui est rationnelle pour toutes les valeurs entières de  $m$ , irrationnelle pour toutes les autres valeurs. Remplaçant  $x$  par  $x + m$  et égalant  $m$  à l'infini, nous obtenons l'équation  $s = p + q$ , dont l'intégrale générale n'a de limite finie pour aucune valeur des fonctions arbitraires, c'est-à-dire ne s'exprime pas par des fonctions arbitraires.

*Exemple X.*

$$f(r, s, t) = 0.$$

En posant

$$F = f(r, s, t), \quad dF = R \, dr + S \, ds + T \, dt,$$

nous obtenons l'équation aux racines

$$R u^2 + S u + T = 0,$$

dont nous désignerons les racines par  $e$  et  $\varepsilon$ .

D'après le paragraphe IV ou le paragraphe VII, nous déduisons de là les deux formes des deux équations conditionnelles,

$$\begin{aligned} dr - \varepsilon \, ds = 0 \quad \text{ou} \quad ds - \varepsilon \, dt = 0 \quad \text{si} \quad dy + e \, dx = 0, \\ dr - e \, ds = 0 \quad \text{ou} \quad ds - e \, dt = 0 \quad \text{si} \quad dy + \varepsilon \, dx = 0. \end{aligned}$$

Comme  $e$  et  $\varepsilon$  sont des fonctions données de  $r, s$  et  $t$ , après élimination de  $t$  au moyen de  $f(r, s, t) = 0$ , nous pouvons intégrer les équations  $dr - \varepsilon \, ds = 0$  et  $dr - e \, ds = 0$  comme de simples équations différentielles et, par conséquent, déterminer  $r$  et  $s$  comme des fonctions des constantes d'intégration  $a$  et  $\alpha$ .

Par suite, au moyen de  $f(r, s, t) = 0$ , nous obtenons d'abord  $t$  et ensuite  $e$  et  $\varepsilon$  comme fonctions de  $a$  et  $\alpha$ . Si  $e$  et  $\varepsilon$  sont fonctions de  $a$  et  $\alpha$ , alors l'intégration des équations

$$\begin{aligned} dy + e \, dx = 0 \quad \text{si} \quad da = 0, \\ dy + \varepsilon \, dx = 0 \quad \text{si} \quad d\alpha = 0 \end{aligned}$$

se ramène, comme dans l'exemple précédent, à l'intégration de la forme fondamentale

$$s = p f(x, y) + q \varphi(x, y)$$

et, par suite, nous obtenons  $x$  et  $y$  comme fonctions de  $a$  et  $\alpha$ .

Au moyen d'une quadrature s'intègrent alors, d'abord les équations

$$dp = r dx + s dy \quad \text{et} \quad dq = s dx + t dy,$$

et ensuite l'équation

$$dz = p dx + q dy,$$

dont l'intégrale sera l'intégrale générale.

*Exemple XI.*

$$t(gt - kr)^2 = r(ht - lr)^2.$$

Cette équation aux dérivées partielles du troisième ordre, après extraction de la racine carrée et division par  $t\sqrt{t}$ , se ramène à la forme

$$F = g - h\sqrt{\frac{r}{t}} - k\frac{r}{t} + l\frac{r}{t}\sqrt{\frac{r}{t}} = 0$$

et nous obtenons, par suite, l'équation aux racines

$$u^3 - u^2\sqrt{\frac{r}{t}} - u\sqrt{\frac{r}{t}} + \frac{r}{t}\sqrt{\frac{r}{t}} = 0,$$

dont les racines sont

$$u_1 = \sqrt{\frac{r}{t}}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{r}{t}}, \quad u_3 = -\sqrt{\frac{r}{t}};$$

les deux premières racines sont égales.

D'après le paragraphe VII, nous avons, sous la condition  $dy + \sqrt{\frac{r}{t}} dx = 0$ , l'équation conditionnelle du second ordre, de la forme  $F dx = 0$ ,

$$dr - \frac{r}{t} dt = 0 \quad \text{si} \quad dy + \sqrt{\frac{r}{t}} dx = 0,$$

dont l'intégrale est

$$(1) \quad \frac{r}{t} = b^4.$$

La condition  $dy + \sqrt{\frac{r}{t}} dx = 0$  prend, par suite de cette intégrale, la forme  $dy + b^2 dx = 0$ , et nous déduisons de là son intégrale

$$(2) \quad y + b^2 x = 2a,$$

par laquelle est déterminé l'argument  $a$ .

L'intégrale (1) se ramène à la forme

$$\Phi = r - b^2 t = 0$$

et, d'après le paragraphe VII, sous la condition  $dy + b^2 dx = 0$ , nous en déduisons l'équation conditionnelle du premier ordre

$$\Phi dx = dp + b^2 dq = 0 \quad \text{si} \quad da = 0,$$

dont l'intégrale est

$$(3) \quad p + b^2 q = c,$$

où  $b$  est la première,  $c$  la seconde fonction arbitraire de l'argument  $a$ .

La troisième condition  $dy + u_3 dx = 0$  ou  $dy - b^2 dx = 0$ , après élimination de  $y$  au moyen de l'intégrale (2), prend la forme

$$d(2a - b^2 x) = b^2 dx \quad \text{ou} \quad b dx + x db = \frac{da}{b}$$

et nous obtenons, par suite, son intégrale

$$(4) \quad bx - \int \frac{da}{b} = \alpha,$$

par laquelle est déterminé l'argument  $\alpha$ .

L'intégrale

$$(3) \quad p + b^2 q = c,$$

après multiplication par  $dx$ , sous la condition  $dy - b^2 dx = 0$ , se change dans l'équation conditionnelle d'ordre nul

$$dz = c dx \quad \text{si} \quad dy - b^2 dx = 0$$

qui, après avoir remplacé  $x$  par sa valeur donnée par l'intégrale (4), prend la forme

$$dz = c d\left(\frac{1}{b} \int \frac{da}{b}\right) - \alpha \frac{c db}{b^2} \quad \text{si} \quad d\alpha = 0$$

et nous obtenons, par suite, l'intégrale générale

$$z = \frac{c}{b} \int \frac{da}{b} - \int \left(\frac{dc}{b} \int \frac{da}{b}\right) - \alpha \int \frac{c db}{b^2} + \beta,$$

$$y + b^2 x = 2a, \quad bx - \int \frac{da}{b} = \alpha,$$

où  $b$  et  $c$  sont des fonctions arbitraires de  $a$ ,  $\beta$  de  $\alpha$ .



*Exemple XII.*

$$(h + k)(y + x) = r + t.$$

Les conditions sont ici  $dy = 0$ ,  $dx = 0$  et  $dy - dx = 0$ ; les arguments sont, par conséquent,  $y$ ,  $x$  et  $y - x$ .

Sous la condition  $dy - dx = 0$ , l'équation donnée, après multiplication par  $dx$ , se change en l'équation conditionnelle du second ordre

$$(y + x) ds = d(p + q) - s d(y + x) \quad \text{si} \quad d(y - x) = 0,$$

dont l'intégrale est

$$(1) \quad s(y + x) - (p + q) = f(y - x).$$

De la même manière, nous obtenons, au moyen de l'équation donnée, sous la condition  $dy = 0$ , la deuxième équation conditionnelle du second ordre

$$(y + x) d(s + t) = dp + t dx \quad \text{si} \quad dy = 0,$$

laquelle, par suite de l'intégrale (1), prend la forme

$$d \frac{t}{y + x} = \frac{d[p + q - s(y + x)]}{(y + x)^2} = \frac{f'(y - x) dx}{(y + x)^2}, \quad \text{si} \quad dy = 0,$$

et nous obtenons, par conséquent, l'intégrale

$$(2) \quad \frac{t}{y + x} = \psi''' y + \int \frac{f'(y - x) dx}{(y + x)^2} = \psi''' y - \frac{f(y - x)}{(y + x)^2} - 2 \int \frac{f(y - x) dx}{(y + x)^3}.$$

En multipliant cette intégrale par  $(y + x) dy$ , nous obtenons, sous la condition  $dx = 0$ , une troisième équation conditionnelle, dont l'intégrale est

$$(3) \quad q = \psi'' y(y + x) - \psi' y + \varphi' x + \int \frac{f(y - x)}{y + x} dx - 2 \int \int \int \left[ \frac{f(y - x)}{(y + x)^3} dy dx^2 \right].$$

Au moyen de cette intégrale, l'équation non conditionnelle  $dz = p dx + q dy$  s'intègre, d'après le deuxième procédé, pour  $dx = 0$ , et nous obtenons, par suite, l'intégrale générale

$$z = (\varphi' x + \psi' y)(y + x) - 2\varphi x - 2\psi y + \int \int \frac{f(y + x)}{y + x} dy dx - 2 \int \int \int \frac{f(y - x)}{(y + x)^3} dy^2 dx^2.$$

X. — DES RACINES DÉPENDANT DE LEURS ARGUMENTS.

Nous avons vu que, pour l'intégration d'équations compatibles, il est nécessaire que toutes les conditions s'intègrent et, sous chaque condition, une équation conditionnelle d'ordre choisi à volonté. Ces conditions et équations conditionnelles sont déterminées par les racines de l'équation aux racines qui, sous la forme générale, ne se résout pas algébriquement. Mais si nous ne pouvons pas déterminer les racines, parce que nous ne pouvons pas les exprimer comme fonctions des variables principales, alors, comme nous le voyons, il reste encore la possibilité de les exprimer autrement et nous considérerons ici une propriété de ces racines, pour laquelle, en évitant la résolution de l'équation aux racines, nous pouvons en effet obtenir les intégrales des équations compatibles dont dépend l'intégration de toutes les autres.

Cette propriété des racines consiste en ceci, que chaque racine ne dépend que de son argument; examinons cette propriété.

En désignant les arguments de toutes les conditions par  $a, \alpha, a, \dots$ , les racines qui en dépendent par  $b, \beta, b, \dots$ , nous avons les conditions

$$dy + b dx = 0, \quad dy + \beta dx = 0, \quad dy + b dx = 0, \quad \dots$$

et nous en déduisons les intégrales des conditions

$$(I) \quad y + bx = a, \quad y + \beta x = \alpha, \quad y + b x = a, \quad \dots,$$

par lesquelles sont déterminés les arguments.

Soit  $F = 0$  l'équation aux dérivées partielles du  $n^{\text{ème}}$  ordre donnée.

En posant

$$dF = X dx + Y dy + Z^{(n)} dz^{(n)} + \dots + Z_n dz_n,$$

nous avons l'équation aux racines

$$Z^{(n)} u^n + Z_1^{(n-1)} u^{n-1} + \dots + Z_n = 0,$$

dont les racines seront  $b, \beta, b, \dots$

D'après une propriété connue des équations algébriques, nous déduirons de là les  $n$  équations suivantes

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} b + \beta + b + \dots = -Z_1^{(n-1)} : Z^{(n)}, \\ b\beta + \beta b + b b + \dots = +Z_2^{(n-2)} : Z^{(n)}, \\ b\beta b + \dots = -Z_3^{(n-3)} : Z^{(n)}, \\ \dots, \\ b\beta b \dots = \pm Z_n : Z^{(n)}. \end{array} \right.$$

Toutes ces  $n$  équations (II), dont l'ordre n'est pas supérieur à  $n$ , est en général égal à  $n$ , mais peut aussi être inférieur à  $n$ , sont certainement des intégrales des équations compatibles, parce qu'il n'existe pas d'autres équations finies. Comme nous avons déjà des intégrales des conditions et comme les intégrales des équations non conditionnelles contiennent toujours de nouvelles formes sous le signe  $\int$  qui n'y entrent pas, nous en concluons que les équations (II) représentent les intégrales de toutes les équations conditionnelles qui, combinées avec les intégrales des conditions (I), exercent une influence sur l'intégration de toutes les équations non conditionnelles dans lesquelles les racines n'entrent plus déjà.

Des équations (I) et (II) nous déduisons, par conséquent, l'intégrale générale en évitant la résolution de l'équation aux racines et, comme nous le verrons, toujours par une simple quadrature.

Dans deux cas cependant, cette intégrale générale, par suite de l'identité entre les équations (I) et (II), ne peut être obtenue; nous examinerons ces cas.

Les équations (I) ne peuvent être identiques entre elles que lorsque l'équation aux racines contient des racines égales, mais dans ce cas ces équations représentent toujours les intégrales de toutes les conditions, dont le nombre diminue seulement. Mais, dans un tel cas, si par exemple la racine  $b$  est égale à la racine  $\beta$ , deux des équations (II) deviennent identiques et, au lieu d'introduire deux fonctions arbitraires, d'un seul et même argument, elles définissent simplement deux fois une même fonction  $b$ . Pour les racines égales de l'équation aux racines se manifeste par conséquent l'identité entre les équations (II), et la première diminution dans le nombre des fonctions arbitraires par suite de cette identité.

La deuxième diminution dans le nombre des fonctions arbitraires provient de l'identité des équations (I) avec les équations (II).

Les équations (I) déterminent tous les arguments comme des fonctions de  $x$  et  $y$  et, en outre, des équations finies entre  $x$  et  $y$  n'existent pas. L'équation aux racines détermine toutes les racines comme fonctions des variables principales. Si, par suite de cette détermination, une racine, par exemple, ne dépend pas des dérivées partielles  $y$  compris  $z$ , alors elle représente une équation entre  $x$  et  $y$  de la forme  $b = \varphi(x, y)$ , qui doit certainement être identique à l'équation  $y + bx = a$  définissant l'argument  $b$  ou  $a$ . Une telle racine, exprimée en  $x$  et  $y$ , exerce une influence sur la diminution du nombre non seulement des intégrales, mais aussi des fonctions arbitraires dont une est déterminée par elle.

Comment est obtenue l'intégrale générale dans ces deux cas, c'est ce que nous verrons au paragraphe suivant; nous considérerons actuellement pour quelle forme de l'équation aux dérivées partielles du  $n^{\text{ième}}$  ordre donnée  $F = 0$  les racines dépendent de leurs arguments.

L'équation aux racines

$$Z^{(n)} u^n + Z_1^{(n-1)} u^{n-1} + \dots + Z_n = 0,$$

après division par  $Z^{(n)}$ , prend la forme

$$\mathbf{M} = u^n + C_1 u^{n-1} + \dots + C_n = 0,$$

où  $C_1, C_2, \dots, C_n$  contiennent des dérivées partielles, en général jusqu'à l'ordre  $n$  inclusivement.

La différentielle totale de  $\mathbf{M}$  pour  $u$  constant,

$$\frac{d\mathbf{M}}{dx} dx + \frac{d\mathbf{M}}{dy} dy = 0,$$

exprime la condition sous laquelle une racine quelconque  $u$  ne change pas. Si cette racine est une fonction de son argument, alors elle ne change pas si l'argument ne varie pas, et ceci toujours seulement sous la condition

$$dy + u dx = 0.$$

De l'identité de ces deux conditions, sous lesquelles  $u$  ne varie pas, nous tirons une nouvelle équation

$$(III) \quad \mathbf{L} = \frac{d\mathbf{M}}{dx} - u \frac{d\mathbf{M}}{dy} = 0$$

du  $n^{\text{ième}}$  degré par rapport à  $u$  et, en général, du  $n + 1^{\text{ième}}$  ordre par rapport aux dérivées partielles.

Par cette équation  $\mathbf{L} = 0$  sont déterminées  $n$  racines qui ne dépendent que de leurs arguments et si, par conséquent, les équations

$$\mathbf{M} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{L} = 0$$

ont une racine commune, cette racine commune sera une racine de l'équation donnée  $\mathbf{F} = 0$  et ne dépendra que de son argument.

De chaque racine commune nous déduisons, dans chaque cas, indépendamment des propriétés de toutes les racines restantes, deux intégrales

$$y + ux = \varphi u, \quad u = f(x, y, z, z', \dots, z_n),$$

c'est-à-dire une nouvelle intégrale d'une équation conditionnelle dont la racine ou l'argument est  $u$ . Cette intégrale sera une intégrale conditionnelle d'ordre  $n$ , s'il y entre des dérivées partielles d'ordre  $n$ ; ce sera une intégrale intermédiaire d'ordre  $n - 1$ , si les dérivées partielles d'ordre  $n$  n'y entrent pas, parce qu'elle contient une fonction arbitraire seulement. De là résulte que les dérivées partielles d'ordre  $n - 1$  doivent y entrer, parce que, parmi les intégrales des équations compatibles, des intégrales particulières ne sont jamais obtenues (*voir* § VIII).

Si dans la racine de l'équation aux racines qui dépend de son argument n'entrent



et, par suite,

$$\frac{dS_m}{dx} - \frac{dS_{m+1}}{dy} = b^{m-1} \left( \frac{db}{dx} - b \frac{db}{dy} \right) + \beta^{m-1} \left( \frac{d\beta}{dx} - \beta \frac{d\beta}{dy} \right) + \dots$$

Mais, comme

$$y + bx = a, \quad y + \beta x = \alpha, \quad y + \mathfrak{b}x = a,$$

d'où

$$\frac{db}{dx} - b \frac{db}{dy} = 0, \quad \frac{d\beta}{dx} - \beta \frac{d\beta}{dy} = 0, \quad \dots,$$

nous obtenons un nombre infini d'équations de la forme

$$(V) \quad \frac{dS_m}{dx} = \frac{dS_{m+1}}{dy},$$

depuis  $m = -\infty$  jusqu'à  $m = +\infty$ , parmi lesquelles pourtant, comme on le sait,  $n$  seulement sont indépendantes et servent de conditions d'intégrabilité de l'équation donnée  $F=0$ , sans résolution de l'équation aux racines.  $S_0$  désigne  $\log \alpha \alpha \dots$

Pour vérifier ces conditions, nous présenterons les exemples suivants

*Exemple XIII*.....  $g = \frac{h^2}{2} + le^k,$

*Exemple XIV*.....  $(g+k)e^{-r} - (h+l)e^t = k \cos s + h \sin s,$

*Exemple XV*.....  $4(gk - h^2)(hl - k^2) = (gl - hk)^2,$

*Exemple XVI*.....  $(gk - h^2)x^2 + (gl - hk)xy + (hl - k^2)y^2 = 0,$

*Exemple XVII*.....  $z^{(n)} + xz'_{n-1} + yz_n = 0,$

où  $g, h, k, l$  sont les dérivées partielles du troisième ordre,  $e$  la base des logarithmes naturels.

Parmi tous ces exemples s'intègrent, d'après ce paragraphe, seulement les exemples XIII et XIV, dans lesquels n'entrent ni racines égales, ni racines s'exprimant en  $x$  et  $y$ . Dans l'exemple XV, les trois racines sont toutes égales. Dans l'exemple XVI, deux racines sont égales et la troisième s'exprime en  $x$  et  $y$ . Dans l'exemple XVII, les  $n$  racines s'expriment toutes en  $x$  et  $y$ .

*Exemple XIII.*

$$g = \frac{h^2}{2} + le^k.$$

L'équation aux racines est ici

$$u^3 - hu^2 - le^k u - e^k = 0.$$

Elle se résout, mais il n'est pas besoin des racines.

D'après le paragraphe X, équation (1), nous avons les intégrales des conditions

$$(1) \quad y + bx = a,$$

$$(2) \quad y + \beta x = \alpha,$$

$$(3) \quad y + \mathfrak{b}x = \mathfrak{a}.$$

D'après le paragraphe X, équation (2), les intégrales des équations conditionnelles sont

$$(4) \quad h = b + \beta + \mathfrak{b},$$

$$(5) \quad le^k = -(b\beta + b\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\beta),$$

$$(6) \quad e^k = b\beta\mathfrak{b}.$$

Au moyen de l'équation donnée et des équations (4), (5), (6) nous obtenons

$$g = \frac{b^2 + \beta^2 + \mathfrak{b}^2}{2}, \quad h = b + \beta + \mathfrak{b}, \quad k = \log(b\beta\mathfrak{b}), \quad l = -\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\mathfrak{b}}\right).$$

En mettant l'équation conditionnelle  $dr = g dx + h dy$  sous la forme

$$\begin{aligned} d(gx + hy - r) &= x dg + y dh \\ &= (bx + y) db + (\beta x + y) d\beta + (\mathfrak{b}x + y) d\mathfrak{b} = a db + \alpha d\beta + \mathfrak{a} d\mathfrak{b}, \end{aligned}$$

nous obtenons l'intégrale

$$gx + hy - r = \int a db + \int \alpha d\beta + \int \mathfrak{a} d\mathfrak{b},$$

laquelle, après avoir remplacé  $g$  et  $h$  par leurs valeurs, prend la forme normale et, par suite, en faisant entrer  $x$  et  $y$  comme constantes sous les signes  $\int$ , nous obtenons une forme composée de cette intégrale

$$(7) \quad r = \int (y + bx - a) db + \int (y + \beta x - \alpha) d\beta + \int (y + \mathfrak{b}x - \mathfrak{a}) d\mathfrak{b}.$$

De la même manière, nous obtenons les intégrales des équations non conditionnelles

$$ds = h dx + k dy \quad \text{et} \quad dt = k dx + l dy$$

et, au moyen de ces dernières, les intégrales des équations non condition-

nelles

$$dp = r dx + s dy \quad \text{et} \quad dq = s dx + t dy;$$

$$(8) \quad s = \int (y + bx - a) \frac{db}{b} + \int (y + \beta x - \alpha) \frac{d\beta}{\beta} + \int (y + bx - a) \frac{db}{b},$$

$$(9) \quad t = \int (y + bx - a) \frac{db}{b^2} + \int (y + \beta x - \alpha) \frac{d\beta}{\beta^2} + \int (y + bx - a) \frac{db}{b^2},$$

$$(10) \quad 2p = \int (y + bx - a)^2 \frac{db}{b} + \int (y + \beta x - \alpha)^2 \frac{d\beta}{\beta} + \int (y + bx - a)^2 \frac{db}{b},$$

$$(11) \quad 2q = \int (y + bx - a)^2 \frac{db}{b^2} + \int (y + \beta x - \alpha)^2 \frac{d\beta}{\beta^2} + \int (y + bx - a)^2 \frac{db}{b^2}.$$

Au moyen des intégrales (10) et (11), nous obtenons l'intégrale de l'équation non conditionnelle

$$dz = p dx + q dy,$$

qui sera l'intégrale générale dans la forme composée

$$1.2.3. z = \int (y + bx - a)^3 \frac{db}{b^2} + \int (y + \beta x - \alpha)^3 \frac{d\beta}{\beta^2} + \int (y + bx - a)^3 \frac{db}{b^2}.$$

Les arguments sont déterminés par les dérivées de l'intégrale générale

$$y + bx - a = 0, \quad y + \beta x - \alpha = 0, \quad y + bx - a = 0.$$

*Exemple XIV.*

$$(g + k)e^{-r} - (h + l)e^t = k \cos s + h \sin s.$$

L'équation aux racines est ici

$$u^3 - e^r(e^t + \sin s)u^2 - (e^r \cos s - 1)u - e^{t+r} = 0.$$

Elle se résout comme une équation du troisième degré; mais il n'est pas besoin des racines.

En remplaçant, dans les équations (I) et (II) du paragraphe X,

$$\begin{array}{lll} b, \beta, \mathbf{b} & \text{par} & \text{tang } a, \text{ tang } \alpha, \text{ tang } a, \\ a, \alpha, \mathbf{a} & \text{par} & \frac{b}{\cos a}, \frac{\beta}{\cos \alpha}, \frac{\mathbf{b}}{\cos a}, \end{array}$$

nous obtiendrons les intégrales des conditions et des équations conditionnelles



sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & y \cos a + x \sin a = b, \\
 (2) \quad & y \cos \alpha + x \sin \alpha = \beta, \\
 (3) \quad & y \cos a + x \sin a = b, \\
 (4) \quad & e^r (e^t + \sin s) = \operatorname{tang} a + \operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} a, \\
 (5) \quad & e^{t+r} = \operatorname{tang} a \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} a, \\
 (6) \quad & 1 - e^r \cos s = \operatorname{tang} a \operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} a + \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} a.
 \end{aligned}$$

En résolvant les équations (4), (5), (6) par rapport à  $r$ ,  $s$ ,  $t$ , nous obtiendrons

$$r = \log(\sin a \sin \alpha \sin a), \quad s = a + \alpha + a, \quad t = -\log(\cos a \cos \alpha \cos a)$$

et, par suite, comme dans l'exemple précédent, au moyen de la quadrature de toutes les équations non conditionnelles, l'intégrale générale dans la forme composée

$$\begin{aligned}
 z = \int \frac{(y \cos a + x \sin a - b)^2}{\sin 2a} da + \int \frac{(y \cos \alpha + x \sin \alpha - \beta)^2}{\sin 2\alpha} d\alpha \\
 + \int \frac{(y \cos a + x \sin a - b)^2}{\sin 2a} da.
 \end{aligned}$$

Nous obtiendrons dans l'article suivant les intégrales des équations restantes XV, XVI et XVII, comme cas particuliers de l'intégrale d'une équation plus générale; nous donnerons maintenant seulement les résultats.

*Exemple XV.*

$$4(gk - h^2)(hl - k^2) = (gl - kh)^2.$$

Il y a trois racines égales à

$$\frac{h + \sqrt{h^2 - gk}}{g}.$$

L'intégrale générale est

$$z = \int (y + bx - a)^2 dc + \int (y + bx - a) de.$$

Il y a trois fonctions arbitraires  $b$ ,  $c$  et  $e$  de  $a$ .

*Exemple XVI.*

$$(gk - h^2)x^2 + (gl - hk)xy + (hl - k^2)y^2 = 0.$$

Il y a deux racines égales à  $\frac{gx + hy}{hx + ky}$ ; la troisième racine est  $-\frac{y}{x}$ .

L'intégrale générale est

$$z = \int (y + bx - a)^2 dc + \int (y + ax)^2 d\gamma$$

ou

$$z = \int (y + bx - a)^2 dc + x^2 \varphi \frac{y}{x}.$$

Il y a deux fonctions arbitraires  $b$  et  $c$  de  $a$ , une de  $\frac{y}{x}$ .

*Exemple XVII.*

$$z^{(n)} + xz'_{n-1} + yz_n = 0.$$

L'équation aux racines est ici

$$u^n + x.u + y = 0;$$

les  $n$  racines s'expriment toutes par conséquent en  $x$  et  $y$ , mais ne sont pas déterminées dans leur forme générale.

L'intégrale générale est

$$z = \int (y + ax + a^n)^{n-1} dc + \int (y + ax + a^n)^{n-1} d\gamma + \int (y + ax + a^n)^{n-1} dx + \dots$$

Les  $n$  arguments sont tous déterminés par les équations dérivées

$$y + ax + a^n = 0, \quad y + ax + a^n = 0, \quad y + ax + a^n = 0, \quad \dots$$

et sont, par conséquent, les racines de l'équation aux dérivées, dont la résolution est par suite nécessaire, bien qu'elle ne le soit pas pour la découverte de l'intégrale générale.

