

CHARLES RIQUIER

**Sur quelques principes généraux relatif à la théorie des fonctions
d'un nombre quelconque de variables (suite et fin)**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2^e série, tome 9 (1907), p. 105-175

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1907_2_9__105_0

© Université Paul Sabatier, 1907, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR QUELQUES PRINCIPES GÉNÉRAUX
RELATIFS A
LA THÉORIE DES FONCTIONS

D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES

(SUITE ET FIN),

PAR M. CHARLES RIQUIER.

CHAPITRE II ⁽¹⁾.

FONCTIONS OLOTROPES ET LEURS DÉRIVÉES ⁽²⁾.

RÉGIONS CONTINUES.

23. Désignons par x, y, \dots des variables *réelles* ou *imaginaires*, en nombre quelconque n ; par s, t, \dots des variables *réelles*, en nombre quelconque p ; enfin, par

$$\varphi(s, t, \dots), \quad \chi(s, t, \dots), \quad \dots$$

n fonctions de s, t, \dots , toutes *continues* dans un même *intervalle complexe* (n° 11, II). Cela posé, l'ensemble des n formules

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(s, t, \dots), \\ y = \chi(s, t, \dots), \\ \dots \end{array} \right.$$

(1) Voir *Annales de la Faculté de Toulouse*, 2^e S., t. VIII, p. 393; 1906.

(2) Nous avons résumé dans le Chapitre II une partie des notions, tirées de la considération des séries entières, que M. Méray donne pour base à la théorie générale des fonctions (MÉRAY, *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale*, 1872; *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques*, 1^{re} Partie, 1894). Nous avons cru toutefois, dans un but de commodité plus grande, devoir faire subir aux idées de M. Méray quelques légères modifications, et nous avons fait appel, notamment, à la considération des régions *normales*, qui se trouve exposée dans le cours du présent Chapitre.

où les divers systèmes de valeurs attribuées à s, t, \dots n'excèdent pas l'intervalle en question, définit ce que nous nommerons un *arc continu* (à p variables) tracé dans l'espace $[[x, y, \dots]]$. Les *points de l'arc* seront les divers systèmes de valeurs de x, y, \dots qui correspondent, en vertu des formules (1), aux valeurs ci-dessus spécifiées de s, t, \dots . Si, dans chacun des intervalles simples où s, t, \dots sont respectivement assujettis à varier, on considère l'une des deux valeurs extrêmes comme initiale, et l'autre comme finale, il faudra entendre par *extrémité initiale* de l'arc le point qui correspond aux valeurs initiales de s, t, \dots , et par *extrémité finale* de l'arc le point qui correspond à leurs valeurs finales. Des arcs, tracés dans l'espace $[[x, y, \dots]]$, seront dits *placés bout à bout*, si l'extrémité finale de chacun d'eux coïncide avec l'extrémité initiale du suivant. Enfin, un arc sera dit *situé dans telle ou telle région* de l'espace $[[x, y, \dots]]$, si chacun de ses points s'y trouve situé.

24. Considérons, dans l'espace $[[x, y, \dots]]$, le *chemin brisé* ayant pour *sommets* successifs

$$(2) \quad (x_0, y_0, \dots), \quad (x_1, y_1, \dots), \quad (x_2, y_2, \dots), \quad \dots, \quad (x_g, y_g, \dots), \quad (X, Y, \dots),$$

et formons, avec les coordonnées x, y, \dots de deux sommets consécutifs quelconques, le Tableau des différences

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 - x_0, & x_2 - x_1, & \dots, & X - x_g, \\ y_1 - y_0, & y_2 - y_1, & \dots, & Y - y_g, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots, & \dots\dots\dots; \end{array}$$

évaluons enfin, dans les lignes respectives de ce Tableau, les plus grands modules, μ_x, μ_y, \dots , que présentent les différences dont il s'agit : ces quantités μ_x, μ_y, \dots se nommeront les *écarts maxima du chemin brisé* (2).

Cela posé, si l'on considère, dans l'espace $[[x, y, \dots]]$, un arc continu quelconque, il est facile de voir que *les extrémités initiale et finale de l'arc peuvent être reliées l'une à l'autre par quelque chemin brisé ayant tous ses sommets sur l'arc, et présentant des écarts maxima respectivement inférieurs à des constantes positives données r_x, r_y, \dots*

Désignons en effet par s, t, \dots les variables (réelles) dont l'arc dépend, par \mathfrak{J} l'intervalle complexe où elles sont assujetties à se mouvoir, et par γ un nombre positif tel, que les inégalités simultanées

$$\text{mod}(s' - s'') < \gamma, \quad \text{mod}(t' - t'') < \gamma, \quad \dots,$$

supposées vérifiées pour deux points, $(s', t', \dots), (s'', t'', \dots)$, de l'intervalle \mathfrak{J} ,

entraînent comme conséquences nécessaires, pour les valeurs correspondantes de x, y, \dots , les relations

$$\text{mod}(x' - x'') < r_x, \quad \text{mod}(y' - y'') < r_y, \quad \dots :$$

un pareil nombre γ existe certainement, car l'intervalle complexe \mathfrak{J} constitue, dans l'espace $[[s, t, \dots]]$, une région limitée et complète où les seconds membres des formules qui définissent l'arc sont tous continus. Désignons ensuite par s_0, t_0, \dots les valeurs initiales de s, t, \dots , par S, T, \dots leurs valeurs finales, et formons, dans l'intervalle \mathfrak{J} , la suite

$$(3) \quad (s_0, t_0, \dots), \quad (s_1, t_1, \dots), \quad (s_2, t_2, \dots), \quad \dots, \quad (s_g, t_g, \dots), \quad (S, T, \dots),$$

sous la seule condition que les différences

$$\begin{aligned} s_1 - s_0, \quad s_2 - s_1, \quad \dots, \quad S - s_g, \\ t_1 - t_0, \quad t_2 - t_1, \quad \dots, \quad T - t_g, \\ \dots, \quad \dots, \quad \dots, \quad \dots, \end{aligned}$$

formées en comparant deux termes consécutifs quelconques de la suite (3), soient toutes moindres que γ en valeur absolue. Aux divers points (3) de l'espace $[[s, t, \dots]]$ correspondent, dans l'espace $[[x, y, \dots]]$, en vertu des formules qui définissent l'arc, certains points,

$$(x_0, y_0, \dots), \quad (x_1, y_1, \dots), \quad (x_2, y_2, \dots), \quad \dots, \quad (x_g, y_g, \dots), \quad (X, Y, \dots),$$

et ces derniers forment un chemin brisé qui, en vertu de la définition de γ , satisfait bien à la condition requise.

Plus généralement, si l'on considère, dans l'espace $[[x, y, \dots]]$, un chemin continu formé d'arcs placés bout à bout, *les extrémités initiale et finale du chemin dont il s'agit peuvent être reliées l'une à l'autre par quelque chemin brisé ayant tous ses sommets sur cette suite d'arcs, et présentant des écarts maxima respectivement inférieurs à des constantes positives données.*

25. Une région de l'espace $[[x, y, \dots]]$ sera dite *continue*, si deux points, $(x_0, y_0, \dots), (X, Y, \dots)$, arbitrairement choisis dans la région, peuvent toujours être reliés l'un à l'autre par une suite d'arcs continus placés bout à bout dans cette région, le premier des arcs dont il s'agit ayant son extrémité initiale en (x_0, y_0, \dots) , et le dernier son extrémité finale en (X, Y, \dots) .

La remarque présentée au n° 4 relativement aux régions limitées ou complètes s'applique évidemment aux régions continues : si des régions, respectivement extraites des espaces

$$[[x, \dots]], \quad [[y, \dots]], \quad \dots,$$

sont toutes continues, leur association forme, dans l'espace

$$[[x, \dots, y, \dots, \dots]],$$

une région également continue.

De la remarque finale du numéro précédent il résulte que, dans une région continue, deux points quelconques peuvent être reliés l'un à l'autre par quelque chemin brisé ayant tous ses sommets dans la région et présentant des écarts maxima respectivement moindres que des quantités positives données.

Enfin, si, comme au début du n° 21, on désigne par x, y, \dots des variables indépendantes, en nombre quelconque g , assujetties à se mouvoir dans une région continue, $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$, par

$$\begin{aligned} u &= U(x, y, \dots), \\ v &= V(x, y, \dots), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

des fonctions de x, y, \dots , en nombre quelconque j ; toutes continues dans cette région, et par $\mathfrak{U}_{u,v,\dots}$ l'ensemble des divers points de l'espace $[[u, v, \dots]]$ qui, en vertu des formules ci-dessus, correspondent (avec répétition possible) aux divers points de $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$, il résulte du n° 20 que les diverses continuités supposées entraînent celle de la région $\mathfrak{U}_{u,v,\dots}$.

26. Nous nommerons *domaine* toute région définie par un système de relations de la forme

$$\text{mod}(x - a) < R_x, \quad \text{mod}(y - b) < R_y, \quad \dots,$$

où (a, b, \dots) désigne un point fixe, et R_x, R_y, \dots des constantes positives (> 0); ces constantes seront elles-mêmes les rayons du domaine, le point (a, b, \dots) en sera le *centre* (1).

Tout domaine est une région continue.

Effectivement, si, dans le domaine \mathfrak{D} , ci-dessus défini, on prend arbitrairement

(1) Si l'on suppose les variables réelles, l'ensemble des valeurs de x qui satisfont à la relation $\text{mod}(x - a) < R_x$ se trouve graphiquement représenté, sur un axe indéfini Ox , par l'intérieur d'un segment ayant pour extrémités les deux points qui correspondent aux valeurs $a - R_x, a + R_x$ (on doit faire abstraction des deux points extrêmes). Si l'on suppose les variables imaginaires, l'ensemble des valeurs de x qui satisfont à la même inégalité se trouve graphiquement représenté, relativement à deux axes rectangulaires tracés dans un plan, par l'intérieur d'un cercle ayant pour rayon R_x et pour centre le point qui correspond à la valeur a (on doit faire abstraction des points de la circonférence).

deux points, (x_0, y_0, \dots) , (X, Y, \dots) , les formules

$$(4) \quad \begin{cases} x = x_0 + s(X - x_0), \\ y = y_0 + s(Y - y_0), \\ \dots\dots\dots, \end{cases}$$

où l'indéterminée s est assujettie à varier dans l'intervalle de 0 à 1 ($0 \leq s \leq 1$), définissent un arc continu ayant pour extrémités initiale et finale les deux points choisis. Ces formules (4) peuvent d'ailleurs s'écrire

$$(5) \quad \begin{cases} x - a = (1 - s)(x_0 - a) + s(X - a), \\ y - b = (1 - s)(y_0 - b) + s(Y - b), \\ \dots\dots\dots, \end{cases}$$

et, pour toute valeur de s n'excédant pas l'intervalle de 0 à 1, le module acquis par le second membre de la première formule (5) est inférieur ou égal à

$$(1 - s) \text{ mod}(x_0 - a) + s \text{ mod}(X - a),$$

par suite, inférieur ou égal au produit de la plus grande des quantités

$$\text{mod}(x_0 - a), \quad \text{mod}(X - a)$$

par la somme $(1 - s) + s = 1$, par suite, inférieur ou égal à la plus grande de ces quantités, par suite, enfin, inférieur à R_x . On ferait voir, par un raisonnement tout semblable, que, dans les mêmes limites, le module acquis par le second membre de la deuxième formule (5) reste inférieur à R_y ; et ainsi jusqu'à la dernière. L'arc (4), terminé aux deux points (x_0, y_0, \dots) , (X, Y, \dots) , est donc entièrement situé dans le domaine \mathfrak{D} .

RÉGIONS NORMALES.

27. Nous dirons qu'une région, \mathfrak{U} , de l'espace $[[x, y, \dots]]$ est *normale*, si elle satisfait à la double condition suivante : 1° La région \mathfrak{U} est continue (n° 25); 2° Tout point de la région \mathfrak{U} est le centre de quelque domaine (n° 26) entièrement situé dans \mathfrak{U} .

La remarque présentée aux n°s 4 et 25 relativement aux régions limitées, complètes ou continues, s'applique encore aux régions normales : si des régions, respectivement extraites des espaces

$$[[x, \dots]], \quad [[y, \dots]], \quad \dots,$$

sont toutes normales, leur association fournit, dans l'espace

$$[[x, \dots, y, \dots, \dots]],$$

une région également normale.

Tout domaine est une région normale.

Considérons un domaine, \mathfrak{D} , de centre (a, b, \dots) et de rayons R_x, R_y, \dots : la continuité de cette région ayant déjà été établie au numéro précédent, il suffit de faire voir que tout point (x_0, y_0, \dots) intérieur à \mathfrak{D} est le centre de quelque domaine entièrement situé dans \mathfrak{D} .

Or, si l'on désigne par ρ_x, ρ_y, \dots les différences (nécessairement supérieures à zéro)

$$R_x - \text{mod}(x_0 - a), \quad R_y - \text{mod}(y_0 - b), \quad \dots,$$

il est facile de se convaincre que les relations

$$\text{mod}(x - x_0) < \rho_x, \quad \text{mod}(y - y_0) < \rho_y, \quad \dots$$

entraînent comme conséquences nécessaires

$$\text{mod}(x - a) < R_x, \quad \text{mod}(y - b) < R_y, \quad \dots$$

Car de la relation

$$(x - a) + (a - x_0) = x - x_0,$$

on tire

$$\text{mod}(x - a) - \text{mod}(x_0 - a) \leq \text{mod}(x - x_0);$$

si donc on suppose le module de $x - x_0$ inférieur à ρ_x , on aura la suite d'inégalités

$$\text{mod}(x - a) - \text{mod}(x_0 - a) \leq \text{mod}(x - x_0) < R_x - \text{mod}(x_0 - a),$$

d'où l'on déduit, par la comparaison des quantités extrêmes,

$$\text{mod}(x - a) < R_x.$$

Et l'on trouverait, par un calcul semblable,

$$\text{mod}(y - b) < R_y, \quad \dots$$

FONCTIONS OLOTROPES; LEURS DÉRIVÉES.

28. Les variables x, y, \dots étant supposées, indifféremment, *réelles* ou *imaginaires*, nous dirons qu'une fonction, $f(x, y, \dots)$, de ces variables, bien définie

dans une région normale (n° 27), \mathfrak{H} , y est *olotrope* ⁽¹⁾, si, autour d'un point quelconque, (x_0, y_0, \dots) , de la région, pris comme centre, on peut assigner quelque domaine dans toute l'étendue duquel la fonction $f(x, y, \dots)$ soit exprimable à l'aide d'un même développement, entier par rapport aux différences $x - x_0, y - y_0, \dots$. Les rayons d'un pareil domaine (qu'on doit supposer, naturellement, compris tout entier dans la région \mathfrak{H}) se nommeront *olomètres* (simultanés) de la fonction au point (x_0, y_0, \dots) ⁽²⁾; le développement entier qui exprime la fonction dans le voisinage de ce point sera dit avoir lieu à *partir de* (x_0, y_0, \dots) , et, par rapport à lui, les quantités x_0, y_0, \dots et $f(x_0, y_0, \dots)$ se nommeront les *valeurs initiales* des variables et de la fonction.

Il ne faut pas perdre de vue que la définition, donnée ci-dessus, d'une fonction olotrope implique essentiellement la nature *normale* de la région où on la considère. Cette définition, combinée avec les propriétés connues des séries entières, conduit tout d'abord aux conséquences suivantes, que nous nous bornerons à énoncer :

1° *Toute fonction olotrope est continue.*

2° *Si l'on désigne par $f(x, y, \dots)$ une fonction olotrope dans une région (normale) \mathfrak{H} , et par (x_0, y_0, \dots) un point particulier quelconque de cette région, il n'existe, pour représenter $f(x, y, \dots)$ dans le voisinage de ce point conformément à la définition ci-dessus, qu'un seul développement entier par rapport aux différences $x - x_0, y - y_0, \dots$ ⁽³⁾.*

3° *Soient*

*$f(x, y, \dots)$ une fonction olotrope dans une région (normale) \mathfrak{H} ;
 (x_0, y_0, \dots) un point quelconque de cette région;*

⁽¹⁾ Les termes *olotrope*, *olomètre* sont empruntés à M. Méray.

⁽²⁾ Il va sans dire que, étant donné un système d'olomètres de la fonction au point (x_0, y_0, \dots) , si l'on diminue arbitrairement quelques-uns de ces olomètres sans augmenter les autres, on a encore un système d'olomètres de la fonction au point considéré.

⁽³⁾ Supposons, en effet, qu'il existe deux développements de cette nature, c'est-à-dire qu'en posant $x - x_0 = h, y - y_0 = k, \dots$, la quantité $f(x_0 + h, y_0 + k, \dots)$ soit exprimable à l'aide d'un premier développement entier en h, k, \dots pour toutes valeurs de h, k, \dots intérieures à un domaine de centre $(0, 0, \dots)$ et de rayons $\delta'_x, \delta'_y, \dots$; puis, qu'elle soit de même exprimable à l'aide d'un deuxième développement entier en h, k, \dots pour toutes valeurs de h, k, \dots intérieures à un domaine de centre $(0, 0, \dots)$ et de rayons $\delta''_x, \delta''_y, \dots$. Si l'on désigne alors par δ_x la plus petite des deux constantes $\delta'_x, \delta''_x, \dots$, par δ_y la plus petite des deux constantes $\delta'_y, \delta''_y, \dots$, etc., les deux développements dont il s'agit ont des sommes égales pour toutes valeurs de h, k, \dots intérieures à un domaine de centre $(0, 0, \dots)$ et de rayons $\delta_x, \delta_y, \dots$, puisque, dans ces limites, ils représentent l'un et l'autre la quantité $f(x_0 + h, y_0 + k, \dots)$: ils ont donc leurs coefficients semblables respectivement égaux.

Cette propriété, base essentielle de la définition des *dérivées* dans le point de vue adopté par M. Méray, repose elle-même, comme on le voit, sur la nature *normale* de la région.

$\delta_x, \delta_y, \dots$ des olomètres de $f(x, y, \dots)$ au point (x_0, y_0, \dots) ;
 (x_1, y_1, \dots) un point intérieur au domaine de centre (x_0, y_0, \dots) et de
rayons $\delta_x, \delta_y, \dots$

Cela étant, la fonction $f(x, y, \dots)$ ne peut manquer d'admettre au point (x_1, y_1, \dots) les olomètres

$$\delta_x - \text{mod}(x_1 - x_0), \quad \delta_y - \text{mod}(y_1 - y_0), \quad \dots$$

29. Lorsqu'une fonction $f(x, y, \dots)$ est olotrope dans une région (normale) \mathfrak{R} , à tout point (x, y, \dots) de cette région correspond, pour exprimer la valeur de la fonction dans son voisinage, un développement, et un seul, entier par rapport aux accroissements h, k, \dots que l'on attribue à x, y, \dots (n° 28); le seul choix du point (x, y, \dots) détermine donc entièrement tous les coefficients du développement qui lui correspond, et, dès lors, *chacun de ces coefficients peut, dans la région donnée, être considéré comme une fonction de x, y, \dots* . Cela étant, on démontre qu'une pareille fonction est, comme la proposée, olotrope dans la région \mathfrak{R} , et qu'elle admet, en chaque point de cette région, les olomètres de la proposée.

En désignant, comme ci-dessus, par (x, y, \dots) un point quelconque de la région \mathfrak{R} , le terme indépendant de h, k, \dots dans le développement de $f(x+h, y+k, \dots)$ effectué à partir des valeurs initiales x, y, \dots , est précisément $f(x, y, \dots)$. Dans ce même développement, les coefficients des premières puissances de h, k, \dots se nomment les *dérivées* de $f(x, y, \dots)$ prises par rapport à x, y, \dots respectivement; on les représente souvent à l'aide des notations $f'_x(x, y, \dots), f'_y(x, y, \dots), \dots$

Si, dans le voisinage du point (x, y, \dots) , la quantité $f(x+h, y+k, \dots)$ se trouve représentée à l'aide de la série entière

$$\sum a_{m,n,\dots} h^m k^n \dots,$$

la quantité $f'_x(x+h, y+k, \dots)$ le sera, dans les mêmes limites, à l'aide de la série entière

$$\sum m a_{m,n,\dots} h^{m-1} k^n \dots$$

30. Comme les dérivées d'une fonction $f(x, y, \dots)$, olotrope dans une région donnée, sont elles-mêmes olotropes dans cette région, elles ont des dérivées jouissant de cette propriété; de même pour celles-ci, leurs propres dérivées, et ainsi de suite indéfiniment. Ces dérivées de dérivées sont les *dérivées partielles de tous ordres* de la fonction $f(x, y, \dots)$, dont la nomenclature repose sur le théorème suivant : *Une dérivée d'ordre supérieur dépend uniquement des nombres exprimant combien de fois on a dérivé par rapport à chaque variable, dans quelque ordre que ces opérations partielles aient pu être exécutées.*

Enfin, si l'on considère, d'une part, la dérivée d'ordres partiels p, q, \dots , par rapport à x, y, \dots respectivement, d'une fonction olotrope $f(x, y, \dots)$, si l'on considère, d'autre part, le coefficient de $h^p k^q \dots$ dans le développement de $f(x+h, y+k, \dots)$ en une série entière par rapport aux accroissements h, k, \dots , la première de ces deux fonctions est le produit de la seconde par le facteur numérique $1.2 \dots p.1.2 \dots q \dots$.

NULLITÉ IDENTIQUE D'UNE FONCTION OLOTROPE.

31. Une fonction, olotrope dans une région donnée, \mathfrak{U} est dite *identiquement nulle*, deux fonctions, olotropes dans une région donnée, \mathfrak{U} sont dites *identiquement égales*, lorsque la nullité ou l'égalité dont il s'agit a lieu en tout point de cette région (supposée normale).

Lorsqu'une fonction $f(x, y, \dots)$, olotrope dans une région \mathfrak{U} , \mathfrak{U} est *identiquement nulle*, toutes ses dérivées le sont aussi.

En effet, si l'on désigne par (x_0, y_0, \dots) un point déterminé (quelconque) de la région \mathfrak{U} , la quantité $f(x_0+h, y_0+k, \dots)$ est, pour toutes valeurs suffisamment petites de h, k, \dots , exprimable par une série entière en $h, k \dots$. D'ailleurs, ce développement (unique) a nécessairement tous ses coefficients nuls, puisque, en lui attribuant de pareils coefficients, il exprime évidemment la valeur toujours nulle de notre fonction.

32. Inversement, une fonction $f(x, y, \dots)$, olotrope dans une région \mathfrak{U} , \mathfrak{U} est *identiquement nulle*, si, en quelque point de cette région, elle s'annule numériquement avec toutes ses dérivées.

1. Si une fonction $f(x, y, \dots)$ est olotrope dans une région \mathfrak{U} , et si, dans cette dernière, on considère un fragment limité et complet, \mathfrak{F} , on peut assigner quelque constante positive, r , telle que la fonction $f(x, y, \dots)$ admette, en un point quelconque de \mathfrak{F} , un système d'olomètres (au moins) égaux à r .

Considérant en effet, dans l'espace $[[x, y, \dots]]$ ⁽¹⁾, la région limitée et complète \mathfrak{F} (comprise tout entière dans \mathfrak{U}), nommons *caractéristique* d'un point de cette région toute quantité positive (> 0) ρ , telle que la fonction $f(x, y, \dots)$ admette au point considéré un système d'olomètres (au moins) égaux à ρ . Cela étant, si un point déterminé (x', y', \dots) de la région \mathfrak{F} admet parmi ses caracté-

(1) Cet espace est à n ou à $2n$ dimensions, suivant que les n variables x, y, \dots sont réelles ou imaginaires.

ristiques la constante ρ' , tout point (ξ, η, \dots) de cette même région qui satisfait aux relations

$$\text{mod}(\xi - x') < \rho', \quad \text{mod}(\eta - y') < \rho', \quad \dots$$

admettra parmi les siennes (n° 28, 3°) la plus petite des différences positives

$$\rho' - \text{mod}(\xi - x'), \quad \rho' - \text{mod}(\eta - y'), \quad \dots,$$

c'est-à-dire une quantité dont la différence à ρ' tombe au-dessous de toute quantité donnée lorsque le point (ξ, η, \dots) est suffisamment voisin de (x', y', \dots) .

Ainsi, les diverses conditions spécifiées au n° 12 relativement aux caractéristiques se trouvent bien remplies dans la région limitée et complète \mathfrak{F} , et, comme les caractéristiques sont ici essentiellement supérieures à zéro, il existe bien quelque constante positive, r , possédant la propriété énoncée (n° 15).

II. *Si une fonction $f(x, y, \dots)$ est olotrope dans une région \mathfrak{R} , et si, dans cette dernière, on trace un arc continu, on peut assigner quelque constante positive, r , telle que la fonction $f(x, y, \dots)$ admette, en un point quelconque de l'arc, un système d'olomètres (au moins) égaux à r .*

Car, les variables (réelles) s, t, \dots dont l'arc dépend étant assujetties à se mouvoir dans un intervalle complexe, c'est-à-dire dans une région de l'espace $[[s, t, \dots]]$, à la fois limitée et complète, il résulte du n° 21 que l'ensemble des divers points (x, y, \dots) qui, en vertu des formules définissant l'arc, correspondent (avec répétition possible) aux divers points de l'intervalle complexe, forme, dans l'espace $[[x, y, \dots]]$, une région à la fois limitée et complète : les conclusions de l'alinéa I sont donc applicables.

III. *Si une fonction $f(x, y, \dots)$ est olotrope dans une région \mathfrak{R} , et si, dans cette dernière, on trace un chemin continu formé d'arcs placés bout à bout, on peut assigner quelque constante positive, r , telle que la fonction $f(x, y, \dots)$ admette, en un point quelconque du chemin, un système d'olomètres (au moins) égaux à r .*

C'est là une conséquence immédiate de l'alinéa II.

IV. *Lorsqu'une fonction $f(x, y, \dots)$ est olotrope dans une région \mathfrak{R} , la connaissance des valeurs numériques que prennent la fonction et toutes ses dérivées en un seul point, (x_0, y_0, \dots) , de la région, suffit pour déterminer entièrement sa valeur et celles de toutes ses dérivées en tout autre point, (X, Y, \dots) , de la région.*

Effectivement, la région \mathfrak{R} étant normale (n° 28), et, par suite, continue (n° 27), les deux points (x_0, y_0, \dots) , (X, Y, \dots) peuvent être reliés l'un à l'autre par une

suite d'arcs continus placés bout à bout dans cette région (n° 25). En vertu de l'alinéa III, on peut assigner quelque constante positive, r , telle que la fonction $f(x, y, \dots)$ admette, en un point quelconque du chemin continu ainsi tracé, un système d'olomètres (au moins) égaux à r ; et, d'autre part, il résulte du n° 24 que les extrémités initiale et finale d'un pareil chemin peuvent être reliées l'une à l'autre par quelque chemin brisé,

$$(x_0, y_0, \dots), (x_1, y_1, \dots), (x_2, y_2, \dots), \dots, (x_g, y_g, \dots), (X, Y, \dots),$$

ayant tous ses sommets sur les arcs dont il s'agit, et présentant des écarts maxima moindres que r .

Cela posé, la connaissance des valeurs numériques de $f(x, y, \dots)$ et de toutes ses dérivées au point (x_0, y_0, \dots) nous permet de construire (idéalement) le développement de $f(x, y, \dots)$ à partir de (x_0, y_0, \dots) , et, comme les modules de $x_1 - x_0, y_1 - y_0, \dots$ sont tous moindres que r , l'hypothèse

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad \dots,$$

introduite dans ce développement et dans toutes ses dérivées, fournira les valeurs prises au point (x_1, y_1, \dots) par la fonction $f(x, y, \dots)$ et par toutes ses dérivées. On passera alors du second sommet au troisième comme on a passé du premier au second, et l'on continuera de cette manière jusqu'au sommet final (X, Y, \dots) .

V. Les mêmes notations étant adoptées qu'à l'alinéa IV, si l'on suppose nulles les valeurs numériques prises au point (x_0, y_0, \dots) par la fonction $f(x, y, \dots)$ et par toutes ses dérivées, ou, ce qui revient au même, les coefficients du développement initial, on voit que la nullité identique de celui-ci entraîne, de proche en proche, celle de tous les développements subséquents, et que, par suite, la fonction s'annule au point (X, Y, \dots) avec toutes ses dérivées.

33. *Lorsque deux fonctions, olotropes dans une même région, y sont identiquement égales, leurs dérivées semblables le sont aussi.*

Inversement, deux fonctions, olotropes dans une même région, y sont identiquement égales, si, en quelque point de cette région, les valeurs numériques de l'une et de ses diverses dérivées sont respectivement égales aux valeurs numériques de l'autre et de ses dérivées semblables.

Ces propositions se déduisent immédiatement des précédentes (nos 31 et 32), si l'on observe que la différence

$$F(x, y, \dots) - f(x, y, \dots)$$

de deux fonctions, olotropes dans une région donnée, y est elle-même olotrope,

et qu'elle a pour dérivée d'ordres partiels p, q, \dots la différence des dérivées d'ordres partiels p, q, \dots des deux fonctions.

CHAPITRE III.

CALCUL DES FONCTIONS PAR CHEMINEMENT.

DÉFINITIONS PREMIÈRES RELATIVES AU CALCUL DES FONCTIONS PAR CHEMINEMENT. MONODROMIE.

34. Une série entière en $x - x_0, y - y_0, \dots$, admettant, autour du centre (x_0, y_0, \dots) , quelque domaine de convergence, définit, comme on peut l'établir, une fonction olotrope de x, y, \dots dans l'intérieur d'un pareil domaine ⁽¹⁾. Donnons à ce développement la forme de Taylor; puis, désignant par (x_1, y_1, \dots) un point intérieur au domaine, introduisons dans ce développement et dans toutes ses dérivées l'hypothèse numérique $x = x_1, y = y_1, \dots$. La connaissance des sommes de ces divers développements nous permettra évidemment de construire celui de notre fonction à partir des nouvelles valeurs initiales x_1, y_1, \dots : ce deuxième développement de Taylor, entier en $x - x_1, y - y_1, \dots$, admettra certainement quelque domaine de convergence, et nous dirons, pour abrégé, qu'il se *raccorde* avec le précédent

Cela posé, considérons, dans l'espace $[[x, y, \dots]]$, un chemin brisé ayant pour sommets successifs

$$(1) (x_0, y_0, \dots), (x_1, y_1, \dots), (x_2, y_2, \dots), \dots, (x_g, y_g, \dots), (X, Y, \dots).$$

Si, à partir de ces sommets successifs, on peut construire autant de développements dont chacun se raccorde avec le précédent, et dont le premier ne soit autre que le développement donné, le chemin brisé (1) sera dit *praticable* relativement au développement donné. D'après cela, il faudra donc, pour que le chemin (1) soit praticable, que le développement donné admette des rayons de convergence respectivement supérieurs aux modules des différences $x_1 - x_0, y_1 - y_0, \dots$, ce qui permettra de construire, à partir des valeurs x_1, y_1, \dots , un deuxième développement se raccordant avec le premier; il faudra ensuite que ce nouveau développement admette des rayons de convergence respectivement supé-

⁽¹⁾ Il va sans dire que, ici encore, les variables x, y, \dots sont supposées indifféremment *réelles* ou *imaginaires*.

rieurs aux modules des différences $x_2 - x_1, y_2 - y_1, \dots$, ce qui permettra de construire, à partir de x_2, y_2, \dots , un troisième développement se raccordant avec le second; et ainsi de suite jusqu'au développement construit à partir de x_g, y_g, \dots , qui doit admettre des rayons de convergence supérieurs aux modules des différences $X - x_g, Y - y_g, \dots$, afin qu'un dernier développement puisse être finalement construit à partir de X, Y, \dots .

Nous avons déjà eu l'occasion, dans ce qui précède (n° 32, IV et V), d'effectuer un cheminement de cette nature, et nous avons fait voir que, lorsqu'une fonction de x, y, \dots est olotrope dans une région donnée, la connaissance du développement de la fonction à partir d'un seul point de la région suffit pour que l'on puisse construire, par l'opération échelonnée que nous venons de décrire, son développement à partir d'un autre point quelconque de la même région. Mais il va sans dire que l'on peut se proposer d'effectuer des cheminements analogues en prenant comme base des calculs successifs, non plus un développement fourni par telle ou telle fonction que l'on sait être olotrope dans telle ou telle région, mais une série entière en $x - x_0, y - y_0, \dots$, arbitrairement choisie sous la seule condition d'admettre quelque domaine de convergence (1). Tant que l'on ne franchit pas les limites de convergence du développement initial, ce que nous venons de dire reste applicable, puisque la somme du développement définit, dans tout domaine de convergence, une fonction olotrope des variables x, y, \dots ; mais, au delà, toute certitude disparaît, en général, quant à la possibilité du cheminement. Il y a plus : si l'on considère deux chemins brisés partant du point (x_0, y_0, \dots) et aboutissant au même sommet final, ces deux chemins, à supposer qu'ils soient l'un et l'autre praticables par rapport au développement donné, peuvent conduire, suivant les cas, soit au même développement final, soit, au contraire, à deux développements distincts.

Cela étant, nous nommerons désormais série ou développement *fondamental* (2) la série entière en $x - x_0, y - y_0, \dots$ choisie comme base du calcul par cheminement, et nous affecterons de la même qualification les premières valeurs, x_0, y_0, \dots , des variables indépendantes, ainsi que le point (x_0, y_0, \dots) dont elles sont les coordonnées. Nous dirons en outre qu'un développement fondamental donné (admettant quelque domaine de convergence) définit, non pas une fonction, mais une *pseudo-fonction* (3) de x, y, \dots : pour plus de simplicité toutefois, nous remplacerons souvent le mot *pseudo-fonction* par le mot *fonction*, auquel nous attacherons implicitement le même sens.

Si à un développement fondamental quelconque on substitue sa dérivée d'ordres

(1) MÉRAY, *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques*, 1^{re} Partie, p. 133.

(2) MÉRAY, *ibid.*

(3) MÉRAY, *ibid.*

partiels p, q, \dots , tout chemin brisé praticable relativement aux anciennes données l'est encore relativement aux nouvelles, et les développements successifs obtenus dans le second cas sont les dérivées d'ordres partiels p, q, \dots de ceux que l'on obtient dans le premier. Cette deuxième pseudo-fonction se nomme la *dérivée d'ordres partiels* p, q, \dots de la proposée.

Enfin, si l'on considère simultanément diverses pseudo-fonctions de x, y, \dots , définies par un même point fondamental et divers développements fondamentaux, une expression de forme entière par rapport aux sommes de ces développements et de leurs dérivées d'ordres quelconques définit évidemment une nouvelle pseudo-fonction; et tout chemin praticable à la fois pour les diverses pseudo-fonctions données ne peut manquer de l'être aussi pour la nouvelle.

35. Considérons actuellement, d'une part, une pseudo-fonction de x, y, \dots définie, conformément aux explications qui précèdent, par un point fondamental, (x_0, y_0, \dots) , et par un développement fondamental; d'autre part, une région *continue*, \mathfrak{R} , extraite de l'espace $[[x, y, \dots]]$, et contenant le point (x_0, y_0, \dots) . Nous dirons que la pseudo-fonction dont il s'agit est *calculable par cheminement dans la région* \mathfrak{R} *avec les rayons de convergence* R_x, R_y, \dots , si tout chemin brisé ayant son premier sommet au point fondamental, ses divers sommets dans la région \mathfrak{R} , et des écarts maxima respectivement inférieurs à R_x, R_y, \dots , est praticable pour la pseudo-fonction et conduit à des développements successifs admettant tous comme rayons de convergence R_x, R_y, \dots .

Cette condition étant supposée réalisée, si, de plus, le développement final auquel on est conduit à l'extrémité d'un pareil chemin brisé dépend uniquement des coordonnées de cette extrémité, et non du chemin suivi pour y arriver, la pseudo-fonction sera dite *monodrome* dans la région \mathfrak{R} .

Toute pseudo-fonction monodrome dans une région normale y peut être assimilée à une véritable fonction olotrope.

Effectivement, il résulte tout d'abord de la monodromie supposée qu'à tout point de cette région normale on peut faire correspondre un développement bien déterminé, et que, dès lors, la considération des termes constants des divers développements définit, dans la région dont il s'agit, une fonction *proprement dite* de x, y, \dots .

Cela étant, désignons par (X, Y, \dots) un point quelconque de la région, par r une constante positive ne surpassant aucun des rayons R_x, R_y, \dots , telle, en outre, que le domaine \mathfrak{D} , ayant pour centre le point (X, Y, \dots) avec des rayons tous égaux à r , soit entièrement situé dans la région; désignons enfin par (x', y', \dots) un point quelconque de ce domaine. Pour avoir le développement qui correspond à ce dernier point, on peut, en vertu de la monodromie supposée, partir du déve-

loppement qui correspond au point (X, Y, \dots) , et opérer, de (X, Y, \dots) en (x', y', \dots) , un cheminement *direct* (c'est-à-dire exclusivement composé du sommet initial et du sommet final) : la valeur de notre fonction au point (x', y', \dots) est, par définition, le terme constant du développement résultant, et s'obtient, dès lors (n° 34), en introduisant dans le développement qui correspond au point (X, Y, \dots) l'hypothèse numérique

$$x = x', \quad y = y', \quad \dots;$$

elle est donc, dans toute l'étendue du domaine \mathfrak{D} , exprimable à l'aide d'une série entière par rapport aux différences $x - X, y - Y, \dots$

RÉGIONS MONODROMIQUES.

36. Certaines régions, extraites de l'espace $[[x, y, \dots]]$, jouissent, par leur *forme* même, de cette propriété remarquable, que le seul fait, pour une pseudo-fonction, d'y être calculable par cheminement, entraîne comme conséquence nécessaire la *monodromie*. L'examen de ce cas remarquable nécessite tout d'abord quelques définitions nouvelles.

Nous nommerons *lacet* tout chemin brisé dont le sommet final coïncide avec le sommet initial; le point où se trouvent réunis les deux sommets extrêmes sera l'*origine du lacet*.

Nous nommerons *réseau* une suite (limitée) de lacets,

$$L_0, L_1, L_2, \dots, L_p,$$

ayant tous la même origine et le même nombre de sommets, et dont le premier, L_0 , a tous ses sommets confondus avec l'origine commune; cette dernière sera l'*origine du réseau*.

Étant donné, dans l'espace $[[x, y, \dots]]$, un réseau, prenons-y à volonté, soit deux sommets consécutifs appartenant à un même lacet, soit deux sommets de même rang appartenant à deux lacets consécutifs, et formons les différences entre les coordonnées semblables de ces deux points; en répétant l'opération de toutes les manières possibles, nous obtiendrons le Tableau

$$\begin{array}{l} x' - x'', \quad \dots, \\ y' - y'', \quad \dots, \\ \dots\dots, \quad \dots \end{array}$$

Cela étant, si, dans les lignes respectives du Tableau, on évalue les plus grands modules, μ_x, μ_y, \dots , que présentent les différences dont il s'agit, ces quantités μ_x, μ_y, \dots se nommeront les *écarts maxima du réseau*.

Ces diverses définitions étant posées, les régions auxquelles nous avons fait allusion plus haut sont celles qui, étant *continues*, satisfont en outre à la condition suivante :

Une constante positive α étant donnée, on peut assigner une constante positive β , inférieure ou égale à α , et telle, que tout lacet ayant ses divers sommets dans la région avec des écarts maxima moindres que β (n° 24) puisse être considéré comme le lacet final de quelque réseau ayant ses divers sommets dans la région avec des écarts maxima moindres que α .

Il est facile de voir que la remarque du n° 4, dont l'exactitude a déjà été vérifiée pour les régions limitées, complètes, continues, normales (n°s 4, 25, 27), s'applique encore aux régions ci-dessus définies.

37. Les régions dont il s'agit donnent lieu à la proposition capitale suivante :

Toute pseudo-fonction de x, y, \dots calculable par cheminement avec les rayons R_x, R_y, \dots dans une région, \mathfrak{U} , qui (outre la continuité) présente le caractère spécifié au numéro précédent, y est certainement monodrome avec des rayons r_x, r_y, \dots convenablement choisis au-dessous des précédents.

En d'autres termes, si, parmi les chemins brisés (tous praticables pour la pseudo-fonction) qui partent du point fondamental, et qui, avec des écarts maxima moindres que R_x, R_y, \dots , ont tous leurs sommets dans la région \mathfrak{U} , on s'astreint à ne considérer que ceux dont les écarts maxima sont moindres que r_x, r_y, \dots , le développement auquel on est conduit à l'extrémité d'un pareil chemin dépend uniquement des coordonnées de cette extrémité, et non du chemin suivi pour y arriver.

I. Dans ce qui suit, nous aurons plus d'une fois à exprimer que deux chemins brisés de même extrémité, praticables par rapport à un développement fondamental donné, conduisent au même développement final : en désignant par

$$a_0 a_1 a_2 \dots a_g \mathbf{A},$$

$$a_0 a'_1 a'_2 \dots a'_g \mathbf{A}$$

les deux chemins dont il s'agit, nous exprimerons cette équivalence à l'aide de la notation

$$\Psi [a_0 a_1 a_2 \dots a_g \mathbf{A}] = \Psi [a_0 a'_1 a'_2 \dots a'_g \mathbf{A}].$$

II. Si, par rapport à un développement fondamental donné, deux chemins

brisés de même extrémité,

$$(2) \qquad a_0 a_1 a_2 \dots a_g \Lambda,$$

$$(3) \qquad a_0 a'_1 a'_2 \dots a'_g \Lambda,$$

sont praticables et équivalents, si, de plus, le chemin brisé

$$a_0 a_1 a_2 \dots a_g \Lambda \alpha_1 \dots \alpha_k,$$

obtenu par un certain allongement de (2), est praticable, le chemin brisé

$$a_0 a'_1 a'_2 \dots a'_g \Lambda \alpha_1 \dots \alpha_k,$$

obtenu par le même allongement de (3), est praticable, comme le précédent, et conduit au même développement final.

III. Considérons un développement fondamental admettant les rayons de convergence R_x, R_y, \dots , et un chemin brisé,

$$\begin{aligned} a_0 &= (x_0, \quad y_0, \quad \dots), \\ a_1 &= (x_0 + h_1, y_0 + k_1, \dots) = (x_1, y_1, \dots), \\ a_2 &= (x_1 + h_2, y_1 + k_2, \dots) = (x_2, y_2, \dots), \\ &\dots\dots\dots, \\ a_p &= (x_{p-1} + h_p, y_{p-1} + k_p, \dots) = (x_p, y_p, \dots), \end{aligned}$$

ayant son origine au point fondamental (x_0, y_0, \dots) : si les accroissements successivement attribués aux variables vérifient les relations

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{mod } h_1 + \text{mod } h_2 + \dots + \text{mod } h_p < R_x, \\ \text{mod } k_1 + \text{mod } k_2 + \dots + \text{mod } k_p < R_y, \\ \dots\dots\dots, \end{array} \right.$$

les deux chemins

$$\begin{array}{c} a_0 a_1 a_2 \dots a_p, \\ a_0 a_p \end{array}$$

sont praticables et conduisent au même développement final.

On sait qu'à l'intérieur du domaine de centre (x_0, y_0, \dots) et de rayons R_x, R_y, \dots , la somme du développement fondamental définit une fonction olotrope, $f(x, y, \dots)$. Cela étant, si l'on désigne par q un entier quelconque de la suite 1, 2, ..., p , les relations (4) donnent immédiatement

$$\begin{aligned} \text{mod } (x_q - x_0) &= \text{mod } (h_1 + h_2 + \dots + h_q) < R_x, \\ \text{mod } (y_q - y_0) &= \text{mod } (k_1 + k_2 + \dots + k_q) < R_y, \\ &\dots\dots\dots; \end{aligned}$$

dès lors, les points $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$ sont tous situés dans une région où la fonction $f(x, y, \dots)$ est olotrope, et la quantité

$$f(x_{q-1} + h, y_{q-1} + k, \dots)$$

est développable en une série entière par rapport à h, k, \dots , tant que les modules de ces accroissements sont respectivement inférieurs aux différences

$$\begin{aligned} R_x - \text{mod}(x_{q-1} - x_0) &= R_x - \text{mod}(h_1 + h_2 + \dots + h_{q-1}), \\ R_y - \text{mod}(y_{q-1} - y_0) &= R_y - \text{mod}(k_1 + k_2 + \dots + k_{q-1}), \\ &\dots \end{aligned}$$

(n° 28, 3°). Comme on a précisé, en vertu de (4),

$$\begin{aligned} \text{mod}(h_1 + h_2 + \dots + h_{q-1}) + \text{mod} h_q &< R_x, \\ \text{mod}(k_1 + k_2 + \dots + k_{q-1}) + \text{mod} k_q &< R_y, \\ &\dots \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \text{mod} h_q &< R_x - \text{mod}(h_1 + h_2 + \dots + h_{q-1}), \\ \text{mod} k_q &< R_y - \text{mod}(k_1 + k_2 + \dots + k_{q-1}), \\ &\dots \end{aligned}$$

les valeurs

$$x_q = x_{q-1} + h_q, \quad y_q = y_{q-1} + k_q, \quad \dots$$

se trouvent certainement dans les limites où $f(x, y, \dots)$ est développable par la formule de Taylor à partir des valeurs x_{q-1}, y_{q-1}, \dots

Cela posé, si l'on considère le développement de $f(x, y, \dots)$ à partir des valeurs initiales x_0, y_0, \dots , l'hypothèse numérique $x = x_1, y = y_1, \dots$, introduite dans ce développement et dans toutes ses dérivées, fournira, aux facteurs numériques connus près, les coefficients du développement de $f(x, y, \dots)$ effectué à partir de x_1, y_1, \dots , et permettra de construire le développement dont il s'agit. Ce deuxième développement une fois connu, on en déduira, par le même mécanisme, le développement de $f(x, y, \dots)$ à partir du troisième sommet (x_2, y_2, \dots) , et ainsi de suite jusqu'au sommet final (x_p, y_p, \dots) . Le chemin $a_0 a_1 a_2 \dots a_p$ est donc praticable, et équivaut au chemin direct $a_0 a_p$.

IV. *Lorsqu'un développement fondamental, entier en $x - x_0, y - y_0, \dots$, converge dans le domaine de centre (x_0, y_0, \dots) et de rayons R_x, R_y, \dots , tout chemin brisé ayant son origine en (x_0, y_0, \dots) et ses divers sommets dans le domaine en question, équivaut, s'il est praticable, au chemin direct formé avec les deux sommets extrêmes.*

1° Le point ci-dessus énoncé est exact lorsque le nombre des sommets est égal à 3.

Désignant, en effet, par $f(x, y, \dots)$ la somme du développement donné, entier en $x - x_0, y - y_0, \dots$, et par

$$\begin{aligned} a_0 &= (x_0, y_0, \dots), \\ a_1 &= (x_1, y_1, \dots), \\ A &= (X, Y, \dots) \end{aligned}$$

les trois sommets de notre chemin brisé, on observera tout d'abord que le développement auquel on est conduit en a_1 coïncide avec celui de $f(x, y, \dots)$, effectué à partir des valeurs x_1, y_1, \dots .

Si l'on désigne maintenant par s une indéterminée réelle assujettie à varier dans l'intervalle de 0 à 1 ($0 \leq s \leq 1$), et que l'on considère le point (x, y, \dots) défini par les formules

$$(5) \quad \begin{cases} x = x_1 + s(X - x_1), \\ y = y_1 + s(Y - y_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

il résulte, en premier lieu, du raisonnement fait au n° 26, que ce point est, quel que soit s , situé dans le domaine de centre (x_0, y_0, \dots) et de rayons R_x, R_y, \dots , et, en second lieu, d'une proposition formulée à l'alinéa II du n° 32, que la fonction $f(x, y, \dots)$ admet en ce point, quel que soit s , des olomètres au moins égaux à une constante positive δ convenablement choisie. Désignant alors par ϵ une quantité positive assez petite pour que les produits

$$(6) \quad \epsilon \text{ mod } (X - x_1), \quad \epsilon \text{ mod } (Y - y_1), \quad \dots$$

soient tous inférieurs à δ , partageons l'intervalle de 0 à 1 en intervalles partiels d'amplitude inférieure à ϵ , et soient

$$0, \quad s', \quad s'', \quad \dots, \quad s^{(g)}, \quad 1$$

les valeurs de s qui limitent les intervalles partiels successifs;

$$(7) \quad (x_1, y_1, \dots), \quad (x', y', \dots), \quad (x'', y'', \dots), \quad \dots, \quad (x^{(g)}, y^{(g)}, \dots), \quad (X, Y, \dots)$$

les points correspondants fournis par les formules (5) : il résulte immédiatement de ces dernières que, pour deux sommets consécutifs du chemin (7), les différences entre les coordonnées semblables ont des modules respectivement inférieurs aux quantités (6), par suite à δ . Si donc on prend pour développement fondamental celui de $f(x, y, \dots)$ effectué à partir des valeurs x_1, y_1, \dots , le parcours du chemin brisé (7) fait retomber de toute nécessité sur le développement de

$f(x, y, \dots)$ effectué à partir des valeurs X, Y, \dots . Observons maintenant, chose extrêmement aisée à vérifier, que, sur le chemin brisé (7), la somme des modules des accroissements successivement attribués à chaque variable est égale à l'une ou à l'autre des quantités

$$(8) \quad \text{mod}(X - x_1), \quad \text{mod}(Y - y_1), \quad \dots,$$

suivant qu'il s'agit de l'une ou de l'autre des variables x, y, \dots . Comme, en vertu de notre hypothèse, le chemin $a_0 a_1 A$ est praticable, les quantités (8) ne peuvent manquer d'être toutes inférieures à certains rayons de convergence du développement de $f(x, y, \dots)$ effectué à partir de (x_1, y_1, \dots) , et l'on peut, dès lors, en vertu de l'alinéa III, passer directement du sommet a_1 au sommet A .

Ainsi, le développement final auquel conduit le chemin donné $a_0 a_1 A$ coïncide avec le développement de $f(x, y, \dots)$ effectué à partir des valeurs X, Y, \dots ; il équivaut donc au chemin direct, $a_0 A$.

2° Le point énoncé au début du présent alinéa IV est exact, quel que soit le nombre des sommets de notre chemin brisé.

Si l'on désigne en effet par $a_0, a_1, a_2, \dots, a_g, A$ les sommets successifs du chemin dont il s'agit, on a d'abord, en vertu de 1°,

$$\Psi[a_0 a_1 a_2] = \Psi[a_0 a_2]$$

(I), d'où l'on déduit (II)

$$\Psi[a_0 a_1 a_2 a_3] = \Psi[a_0 a_2 a_3].$$

Une nouvelle application de 1° donne alors

$$\Psi[a_0 a_2 a_3] = \Psi[a_0 a_3],$$

d'où, par comparaison avec la relation qui précède,

$$\Psi[a_0 a_1 a_2 a_3] = \Psi[a_0 a_3].$$

En continuant ce raisonnement de proche en proche, on tombera finalement sur la relation

$$\Psi[a_0 a_1 a_2 \dots a_g A] = \Psi[a_0 A].$$

V. *Considérons, relativement à une pseudo-fonction donnée, le chemin brisé*

$$a_0 a_1 a_2 \dots a_{g-1} a_g A a_g a_{g-1} \dots a_2 a_1 a_0,$$

où les deux tronçons successifs

$$\begin{aligned} a_0 a_1 a_2 \dots a_{g-1} a_g A, \\ A a_g a_{g-1} \dots a_2 a_1 a_0 \end{aligned}$$

se composent des mêmes sommets, pris d'abord dans un certain ordre, puis dans l'ordre inverse : un pareil chemin, s'il est praticable, fait retomber de toute nécessité sur le développement fondamental.

Effectivement, l'application alternative des alinéas IV et II donne successivement

$$\begin{aligned} \Psi [a_0 a_1 a_2 \dots a_{g-1} a_g \mathbf{A} a_g] &= \Psi [a_0 a_1 a_2 \dots a_{g-1} a_g], \\ \Psi [a_0 a_1 a_2 \dots a_{g-1} a_g \mathbf{A} a_g a_{g-1}] &= \Psi [a_0 a_1 a_2 \dots a_{g-1} a_g a_{g-1}] \\ &= \Psi [a_0 a_1 a_2 \dots a_{g-1}], \\ \dots\dots\dots, \dots\dots\dots, \end{aligned}$$

et nous conduit, de proche en proche, à la relation

$$\Psi [a_0 a_1 a_2 \dots a_{g-1} a_g \mathbf{A} a_g a_{g-1} \dots a_2 a_1 a_0] = \Psi [a_0],$$

qu'il s'agit d'établir.

VI. Revenons à notre énoncé général.

Si l'on désigne par r le plus petit des rayons R_x, R_y, \dots , on peut, en vertu des hypothèses faites sur la région \mathfrak{U} , assigner au-dessous de $\frac{r}{2}$ une constante positive, ρ , telle que tout lacet construit dans \mathfrak{U} avec des écarts maxima moindres que ρ puisse être considéré comme le lacet final de quelque réseau construit dans \mathfrak{U} avec des écarts maxima moindres que $\frac{r}{2}$.

Cela étant, désignons par (x_0, y_0, \dots) le point fondamental, par (X, Y, \dots) un point arbitrairement choisi dans la région \mathfrak{U} , et construisons arbitrairement dans cette région, de (x_0, y_0, \dots) à (X, Y, \dots) , deux chemins brisés, C', C'' , présentant des écarts maxima moindres que ρ (n° 25). Il résulte de notre hypothèse que ces chemins sont tous deux praticables pour la pseudo-fonction donnée, et qu'ils conduisent à des développements successifs admettant des rayons de convergence au moins égaux à r : tout revient donc à prouver que le développement final est le même pour l'un et pour l'autre. A cet effet, nous désignerons par C'_1 le chemin brisé C'' considéré en sens inverse, et nous établirons que le lacet (C', C'_1) , évidemment praticable, fait retomber sur le développement fondamental : il en résultera que dans le chemin praticable formé des trois tronçons successifs C', C'_1, C'' , la suppression des deux premiers tronçons est permise, et comme, en vertu de l'alinéa V, la suppression des deux derniers l'est également, les deux chemins C' et C'' , équivalents l'un et l'autre à (C', C'_1, C'') , seront par là même équivalents entre eux.

Or, d'après ce qui a été dit, le lacet (C', C'_1) , dont les écarts maxima sont

moindres que ρ , peut être considéré comme le lacet final de quelque réseau construit dans \mathfrak{R} avec des écarts maxima moindres que $\frac{r}{2}$. Comme un lacet ayant tous ses sommets confondus au point fondamental fait évidemment retomber sur le développement fondamental, tout revient à prouver que deux lacets consécutifs du réseau (évidemment praticables pour la pseudo-fonction donnée avec des rayons de convergence égaux à r , puisque leurs écarts maxima tombent au-dessous de $\frac{r}{2}$) conduisent au même développement final.

Désignons à cet effet par

$$a_0 a_1 a_2 \dots a_i a_0$$

et

$$a_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i a_0$$

deux lacets consécutifs du réseau. Nos hypothèses, combinées avec les alinéas III et II, donnent successivement

$$\Psi [a_0 \alpha_1] = \Psi [a_0 a_1 \alpha_1];$$

puis

$$\Psi [a_0 \alpha_1 \alpha_2] = \Psi [a_0 a_1 \alpha_1 \alpha_2] = \Psi [a_0 a_1 \alpha_2] = \Psi [a_0 a_1 a_2 \alpha_2],$$

d'où

$$\Psi [a_0 \alpha_1 \alpha_2] = \Psi [a_0 a_1 a_2 \alpha_2];$$

puis encore

$$\Psi [a_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3] = \Psi [a_0 a_1 a_2 \alpha_2 \alpha_3] = \Psi [a_0 a_1 a_2 \alpha_3] = \Psi [a_0 a_1 a_2 a_3 \alpha_3],$$

d'où

$$\Psi [a_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3] = \Psi [a_0 a_1 a_2 a_3 \alpha_3];$$

etc. On arrivera ainsi, de proche en proche, à

$$\Psi [a_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i] = \Psi [a_0 a_1 a_2 \dots a_i \alpha_i],$$

et, finalement, à

$$\begin{aligned} \Psi [a_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i a_0] &= \Psi [a_0 a_1 a_2 \dots a_i \alpha_i a_0] \\ &= \Psi [a_0 a_1 a_2 \dots a_i a_0] \quad (1). \end{aligned}$$

(1) La même démonstration, légèrement modifiée, s'applique à la proposition suivante :

Soient s, t, \dots des variables indépendantes (réelles ou imaginaires), en nombre quelconque g ; $\mathfrak{R}_{s,t,\dots}$ une région de l'espace $[s, t, \dots]$ continue, limitée, complète, et présentant le caractère spécifié au n° 36;

$$\begin{cases} x = \varphi(s, t, \dots), \\ y = \psi(s, t, \dots), \\ \dots \end{cases}$$

des formules, en nombre quelconque n , ayant pour seconds membres diverses fonctions

38. Les régions qui présentent (outre la continuité) le caractère spécifié au n° 36 jouissent, comme on le voit, de cette propriété remarquable, que le seul

de s, t, \dots , toutes *continues* dans la région $\mathfrak{U}_{s,t,\dots}$; enfin (s_0, t_0, \dots) un certain point de cette dernière, et x_0, y_0, \dots les valeurs numériques correspondantes de x, y, \dots .

Considérons, d'autre part, une pseudo-fonction de x, y, \dots définie par le point fondamental (x_0, y_0, \dots) et par un développement fondamental, et supposons que les divers points de l'espace $[[x, y, \dots]]$ qui, en vertu des formules ci-dessus, correspondent (avec répétition possible) aux divers points de $\mathfrak{U}_{s,t,\dots}$, appartiennent tous à une région où la pseudo-fonction dont il s'agit soit calculable par cheminement avec les rayons R_x, R_y, \dots .

Toutes ces choses étant posées, *si, parmi les chemins brisés de l'espace $[[s, t, \dots]]$ ayant leur premier sommet en (s_0, t_0, \dots) et leurs divers sommets dans la région $\mathfrak{U}_{s,t,\dots}$, on se borne à considérer ceux dont les écarts maxima tombent au-dessous d'une constante positive convenablement choisie : 1° les chemins brisés qui leur correspondent dans l'espace $[[x, y, \dots]]$ ont des écarts maxima respectivement moindres que les quantités R_x, R_y, \dots , et, par suite, sont praticables pour la pseudo-fonction avec ces mêmes quantités comme rayons de convergence; 2° le développement final obtenu à l'extrémité d'un pareil chemin dépend uniquement des valeurs de s, t, \dots qui en fournissent le dernier sommet.*

Des diverses hypothèses faites tant sur la région $\mathfrak{U}_{s,t,\dots}$ que sur les seconds membres de nos n formules, il résulte en effet : 1° qu'en désignant par r le plus petit des rayons R_x, R_y, \dots , et par γ une constante positive convenablement choisie, les relations simultanées

$$\text{mod}(s' - s'') < \gamma, \quad \text{mod}(t' - t'') < \gamma, \quad \dots,$$

supposées vérifiées pour deux points quelconques de la région $\mathfrak{U}_{s,t,\dots}$, entraînent comme conséquences nécessaires, pour les deux points correspondants de l'espace $[[x, y, \dots]]$, les relations

$$\text{mod}(x' - x'') < \frac{r}{2}, \quad \text{mod}(y' - y'') < \frac{r}{2}, \quad \dots;$$

2° qu'en désignant par δ une constante positive convenablement choisie, inférieure ou égale à la précédente γ , tout lacet construit dans $\mathfrak{U}_{s,t,\dots}$ avec des écarts maxima moindres que δ peut être considéré comme le lacet final de quelque réseau construit dans $\mathfrak{U}_{s,t,\dots}$ avec des écarts maxima moindres que γ .

Cela étant, si, parmi les chemins brisés de l'espace $[[s, t, \dots]]$ ayant leur premier sommet en (s_0, t_0, \dots) et leurs divers sommets dans la région $\mathfrak{U}_{s,t,\dots}$, on se borne à considérer ceux dont les écarts maxima tombent au-dessous de la constante δ , les divers chemins brisés qui leur correspondent dans l'espace $[[x, y, \dots]]$ auront nécessairement des écarts maxima moindres que $\frac{r}{2}$, à plus forte raison moindres que les quantités R_x, R_y, \dots respectivement, et, par suite, seront praticables pour la pseudo-fonction avec ces mêmes quantités comme rayons de convergence.

Cette première constatation étant faite, on désignera par (S, T, \dots) un point arbitrairement choisi dans la région $\mathfrak{U}_{s,t,\dots}$, on construira arbitrairement dans cette région, de (s_0, t_0, \dots) à (S, T, \dots) , deux chemins brisés, C', C'' , présentant des écarts maxima moindres

fait, pour une pseudo-fonction, d'y être calculable par cheminement, entraîne de toute nécessité, moyennant un choix convenable des rayons, sa monodromie dans

que δ , et l'on prouvera que les deux chemins qui leur correspondent respectivement dans l'espace $[[x, y, \dots]]$ conduisent au même développement final : nous n'insisterons pas sur les détails de ce raisonnement, qui ne ferait que reproduire, *mutatis mutandis*, l'alinéa VI du n° 37.

Lorsque les diverses hypothèses énumérées au début de la présente Note se trouvent vérifiées, il résulte évidemment de nos conclusions qu'à tout point (S, T, \dots) de la région $\mathfrak{U}_{s,t,\dots}$ on peut faire correspondre un développement déterminé de la pseudo-fonction, en s'astreignant à ne considérer, parmi les chemins brisés ayant leur sommet initial en (s_0, t_0, \dots) , leur sommet final en (S, T, \dots) , et leurs sommets intermédiaires dans la région $\mathfrak{U}_{s,t,\dots}$, que ceux dont les écarts maxima tombent au-dessous de δ . Cette propriété, qui offre une grande analogie avec celle que nous venons d'exposer au n° 37, n'est d'ailleurs pas sans utilité, comme le montre, notamment, l'exemple suivant.

Supposons qu'une pseudo-fonction de la variable imaginaire x soit calculable, avec un certain rayon, r , dans une certaine région de l'espace $[[x]]$, et traçons dans cette dernière, à partir du point fondamental x_0 , un arc continu : cet arc sera défini par une équation de la forme

$$x = f(s),$$

où s désigne une variable réelle assujettie à se mouvoir dans un certain intervalle, et $f(s)$ une fonction continue de cette variable prenant la valeur numérique x_0 pour celle des deux valeurs extrêmes, s_0 , de s , que l'on considère comme initiale. La région, \mathfrak{U}_s , de l'espace $[[s]]$, constituée par l'intervalle en question, est, comme nous l'avons établi (n° 11, II), limitée et complète, et remplit déjà, de ce fait, une partie des conditions requises par notre énoncé ; elle satisfait d'ailleurs, comme on le voit immédiatement, à la définition donnée plus bas (n° 38) d'une région *convexe*, et, par suite (n° 38), aux conditions restantes. Cela étant, désignons par γ une constante positive choisie de telle façon que la relation

$$\text{mod}(s' - s'') < \gamma,$$

supposée vérifiée pour deux points quelconques de l'intervalle \mathfrak{U}_s , entraîne comme conséquence nécessaire, pour les deux points correspondants de l'espace $[[x]]$, la relation

$$\text{mod}(x' - x'') < \frac{r}{2} :$$

à cause de la forme convexe de la région \mathfrak{U}_s , la constante δ , dont il est question ci-dessus, pourra être choisie égale à γ (n° 38). En conséquence, à un point quelconque, S , de l'intervalle \mathfrak{U}_s , on pourra faire correspondre un développement déterminé de la pseudo-fonction en s'astreignant à ne considérer, parmi les chemins brisés ayant leur sommet initial en s_0 , leur sommet final en S , et tous leurs sommets intermédiaires dans \mathfrak{U}_s , que ceux dont les écarts maxima tombent au-dessous de γ : le parcours d'un pareil chemin se nomme, pour abrégé, le *parcours de l'arc*, effectué de s_0 à S , et sa considération intervient souvent dans l'étude des fonctions d'une variable imaginaire.

Si, par exemple, on considère une détermination particulière de l'intégrale indéfinie $\int \frac{dx}{x}$,

les mêmes limites : nous les nommerons, pour cette raison, régions *monodromiques*, et nous en donnerons, avant d'aller plus loin, un exemple qui se présente très fréquemment.

Etant donnés, dans l'espace $[(x, y, \dots)]$, deux points,

$$(x', y', \dots), \quad (x'', y'', \dots),$$

l'ensemble des points définis par le système des formules

$$\begin{cases} x = \lambda x' + \mu x'', \\ y = \lambda y' + \mu y'', \\ \dots\dots\dots, \end{cases}$$

où les indéterminées réelles λ et μ doivent vérifier l'un ou l'autre des systèmes équivalents

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda \leq 1, \\ \lambda + \mu = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \mu \leq 1, \\ \lambda + \mu = 1, \end{cases}$$

sera, par définition, le *segment rectiligne* qui joint les deux points. Le segment ainsi défini peut donc être considéré comme un arc continu (n° 23), représenté, soit par les formules

$$\begin{cases} x = x' + \mu(x'' - x'), \\ y = y' + \mu(y'' - y'), \\ \dots\dots\dots, \end{cases}$$

auxquelles on adjoint la condition

$$0 \leq \mu \leq 1,$$

soit par les formules

$$\begin{cases} x = x'' + \lambda(x' - x''), \\ y = y'' + \lambda(y' - y''), \\ \dots\dots\dots, \end{cases}$$

auxquelles on adjoint la condition

$$0 \leq \lambda \leq 1.$$

et que l'on trace, à partir du point fondamental, un arc continu, $x = f(s)$, ne passant pas par le point $x = 0$, il résulte du n° 19 (3°) que cet arc est tout entier à l'extérieur d'un cercle de rayon suffisamment petit décrit du point $x = 0$ comme centre, c'est-à-dire dans une région de l'espace $[[x]]$ où la pseudo-fonction est calculable par cheminement avec ce même rayon : les conclusions précédentes sont donc applicables.

Cela étant, nous dirons qu'une région de l'espace $[[x, y, \dots]]$ est *convexe*, si, deux points y étant pris à volonté, le segment rectiligne qui les joint est entièrement situé dans la région ⁽¹⁾.

Or, je dis qu'une pareille région, évidemment continue, est *monodromique*. Nous allons faire voir en effet qu'elle remplit bien la condition spécifiée au n° 36, et qu'il suffit même, une constante positive α étant donnée, de prendre β égal à α .

En d'autres termes, *tout lacet construit dans une région convexe, \mathfrak{C} , avec des écarts maxima moindres que α , peut être considéré comme le lacet final de quelque réseau construit dans cette région avec des écarts maxima également moindres que α .*

Soit, en effet,

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{X}, \quad \mathbf{Y}, \quad \dots), \\ (x_1, \quad y_1, \quad \dots), \\ (x_2, \quad y_2, \quad \dots), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (x_{p-1}, y_{p-1}, \dots), \\ (x_p, \quad y_p, \quad \dots), \\ (\mathbf{X}, \quad \mathbf{Y}, \quad \dots) \end{array} \right.$$

un lacet construit dans la région avec des écarts maxima moindres que α . Désignant par s une indéterminée réelle assujettie à varier de 0 à 1 ($0 \leq s \leq 1$), je considère le lacet, variable avec s , qui a pour sommets successifs les points

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{X}, \quad \quad \quad \mathbf{Y}, \quad \quad \quad \dots], \\ [\mathbf{X} + s(x_1 - \mathbf{X}), \mathbf{Y} + s(y_1 - \mathbf{Y}), \dots], \\ [\mathbf{X} + s(x_2 - \mathbf{X}), \mathbf{Y} + s(y_2 - \mathbf{Y}), \dots], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [\mathbf{X} + s(x_{p-1} - \mathbf{X}), \mathbf{Y} + s(y_{p-1} - \mathbf{Y}), \dots], \\ [\mathbf{X} + s(x_p - \mathbf{X}), \mathbf{Y} + s(y_p - \mathbf{Y}), \dots], \\ [\mathbf{X}, \quad \quad \quad \mathbf{Y}, \quad \quad \quad \dots]. \end{array} \right.$$

Ce lacet (10) a même origine et même nombre de sommets que le lacet (9), et

(1) On voit immédiatement que, ici encore, la remarque du n° 4 est applicable, c'est-à-dire que si des régions, respectivement extraites des espaces $[[x, \dots]]$, $[[y, \dots]]$, etc., sont toutes convexes, leur association forme, dans l'espace $[[x, \dots, y, \dots, \text{etc.}]]$, une région également convexe.

nous constaterons tout d'abord que, pour toute valeur de s n'excédant pas l'intervalle de 0 à 1, il a ses divers sommets dans la région \mathfrak{C} et présente des écarts maxima moindres que α .

Effectivement, si l'on désigne par k un entier quelconque de la suite 1, 2, ..., p , le sommet

$$[X + s(x_k - X), Y + s(y_k - Y), \dots]$$

fait évidemment partie du segment rectiligne qui joint les deux points

$$(X, Y, \dots), (x_k, y_k, \dots);$$

or, ces deux points sont situés l'un et l'autre dans la région \mathfrak{C} , par suite aussi le segment rectiligne qui les joint, par suite enfin le sommet considéré du lacet (10).

Considérons maintenant deux sommets consécutifs quelconques du lacet (10), et formons les différences entre leurs coordonnées semblables; nous obtiendrons ainsi successivement

$$\begin{array}{lll} s(x_1 - X), & s(y_1 - Y), & \dots \\ s(x_2 - x_1), & s(y_2 - y_1), & \dots \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots \\ s(x_p - x_{p-1}), & s(y_p - y_{p-1}), & \dots \\ s(X - x_p), & s(Y - y_p), & \dots \end{array}$$

Or, puisque s n'excède pas l'intervalle de 0 à 1, les modules de ces différences sont au plus égaux à ceux qu'on obtiendrait en faisant abstraction dans toutes du facteur s ; les écarts maxima du lacet (10) sont, par suite, au plus égaux respectivement aux écarts maxima du lacet (9), et, dès lors, moindres que α .

Cette double constatation étant faite, désignons par ϵ une constante positive assez petite pour que les produits

$$\begin{array}{lll} \epsilon \text{ mod}(x_1 - X), & \epsilon \text{ mod}(y_1 - Y), & \dots, \\ \epsilon \text{ mod}(x_2 - X), & \epsilon \text{ mod}(y_2 - Y), & \dots, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots, \\ \epsilon \text{ mod}(x_{p-1} - X), & \epsilon \text{ mod}(y_{p-1} - Y), & \dots, \\ \epsilon \text{ mod}(x_p - X), & \epsilon \text{ mod}(y_p - Y), & \dots \end{array}$$

soient tous inférieurs à α ; puis, partageons l'intervalle de 0 à 1 en intervalles partiels moindres que ϵ , et nommons

$$(11) \quad s^{(0)} = 0, \quad s^{(1)}, \quad s^{(2)}, \quad \dots, \quad s^{(g)}, \quad s^{(g+1)} = 1$$

les valeurs de s qui limitent les intervalles partiels successifs; considérons enfin les lacets successivement déduits de (10) par l'attribution à s des valeurs suc-

cessives de la suite (11) : nous obtiendrons ainsi un réseau ayant pour origine (X, Y, \dots) , pour lacet final le lacet (9), et pour sommets des points tous situés dans la région \mathfrak{C} . Chacun des lacets successifs de ce réseau présente d'ailleurs, comme nous savons, des écarts maxima moindres que α , et il nous reste à faire voir que si l'on considère, sur deux lacets consécutifs, deux sommets de même rang, les différences formées avec leurs coordonnées semblables présentent des modules moindres que α .

Le point à établir est évident s'il s'agit, soit du premier, soit du dernier sommet de deux lacets consécutifs, puisque les différences à former sont alors toutes nulles. Soient donc k un entier quelconque de la suite $1, 2, \dots, p$, et $h, h+1$ deux entiers consécutifs quelconques de la suite $0, 1, 2, \dots, g, g+1$: nous avons, d'après ce qui vient d'être dit, à comparer les deux sommets

$$\begin{aligned} & [X + s^{(h)}(x_k - X), Y + s^{(h)}(y_k - Y), \dots], \\ & [X + s^{(h+1)}(x_k - X), Y + s^{(h+1)}(y_k - Y), \dots]. \end{aligned}$$

Or, les quantités

$$[s^{(h+1)} - s^{(h)}](x_k - X), \quad [s^{(h+1)} - s^{(h)}](y_k - Y), \quad \dots,$$

obtenues en retranchant leurs coordonnées semblables, ont des modules au plus égaux respectivement à

$$\varepsilon \bmod(x_k - X), \quad \varepsilon \bmod(y_k - Y), \quad \dots$$

et, par suite, moindres que α .

39. Le simple rapprochement des nos 35 et 37 montre que toute pseudo-fonction calculable par cheminement dans une région à la fois normale et monodromique γ peut être assimilée à une fonction olotrope proprement dite.

C'est ce qui a lieu, notamment, dans la région normale que nous avons appelée *domaine* (nos 26, 27) : car la démonstration du n° 26, qui en établit la continuité, consiste précisément à faire voir que cette région est convexe (n° 38).

40. Une région monodromique étant donnée, on en peut souvent, comme nous allons le voir, déduire, par des transformations convenablement choisies, d'autres régions monodromiques.

Désignons par $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$ une région de l'espace $[[x, y, \dots]]$ qui soit à la fois *continue, limitée et complète*; puis, considérant les formules

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \mathbf{G}(x, y, \dots), \\ \eta = \mathbf{H}(x, y, \dots), \\ \dots\dots\dots, \end{array} \right.$$

où les quantités ξ, η, \dots sont en même nombre que x, y, \dots , supposons : 1° que les seconds membres de ces formules soient *continus* dans la région $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$; 2° qu'à deux points *distincts*, $(x_1, y_1, \dots), (x_2, y_2, \dots)$, de la région $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$, correspondent toujours, en vertu des formules (12), deux points *distincts*, $(\xi_1, \eta_1, \dots), (\xi_2, \eta_2, \dots)$, de l'espace $[[\xi, \eta, \dots]]$.

Cela étant, *si la région $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$ est monodromique, la région $\mathfrak{U}_{\xi,\eta,\dots}$, qui correspond (point par point) à $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$, ne peut manquer de l'être aussi.*

Nous observerons tout d'abord que, en vertu de propositions antérieurement formulées (nos 23, 21 et 22) : 1° la région $\mathfrak{U}_{\xi,\eta,\dots}$ est, comme $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$, continue, limitée et complète; 2° que x, y, \dots , définis par les formules (12) comme fonctions implicites de ξ, η, \dots , sont continus dans la région $\mathfrak{U}_{\xi,\eta,\dots}$.

Cela posé, je dis que, une constante positive α étant donnée, on peut assigner une constante positive β , inférieure ou égale à α , et telle que tout lacet construit dans $\mathfrak{U}_{\xi,\eta,\dots}$ avec des écarts maxima moindres que β puisse être considéré comme le lacet final de quelque réseau construit dans $\mathfrak{U}_{\xi,\eta,\dots}$ avec des écarts maxima moindres que α .

Effectivement, les fonctions ξ, η, \dots étant continues dans la région limitée et complète $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$, on peut (n° 19, 4°) assigner une constante positive a telle que les relations simultanées

$$\text{mod}(x_1 - x_2) < a, \quad \text{mod}(y_1 - y_2) < a, \quad \dots,$$

supposées vérifiées pour deux points,

$$(x_1, y_1, \dots), (x_2, y_2, \dots),$$

de la région $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$, entraînent comme conséquences nécessaires, pour les deux points correspondants de $\mathfrak{U}_{\xi,\eta,\dots}$, les relations

$$\text{mod}(\xi_1 - \xi_2) < \alpha, \quad \text{mod}(\eta_1 - \eta_2) < \alpha, \quad \dots$$

On peut ensuite, puisque la région $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$ est monodromique, assigner au-dessous de a une quantité positive b telle que tout lacet construit dans $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$ avec des écarts maxima moindres que b puisse être considéré comme le lacet final de quelque réseau construit dans $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$ avec des écarts maxima moindres que a .

On peut enfin, puisque les fonctions x, y, \dots sont continues dans la région limitée et complète $\mathfrak{U}_{\xi,\eta,\dots}$, assigner au-dessous de α une quantité positive β telle que les relations simultanées

$$\text{mod}(\xi_1 - \xi_2) < \beta, \quad \text{mod}(\eta_1 - \eta_2) < \beta, \quad \dots,$$

supposées vérifiées pour deux points,

$$(\xi_1, \eta_1, \dots), \quad (\xi_2, \eta_2, \dots),$$

de la région $\mathfrak{A}_{\xi, \eta, \dots}$, entraînent comme conséquences nécessaires, pour les deux points correspondants de $\mathfrak{A}_{x, y, \dots}$, les relations

$$\text{mod}(x_1 - x_2) < b, \quad \text{mod}(y_1 - y_2) < b, \quad \dots$$

Cela étant, à un lacet, $L_{\xi, \eta, \dots}$, construit dans $\mathfrak{A}_{\xi, \eta, \dots}$ avec des écarts maxima moindres que β , correspondra un lacet, $L_{x, y, \dots}$, construit dans $\mathfrak{A}_{x, y, \dots}$ avec des écarts maxima moindres que b . Ce lacet $L_{x, y, \dots}$ peut d'ailleurs être considéré comme le lacet final de quelque réseau, $R_{x, y, \dots}$, construit dans $\mathfrak{A}_{x, y, \dots}$ avec des écarts maxima moindres que a . Finalement, au réseau $R_{x, y, \dots}$ correspondra, dans $\mathfrak{A}_{\xi, \eta, \dots}$, un réseau, $R_{\xi, \eta, \dots}$, construit avec des écarts maxima moindres que a et ayant pour lacet final $L_{\xi, \eta, \dots}$.

41. Voici un exemple bien simple du type de transformation que nous venons de décrire.

Soient x, y et ρ, θ deux groupes de variables *réelles*, liées entre elles par les relations

$$(13) \quad x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

dont les seconds membres sont des fonctions isotropes, par suite continues, de ρ et θ ; soient, en outre, r, R et ε des constantes vérifiant les inégalités

$$0 < r < R, \quad 0 < \varepsilon < \pi,$$

dont la dernière entraîne, notamment,

$$\varepsilon < 2\pi - \varepsilon.$$

Il est facile de voir que, si les variables ρ et θ se meuvent dans l'intervalle complexe

$$(14) \quad \begin{cases} r \leq \rho \leq R, \\ \varepsilon \leq \theta \leq 2\pi - \varepsilon, \end{cases}$$

à deux systèmes *distincts* de valeurs de ρ et θ correspondent, en vertu des formules (13), deux systèmes *distincts* de valeurs de x et y : car les relations simultanées

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho_1 \cos \theta_1, & x_2 &= \rho_2 \cos \theta_2, & x_1 &= x_2, \\ y_1 &= \rho_1 \sin \theta_1, & y_2 &= \rho_2 \sin \theta_2, & y_1 &= y_2, \end{aligned}$$

où les systèmes de valeurs (ρ_1, θ_1) et (ρ_2, θ_2) n'excèdent pas l'intervalle (14), entraînent de toute nécessité $\rho_1 = \rho_2$, puis $\theta_1 = \theta_2$. Cet intervalle constitue d'ailleurs une région limitée et complète de l'espace $[[\rho, \theta]]$. Enfin, les deux régions

$$r \leq \rho \leq R, \quad \varepsilon \leq \theta \leq 2\pi - \varepsilon,$$

respectivement extraites des espaces $[[\rho]]$ et $[[\theta]]$, étant évidemment convexes, par suite monodromiques, celle qui résulte de leur association jouit de la même propriété dans l'espace $[[\rho, \theta]]$. Donc, en vertu du numéro précédent, la région de l'espace $[[x, y, \dots]]$ définie par l'ensemble des formules (13) et (14) ne peut manquer d'être monodromique.

Si maintenant on substitue aux relations (14) les relations

$$(15) \quad \begin{cases} r < \rho < R, \\ \varepsilon < \theta < 2\pi - \varepsilon \end{cases}$$

(d'où les signes d'égalité ont disparu), la région de l'espace $[[x, y, \dots]]$ définie par (13) et (15) fait partie de la précédente et est évidemment continue. Elle est de plus normale : en effet, le déterminant différentiel des formules (13) par rapport à ρ et θ se réduisant à ρ , qui, en vertu de la première relation (15), est essentiellement supérieur à zéro, les relations (13) pourront, conformément au principe général des fonctions implicites, être résolues par rapport à ρ et θ à partir de toutes valeurs numériques, $x_0, y_0, \rho_0, \theta_0$, vérifiant les relations (13) et (15); si donc on représente les deux variables réelles x et y par les coordonnées rectangulaires d'un point, un rectangle suffisamment petit, ayant son centre en (x_0, y_0) et ses côtés parallèles aux axes, sera entièrement situé dans la région définie par (13) et (15).

Cela étant, toute pseudo-fonction des variables réelles x, y , calculable par cheminement dans la région $[(13), (14)]$, sera monodrome dans cette dernière, donc aussi dans la région normale $[(13), (15)]$, et, finalement, assimilable, dans toute l'étendue de cette dernière, à une fonction olotrope proprement dite de x, y (1).

(1) Il est bon de faire voir ici que, si l'on se place dans le monde des quantités imaginaires en posant $u = x + iy$, la région $[(13), (14)]$ de l'espace $[[u]]$ est encore monodromique, que la région $[(13), (15)]$ est encore normale, et que toute pseudo-fonction de u calculable par cheminement dans la première est assimilable à une fonction olotrope proprement dite de u dans toute l'étendue de la seconde.

Observons en premier lieu que, si l'on désigne par x, y, z, s, \dots des variables *réelles* en nombre *pair* $2n$, toute région monodromique par rapport à ces $2n$ variables réelles l'est

CONDITIONS SUFFISANTES POUR LA POSSIBILITÉ DU CALCUL PAR CHEMINEMENT
DANS CERTAINES RÉGIONS.

42. Nous avons posé au n° 35 la définition suivante :

Une pseudo-fonction de x, y, \dots est dite *calculable par cheminement dans une région continue, \mathfrak{A}* , avec les rayons de convergence R_x, R_y, \dots , si tout

aussi par rapport aux n variables *imaginaires* $u = x + iy, v = z + is, \dots$, et réciproquement.

Tout d'abord, en effet, la continuité d'une région dans l'espace $[[x, y, z, s, \dots]]$ entraîne sa continuité dans l'espace $[[u, v, \dots]]$, et réciproquement : il suffit, pour s'en convaincre, de se reporter à la définition du n° 25, et d'observer que, en désignant par f_1, f_2 deux fonctions réelles des variables réelles t, \dots et posant $f = f_1 + if_2$, la continuité des deux fonctions réelles f_1, f_2 dans une région de l'espace $[[t, \dots]]$ entraîne celle de la fonction imaginaire f dans les mêmes limites, et réciproquement.

Cela étant, plaçons-nous dans le monde des quantités réelles, et supposons qu'une région de l'espace $[[x, y, z, s, \dots]]$ soit monodromique. En vertu de la définition posée au n° 36, on peut, une constante positive α étant donnée, assigner une constante positive β , inférieure ou égale à $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$, et telle que tout lacet tracé dans la région avec des écarts maxima moindres que β puisse être considéré comme le lacet final de quelque réseau tracé dans la région avec des écarts maxima moindres que $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$. Si donc on se place dans le monde des quantités imaginaires en posant $u = x + iy, v = z + is, \dots$, auquel cas notre région de l'espace $[[x, y, z, s, \dots]]$ devient une région de l'espace $[[u, v, \dots]]$, on voit que tout lacet tracé dans cette dernière avec des écarts maxima moindres que β peut être considéré comme le lacet final de quelque réseau tracé dans la région avec des écarts maxima moindres que α . Cette région est donc monodromique.

Réciproquement, plaçons-nous dans le monde des quantités imaginaires, et supposons qu'une région de l'espace $[[u, v, \dots]]$ soit monodromique. En vertu de la définition, on peut, une constante positive α étant donnée, assigner une constante positive β , inférieure ou égale à α , et telle que tout lacet tracé dans la région avec des écarts maxima moindres que β puisse être considéré comme le lacet final de quelque réseau tracé dans la région avec des écarts maxima moindres que α . Si donc on se place dans le monde des quantités réelles, auquel cas notre région de l'espace $[[u, v, \dots]]$ devient une région de l'espace $[[x, y, z, s, \dots]]$, on voit que tout lacet tracé dans cette dernière avec des écarts maxima moindres que $\frac{\beta}{\sqrt{2}}$ peut être considéré comme le lacet final de quelque réseau tracé dans la région avec des écarts maxima moindres que α . Cette région est donc monodromique.

Observons en second lieu que toute région normale par rapport aux $2n$ variables

chemin brisé ayant son premier sommet au point fondamental, ses divers sommets dans la région \mathfrak{U} , et des écarts maxima respectivement moindres que R_x ,

réelles x, y, z, s, \dots est aussi une région normale par rapport aux n variables imaginaires $u = x + iy, v = z + is, \dots$, et réciproquement.

Plaçons-nous, en effet, dans le monde des quantités réelles, et supposons qu'une région de l'espace $[[x, y, z, s, \dots]]$ soit normale. Si l'on considère un point déterminé quelconque, $(x_0, y_0, z_0, s_0, \dots)$, de la région, ce point est, en vertu de la définition posée au n° 27, le centre de quelque domaine entièrement situé dans la région, c'est-à-dire qu'en désignant par δ une quantité positive suffisamment petite, les divers points définis par les relations simultanées

$$(16) \quad \begin{cases} \text{val. abs. } (x - x_0) < \delta, & \text{val. abs. } (z - z_0) < \delta, & \dots, \\ \text{val. abs. } (y - y_0) < \delta, & \text{val. abs. } (s - s_0) < \delta, & \dots \end{cases}$$

sont entièrement situés dans la région. Or, les relations (16) sont certainement vérifiées lorsqu'on a

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta, \quad \sqrt{(z - z_0)^2 + (s - s_0)^2} < \delta, \quad \dots$$

Si donc on se place dans le monde des quantités imaginaires en posant

$$\begin{aligned} u &= x + iy, & v &= z + is, & \dots, \\ u_0 &= x_0 + iy_0, & v_0 &= z_0 + is_0, & \dots, \end{aligned}$$

auquel cas notre région de l'espace $[[x, y, z, s, \dots]]$ devient une région de l'espace $[[u, v, \dots]]$, on voit que le domaine

$$\text{mod}(u - u_0) < \delta, \quad \text{mod}(v - v_0) < \delta, \quad \dots$$

est entièrement situé dans cette dernière.

Réciproquement, plaçons-nous dans le monde des quantités imaginaires, et supposons qu'une région de l'espace $[[u, v, \dots]]$ soit normale. Si l'on considère un point déterminé quelconque,

$$u_0 = x_0 + iy_0, \quad v_0 = z_0 + is_0, \quad \dots,$$

de la région, ce point est, en vertu de la définition posée au n° 27, le centre de quelque domaine entièrement situé dans la région, c'est-à-dire que, en désignant par δ une quantité positive suffisamment petite, les divers points définis par les relations simultanées

$$(17) \quad \text{mod}(u - u_0) < \delta, \quad \text{mod}(v - v_0) < \delta, \quad \dots$$

sont entièrement situés dans la région. Or, les relations (17) sont certainement vérifiées lorsqu'on a

$$(18) \quad \begin{cases} \text{val. abs. } (x - x_0) < \frac{\delta}{\sqrt{2}}, & \text{val. abs. } (z - z_0) < \frac{\delta}{\sqrt{2}}, & \dots, \\ \text{val. abs. } (y - y_0) < \frac{\delta}{\sqrt{2}}, & \text{val. abs. } (s - s_0) < \frac{\delta}{\sqrt{2}}, & \dots \end{cases}$$

Si donc on se place dans le monde des quantités réelles, auquel cas notre région de

R_y, \dots , est praticable pour la pseudo-fonction et conduit à des développements successifs admettant tous comme rayons de convergence R_x, R_y, \dots .

Or, certaines régions jouissent, comme nous allons le voir, de cette propriété remarquable, que la possibilité, pour une pseudo-fonction, d'y être calculée, avec les rayons R_x, R_y, \dots , sur quelques-uns seulement des chemins brisés visés par la définition précédente, entraîne cette même possibilité sur les chemins restants.

43. Considérons des variables indépendantes partagées en groupes,

$$(19) \quad x, \dots, y, \dots, z, \dots, s, \dots,$$

dont nous désignerons le nombre par h (nous avons supposé ici, pour fixer les idées, $h = 4$), et, dans les h espaces respectifs

$$[[x, \dots]], [[y, \dots]], [[z, \dots]], [[s, \dots]],$$

l'espace $[[u, v, \dots]]$ devient une région de l'espace $[[x, y, z, s, \dots]]$, on voit que le domaine (18) est entièrement situé dans cette dernière.

Revenons maintenant aux régions [(13), (14)] et [(13), (15)]. Il résulte tout d'abord de la double observation présentée ci-dessus que, si l'on se place dans le monde des quantités imaginaires en posant $u = x + iy$: 1° la région [(13), (14)] de l'espace $[[u]]$ est encore monodromique; 2° la région [(13), (15)] est encore normale. Cela étant, toute pseudo-fonction de la variable imaginaire u calculable par cheminement dans la région [(13), (14)] sera monodrome dans cette dernière, donc aussi dans la région normale [(13), (15)], et, finalement, assimilable à une fonction olotrope proprement dite de u dans toute l'étendue de [(13), (15)].

S'il s'agit, par exemple, d'une détermination particulière de l'intégrale indéfinie $\int \frac{du}{u}$, on sait que cette pseudo-fonction est, comme sa dérivée $\frac{1}{u}$, calculable par cheminement dans la région [(13), (14)] avec le rayon r (car r est la distance minimum d'un point variable de la région au point fixe $u = 0$). Cela étant, il résulte de ce qui précède qu'elle est assimilable à une fonction olotrope proprement dite de u dans toute l'étendue de la région [(13), (15)]. Enfin, comme cette dernière propriété a lieu quelque petites que soient les constantes positives ϵ, r et quelque grande que soit la constante positive R , on peut dire que la pseudo-fonction considérée est assimilable à une fonction olotrope proprement dite dans toute l'étendue de la région (normale) définie par l'ensemble des relations

$$u = \rho (\cos \theta + i \sin \theta), \\ \rho > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

C'est un exemple bien simple de ce que Riemann, dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, appelle une *coupure*; la coupure est pratiquée ici suivant la partie positive de l'axe des quantités réelles.

les régions continues

$$\mathfrak{U}_{x,\dots}, \mathfrak{U}_{y,\dots}, \mathfrak{U}_{z,\dots}, \mathfrak{U}_{s,\dots} :$$

on sait que l'association de ces dernières fournit, dans l'espace

$$[[x, \dots, y, \dots, z, \dots, s, \dots]],$$

une région,

$$(19 \text{ bis}) \quad (\mathfrak{U}_{x,\dots}, \mathfrak{U}_{y,\dots}, \mathfrak{U}_{z,\dots}, \mathfrak{U}_{s,\dots}),$$

qui est elle-même continue.

Désignant ensuite par

$$(20) \quad (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, s_0, \dots)$$

certain point de la région (19 bis), considérons spécialement, parmi les chemins brisés ayant leur origine en ce point et leurs divers sommets dans la région (19 bis), ceux où l'on fait varier les h groupes de variables *séparément et successivement dans un ordre assigné d'avance*, par exemple dans l'ordre inverse de (19). Un pareil chemin, dont nous désignerons le sommet final par

$$(X, \dots, Y, \dots, Z, \dots, S, \dots),$$

se compose évidemment de h ($= 4$) tronçons successifs : sur le premier tronçon, les points

$$(x, \dots), (y, \dots), (z, \dots)$$

conservent, dans les régions respectives

$$\mathfrak{U}_{x,\dots}, \mathfrak{U}_{y,\dots}, \mathfrak{U}_{z,\dots},$$

les positions fixes

$$(x_0, \dots), (y_0, \dots), (z_0, \dots),$$

tandis que le point (s, \dots) prend, dans la région $\mathfrak{U}_{s,\dots}$, une suite de positions commençant à (s_0, \dots) et finissant à (S, \dots) ; sur le deuxième tronçon, les points

$$(x, \dots), (y, \dots), (s, \dots)$$

conservent, dans les régions respectives

$$\mathfrak{U}_{x,\dots}, \mathfrak{U}_{y,\dots}, \mathfrak{U}_{s,\dots},$$

les positions fixes

$$(x_0, \dots), (y_0, \dots), (S, \dots),$$

tandis que le point (z, \dots) prend, dans la région $\mathfrak{U}_{z,\dots}$, une suite de positions commençant à (z_0, \dots) et finissant à (Z, \dots) ; sur le tronçon suivant, les

points

$$(x, \dots), (z, \dots), (s, \dots)$$

conservent, dans les régions respectives

$$\mathfrak{U}_{x, \dots}, \mathfrak{U}_{z, \dots}, \mathfrak{U}_{s, \dots}$$

les positions fixes

$$(x_0, \dots), (Z, \dots), (S, \dots),$$

tandis que le point (y, \dots) prend, dans la région $\mathfrak{U}_{y, \dots}$, une suite de positions commençant à (y_0, \dots) et finissant à (Y, \dots) ; enfin, sur le dernier tronçon, les points

$$(y, \dots), (z, \dots), (s, \dots)$$

conservent, dans les régions respectives

$$\mathfrak{U}_{y, \dots}, \mathfrak{U}_{z, \dots}, \mathfrak{U}_{s, \dots}$$

les positions fixes

$$(Y, \dots), (Z, \dots), (S, \dots),$$

tandis que le point (x, \dots) prend, dans la région $\mathfrak{U}_{x, \dots}$, une suite de positions commençant à (x_0, \dots) et finissant à (X, \dots) .

Considérons maintenant une pseudo-fonction des variables (19) définie par le point fondamental (20) et par un développement fondamental, et *supposons que*, en désignant par

$$(21) \quad R_x, \dots, R_y, \dots, R_z, \dots, R_s, \dots$$

des constantes positives convenablement choisies, *tous les chemins brisés de la région (19 bis) ayant leur premier sommet au point (20) et présentant, avec des écarts maxima respectivement moindres que (21), la structure spéciale ci-dessus décrite, soient praticables pour la pseudo-fonction et conduisent à des développements successifs admettant les rayons de convergence (21).*

Cela étant, notre pseudo-fonction est calculable par cheminement dans la région (19 bis) avec les rayons (21); si, de plus, les divers chemins spécifiés dans cette région par l'hypothèse précédente conduisent, pour une même extrémité finale, au même développement final, notre pseudo-fonction y est monodrome.

Il suffit évidemment, pour le prouver, d'établir le point suivant :

Si, dans la région (19 bis), tous les chemins brisés ayant leur premier

sommet au point (20) et présentant, avec des écarts maxima respectivement moindres que (21), la structure spéciale ci-dessus décrite, sont praticables pour la pseudo-fonction et conduisent à des développements successifs admettant les rayons de convergence (21), tout chemin brisé, C, tracé dans cette région à partir du point (20) sous la seule condition de présenter des écarts maxima respectivement moindres que (21), jouit, quelle que soit sa structure, de la même propriété; il équivaut, de plus, au chemin brisé de même extrémité, C', qui s'en déduit en attribuant à chacun des h groupes de variables (19) les mêmes accroissements successifs dans le même ordre, mais de telle façon que la structure spéciale dont nous avons parlé se trouve réalisée.

Nous allons donc procéder, dans ce qui suit, à la démonstration de ce double point.

I. Si, parmi les chemins C d'écarts maxima moindres que (21), on considère ceux où les h-1 premiers d'entre les groupes (19) conservent les valeurs fondamentales

$$x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots,$$

la conclusion formulée ci-dessus leur est évidemment applicable : car les chemins C sont, en pareil cas, identiques aux chemins C'.

II. Si, parmi les chemins C d'écarts maxima moindres que (21), on considère ceux qui ne comprennent que deux sommets, notre conclusion leur est encore applicable.

Effectivement, si le chemin C se compose des deux sommets

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, s_0, \dots), \\ (X, \dots, Y, \dots, Z, \dots, S, \dots), \end{array} \right.$$

le chemin C' se composera des suivants :

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, s_0, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, Z, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, Y, \dots, Z, \dots, S, \dots), \\ (X, \dots, Y, \dots, Z, \dots, S, \dots). \end{array} \right.$$

Or, les différences

$$X - x_0, \dots,$$

$$Y - y_0, \dots,$$

$$Z - z_0, \dots,$$

$$S - s_0, \dots,$$

formées avec les coordonnées des deux sommets du chemin (22), ayant, par hypothèse, des modules respectivement inférieurs à (21), il est clair que, dans le chemin (23), les différences formées avec les coordonnées de deux sommets quelconques, consécutifs ou non, jouissent de la même propriété. Il en résulte, d'une part, que ses écarts maxima sont respectivement moindres que (21), et que, par suite, en vertu de l'hypothèse, il conduit à des développements successifs admettant les rayons de convergence (21); il en résulte, d'autre part, que tous ses sommets sans exception sont situés dans un domaine de convergence du développement qui correspond au premier d'entre eux, et que l'on peut dès lors (n° 37, IV), sans changer le développement final, substituer au chemin (23) le chemin direct (22).

III. *Les mêmes choses étant posées que dans notre énoncé général, admettons pour un instant que les deux points suivants aient été établis :*

PREMIER POINT (provisoirement admis). — *Si l'on désigne par h' un certain entier compris entre 0 et h ($0 < h' < h$), et si, parmi les chemins C d'écarts maxima moindres que (21), on considère ceux où les variables des h' premiers groupes (19) conservent les valeurs fondamentales, la conclusion formulée par notre énoncé général leur est applicable.*

DEUXIÈME POINT (provisoirement admis). — *Si l'on désigne par q un certain entier positif, et si, parmi les chemins C d'écarts maxima moindres que (21), on considère ceux où les variables des $h' - 1$ premiers groupes (19) conservent les valeurs fondamentales sans que le nombre des sommets soit supérieur à q , la conclusion formulée par notre énoncé général leur est encore applicable.*

Cela étant, je dis qu'elle s'applique nécessairement à tout chemin C, d'écarts maxima moindres que (21), où les variables des $h' - 1$ premiers groupes (19) conservent les valeurs fondamentales et où le nombre des sommets est $q + 1$.

Supposant, pour fixer les idées, $h' = 2$ et $q = 4$, considérons, dans la

région (19 bis), le chemin

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, s_0, \dots), \\ (x_0, \dots, y_1, \dots, z_1, \dots, s_1, \dots), \\ (x_0, \dots, y_2, \dots, z_2, \dots, s_2, \dots), \\ (x_0, \dots, y_3, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, Y, \dots, Z, \dots, S, \dots), \end{array} \right.$$

où les variables des $h' - 1 (= 1)$ premiers groupes (19) conservent les valeurs fondamentales et où le nombre des sommets est $q + 1 (= 5)$; supposons, en outre, que les écarts maxima y soient respectivement moindres que (21). En vertu du second des deux points provisoirement admis au début du présent alinéa, le chemin (24) est, jusqu'à son avant-dernier sommet inclusivement, praticable avec les rayons (21); et, comme les différences

$$Y - y_3, \dots, Z - z_3, \dots, S - s_3, \dots$$

ont des modules respectivement moindres que

$$R_y, \dots, R_z, \dots, R_s, \dots,$$

on pourra, par un cheminement direct, passer de l'avant-dernier sommet au dernier. Cela étant, il s'agit de prouver que le développement final admet, lui aussi, les rayons de convergence (21), et qu'il est identique au développement final fourni par le chemin (à $h - h' + 1 = 3$ tronçons)

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, s_0, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, s_1, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, s_2, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_1, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_2, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_3, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, Z, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, y_1, \dots, Z, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, y_2, \dots, Z, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, y_3, \dots, Z, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, Y, \dots, Z, \dots, S, \dots), \end{array} \right.$$

lequel, présentant, avec des écarts maxima moindres que (21), la structure spéciale ci-dessus décrite, est, en vertu de nos hypothèses, praticable (jusqu'au dernier sommet inclusivement) avec les rayons (21): tout revient donc à établir que les chemins (25) et (24) sont équivalents.

Or, si, au lieu du chemin (25), nous considérons le chemin

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, s_0, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_1, \dots, s_1, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_2, \dots, s_2, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, Z, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, y_1, \dots, Z, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, y_2, \dots, Z, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, y_3, \dots, Z, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, Y, \dots, Z, \dots, S, \dots), \end{array} \right.$$

où les écarts maxima sont encore évidemment moindres que (21), la première portion,

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, s_0, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_1, \dots, s_1, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_2, \dots, s_2, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, Z, \dots, S, \dots), \end{array} \right.$$

de (26) constitue un chemin [à écarts maxima moindres que (21)] où les variables des $h' (= 2)$ premiers groupes (19) conservent les valeurs fondamentales; d'ailleurs, si au chemin (27) on substitue deux tronçons successifs en faisant varier les groupes restants *successivement* dans l'ordre indiqué au lieu de les faire varier *simultanément*, il résulte de l'hypothèse générale et du premier des deux points provisoirement admis au début du présent alinéa, que la première partie (27) du chemin (26) est praticable pour notre pseudo-fonction avec les rayons (21), et qu'elle équivaut à l'ensemble des $h - h' (= 2)$ premiers tronçons du chemin (25). Si l'on observe maintenant que la deuxième partie du chemin (26) n'est autre que le dernier tronçon du chemin (25), il est clair que l'ensemble du chemin (26) est, lui aussi, praticable pour la pseudo-fonction avec les rayons (21), et qu'il équivaut au chemin (25).

Dans le chemin (26), substituons maintenant au cinquième sommet

$$(x_0, \dots, y_0, \dots, Z, \dots, S, \dots)$$

le sommet

$$(x_0, \dots, y_1, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots),$$

qui s'en déduit en remplaçant dans le cinquième sommet de (26) les valeurs y_0, \dots par les valeurs y_1, \dots , inscrites au-dessous, et les valeurs Z, \dots, S, \dots par les valeurs z_3, \dots, s_3, \dots , inscrites au-dessus : nous aurons ainsi, au lieu de (26), le chemin

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, s_0, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_1, \dots, s_1, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_2, \dots, s_2, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_1, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_1, \dots, Z, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, y_2, \dots, Z, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, y_3, \dots, Z, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, Y, \dots, Z, \dots, S, \dots). \end{array} \right.$$

Je dis que ce chemin (28) conduit, comme (26), à des développements successifs admettant les rayons de convergence (21), et que, de plus, il équivaut à (26).

Effectivement, supprimons du chemin (24) le dernier sommet, ce qui donne

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, s_0, \dots), \\ (x_0, \dots, y_1, \dots, z_1, \dots, s_1, \dots), \\ (x_0, \dots, y_2, \dots, z_2, \dots, s_2, \dots), \\ (x_0, \dots, y_3, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots); \end{array} \right.$$

puis, par les mêmes mécanismes que (25) et (26) ont été déduits de (24), déduisons de (29) les deux chemins

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, s_0, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, s_1, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, s_2, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_1, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_2, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_1, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_2, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_3, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots). \end{array} \right.$$

et

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, s_0, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_1, \dots, s_1, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_2, \dots, s_2, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_1, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_2, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_3, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots). \end{array} \right.$$

En répétant sur les chemins (30) et (31) le raisonnement fait plus haut sur les chemins (25) et (26), on verra que le chemin (31) est praticable avec les rayons (21). Donc, dans le chemin (28), la portion, commune avec (31), que constituent les cinq premiers sommets, jouit de la même propriété; il en résulte, puisque les différences

$$Z - z_3, \dots, S - s_3, \dots$$

ont des modules respectivement inférieurs à

$$R_{z_3}, \dots, R_{s_3}, \dots,$$

qu'on pourra, une fois arrivé au cinquième sommet de (28), opérer un cheminement direct du cinquième sommet au sixième. Le développement obtenu en ce sixième sommet est d'ailleurs le même que le développement obtenu au sixième sommet de (26) : car, pour l'un quelconque des deux fragments

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, y_0, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, Z, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, y_1, \dots, Z, \dots, S, \dots) \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, y_0, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_1, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_1, \dots, Z, \dots, S, \dots), \end{array} \right.$$

respectivement extraits de (26) et de (28), le deuxième et le troisième sommet se trouvent, à cause de la petitesse des modules de $y_1 - y_0, \dots, Z - z_3, \dots, S - s_3, \dots$, dans un domaine de convergence du développement correspondant au premier, et comme, d'après ce qui précède, ces deux fragments sont l'un et l'autre praticables, ils équivalent tous deux (n° 37, IV) au chemin direct

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, y_0, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_1, \dots, Z, \dots, S, \dots), \end{array} \right.$$

et, par suite, s'équivalent entre eux.

Il résulte de tout cela que le chemin (28) est, comme (26), praticable avec les rayons (21), et que, de plus, il équivaut à (26).

Dans le chemin (28), substituons maintenant au sixième sommet

$$(x_0, \dots, \gamma_1, \dots, Z, \dots, S, \dots)$$

le sommet

$$(x_0, \dots, \gamma_2, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots),$$

qui s'en déduit en remplaçant, dans le sixième sommet de (28), les valeurs γ_1, \dots par les valeurs γ_2, \dots , inscrites au-dessous, et les valeurs Z, \dots, S, \dots par les valeurs z_3, \dots, s_3, \dots , inscrites au-dessus : nous aurons ainsi, au lieu de (28), le chemin

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, \gamma_0, \dots, z_0, \dots, s_0, \dots), \\ (x_0, \dots, \gamma_0, \dots, z_1, \dots, s_1, \dots), \\ (x_0, \dots, \gamma_0, \dots, z_2, \dots, s_2, \dots), \\ (x_0, \dots, \gamma_0, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, \gamma_1, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, \gamma_2, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, \gamma_2, \dots, Z, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, \gamma_3, \dots, Z, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, Y, \dots, Z, \dots, S, \dots). \end{array} \right.$$

Je dis que le chemin (32) est, comme (28), praticable avec les rayons (21), et que, de plus, il équivaut à (28).

Effectivement, nous avons vu plus haut que le chemin (31) est praticable avec les rayons (21) : donc, dans le chemin (32), la portion, commune avec (31), que constituent les six premiers sommets, jouit de la même propriété : il en résulte, puisque les différences

$$Z - z_3, \dots, \quad S - s_3, \dots$$

ont des modules respectivement inférieurs à

$$R_2, \dots, \quad R_3, \dots,$$

qu'on pourra, une fois arrivé au sixième sommet de (32), opérer un cheminement direct du sixième au septième. Le développement obtenu en ce septième sommet est d'ailleurs le même que le développement obtenu au septième sommet de (28) : car, pour l'un quelconque des deux fragments

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, \gamma_1, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, \gamma_1, \dots, Z, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, \gamma_2, \dots, Z, \dots, S, \dots) \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, \gamma_1, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, \gamma_2, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, \gamma_2, \dots, Z, \dots, S, \dots), \end{array} \right.$$

respectivement extraits de (28) et de (32), le deuxième et le troisième sommet se trouvent, à cause de la petitesse des modules de $\gamma_2 - \gamma_1, \dots, Z - z_3, \dots, S - s_3, \dots$, intérieurs à un domaine de convergence du développement correspondant au premier, et comme, d'après ce qui précède, ces deux fragments sont l'un et l'autre praticables, ils équivalent tous deux au chemin direct

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, \gamma_1, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, \gamma_2, \dots, Z, \dots, S, \dots), \end{array} \right.$$

et, par suite, s'équivalent entre eux.

Il résulte de tout cela que le chemin (32) est, comme (28), praticable avec les rayons (21), et que, de plus, il équivaut à (28).

Dans le chemin (32), substituons maintenant au septième sommet

$$(x_0, \dots, \gamma_2, \dots, Z, \dots, S, \dots)$$

le sommet

$$(x_0, \dots, \gamma_3, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots)$$

qui s'en déduit en remplaçant, dans le septième sommet de (32), les valeurs γ_2, \dots par les valeurs γ_3, \dots , inscrites au-dessous, et les valeurs Z, \dots, S, \dots par les valeurs z_3, \dots, s_3, \dots , inscrites au-dessus : nous aurons ainsi, au lieu de (32), le chemin

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, \gamma_0, \dots, z_0, \dots, s_0, \dots), \\ (x_0, \dots, \gamma_0, \dots, z_1, \dots, s_1, \dots), \\ (x_0, \dots, \gamma_0, \dots, z_2, \dots, s_2, \dots), \\ (x_0, \dots, \gamma_0, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, \gamma_1, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, \gamma_2, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, \gamma_3, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, \gamma_3, \dots, Z, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, Y, \dots, Z, \dots, S, \dots), \end{array} \right.$$

et nous prouverons, en raisonnant comme nous l'avons déjà fait par deux fois, que ce nouveau chemin est, comme (32), praticable avec les rayons (21), et que, de plus, il équivaut à (32).

Finalement, dans le chemin (33), l'avant-dernier sommet peut être supprimé :

car, les différences

$$Y - y_3, \dots, \quad Z - z_3, \dots, \quad S - s_3, \dots$$

ayant des modules respectivement inférieurs à

$$R_y, \dots, \quad R_z, \dots, \quad R_s, \dots,$$

on voit que, pour le fragment (praticable)

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, y_3, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_3, \dots, Z, \dots, S, \dots), \\ (x_0, \dots, Y, \dots, Z, \dots, S, \dots), \end{array} \right.$$

le deuxième et le troisième sommet sont intérieurs à un domaine de convergence du développement correspondant au premier. En conséquence, le chemin

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, s_0, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_1, \dots, s_1, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_2, \dots, s_2, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_1, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_2, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_3, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, Y, \dots, Z, \dots, S, \dots). \end{array} \right.$$

est, comme (33), praticable avec les rayons (21), et, de plus, il équivaut à (33).

Or, en vertu du second des deux points provisoirement admis au début du présent alinéa, le chemin

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, s_0, \dots), \\ (x_0, \dots, y_1, \dots, z_1, \dots, s_1, \dots), \\ (x_0, \dots, y_2, \dots, z_2, \dots, s_2, \dots), \\ (x_0, \dots, y_3, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \end{array} \right.$$

formé par les $g (= 4)$ premiers sommets de (24), est praticable avec les rayons (21), et il équivaut à $h - h' + 1 (= 3)$ tronçons successifs, où les $h - h' + 1$ groupes

$$y, \dots, \quad z, \dots, \quad s, \dots,$$

considérés dans l'ordre inverse, sont tour à tour variables. D'autre part, en vertu du premier des deux points provisoirement admis au début du présent alinéa,

l'ensemble formé par les $h - h' (= 2)$ premiers tronçons équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, s_0, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_1, \dots, s_1, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_2, \dots, s_2, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots). \end{array} \right.$$

Il en résulte que le chemin (35) équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_0, \dots, y_0, \dots, z_0, \dots, s_0, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_1, \dots, s_1, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_2, \dots, s_2, \dots), \\ (x_0, \dots, y_0, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_1, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_2, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots), \\ (x_0, \dots, y_3, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots). \end{array} \right.$$

En d'autres termes, les deux chemins praticables (24) et (34), considérés jusqu'à leur avant-dernier sommet

$$(x_0, \dots, y_3, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots)$$

inclusivement, sont équivalents. Si donc, une fois parvenu à l'avant-dernier sommet de l'un et l'autre chemin, on effectue un dernier pas de

$$(x_0, \dots, y_3, \dots, z_3, \dots, s_3, \dots)$$

en

$$(x_0, \dots, Y, \dots, Z, \dots, S, \dots),$$

les développements finalement obtenus de part et d'autre ne peuvent manquer d'être identiques.

En conséquence, le chemin (24) équivaut au chemin (34), et, de proche en proche, aux chemins (33), (32), (28), (26) et (25).

IV. *Si notre conclusion s'applique à tout chemin C, d'écart maxima moindres que (21), où les variables des h' premiers groupes (19) conservent leurs valeurs fondamentales, elle s'applique forcément aussi à tout chemin C, d'écart maxima moindres que (21), où les variables des $h' - 1$ premiers groupes (19) conservent leurs valeurs fondamentales.*

C'est ce qui résulte du simple rapprochement des alinéas II et III.

V. Enfin, le simple rapprochement des alinéas I et IV suffit à établir l'exactitude générale de notre énoncé.

44. Nous aurons à utiliser plus loin la proposition suivante, qui offre la plus grande analogie avec celle que nous venons d'établir.

Considérons des indéterminées partagées en groupes,

$$(36) \quad s, \dots, t, \dots, u, \dots, v, \dots,$$

dont nous désignerons le nombre par h (nous avons supposé ici, pour fixer les idées, $h = 4$), et, dans les h espaces respectifs

$$[[s, \dots]], \quad [[t, \dots]], \quad [[u, \dots]], \quad [[v, \dots]],$$

des régions,

$$\mathfrak{R}_{s, \dots}, \quad \mathfrak{R}_{t, \dots}, \quad \mathfrak{R}_{u, \dots}, \quad \mathfrak{R}_{v, \dots},$$

que nous supposerons toutes *continues*, *limitées* et *complètes* : on sait que l'association de ces dernières fournit, dans l'espace

$$[[s, \dots, t, \dots, u, \dots, v, \dots]],$$

une région,

$$(37) \quad (\mathfrak{R}_{s, \dots}, \mathfrak{R}_{t, \dots}, \mathfrak{R}_{u, \dots}, \mathfrak{R}_{v, \dots}),$$

qui jouit elle-même de cette triple propriété.

Désignant ensuite par

$$x, \quad y, \quad \dots$$

des variables en même nombre que les indéterminées (36), considérons les formules

$$(38) \quad \begin{cases} x = \varphi(s, \dots, t, \dots, u, \dots, v, \dots), \\ y = \psi(s, \dots, t, \dots, u, \dots, v, \dots), \\ \dots \end{cases}$$

et supposons, en premier lieu, que, dans toute l'étendue de la région (37), les seconds membres des formules (38) soient *continus*; en second lieu, qu'à deux points *distincts* de la région (37) correspondent toujours, en vertu des formules (38), deux points *distincts* de l'espace $[[x, y, \dots]]$. De la continuité des seconds membres de (38) et de la triple hypothèse faite sur la région (37) il résulte que la région, $\mathfrak{R}_{x, y, \dots}$, définie à l'aide des indéterminées auxiliaires, $s, \dots, t, \dots, u, \dots, v, \dots$ par la considération simultanée des formules (38) et de la région (37), est, comme cette dernière, *continue*, *limitée* et *complète* (nos 25 et 21).

Considérons enfin une pseudo-fonction de x, y, \dots définie par un point fonda-

mental, (x_0, y_0, \dots) , situé dans $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$, et par un développement fondamental; et soit

$$(39) \quad (s_0, \dots, t_0, \dots, u_0, \dots, v_0, \dots)$$

le point de la région (37) qui correspond à (x_0, y_0, \dots) . A tout chemin brisé tracé dans la région (37) à partir du point (39) correspond, dans $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$, un chemin brisé tracé à partir du point fondamental (x_0, y_0, \dots) ; et, comme dans la pseudo-fonction proposée se trouvent engagées, non les indéterminées auxiliaires $s, \dots, t, \dots, u, \dots, v, \dots$, mais les variables x, y, \dots , c'est sur le second chemin, non sur le premier, qu'il y a lieu de se demander si son calcul par cheminement est possible. Nous conviendrons toutefois, pour simplifier le langage, de dire que la pseudo-fonction est calculable sur le premier chemin, situé dans la région (37) de l'espace

$$[[s, \dots, t, \dots, u, \dots, v, \dots]],$$

si elle l'est sur le second, qui, dans la région $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$, correspond au premier.

Cela étant, parmi les divers chemins brisés ayant leur premier sommet au point (39) et tous leurs sommets dans la région (37), considérons pour un instant, à l'exclusion de tous autres, ceux où l'on fait varier les h groupes d'indéterminées *séparément et successivement dans un ordre assigné d'avance*, par exemple dans l'ordre inverse de (36), et supposons que, pour un choix convenable des constantes positives

$$R_x, R_y, \dots,$$

il existe une autre constante positive, α , telle :

1° *Què non seulement les relations simultanées*

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mod}(s' - s'') < \alpha, \quad \dots, \\ \text{mod}(t' - t'') < \alpha, \quad \dots, \\ \text{mod}(u' - u'') < \alpha, \quad \dots, \\ \text{mod}(v' - v'') < \alpha, \quad \dots, \end{array} \right.$$

supposées vérifiées pour deux points quelconques de la région (37), entraînent comme conséquences nécessaires, pour les deux points correspondants de la région $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$, les relations

$$\text{mod}(x' - x'') < R_x, \quad \text{mod}(y' - y'') < R_y, \quad \dots \quad (1);$$

(1) Quels que soient R_x, R_y, \dots , il existe toujours quelque constante positive, α , satisfaisant à cette première condition : car la région (37) est limitée et complète, et les quantités x, y, \dots y sont fonctions continues de $s, \dots, t, \dots, u, \dots, v, \dots$

2° Mais encore que tous les chemins brisés de la région (37) présentant, avec des écarts maxima moindres que α , la structure spéciale ci-dessus décrite, soient (dans le sens indiqué plus haut) praticables pour la pseudo-fonction et conduisent à des développements successifs admettant les rayons de convergence R_x, R_y, \dots .

Toutes ces choses étant posées, notre pseudo-fonction est calculable par cheminement dans la région $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$ avec des rayons convenablement choisis; si, de plus, les divers chemins spécifiés par l'hypothèse 2° dans la région (37) conduisent, pour une même extrémité finale, au même développement final, notre pseudo-fonction est monodrome dans la région $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$.

I. Les hypothèses 1° et 2° étant posées, tout chemin brisé tracé dans la région (37) à partir du point (39), sous la seule condition de présenter des écarts maxima moindres que α , est, quelle que soit sa structure, praticable pour la pseudo-fonction, et conduit à des développements successifs admettant les rayons de convergence R_x, R_y, \dots ; il équivaut, de plus, au chemin brisé de même extrémité qui s'en déduit en attribuant à chacun des groupes d'indéterminées (36) les mêmes accroissements successifs dans le même ordre, mais de telle façon que la structure spéciale dont nous avons parlé se trouve réalisée.

Nous nous bornerons au simple énoncé de ce lemme, dont la démonstration est entièrement analogue à celle que nous avons exposée dans le numéro précédent.

II. Revenons maintenant à la proposition qu'il s'agit d'établir.

Les fonctions implicites, $s, \dots, t, \dots, u, \dots, v, \dots$, de x, y, \dots , que définissent les formules (38), étant, en vertu du n° 22, continues dans la région limitée et complète $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$, on peut assigner une constante positive, r , ne surpassant aucune des constantes R_x, R_y, \dots , et telle que les relations simultanées

$$\text{mod } (x' - x'') < r, \quad \text{mod } (y' - y'') < r, \quad \dots,$$

supposées vérifiées pour deux points quelconques de la région $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$, entraînent comme conséquences nécessaires, pour les deux points correspondants de la région (37), les relations (40).

Cette constante r étant choisie, il est clair que, si l'on trace dans la région $\mathfrak{U}_{x,y,\dots}$, à partir de (x_0, y_0, \dots) , un chemin brisé, C, sous la seule condition que ses écarts maxima soient inférieurs à r , le chemin brisé, A, qui lui correspond dans la région (37), a des écarts maxima moindres que α . Dès lors, si, au lieu du chemin brisé A, on considère le chemin brisé de même extrémité, A', qui s'en déduit en attribuant à chacun des groupes (36) les mêmes accroissements

successifs dans le même ordre, mais de telle façon que la structure spéciale dont nous avons parlé se trouve réalisée, il résulte de nos hypothèses et de l'alinéa I : 1° que le chemin A conduit, comme A', à des développements successifs admettant les rayons R_x, R_y, \dots , et, à plus forte raison, des rayons tous égaux à r ; 2° qu'il équivaut à A'. On en déduit immédiatement le double point à démontrer.

RAPPEL DE DIVERS RÉSULTATS ANTÉRIEUREMENT OBTENUS.

4§. Comme il a été dit dans l'Introduction, nous terminons le présent Mémoire par une application des principes précédents, relative au prolongement analytique des intégrales de certains systèmes différentiels. Cette question exige tout d'abord le rappel de quelques notions, exposées en détail dans divers Mémoires antérieurs.

Étant donné un système différentiel, résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, nous dirons qu'une dérivée de ces fonctions est *principale* relativement au système, lorsqu'elle coïncide, soit avec quelqu'un des premiers membres, soit avec quelqu'une de leurs dérivées ; dans le cas contraire, nous dirons qu'elle est *paramétrique*.

Si, dans le système en question, on considère un groupe d'intégrales hypothétiques, développables par la série de Taylor à partir de certaines valeurs initiales, x_0, y_0, \dots , des variables indépendantes x, y, \dots , la portion du développement de chaque inconnue formée par l'ensemble des termes qui, aux facteurs numériques connus près, ont pour coefficients les valeurs initiales de l'inconnue considérée et de ses dérivées paramétriques de tous ordres, se nommera la *détermination initiale* de l'inconnue. La détermination initiale sera qualifiée de *schématique*, si, sous la seule restriction d'admettre quelque système de rayons de convergence, elle a pour coefficient de tous ses termes des constantes arbitraires.

Enfin, nous nommerons *fonction schématique* de x, y, \dots une série entière en $x - x_0, y - y_0, \dots$, dans laquelle aucun terme ne manque, et dont tous les coefficients, sous cette même restriction de la convergence, sont arbitraires. Lorsque le nombre des variables dont dépend la fonction schématique se réduit à zéro, cette fonction se réduit à une simple constante arbitraire (ou *schématique*).

Cela posé, si l'on considère, dans le système différentiel donné, la détermination initiale schématique d'une inconnue quelconque, u , on peut, comme je l'ai établi ⁽¹⁾, en distribuer les termes élémentaires en un nombre limité de groupes

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 31 mai 1898. — *Sur le Calcul inverse des dérivées (Annales de la Faculté des Sciences de Marseille, t. X)*. — *Sur une question fondamentale du Calcul intégral, 1^{re} Partie (Acta Mathematica, t. XXIII)*.

dont chacun est le produit d'une fonction schématique de certaines des variables x, y, \dots par un certain monome entier en $x - x_0, y - y_0, \dots$. Un pareil groupement peut donc se représenter à l'aide d'une formule telle que

$$(41) \quad \sum_{n=1}^{n=g} (x - x_0)^{a_n} (y - y_0)^{b_n} \dots F_{\theta_n},$$

où a_n, b_n, \dots désignent des entiers positifs ou nuls, θ_n un groupe de variables indépendantes extrait du groupe total x, y, \dots , et F_{θ_n} une fonction schématique des seules variables θ_n .

La donnée de l'expression (41) équivaut d'ailleurs à la suivante, par laquelle nous conviendrons de la remplacer en toutes circonstances :

Désignant par ω_n le groupe de variables complémentaire du groupe θ_n ⁽¹⁾, et faisant successivement $n = 1, 2, \dots, g$, nous supposons donnée la fonction des variables θ_n à laquelle se réduit $\frac{\partial^{a_n+b_n+\dots} u}{\partial x^{a_n} \partial y^{b_n} \dots}$ par l'attribution aux variables ω_n de leurs valeurs initiales.

Pour se donner arbitrairement les déterminations initiales des intégrales hypothétiques de notre système, il suffit donc d'imposer à ces intégrales et à telles ou telles de leurs dérivées, en nombre essentiellement limité, la condition de se réduire respectivement, pour les valeurs initiales de tels ou tels groupes de variables, à des fonctions schématiques des groupes de variables restants. Ainsi se trouve fixé ce que l'on peut appeler l'économie des conditions initiales du système.

Si l'on considère, par exemple, un système différentiel impliquant deux fonctions inconnues, u, v , des trois variables x, y, z , et résolu par rapport aux quatre dérivées

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial y^3},$$

l'application de notre méthode donnera, pour les déterminations initiales schématiques de u, v , les expressions respectives

$$\begin{aligned} &F(y, z) + (x - x_0) H(x, z) + (x - x_0)(y - y_0) P(x, y), \\ &Q(z) + (y - y_0) A + (y - y_0)^2 B, \end{aligned}$$

où A, B désignent deux constantes schématiques, et $F(y, z), H(x, z), P(x, y), Q(z)$ quatre fonctions schématiques. On en déduit, pour l'économie des condi-

(1) C'est-à-dire tel que l'ensemble des deux groupes θ_n, ω_n reproduise une fois, et une seule, chacune des variables indépendantes x, y, \dots

tions initiales du système, les formules suivantes :

$$(42) \left\{ \begin{array}{l} u = \varphi(y, z) \quad \text{pour } x - x_0 = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda(x, z) \quad \text{pour } y - y_0 = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \mu(x, y) \quad \text{pour } z - z_0 = 0; \\ v = \psi(z) \quad \text{pour } x - x_0 = y - y_0 = 0, \\ \left. \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \beta \end{array} \right\} \quad \text{pour } x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0.$$

Pour se représenter commodément l'économie des conditions initiales, on peut procéder comme il suit : construire un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux diverses variables indépendantes x, y, \dots et les colonnes aux diverses quantités (fonctions inconnues et dérivées) qui figurent dans les premiers membres des conditions initiales; puis, dans l'une quelconque de ces colonnes, noircir à l'aide de hachures les cases des diverses variables dont ne dépend pas la fonction schématique qui figure dans le second membre de la condition correspondante; en répétant cette opération successivement pour toutes les colonnes, on obtient une sorte de damier où les cases blanches et noires peuvent offrir des dispositions relatives variées. Par exemple, à des conditions initiales de la forme (42) correspondra le damier ci-dessous (fig. 1) :

Fig. 1.

	u	$\frac{\partial u}{\partial x}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$	v	$\frac{\partial v}{\partial y}$	$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$
x						
y						
z						

46. A chacune des variables indépendantes et des fonctions inconnues engagées dans un système différentiel faisons correspondre p entiers (positifs, nuls ou négatifs), que nous nommerons respectivement *cote première, cote seconde, \dots*,

cote $p^{\text{ième}}$ de cette quantité, les entiers dont il s'agit étant assujettis à la seule restriction que la cote première de toute variable indépendante soit égale à 1 (1). Considérons ensuite une dérivée d'ordre quelconque r de l'une des fonctions inconnues, et nommons cote $q^{\text{ième}}$ ($q = 1, 2, \dots, p$) de la dérivée en question l'entier obtenu en ajoutant à la cote $q^{\text{ième}}$ de la fonction inconnue les cotes $q^{\text{ièmes}}$ des r variables de différentiation. Désignons enfin par δ , δ' deux quantités appartenant à l'ensemble illimité que forment les fonctions inconnues et leurs dérivées de tous ordres, par

$$\begin{array}{cccc} c_1, & c_2, & \dots, & c_p, \\ c'_1, & c'_2, & \dots, & c'_p \end{array}$$

les cotes respectives de ces deux quantités, et convenons de dire que δ' est *normale* ou *anormale* par rapport à δ , suivant que les différences

$$c_1 - c'_1, \quad c_2 - c'_2, \quad \dots, \quad c_p - c'_p$$

satisfont ou non à la double condition : 1° que ces différences ne soient pas toutes nulles; 2° que la première d'entré elles non égale à zéro soit positive.

Cela étant, le système différentiel considéré sera dit *orthonome*, s'il se trouve résolu par rapport à certaines dérivées des inconnues, s'il ne contient dans ses seconds membres aucune dérivée principale, et si l'on peut, conformément aux indications précédentes, choisir pour le nombre p et pour les cotes des variables et des inconnues des valeurs telles, que chaque second membre soit indépendant de toute quantité (inconnue ou dérivée) anormale vis-à-vis du premier membre correspondant.

Supposons actuellement que l'on ait affaire à un système différentiel *orthonome* : comme l'exige la définition des intégrales ordinaires (c'est-à-dire non singulières), nous ne considérerons ce système que dans les limites où ses seconds membres sont à la fois olotropes ou calculables par cheminement. Si aux équations qui le composent on adjoint toutes celles qui s'en déduisent par de simples différentiations (d'ordres quelconques), les premiers membres de l'ensemble illimité obtenu par cette adjonction sont (avec répétition possible, mais sans omission) les dérivées principales des inconnues; d'ailleurs, ainsi qu'il est facile de

(1) Dans le Mémoire, déjà cité, ayant pour titre : *Sur une question fondamentale du Calcul intégral* (*Acta Mathematica*, t. XXIII), j'ai, en formulant la définition des systèmes *orthonomes*, supposé égales à un même entier positif les cotes premières des diverses variables indépendantes : mais on ne restreint pas la généralité de cette définition en supposant que l'entier dont il s'agit a pour valeur l'unité. C'est ce que j'ai eu incidemment l'occasion d'établir dans un Mémoire plus récent, ayant pour titre : *Sur le degré de généralité d'un système différentiel quelconque* (*Acta Mathematica*, t. XXV).

l'établir ⁽¹⁾, cet ensemble illimité se partage en groupes limités,

$$(43) \quad G_1, G_2, G_3, \dots,$$

se succédant suivant une loi telle, que les seconds membres de chaque groupe ne contiennent (outre les variables indépendantes, les fonctions inconnues et leurs dérivées paramétriques) que des dérivées principales figurant dans les premiers membres des groupes antérieurs; le groupe G_1 , notamment, qui précède tous les autres, ne contient dans ses seconds membres aucune dérivée principale.

Cela étant, si, dans un système orthonome, les premiers membres appartiennent à des inconnues toutes différentes, chaque dérivée principale ne figure évidemment qu'une seule fois dans les premiers membres des groupes (43) : il résulte alors du point ci-dessus énoncé que ces groupes sont successivement résolubles par rapport aux dérivées principales, et cela quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux variables indépendantes, aux fonctions inconnues et à leurs dérivées paramétriques. Si, au contraire, le système orthonome contient deux équations au moins dont les premiers membres appartiennent à une même fonction inconnue, la même chose n'a pas nécessairement lieu, parce que la répétition de telle ou telle dérivée principale dans plusieurs premiers membres des groupes (43) entraîne, dans bien des cas, l'incompatibilité.

Un système orthonome étant donné, si, *quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux variables indépendantes, aux fonctions inconnues et à leurs dérivées paramétriques*, l'incompatibilité ne se manifeste dans aucun des groupes (43), et si, dès lors, la résolution successive de ces groupes est indéfiniment possible quelles que soient les valeurs dont il s'agit, le système orthonome sera dit *passif*. Un système orthonome est donc forcément passif dans le premier des deux cas ci-dessus spécifiés, mais il ne l'est pas forcément dans le second, et il semble même qu'alors on ne puisse, en général, exprimer la passivité qu'à l'aide d'un nombre infini de conditions devant subsister identiquement entre les variables, les inconnues, et les dérivées paramétriques : *ces identités*, toutefois, *résultent, à titre de conséquences nécessaires, d'un nombre essentiellement limité d'entre elles*; le lecteur trouvera dans un Mémoire antérieur la règle que nous avons formulée sur ce point ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Sur une question fondamentale du Calcul intégral.

⁽²⁾ Sur une question fondamentale du Calcul intégral. La règle dont il s'agit peut d'ailleurs être simplifiée dans bien des cas, ainsi que nous l'avons indiqué dans une Note communiquée à l'Académie des Sciences le 22 octobre 1906 : cette Note, forcément un peu brève, ne tardera pas à être complétée à l'aide d'un Mémoire détaillé que nous comptons publier prochainement dans les *Annales de l'École Normale*.

Un système orthonome étant supposé passif, la question de savoir si les intégrales ordinaires hypothétiques répondant à des déterminations initiales (convergentes) assignées d'avance existent, ou non, *effectivement*, revient à examiner si leurs développements, construits *a priori*, sont, ou non, tous convergents : or, ainsi que nous l'avons établi, cette convergence ne peut manquer de se produire. En conséquence, *si, dans un système orthonome passif, on se donne arbitrairement les déterminations initiales (convergentes) d'un groupe d'intégrales ordinaires hypothétiques*, les portions restantes des développements de ces dernières sont elles-mêmes convergentes, et *les intégrales dont il s'agit existent effectivement* (1).

En d'autres termes, *tout système orthonome passif est complètement intégrable.*

47. Tout système différentiel, dans lequel on peut satisfaire à notre définition de l'orthonomie (n° 46) en prenant $p = 1$, c'est-à-dire en attribuant *une seule cote* à chacune des variables indépendantes et des inconnues, sera dit *phanéronome* : la cote de chaque variable indépendante est, en pareil cas, forcément égale à 1, et chaque second membre du système ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues et dérivées) dont la cote tombe *au-dessous* de celle du premier membre correspondant.

Par exemple, l'équation différentielle

$$\frac{du}{dx} = f(x, u)$$

(considérée dans les limites où son second membre est olotrope ou calculable par cheminement) constitue un système phanéronome. Il en est de même de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

comme aussi de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = G\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Il en est encore de même des équations simultanées

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial y} &= \mathbf{H}\left(x, y, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \mathbf{K}\left(x, y, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right), \end{aligned}$$

(1) *Sur une question fondamentale du Calcul intégral.*

qui, moyennant l'attribution à x, y, u, v des cotes respectives 1,1, 0,1, remplissent les conditions indiquées ci-dessus.

48. Considérons actuellement un système différentiel possédant la triple propriété d'être :

- 1° *Phanéronome* ;
- 2° *Passif* ;
- 3° *Linéaire par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées* ;

et nommons, comme d'habitude, *coefficients* du système les fonctions des seules variables indépendantes qui figurent dans les seconds membres, soit comme multiplicateurs des inconnues ou de leurs dérivées, soit comme termes indépendants de ces quantités.

Un pareil système, S, étant donné, construisons, conformément aux indications du n° 43, le damier des conditions initiales; puis, partageons les variables indépendantes en groupes, suivant que, dans le damier ainsi construit, leurs lignes offrent ou n'offrent pas la même disposition de cases blanches et noires, c'est-à-dire mettons dans un même groupe les variables dont les lignes offrent la même disposition, dans des groupes différents les variables dont les lignes offrent des dispositions différentes. En supposant, pour fixer les idées, qu'il y ait cinq variables indépendantes, x, y, z, s, t , et sept fonctions arbitraires dépendant respectivement des variables

$t; \quad x, t; \quad z, s, t; \quad x, z, s, t; \quad y, t; \quad x, y, t; \quad y, z, s, t,$

la considération d'un pareil damier (*fig. 2*) nous conduira à partager les variables

Fig. 2.

x							
y							
z							
s							
t							

en quatre groupes comprenant, le premier la variable x , le deuxième la variable y , le troisième les variables z et s , le quatrième la variable t .

Considérons maintenant, dans le système S, un groupe d'intégrales répondant à des conditions initiales déterminées, et regardons désormais comme fondamentales les valeurs initiales x_0, y_0, z_0, s_0, t_0 , choisies pour les variables indépendantes; considérons ensuite, dans les espaces

$$[[x]], [[y]], [[z, s]], [[t]],$$

des régions

$$\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_{z,s}, \mathfrak{R}_t,$$

comprenant respectivement les points

$$x_0, y_0, (z_0, s_0), t_0.$$

Cela posé, si, d'une part, les coefficients du système S sont tous calculables par cheminement dans la région

$$(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_{z,s}, \mathfrak{R}_t)$$

avec les rayons R_x, R_y, R_z, R_s, R_t , si, d'autre part, on a choisi, pour les sept arbitraires qui figurent dans les conditions initiales, des fonctions respectivement calculables, avec ces mêmes rayons, dans les régions

$$\mathfrak{R}_t, (\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_t), (\mathfrak{R}_{z,s}, \mathfrak{R}_t), (\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_{z,s}, \mathfrak{R}_t),$$

$$(\mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_t), (\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_t), (\mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_{z,s}, \mathfrak{R}_t),$$

les intégrales correspondantes ne peuvent manquer d'être calculables, avec les rayons dont il s'agit, dans la région

$$(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_{z,s}, \mathfrak{R}_t).$$

La démonstration de ce résultat a été longuement exposée ailleurs ⁽¹⁾, et nous n'avons pas à y revenir; mais il était nécessaire d'en rappeler les conclusions, en vue du cas que nous allons actuellement aborder. Dans le cas dont il s'agit, l'application de quelques-uns des principes généraux qui font l'objet du présent Mémoire nous permettra, comme on va le voir, de formuler des conclusions un peu plus complètes.

(1) Sur le calcul par cheminement des intégrales de certains systèmes différentiels (Annales de l'École Normale, 1903).

SUR LE CALCUL PAR CHEMINEMENT DES INTÉGRALES
DE CERTAINS SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS.

49. Un système différentiel, résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, sera dit *régulier*, si les variables indépendantes peuvent être rangées dans un ordre tel, que, dans le damier des conditions initiales, *les cases blanches de chaque colonne se trouvent toutes situées au bas de cette colonne.*

Il est clair que, lorsqu'on parcourt de bas en haut les lignes successives d'un pareil damier, le nombre des cases blanches ne va jamais en augmentant; on peut d'ailleurs, l'ordre des lignes étant ainsi fixé, adopter pour les colonnes un ordre tel, qu'en parcourant de droite à gauche ces colonnes successives, le nombre des cases blanches n'aille pas non plus en augmentant : nous supposons, dans ce qui suit, cette double disposition réalisée.

Cela posé, considérons un système phanéronome, passif et linéaire (n° 48), qui soit en même temps régulier, et supposons, pour fixer les idées, que le damier des conditions initiales y offre la disposition suivante (*fig. 3*) :

Fig. 3.

x				
y				
z				
s				
t				

On voit que les diverses cases blanches situées au bas de chaque colonne sont, suivant la colonne considérée, en nombre 1, 2 ou 4 : d'après cela, les conditions initiales se partageront naturellement en trois groupes, suivant que les arbitraires qui y figurent dépendent de variables en nombre 1, 2 ou 4; et, en désignant par x_0, y_0, z_0, s_0, t_0 les valeurs initiales de x, y, z, s, t , ces groupes seront de la

forme

$$\begin{aligned} \Gamma = \gamma_0(t) & \quad \text{pour} \quad x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = s - s_0 = 0, \\ \Delta = \delta_0(s, t) \} & \quad \text{pour} \quad x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0, \\ \Theta = \theta_0(s, t) \} & \\ \Phi = \varphi_0(y, z, s, t) & \quad \text{pour} \quad x - x_0 = 0 : \end{aligned}$$

dans ces formules, l'ensemble des quatre quantités $\Gamma, \Delta, \Theta, \Phi$ comprend toutes les inconnues du système proposé avec quelques-unes de leurs dérivées.

Cela étant, distribuons les variables indépendantes x, y, z, s, t en groupes successifs,

$$(44) \quad x; \quad y, z; \quad s; \quad t,$$

d'après les nombres croissants de cases blanches situées dans les lignes correspondantes; puis, désignant par $\xi, \eta, \zeta, \sigma, \tau$ cinq nouvelles indéterminées, que nous partagerons semblablement en quatre groupes successifs,

$$(45) \quad \xi; \quad \eta, \zeta; \quad \sigma; \quad \tau,$$

écrivons les quatre groupes successifs de formules

$$(46) \quad x = f_1(\xi, \eta, \zeta, \sigma, \tau);$$

$$(47) \quad \begin{cases} y = f_2(\eta, \zeta, \sigma, \tau), \\ z = f_3(\eta, \zeta, \sigma, \tau); \end{cases}$$

$$(48) \quad s = f_4(\sigma, \tau);$$

$$(49) \quad t = f_5(\tau),$$

dont la structure se déduit de la considération des groupes (44) et (45) suivant la loi très simple que nous allons dire : si l'on considère tous ces groupes de formules simultanément, leurs premiers membres contiennent les divers groupes de variables (44), et leurs seconds membres les divers groupes de variables (45); si l'on fait abstraction du premier groupe de formules, c'est-à-dire de (46), les premiers membres des formules restantes ne contiennent plus le premier des groupes (44), ni leurs seconds membres le premier des groupes (45); si l'on fait abstraction des deux premiers groupes de formules, c'est-à-dire de (46) et de (47), les premiers membres des formules restantes ne contiennent plus les deux premiers des groupes (44), ni leurs seconds membres les deux premiers des groupes (45); et ainsi de suite.

Des espaces respectifs

$$[[\xi]], \quad [[\eta, \zeta]], \quad [[\sigma]], \quad [[\tau]]$$

extrayons alors les régions

$$(50) \quad \mathfrak{U}_\xi, \mathfrak{U}_{\eta,\zeta}, \mathfrak{U}_\sigma, \mathfrak{U}_\tau,$$

toutes *continues, limitées et complètes*; puis, *assujettissant désormais les groupes de variables (45) à se mouvoir respectivement dans les régions (50)*, supposons : 1° que les seconds membres des groupes de formules (46), (47), (48), (49) soient tous *continus*; 2° qu'à deux points *distincts* de la région

$$(51) \quad (\mathfrak{U}_\xi, \mathfrak{U}_{\eta,\zeta}, \mathfrak{U}_\sigma, \mathfrak{U}_\tau)$$

correspondent toujours, en vertu des formules (46), (47), (48), (49), deux points *distincts* de l'espace $[[x, y, z, s, t]]$.

Nous désignerons, dans ce qui suit, par $\mathfrak{U}_{x,y,z,s,t}$ la région de ce dernier espace constituée par l'ensemble des points qui, en vertu des formules (46), (47), (48), (49), correspondent (sans répétition) aux divers points de la région (51). Nous désignerons en outre par $\mathfrak{U}_{y,z,s,t}$ la région de l'espace $[[y, z, s, t]]$ constituée par l'ensemble des divers points qui, en vertu des formules (47), (48), (49), correspondent (avec répétition possible) aux divers points de la région

$$(\mathfrak{U}_{\eta,\zeta}, \mathfrak{U}_\sigma, \mathfrak{U}_\tau);$$

puis par $\mathfrak{U}_{s,t}$ la région de l'espace $[[s, t]]$ constituée par l'ensemble des divers points qui, en vertu des formules (48), (49), correspondent (avec répétition possible) aux divers points de la région

$$(\mathfrak{U}_\sigma, \mathfrak{U}_\tau);$$

et, en dernier lieu, par \mathfrak{U}_t la région de l'espace $[[t]]$ constituée par l'ensemble des divers points qui, en vertu de (49), correspondent (avec répétition possible) aux divers points de la région \mathfrak{U}_τ .

Désignant enfin, comme il a été dit, par

$$x_0, y_0, z_0, s_0, t_0$$

les valeurs initiales de x, y, z, s, t , que nous considérerons désormais comme fondamentales, nous supposerons qu'il existe pour $\xi, \eta, \zeta, \sigma, \tau$, dans la région (51), un système de valeurs numériques,

$$\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \sigma_0, \tau_0,$$

telles :

- 1° Que le second membre de (49) se réduise à t_0 pour $\tau - \tau_0 = 0$;

où les variables x, y, \dots du premier groupe conservent pour tous les sommets les valeurs fixes x_0, y_0, \dots , et si, après l'avoir ainsi calculée, on introduit dans le développement résultant l'hypothèse numérique

$$(52) \quad x - x_0 = y - y_0 = \dots = 0,$$

on peut, sans changer le résultat final, procéder dans l'ordre inverse, c'est-à-dire introduire d'abord dans le développement initial l'hypothèse numérique (52), et calculer ensuite la fonction ainsi obtenue suivant le chemin brisé

$$\left(\begin{array}{l} (z_0, s_0, \dots), \\ (z_1, s_1, \dots), \\ (z_2, s_2, \dots), \\ \dots\dots\dots, \\ (z_g, s_g, \dots), \\ (Z, S, \dots). \end{array} \right.$$

II. Revenant à notre énoncé général, désignons par

$$(53) \quad R_x, R_y, R_z, R_s, R_t$$

des quantités positives assez petites pour que les diverses fonctions spécifiées par cet énoncé soient calculables avec les rayons (53) dans les régions qui leur sont respectivement assignées; puis par α une constante positive assez petite pour que les relations simultanées

$$\begin{aligned} \text{mod}(\xi' - \xi'') &< \alpha, \\ \text{mod}(\eta' - \eta'') &< \alpha, \\ \text{mod}(\zeta' - \zeta'') &< \alpha, \\ \text{mod}(\sigma' - \sigma'') &< \alpha, \\ \text{mod}(\tau' - \tau'') &< \alpha, \end{aligned}$$

supposées vérifiées pour deux points quelconques de la région (51), entraînent comme conséquences nécessaires, pour les deux points correspondants de la région transformée, c'est-à-dire de $\mathfrak{U}_{x,y,z,s,t}$, les relations

$$\begin{aligned} \text{mod}(x' - x'') &< R_x, \\ \text{mod}(y' - y'') &< R_y, \\ \text{mod}(z' - z'') &< R_z, \\ \text{mod}(s' - s'') &< R_s, \\ \text{mod}(t' - t'') &< R_t : \end{aligned}$$

une pareille constante α existe nécessairement, puisque la région (51) est limitée et complète, et que les seconds membres des formules de transformation (46), (47), (48), (49) y sont continus.

Considérons maintenant le point

$$(54) \qquad (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \sigma_0, \tau_0),$$

qui, dans la région (51), correspond à

$$(x_0, y_0, z_0, s_0, t_0),$$

et construisons, dans cette même région (51), un chemin brisé ayant son premier sommet au point (54), et présentant, avec des écarts maxima moindres que α , la structure spéciale décrite au n° 44, c'est-à-dire tel que les groupes de variables (45) y varient séparément et successivement dans l'ordre inverse de celui où nous les avons écrits. En vertu d'une proposition antérieure (n° 44), il suffit, pour établir celle que nous avons actuellement en vue, de faire voir qu'un pareil chemin est (dans le sens indiqué au n° 44) praticable pour les fonctions

$$(55) \qquad \Gamma, \Delta, \Theta, \Phi,$$

qui figurent dans les premiers membres des conditions initiales données, et qu'il conduit, pour chacune d'elles, à des développements successifs admettant les rayons de convergence (53).

Traçons donc, dans les régions respectives

$$\mathfrak{H}_\xi, \mathfrak{H}_{\eta,\zeta}, \mathfrak{H}_\sigma, \mathfrak{H}_\tau,$$

des chemins brisés

$\xi_0,$	$\xi_1,$	$\xi_2,$	$\dots,$	$\xi_g,$	$\Xi,$
$(\eta_0, \zeta_0),$	$(\eta_1, \zeta_1),$	$(\eta_2, \zeta_2),$	$\dots,$	$(\eta_i, \zeta_i),$	$(H, Z),$
$\sigma_0,$	$\sigma_1,$	$\sigma_2,$	$\dots,$	$\sigma_k,$	$\Sigma,$
$\tau_0,$	$\tau_1,$	$\tau_2,$	$\dots,$	$\tau_l,$	$T,$

sous la seule restriction que leurs écarts maxima soient moindres que α ; puis, considérons, dans la région (51), les quatre chemins brisés successifs

$$(56) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \sigma_0, \tau_0), \\ (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \sigma_0, \tau_1), \\ \dots \dots \dots, \\ (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \sigma_0, \tau_l), \\ (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \sigma_0, T); \end{array} \right.$$

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \sigma, \mathbf{T}), \\ (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \sigma_1, \mathbf{T}), \\ \dots\dots\dots, \\ (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \sigma_k, \mathbf{T}), \\ (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \Sigma, \mathbf{T}); \end{array} \right.$$

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \Sigma, \mathbf{T}), \\ (\xi_0, \eta_1, \zeta_1, \Sigma, \mathbf{T}), \\ \dots\dots\dots, \\ (\xi_0, \eta_i, \zeta_i, \Sigma, \mathbf{T}), \\ (\xi_0, \mathbf{H}, \mathbf{Z}, \Sigma, \mathbf{T}); \end{array} \right.$$

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\xi_0, \mathbf{H}, \mathbf{Z}, \Sigma, \mathbf{T}), \\ (\xi_1, \mathbf{H}, \mathbf{Z}, \Sigma, \mathbf{T}), \\ \dots\dots\dots, \\ (\xi_g, \mathbf{H}, \mathbf{Z}, \Sigma, \mathbf{T}), \\ (\Xi, \mathbf{H}, \mathbf{Z}, \Sigma, \mathbf{T}). \end{array} \right.$$

Il s'agit de prouver que ces quatre chemins sont (dans le sens indiqué au n° 44) successivement praticables pour les fonctions (55) avec les rayons (53).

III. Considérons, en même temps que le Tableau (56), ceux qui s'en déduisent par la suppression de la première colonne, puis des trois premières, puis des quatre premières; nous aurons ainsi, dans les espaces respectifs

$$(60) \quad [[\xi, \eta, \zeta, \sigma, \tau]], \quad [[\eta, \zeta, \sigma, \tau]], \quad [[\sigma, \tau]], \quad [[\tau]],$$

les quatre chemins

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \sigma_0, \tau_0), \\ (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \sigma_0, \tau_1), \\ \dots\dots\dots, \\ (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \sigma_0, \tau_l), \\ (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \sigma_0, \mathbf{T}), \end{array} \right. \quad (61) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\eta_0, \zeta_0, \sigma_0, \tau_0), \\ (\eta_0, \zeta_0, \sigma_0, \tau_1), \\ \dots\dots\dots, \\ (\eta_0, \zeta_0, \sigma_0, \tau_l), \\ (\eta_0, \zeta_0, \sigma_0, \mathbf{T}), \end{array} \right. \quad (62) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\sigma_0, \tau_0), \\ (\sigma_0, \tau_1), \\ \dots\dots\dots, \\ (\sigma_0, \tau_l), \\ (\sigma_0, \mathbf{T}), \end{array} \right. \quad (63) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_0, \\ \tau_1, \\ \dots, \\ \tau_l, \\ \mathbf{T}, \end{array} \right.$$

dont les sommets font respectivement partie des quatre régions

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \sigma_0, \mathbf{H}_\tau), \\ (\eta_0, \zeta_0, \sigma_0, \mathbf{H}_\tau), \\ (\sigma_0, \mathbf{H}_\tau), \\ \mathbf{H}_\tau. \end{array} \right.$$

Ces dernières, si on les transforme à l'aide des formules (46), (47), (48), (49), nous donnent, dans les espaces respectifs

$$(65) \quad [[x, y, z, s, t]], \quad [[y, z, s, t]], \quad [[s, t]], \quad [[t]],$$

quatre régions continues faisant respectivement partie de

$$(66) \quad \mathfrak{R}_{x,y,z,s,t}, \quad \mathfrak{R}_{y,z,s,t}, \quad \mathfrak{R}_{s,t}, \quad \mathfrak{R}_t.$$

D'ailleurs, puisque, dans l'ensemble des régions (64), les indéterminées ξ, η, ζ, σ conservent les valeurs fixes $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \sigma_0$, il résulte des hypothèses faites sur les seconds membres de (46), (47), (48) que, dans l'ensemble des régions transformées, les indéterminées x, y, z, s conservent les valeurs fixes x_0, y_0, z_0, s_0 . La première de ces régions transformées se trouvera donc constituée par l'association du point fixe (x_0, y_0, z_0, s_0) de l'espace $[[x, y, z, s]]$, et d'une certaine région de l'espace $[[t]]$, ou, ce qui revient au même, par l'association du point fixe (x_0) de l'espace $[[x]]$, du point fixe (y_0, z_0) de l'espace $[[y, z]]$, du point fixe (s_0) de l'espace $[[s]]$, et d'une certaine région de l'espace $[[t]]$. Et les trois autres régions transformées se déduiront de la première en y faisant respectivement abstraction de la coordonnée x , des trois coordonnées x, y, z , et des quatre coordonnées x, y, z, s .

Si l'on observe maintenant qu'à partir des valeurs initiales x_0, y_0, z_0, s_0, t_0 , les coefficients du système proposé et les seconds membres des conditions initiales sont calculables avec les rayons (53) dans les régions respectives (66), et, par suite, dans les régions respectivement transformées de (64), il résulte du n° 48 que les fonctions (55) possèdent la même propriété dans la première de ces régions transformées; elles sont, notamment (dans le sens indiqué au n° 44), calculables avec les rayons (53) suivant le chemin (56). Et si, ce cheminement une fois effectué, *on considère comme initial le dernier sommet du chemin* (56) [qui n'est autre que le premier sommet du chemin (57)], les seconds membres des conditions initiales correspondant à ce dernier sommet s'obtiendront, en vertu de l'alinéa I, en effectuant, sur les seconds membres des conditions initiales primitivement données, les cheminements respectifs (63), (62) et (61) : de ce dernier point il convient de retenir, notamment, ce qui concerne les nouvelles conditions initiales relatives à Δ, Θ et à Φ .

On voit donc qu'avec le nouveau choix de valeurs initiales indiqué il y a un instant pour x, y, z, s, t , non seulement les coefficients du système proposé restent calculables dans la région $\mathfrak{R}_{x,y,z,s,t}$ avec les rayons (53); mais encore que le second membre de la nouvelle condition initiale relative à Γ admet, au

départ, le rayon R_t ; que les seconds membres des nouvelles conditions initiales relatives à Δ et Θ sont calculables dans la région $\mathfrak{H}_{s,t}$ avec les rayons R_s, R_t ; enfin, que le second membre de la nouvelle condition initiale relative à Φ est calculable dans la région $\mathfrak{H}_{\gamma, z, s, t}$ avec les rayons R_γ, R_z, R_s, R_t .

IV. Considérons maintenant, en même temps que le Tableau (57), ceux qui s'en déduisent par la suppression de la première colonne, puis des trois premières, puis des quatre premières; nous aurons ainsi, dans les espaces respectifs (60), les quatre chemins

$$(57) \left\{ \begin{array}{l} (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \sigma_0, \mathbf{T}), \\ (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \sigma_1, \mathbf{T}), \\ \dots\dots\dots, \\ (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \sigma_k, \mathbf{T}), \\ (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \Sigma, \mathbf{T}), \end{array} \right. \quad (67) \left\{ \begin{array}{l} (\eta_0, \zeta_0, \sigma_0, \mathbf{T}), \\ (\eta_0, \zeta_0, \sigma_1, \mathbf{T}), \\ \dots\dots\dots, \\ (\eta_0, \zeta_0, \sigma_k, \mathbf{T}), \\ (\eta_0, \zeta_0, \Sigma, \mathbf{T}), \end{array} \right. \quad (68) \left\{ \begin{array}{l} (\sigma_0, \mathbf{T}), \\ (\sigma_1, \mathbf{T}), \\ \dots\dots\dots, \\ (\sigma_k, \mathbf{T}), \\ (\Sigma, \mathbf{T}), \end{array} \right. \quad (69) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}, \\ \mathbf{T}, \\ \dots, \\ \mathbf{T}, \\ \mathbf{T}, \end{array} \right.$$

dont les sommets font respectivement partie des quatre régions

$$(70) \left\{ \begin{array}{l} (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \mathfrak{H}_\sigma, \mathbf{T}), \\ (\eta_0, \zeta_0, \mathfrak{H}_\sigma, \mathbf{T}), \\ (\mathfrak{H}_\sigma, \mathbf{T}), \\ \mathbf{T}. \end{array} \right.$$

Ces dernières, si on les transforme à l'aide des formules (46), (47), (48), (49), nous donnent, dans les espaces respectifs (65), quatre régions continues faisant respectivement partie des quatre régions (66). D'ailleurs, puisque, dans l'ensemble des régions (70), les indéterminées ξ, η, ζ conservent les valeurs fixes ξ_0, η_0, ζ_0 , il résulte des hypothèses faites sur les seconds membres de (46), (47) que, dans l'ensemble des régions transformées, les indéterminées x, y, z conservent les valeurs fixes x_0, y_0, z_0 ; quant à l'indéterminée t , elle y conserve évidemment la valeur fixe que donne la formule (49) pour $\tau = \mathbf{T}$. La première de ces régions transformées se trouve donc constituée par l'association du point fixe (x_0) de l'espace $[[x]]$, du point fixe (y_0, z_0) de l'espace $[[y, z]]$, d'un certain point fixe de l'espace $[[t]]$, et d'une certaine région de l'espace $[[s]]$. Et les trois autres régions transformées se déduisent de la première en y faisant respectivement abstraction de la coordonnée x , des trois coordonnées x, y, z , et des quatre coordonnées x, y, z, s .

Si l'on se reporte maintenant à ce que nous avons dit à la fin de l'alinéa III sur les conditions initiales relatives au premier sommet de (57), on voit que les coefficients du système proposé et les seconds membres de ces conditions initiales

sont calculables avec les rayons (53) dans les régions respectivement transformées de (70) (chacun d'eux dans celle de ces régions transformées qui se trouve naturellement indiquée par le groupe de variables dont il dépend); il résulte alors du n° 48 que les quatre fonctions (55) possèdent la même propriété dans la première de ces régions transformées, et qu'elles sont, notamment (dans le sens indiqué au n° 44), calculables avec les rayons (53) suivant le chemin (57). Et si, ce cheminement une fois effectué, on considère comme initial le dernier sommet du chemin (57) [qui n'est autre que le premier sommet du chemin (58)], les seconds membres des conditions initiales, relatives à Δ , Θ et à Φ , qui correspondent à ce dernier sommet, s'obtiendront, d'après l'alinéa I, en effectuant sur les seconds membres des conditions initiales homologues, qui correspondent au premier sommet de (57), les cheminements respectifs (68) et (67) : de ce dernier point il convient de retenir, notamment, ce qui concerne la nouvelle condition relative à Φ .

On voit donc qu'avec le nouveau choix de valeurs initiales indiqué il y a un instant pour x, y, z, s, t , non seulement les coefficients du système proposé restent calculables dans la région $\mathfrak{U}_{x,y,z,s,t}$ avec les rayons (53); mais encore que le second membre de la nouvelle condition initiale relative à Γ admet, au départ, le rayon R_t ; que les seconds membres des nouvelles conditions initiales relatives à Δ, Θ admettent, au départ, les rayons R_s, R_t ; enfin, que le second membre de la nouvelle condition initiale relative à Φ est calculable dans la région $\mathfrak{U}_{y,z,s,t}$ avec les rayons R_y, R_z, R_s, R_t .

V. Considérons à présent, en même temps que le Tableau (58), ceux qui s'en déduisent par la suppression de la première colonne, puis des trois premières, puis des quatre premières; nous aurons ainsi, dans les espaces respectifs (60), les quatre chemins

$$(58) \left\{ \begin{array}{l} (\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \Sigma, T), \\ (\xi_0, \eta_1, \zeta_1, \Sigma, T), \\ \dots\dots\dots, \\ (\xi_0, \eta_i, \zeta_i, \Sigma, T), \\ (\xi_0, H, Z, \Sigma, T), \end{array} \right. \quad (71) \left\{ \begin{array}{l} (\eta_0, \zeta_0, \Sigma, T), \\ (\eta_1, \zeta_1, \Sigma, T), \\ \dots\dots\dots, \\ (\eta_i, \zeta_i, \Sigma, T), \\ (H, Z, \Sigma, T), \end{array} \right. \quad (72) \left\{ \begin{array}{l} (\Sigma, T), \\ (\Sigma, T), \\ \dots\dots, \\ (\Sigma, T), \\ (\Sigma, T), \end{array} \right. \quad (73) \left\{ \begin{array}{l} T, \\ T, \\ \dots, \\ T, \\ T, \end{array} \right.$$

dont les sommets font respectivement partie des quatre régions

$$(74) \left\{ \begin{array}{l} (\xi_0, \mathfrak{U}_{\eta,\zeta}, \Sigma, T), \\ (\mathfrak{U}_{\eta,\zeta}, \Sigma, T), \\ (\Sigma, T), \\ T. \end{array} \right.$$

Ces dernières, si on les transforme à l'aide des formules (46), (47), (48), (49), nous donnent, dans les espaces respectifs (65), quatre régions continues faisant respectivement partie des quatre régions (66). D'ailleurs, puisque, dans l'ensemble des régions (74), l'indéterminée ξ conserve la valeur fixe ξ_0 , il résulte des hypothèses faites sur le second membre de (46) que, dans l'ensemble des régions transformées, l'indéterminée x conserve la valeur fixe x_0 ; quant aux indéterminées s, t , elles y conservent évidemment les valeurs fixes que donnent les formules (48), (49) pour $\sigma = \Sigma, \tau = T$. La première de ces régions transformées se trouve donc constituée par l'association du point fixe (x_0) de l'espace $[[x]]$, d'un certain point fixe de l'espace $[[s]]$, d'un certain point fixe de l'espace $[[t]]$, et d'une certaine région de l'espace $[[\gamma, z]]$. Et les trois autres régions transformées se déduisent de la première en y faisant abstraction de la coordonnée x , des trois coordonnées x, γ, z , et des quatre coordonnées x, γ, z, s .

Si l'on se reporte maintenant à ce que nous avons dit à la fin de l'alinéa IV sur les conditions initiales relatives au premier sommet de (58), on voit que les coefficients du système proposé et les seconds membres de ces conditions initiales sont calculables avec les rayons (53) dans les régions respectivement transformées de (74); il résulte alors du n° 48 que les quatre fonctions (55) possèdent la même propriété dans la première de ces régions transformées, et qu'elles sont, notamment (dans le sens indiqué au n° 44), calculables avec les rayons (53) suivant le chemin (58). Et si, ce cheminement une fois effectué, on considère comme initial le dernier sommet du chemin (58) [qui n'est autre que le premier sommet du chemin (59)], on voit qu'avec le nouveau choix de valeurs initiales qui en résulte pour x, γ, z, s, t , non seulement les coefficients du système proposé restent calculables dans la région $\mathfrak{A}_{x, \gamma, z, s, t}$ avec les rayons (53), mais encore que les seconds membres des nouvelles conditions initiales admettent, au départ, ces mêmes rayons.

VI. Considérons enfin, en même temps que le Tableau (59), ceux qui s'en déduisent par la suppression de la première colonne, puis des trois premières, puis des quatre premières; nous aurons ainsi, dans les espaces respectifs (60), les quatre chemins

$$\left\{ \begin{array}{l} (\xi_0, H, Z, \Sigma, T), \\ (\xi_1, H, Z, \Sigma, T), \\ \dots\dots\dots \\ (\xi_g, H, Z, \Sigma, T), \\ (\Xi, H, Z, \Sigma, T), \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (H, Z, \Sigma, T), \\ (H, Z, \Sigma, T), \\ \dots\dots\dots \\ (H, Z, \Sigma, T), \\ (H, Z, \Sigma, T), \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (\Sigma, T), \\ (\Sigma, T), \\ \dots\dots\dots \\ (\Sigma, T), \\ (\Sigma, T), \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} T, \\ T, \\ \dots\dots\dots \\ T, \\ T, \end{array} \right.$$

dont les sommets font respectivement partie des quatre régions

$$(75) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathfrak{A}_z, H, Z, \Sigma, T), \\ (H, Z, \Sigma, T), \\ (\Sigma, T), \\ T. \end{array} \right.$$

Ces dernières, si on les transforme à l'aide des formules (46), (47), (48), (49), nous donnent, dans les espaces respectifs (65), quatre régions continues faisant respectivement partie des quatre régions (66). La première de ces régions transformées se trouve constituée par l'association d'un certain point fixe de l'espace $[[\gamma, z]]$, d'un certain point fixe de l'espace $[[s]]$, d'un certain point fixe de l'espace $[[t]]$, et d'une certaine région de l'espace $[[x]]$. Et les trois autres régions transformées se déduisent de la première en y faisant respectivement abstraction de la coordonnée x , des trois coordonnées x, γ, z , et des quatre coordonnées x, γ, z, s .

Si l'on se reporte maintenant à ce que nous avons dit à la fin de l'alinéa V sur les conditions initiales relatives au premier sommet de (59), on voit que les coefficients du système proposé et les seconds membres de ces conditions initiales sont calculables avec les rayons (53) dans les régions respectivement transformées de (75); il résulte alors du n° 48 que les quatre fonctions (55) possèdent la même propriété dans la première de ces régions transformées, et qu'elles sont, notamment (dans le sens indiqué au n° 44), calculables avec les rayons (53) suivant le chemin (59).

Ainsi se trouve achevée notre démonstration.

50. Dans le cas où le système phanéronome, passif et linéaire que l'on se propose d'étudier est en même temps régulier, la règle exposée au numéro précédent présente souvent un avantage marqué sur celle du n° 48. Il est facile de s'en rendre compte par l'exemple suivant, un des plus simples que l'on puisse imaginer.

Considérons le système d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A_1 u + B_1 v + C_1 w + D_1,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = A_2 u + B_2 v + C_2 w + D_2,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = A_3 u + B_3 v + C_3 w + D_3,$$

où u, v, w désignent trois fonctions inconnues des deux variables indépendantes réelles x et y , et les lettres A, B, C, D, affectées des indices 1, 2, 3, douze fonctions connues de ces mêmes variables. Représentons les variables dont il s'agit par les deux coordonnées rectangulaires d'un point situé dans un plan; puis traçons un rectangle parallèle aux axes OX, OY, qui contienne dans son intérieur le point fondamental (x_0, y_0) , et désignons par α et β ($\alpha < \beta$) les deux valeurs extrêmes de la variable y sur les côtés parallèles à OY. Cela étant, la règle du n° 48 permet d'affirmer que si, d'une part, les douze coefficients de notre système sont, à partir de (x_0, y_0) , calculables par cheminement à l'intérieur du rectangle, et que si, d'autre part, les déterminations initiales des trois inconnues sont, à partir de y_0 , calculables par cheminement dans la région $\alpha < y < \beta$, les intégrales ne peuvent manquer de l'être, à partir de (x_0, y_0) , dans l'intérieur du rectangle.

Posons maintenant

$$(76) \quad \begin{cases} x = f(s, t), \\ y = t, \end{cases}$$

et, assujettissant les variables (réelles) s, t à se mouvoir dans l'intervalle complexe

$$(77) \quad \gamma \leq s \leq \delta, \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

supposons que, dans ces limites, $f(s, t)$ soit une fonction continue (réelle) de s, t , et que les relations simultanées

$$t_1 = t_2, \quad s_1 \neq s_2$$

entraînent comme conséquence nécessaire

$$x_1 \neq x_2 :$$

il est clair alors qu'à deux points *distincts* de l'intervalle complexe (77) correspondront toujours, en vertu des formules (76), deux points *distincts* de l'espace $[[x, y]]$; nous nommerons $\mathfrak{U}_{x,y}$ la région de ce dernier espace constituée par l'ensemble des points qui correspondent ainsi (sans répétition) aux divers points de l'intervalle complexe (77). Désignant enfin, comme il a été dit, par (x_0, y_0) le point fondamental, supposons : 1° que y_0 soit compris dans l'intervalle de α à β ; 2° que pour une certaine valeur, s_0 , de s , comprise dans l'intervalle de γ à δ , on ait, quel que soit t ,

$$f(s_0, t) = x_0.$$

La région (continue, limitée et complète) $\mathfrak{U}_{x,y}$, qui, d'après ce qui vient d'être dit, comprend le point (x_0, y_0) , n'a plus nécessairement ici la forme rectangu-

laire; elle se trouve constituée par l'intérieur et le contour d'une sorte de trapèze mixtiligne, dont deux côtés sont respectivement situés sur les droites

$$(78) \quad y = \alpha, \quad y = \beta,$$

parallèles à OX; d'ailleurs, puisque la fonction $f(s, t)$ se réduit à x_0 pour $s = s_0$, quel que soit t , il est clair que si, par le point fondamental, on mène une parallèle à OY, la portion de cette dernière qui s'étend de l'une à l'autre des droites (78) est entièrement située dans $\mathfrak{R}_{x, y}$.

Cela étant, la règle du n° 49 nous permet d'affirmer que si, d'une part, les douze coefficients de notre système sont, à partir de (x_0, y_0) , calculables par cheminement dans la région $\mathfrak{R}_{x, y}$, et que si, d'autre part, les déterminations initiales des trois inconnues sont, à partir de y_0 , calculables par cheminement dans l'intervalle de α à β , les intégrales ne peuvent manquer de l'être, à partir de (x_0, y_0) , dans la région $\mathfrak{R}_{x, y}$.

Il convient d'ajouter que cette région, transformée de la région convexe (77) à l'aide des formules (76), est nécessairement monodromique (n°s 38 et 40).

