Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Jules Drach

Recherches sur certaines déformations remarquables à réseau conjugué persistant

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 10 (1908), p. 125-164

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1908_2_10__125_0>

RECHERCHES

SUR

CERTAINES DÉFORMATIONS REMARQUABLES

A RÉSEAU CONJUGUÉ PERSISTANT,

PAR M. JULES DRACH,

à Toulouse.

1. Le présent travail a pour objet la *détermination de toutes les surfaces* (A_1) *qu'on peut déformer d'une manière continue, de telle sorte qu'une des familles de lignes qui ont pour image sphérique les génératrices rectilignes de la sphère conserve cette propriété dans la déformation.*

Les conjuguées de cette famille constituant des lignes de longueur nulle, il existera sur ces surfaces (A_1) un *réseau conjugué persistant* dont une des familles est formée des lignes de longueur nulle. Les résultats dus à MM. Cosserat et Bianchi sur les *réseaux persistants* trouveront donc ici leur application.

La représentation sphérique des surfaces (A_1) peut s'écrire

$$d\sigma^2 = \frac{4\,d\alpha\,d\beta}{(1+\alpha\beta)^2} + \left[\frac{2B'}{B\beta(1+\alpha\beta)} + C\right] d\beta^2,$$

B, C désignant deux fonctions arbitraires de (β).

Les cosinus directeurs c_1, c_2, c_3 de la normale en un point de A_1 sont donnés par les formules

$$c_i = \frac{a_i}{1+\alpha\beta} + b_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

dans lesquelles les fonctions de β seul, désignées par a_i et b_i, sont déterminées par les relations

$$\Sigma a_i^2 = 0, \qquad \Sigma a_i'^2 = \frac{4}{\beta^2}, \qquad \Sigma a_i''^2 = \frac{4}{\beta^2}\left(C - \frac{5}{4}\frac{B'^2}{B^2} + \frac{2B'}{B\beta} + \frac{B''}{B}\right),$$

$$b_i = \left(\frac{B'\beta}{4B} - \frac{1}{2}\right) a_i + \frac{\beta}{2} a_i' \qquad (i = 1, 2, 3).$$

La surface (A_1) est alors l'enveloppe du plan

$$\sqrt{B}(c_1X + c_2Y + c_3Z) + \omega = 0,$$

où ω désigne la solution générale de l'équation de rang *deux* identique à son adjointe

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{-2\omega}{(1+\alpha\beta)^2},$$

c'est-à-dire

$$\omega = 2\frac{\beta\varphi(\alpha) + \alpha\psi(\beta)}{1+\alpha\beta} - \varphi'(\alpha) - \psi'(\beta).$$

Si l'on veut *associer toutes les surfaces* (A_1) *qui sont applicables sur l'une d'elles avec conservation du réseau* (α, β), on y parviendra de la manière suivante :

Soit R la solution générale de l'*équation de Riccati*

$$R' + \frac{1}{2}R^2 = -\frac{1}{2}\left[\frac{T}{\Sigma + k} + \frac{3}{4}\frac{\Sigma'^2}{(\Sigma+k)^2}\right] = -\frac{1}{2}\Omega_1,$$

où T et Σ sont des fonctions arbitraires données de β

$$T = \Gamma - 2\frac{\Sigma'}{\beta} - \Sigma'', \qquad \Gamma = \frac{C}{B}, \qquad \Sigma = \frac{1}{B},$$

et où k désigne un paramètre qui n'y figure pas; si l'on pose

$$\rho = e^{\int R\,d\beta}, \qquad u = \frac{1}{2}\int e^{-\int R\,d\beta}\,d\beta,$$

puis

$$A_1 = \rho(1-u^2), \qquad A_2 = i\rho(1+u^2), \qquad A_3 = 2\rho u,$$

on aura les cosinus c_i par les formules

$$c_i = \sqrt{\Sigma + k}\left[-2\frac{A_i}{\sqrt{\Sigma+k}}\frac{1}{\frac{1}{\alpha}+\beta} + \left(\frac{A_i}{\sqrt{\Sigma+k}}\right)'\right] \qquad (i = 1, 2, 3),$$

et la distance p de l'origine au plan tangent par

$$p = \omega\sqrt{\Sigma + k},$$

à condition de prendre dans l'expression de ω, pour la fonction $\psi(\beta)$, l'expression

$$\psi(\beta) = \Psi(\beta) : \sqrt{\Sigma + k},$$

où $\Psi(\beta)$ désigne la solution générale de l'équation

$$\Psi''' + \Omega_1 \Psi' + \frac{1}{2} \Omega'_1 \Psi = \frac{\Phi(\beta)}{\sqrt{\Sigma + k}},$$

Φ désignant une fonction arbitraire de β, indépendante de k.

Cette équation du troisième ordre en Ψ s'intègre par *une quadrature,* car les A_i $(i = 1, 2, 3)$ sont trois solutions de l'équation sans second membre.

Le paramètre k est celui qui varie d'une surface (A_1) à une autre et ne figure pas dans l'élément linéaire.

Les surfaces (A_1), ainsi obtenues par l'intégration d'une *équation de Riccati* et *trois quadratures,* dépendent des *quatre fonctions arbitraires*

$$\varphi(\alpha), \quad T(\beta), \quad \Sigma(\beta), \quad \Phi(\beta).$$

Dans le cas où l'on prend

$$T = -\Sigma'' \qquad \text{ou} \qquad T = -3\Sigma'',$$

on les obtient simplement par *quatre quadratures.*

2. Au cours de ces recherches, j'ai été amené à déterminer trois solutions θ_1, θ_2, θ_3 de l'équation

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial\alpha\, \partial\beta} = \frac{-2\omega}{(1 + \alpha\beta)^2},$$

satisfaisant en particulier à la condition

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = B(\beta).$$

La seconde partie du travail est consacrée à la résolution de l'équation

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 = A + B,$$

où les θ_i sont n solutions de l'équation de rang *deux* identique à son adjointe, que nous écrivons ici

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\, \partial\beta} = \frac{-2\theta}{(\alpha - \beta)^2}.$$

Dans le cas $n = 3$, on en déduit également, pour l'espace ordinaire, des surfaces (A_1) à réseaux conjugués persistants. On peut y rattacher aisément d'autres surfaces remarquables (S) auxquelles les (A_1) sont associées au sens de M. Bianchi ou des congruences rectilignes, *cycliques* d'une infinité de manières.

La méthode qui permet de résoudre la question consiste à poser $\beta = \alpha + u$ et à développer les fonctions de β qui figurent dans les deux membres de l'équation

$$\sum \theta_i^2 = \mathrm{A} + \mathrm{B},$$

suivant les puissances croissantes de u au voisinage du *point ordinaire* $u = 0$. En égalant les coefficients des mêmes puissances de u, on obtient des relations différentielles entre les fonctions A_i, B_i de α seul; ces relations en nombre illimité se ramènent au type très simple

$$\sum (\mathrm{C}_i''' + \beta_i)\beta_i^{(k)} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

où l'on a posé

$$\beta_i = \mathrm{B}_i''', \qquad \mathrm{C}_i = \mathrm{A}_i - \mathrm{B}_i,$$

et aux deux relations

$$\sum \mathrm{C}_i^2 = 0, \qquad \sum (\mathrm{C}_i \beta_i'' + 5\mathrm{C}_i' \beta_i' + 10\mathrm{C}_i''\beta_i) = 0.$$

Les équations

$$\sum \mathrm{C}_i'^2 = \mathrm{C}, \qquad \sum \mathrm{C}_i \beta_i = \frac{3}{2}\mathrm{B}'$$

déterminent ensuite

$$\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}.$$

La discussion du système ainsi obtenu se fait aisément *pour une valeur quelconque de n*. J'ai étudié en détail les cas $n = 3$, $n = 4$, qui sont les plus importants.

Les conséquences géométriques en seront développées ultérieurement.

Une partie essentielle de ces résultats, que je possède depuis longtemps, a été communiquée à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus,* t. CXXXVI, 27 avril 1903, p. 996).

I.

3. Soit proposé de *déterminer toutes les surfaces qu'on peut déformer d'une manière continue de telle sorte que l'un des systèmes de lignes dont l'image sphérique est formée des génératrices de la sphère se conserve dans la déformation.*

Les lignes tracées sur une surface qui ont pour image sphérique les génératrices de la sphère sont aussi les courbes de contact des cônes circonscrits à la surface dont le sommet se trouve sur le cercle imaginaire de l'infini. Elles forment deux familles qui sont respectivement conjuguées des familles de lignes de longueur nulle.

Les lignes de longueur nulle tracées sur une surface se conservent dans toute déformation de cette surface. Il existe donc dans les déformations que nous considérons un système conjugué qui se conserve et l'une des familles de ce système est formée de lignes de longueur nulle.

Les résultats obtenus par M. Cosserat [1] dans la théorie des *réseaux conjugués persistants,* c'est-à-dire qui se conservent dans une série continue de déformations de la surface, trouveront donc ici leur application.

Soit

$$d\sigma^2 = e\,d\alpha^2 + 2f\,d\alpha\,d\beta + g\,d\beta^2$$

le carré de l'élément linéaire de la représentation sphérique de l'une des surfaces cherchées (A_1) rapportée au réseau conjugué (α, β); M. Cosserat a montré que les conditions nécessaires et suffisantes pour que le réseau conjugué (α, β) reste conjugué sur plus d'une déformée de (A_1), sont données par les relations

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial\beta}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix},$$

où les symboles de Christoffel

$$\begin{Bmatrix}ik\\l\end{Bmatrix}$$

sont construits avec l'élément linéaire $d\sigma^2$.

$$\left[\text{On a par exemple } \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\,\frac{e\dfrac{\partial g}{\partial\alpha} - f\dfrac{\partial e}{\partial\beta}}{eg - f^2}\right].$$

Le premier problème à résoudre est de déterminer cet élément linéaire sphérique. Or, dans le cas qui nous occupe, si nous supposons que les lignes $\beta = \text{const.}$ ont pour image sphérique des génératrices de la sphère, on aura simplement

$$e = 0.$$

Ceci entraîne immédiatement

$$\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{f\dfrac{\partial g}{\partial\alpha} - g\dfrac{\partial e}{\partial\beta}}{eg - f^2}\right] = 0.$$

(1) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 1893. — *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 12 et 19 octobre 1891.

Les équations de M. Cosserat se réduisent à une seule, que nous écrirons tout de suite sous la forme

$$-\frac{1}{f}\frac{\partial g}{\partial \alpha} = \frac{B'}{B},$$

en désignant par B une fonction arbitraire de β.

Il reste à exprimer que l'élément linéaire défini par

$$d\sigma^2 = 2f\,d\alpha\,d\beta + g\,d\beta^2,$$

convient à une sphère de rayon 1. En calculant sa courbure totale on trouve sans aucune difficulté que la fonction f doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial^2 \log f}{\partial\alpha\,\partial\beta} = -f,$$

équation bien connue, dont l'intégrale générale donnée par Liouville est

$$f = \frac{2\varphi'(\alpha)\psi'(\beta)}{[1+\varphi(\alpha)\psi(\beta)]^2},$$

où φ et ψ désignent deux fonctions arbitraires.

On pourra toujours supposer, si $f \neq 0$, qu'on a choisi les variables α et β de façon que les fonctions φ et ψ se réduisent respectivement à α et β et prendre, sans restreindre la généralité,

$$f = \frac{2}{(1+\alpha\beta)^2},$$

ce qui donnera, pour g, l'expression

$$g = 2\frac{B'}{B\,\beta(1+\alpha\beta)} + C,$$

dans laquelle C est une nouvelle fonction arbitraire de β.

L'élément linéaire de la sphère est donc donné par la formule

$$d\sigma^2 = \frac{4}{(1+\alpha\beta)^2}d\alpha\,d\beta + \left[\frac{2B'}{B\,\beta(1+\alpha\beta)} + C\right]d\beta^2.$$

4. Il convient maintenant de rappeler un théorème de M. Dini, d'après lequel l'équation

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial\beta}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que le réseau sphérique (α, β) soit l'image sphérique des lignes asymptotiques d'une surface S.

Cette surface (1) a pour élément linéaire

$$ds^2 = \lambda^2(e\,d\alpha^2 + g\,d\beta^2 - 2f\,d\alpha\,d\beta),$$

et pour courbure totale $\frac{-1}{\lambda^2}$; on a d'ailleurs

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial \alpha} = \frac{f\frac{\partial e}{\partial \beta} - e\frac{\partial g}{\partial \alpha}}{eg - f^2}, \qquad \frac{\partial \log \lambda}{\partial \beta} = \frac{f\frac{\partial g}{\partial \alpha} - g\frac{\partial e}{\partial \beta}}{eg - f^2},$$

et ces formules permettent de prendre dans le cas actuel, où l'on a $e = 0$,

$$\lambda = B.$$

D'autre part les cosinus directeurs c, c', c'' de la normale en un point de la surface S rapportée à ses asymptotiques (qui sont aussi les cosinus directeurs de la normale en un point de A_1) vérifient une même équation de Laplace à invariants égaux

$$\frac{\partial^2 c\sqrt{\lambda}}{\partial \alpha\,\partial \beta} = kc\sqrt{\lambda},$$

et la relation $c^2 + c'^2 + c''^2 = 1$ donne immédiatement entre λ, k, f la relation

$$\frac{\partial^2 \sqrt{\lambda}}{\partial \alpha\,\partial \beta} = (k + f)\sqrt{\lambda}.$$

Avec l'hypothèse $\lambda = B$, on a simplement

$$k = -f;$$

il en résulte que si l'on pose

$$c\sqrt{\lambda} = \theta_1, \qquad c'\sqrt{\lambda} = \theta_2, \qquad c''\sqrt{\lambda} = \theta_3,$$

les θ sont des solutions de l'équation à invariants égaux

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\,\partial \beta} = \frac{-2\theta}{(1 + \alpha\beta)^2};$$

c'est là encore une équation bien connue : l'équation *de rang* deux, *identique à*

---

(1) *Cf.* DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces,* IV^e Partie, Livre VIII, n^{os} 873, 874.

son adjointe. Son intégrale générale s'écrit

$$\theta = 2\frac{\beta\varphi(\alpha)+\alpha\psi(\beta)}{1+\alpha\beta} - \varphi'(\alpha) - \psi'(\beta),$$

φ, ψ désignant deux fonctions arbitraires.

La connaissance de c, c', c'' nous donnera donc des solutions de l'équation *fonctionnelle*

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \mathrm{B}$$

satisfaisant à l'équation

$$\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha}\right)^2 = 0.$$

5. Ces remarques faites, nous allons déterminer c, c', c'' en partant de la relation finie

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1$$

et des relations différentielles

$$\mathbf{S}\left(\frac{\partial c}{\partial\alpha}\right)^2 = 0, \qquad \mathbf{S}\frac{\partial c}{\partial\alpha}\frac{\partial c}{\partial\beta} = \frac{2}{(1+\alpha\beta)^2}, \qquad \mathbf{S}\left(\frac{\partial c}{\partial\beta}\right)^2 = \frac{2\mathrm{B}'}{\mathrm{B}\,\beta(1+\alpha\beta)} + \mathrm{C}$$

jointes à l'équation

$$\frac{\partial^2 c\sqrt{\mathrm{B}}}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{-2c\sqrt{\mathrm{B}}}{(1+\alpha\beta)^2}$$

vérifiée par c, c', c''.

Les trois équations

$$\mathbf{S}\,c\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2} = 0, \qquad \mathbf{S}\,c\frac{\partial c}{\partial\alpha} = 0, \qquad \mathbf{S}\,c\frac{\partial c}{\partial\beta} = 0,$$

dont l'origine est manifeste, permettent de poser

$$\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2} = m\frac{\partial c}{\partial\alpha} + n\frac{\partial c}{\partial\beta}$$

et les équations analogues en c', c''.

La relation

$$\mathbf{S}\frac{\partial c}{\partial\alpha}\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2} = 0$$

donne immédiatement $n = 0$. Pour calculer m, on observe qu'en différentiant

$$\mathbf{S}\frac{\partial c}{\partial\alpha}\frac{\partial c}{\partial\beta} = \frac{2}{(1+\alpha\beta)^2}$$

par rapport à α et tenant compte des relations

$$\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{B'}{2B}\frac{\partial c}{\partial\alpha} = \frac{-2c}{(1+\alpha\beta)^2},$$

on trouve

$$\mathrm{S}\frac{\partial c}{\partial\beta}\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2} = \frac{-4\beta}{(1+\alpha\beta)^3};$$

comme d'autre part

$$\mathrm{S}\frac{\partial c}{\partial\beta}\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2} = m\frac{2}{(1+\alpha\beta)^2},$$

il en résulte

$$m = \frac{-2\beta}{1+\alpha\beta}.$$

Ainsi c, c', c'' satisfont à la relation

$$\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2} = \frac{-2\beta}{1+\alpha\beta}\frac{\partial c}{\partial\alpha}.$$

Cette relation s'intègre sans difficulté et donne

$$c = \frac{a_1}{1+\alpha\beta} + b_1, \qquad c' = \frac{a_2}{1+\alpha\beta} + b_2, \qquad c'' = \frac{a_3}{1+\alpha\beta} + b_3,$$

les a et les b désignant des fonctions de β seul.

Pour que ces expressions vérifient la relation

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1,$$

il faut et il suffit qu'on ait

$$\mathrm{S}a_1^2 = 0, \qquad \mathrm{S}a_1 b_1 = 0, \qquad \mathrm{S}b_1^2 = 1.$$

Il reste à vérifier les équations

$$\mathrm{S}\left(\frac{\partial c}{\partial\alpha}\right)^2 = 0, \qquad \mathrm{S}\frac{\partial c}{\partial\alpha}\frac{\partial c}{\partial\beta} = \frac{2}{(1+\alpha\beta)^2}, \qquad \mathrm{S}\left(\frac{\partial c}{\partial\beta}\right)^2 = \frac{2B'}{B\beta(1+\alpha\beta)} + C;$$

la première donne à nouveau

$$\mathrm{S}a_1^2 = 0;$$

la seconde donne l'équation nouvelle

$$\mathrm{S}a_1 b_1' = -\frac{2}{\beta};$$

enfin la troisième peut s'écrire

$$\frac{1}{(1+\alpha\beta)^2}\left(\mathbf{S}\,a_1'^2+\frac{2}{\beta}\mathbf{S}\,a_1 b_1'\right)-\frac{2}{(1+\alpha\beta)}\left(\frac{\mathbf{S}\,a_1 b_1'}{\beta}-\mathbf{S}\,a_1' b_1'\right)+\mathbf{S}\,b_1'^2$$
$$=\frac{2\,\mathrm{B}'}{\mathrm{B}\beta}\,\frac{1}{1+\alpha\beta}+\mathrm{C}.$$

Elle se décompose à vue en trois autres :

$$\mathbf{S}\,a_1'^2+\frac{2}{\beta}\mathbf{S}\,a_1 b_1'=0,\qquad \frac{\mathbf{S}\,a_1 b_1'}{\beta}-\mathbf{S}\,a_1' b_1'=\frac{-\mathrm{B}'}{\mathrm{B}\beta},\qquad \mathbf{S}\,b_1'^2=\mathrm{C},$$

qui peuvent s'écrire, en tenant compte de $\mathbf{S}\,a_1 b_1'=\frac{-2}{\beta}$,

$$\mathbf{S}\,a_1'^2=\frac{4}{\beta^2},\qquad \mathbf{S}\,a_1' b_1'=\frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{B}\beta}-\frac{2}{\beta^2},\qquad \mathbf{S}\,b_1'^2=\mathrm{C}.$$

Nous avons donc obtenu *sept* équations pour déterminer les six fonctions a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 au moyen de B et C; on va voir qu'elles se réduisent à six relations distinctes.

Pour les résoudre nous remarquons qu'il est permis de poser, d'après les trois relations

$$\mathbf{S}\,a_1^2=0,\qquad \mathbf{S}\,a_1 a_1'=0,\qquad \mathbf{S}\,a_1 b_1=0,$$

en désignant par λ et μ deux multiplicateurs convenables,

$$b_1=\lambda a_1+\mu a_1',\qquad b_2=\lambda a_2+\mu a_2',\qquad b_3=\lambda a_3+\mu a_3'.$$

La relation $\mathbf{S}\,b_1^2=1$ donne alors

$$\mu^2\,\mathbf{S}\,a_1'^2=1,$$

c'est-à-dire

$$\mu^2=\frac{\beta^2}{4}$$

ou encore

$$\mu=\pm\frac{\beta}{2}.$$

Portons dans la relation

$$\mathbf{S}\,a_1 b_1'=\frac{-2}{\beta}$$

l'expression des b'

$$b_i'=\lambda' a_i+\left(\lambda\pm\frac{1}{2}\right)a_i'\pm\frac{\beta}{2}a_i'',$$

nous trouverons

$$\pm \frac{\beta}{2} \mathbf{S} a_1 a''_1 = \mp \frac{\beta}{2} \mathbf{S} a'^2_1 = \frac{-2}{\beta};$$

il est donc nécessaire de prendre

$$\mu = \frac{\beta}{2}.$$

Les expressions

$$b'_i = \lambda' a_i + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) a'_i + \frac{\beta}{2} a''_i,$$

portées dans les deux relations

$$\mathbf{S} a'_1 b'_1 = \frac{B'}{B\beta} - \frac{2}{\beta^2}, \qquad \mathbf{S} b'^2_1 = C,$$

donneront, par un calcul immédiat,

$$\lambda + \frac{1}{2} = \frac{B'\beta}{4B}$$

et

$$\frac{\beta^2}{4} \mathbf{S} a''^2_1 = C - \frac{5}{4}\frac{B'^2}{B^2} + \frac{2B'}{B\beta} + \frac{B''}{B}.$$

En résumé, *les fonctions a_1, a_2, a_3 sont déterminées par les trois relations*

$$\mathbf{S} a^2_1 = 0, \qquad \mathbf{S} a'^2_1 = \frac{4}{\beta^2}, \qquad \mathbf{S} a''^2_1 = \frac{4}{\beta^2}\left(C - \frac{5}{4}\frac{B'^2}{B^2} + \frac{2B'}{B\beta} + \frac{B''}{B}\right),$$

et les b_i sont alors données par les formules

$$b_i = \left(\frac{B'\beta}{4B} - \frac{1}{2}\right) a_i + \frac{\beta}{2} a'_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Les cosinus directeurs c, c', c'' de la normale à l'une des surfaces (A_1) étant ainsi déterminés, cette surface sur laquelle le réseau (α, β) est conjugué, est l'enveloppe du plan

$$\sqrt{B}\,(cX + c'Y + c''Z) + \omega = 0,$$

où ω désigne une solution quelconque de l'équation *de rang deux, identique à son adjointe*

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{-2\omega}{(1 + \alpha\beta)^2},$$

c'est-à-dire

$$\omega = 2\,\frac{\beta\varphi(\alpha) + \alpha\psi(\beta)}{1 + \alpha\beta} - \varphi'(\alpha) - \psi'(\beta).$$

Il nous reste à rechercher comment il faut associer les surfaces (A_1) pour qu'elles soient applicables les unes sur les autres avec conservation du réseau (α, β).

Il sera commode pour cette recherche d'étudier d'un peu près la façon dont l'élément linéaire d'une surface peut s'exprimer en partant de sa représentation sphérique.

6. Considérons, d'une manière générale, une surface définie comme enveloppe du plan

$$c\mathrm{X} + c'\mathrm{Y} + c''\mathrm{Z} + p = 0,$$

où nous supposons

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1,$$

$$dc^2 + dc'^2 + dc''^2 = e\,d\alpha^2 + 2f\,d\alpha\,d\beta + g\,d\beta^2,$$

et proposons-nous de calculer son élément linéaire.

M. Darboux (IV^e Partie, n° 882) établit les formules

$$d\mathrm{X} = h\left(c'\frac{\partial c''}{\partial \alpha} - c''\frac{\partial c'}{\partial \alpha}\right)(\mathrm{D}'\,d\alpha + \mathrm{D}''\,d\beta) - h\left(c'\frac{\partial c''}{\partial \beta} - c''\frac{\partial c'}{\partial \beta}\right)(\mathrm{D}\,d\alpha + \mathrm{D}'\,d\beta),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où l'on a

$$h = \frac{-\mathrm{H}^2}{\mathrm{DD}'' - \mathrm{D}'^2};$$

on peut aisément en déduire

$$\begin{aligned} &d\mathrm{X}^2 + d\mathrm{Y}^2 + d\mathrm{Z}^2 \\ &\quad = \frac{\mathrm{H}^4}{(\mathrm{DD}'' - \mathrm{D}'^2)^2}[e(\mathrm{D}'\,d\alpha + \mathrm{D}''\,d\beta) \\ &\qquad\qquad - 2f(\mathrm{D}'\,d\alpha + \mathrm{D}''\,d\beta)(\mathrm{D}\,d\alpha + \mathrm{D}'\,d\beta) + g(\mathrm{D}\,d\alpha + \mathrm{D}'\,d\beta)^2]. \end{aligned}$$

En égalant cette expression à

$$\mathrm{E}\,d\alpha^2 + 2\,\mathrm{F}\,d\alpha\,d\beta + \mathrm{G}\,d\beta^2,$$

on en conclut les expressions de E, F, G qui conduisent par un calcul simple, que nous supprimons, à la formule

$$(eg - f^2)(\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2) = \left[\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{H}}\frac{\mathrm{D}''}{\mathrm{H}} - \left(\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{H}}\right)^2\right]^2.$$

L'élément linéaire de la surface peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} &d\mathrm{X}^2 + d\mathrm{Y}^2 + d\mathrm{Z}^2 \\ &\quad = \frac{1}{eg - f^2}\left[e\left(\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{H}}d\alpha + \frac{\mathrm{D}''}{\mathrm{H}}d\beta\right)^2\right. \\ &\qquad\qquad \left. - 2f\left(\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{H}}d\alpha + \frac{\mathrm{D}''}{\mathrm{H}}d\beta\right)\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{H}}d\alpha + \frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{H}}d\beta\right) + g\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{H}} + d\alpha\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{H}}d\beta\right)^2\right], \end{aligned}$$

et sous cette forme il ne renferme plus, avec les quantités e, f, g, que $\frac{D}{H}$, $\frac{D'}{H}$, $\frac{D''}{H}$ (¹).

Nous allons montrer comment ces dernières quantités s'expriment avec e, f, g et les dérivées de la fonction p.

La relation

$$X\,dc + Y\,dc' + Z\,dc'' + dp = 0,$$

déduite immédiatement de la définition de X, Y, Z, donne par différentiation

$$X\,d^2c + Y\,d^2c' + Z\,d^2c'' + d^2p + dc\,dX + dc'\,dY + dc''\,dZ = 0,$$

et comme on a

$$dc\,dX + dc'\,dY + dc''\,dZ = -\frac{1}{H}(D\,d\alpha^2 + 2D'\,d\alpha\,d\beta + D''\,d\beta^2),$$

il en résulte

$$X\,d^2c + Y\,d^2c' + Z\,d^2c'' + d^2p = \frac{D}{H}d\alpha^2 + 2\frac{D'}{H}d\alpha\,d\beta + \frac{D''}{H}d\beta^2.$$

Nous avons déjà les trois relations

$$\begin{aligned}
c\,X + c'\,Y + c''\,Z + p &= 0,\\
\frac{\partial c}{\partial\alpha}X + \frac{\partial c'}{\partial\alpha}Y + \frac{\partial c''}{\partial\alpha}Z + \frac{\partial p}{\partial\alpha} &= 0,\\
\frac{\partial c}{\partial\beta}X + \frac{\partial c'}{\partial\beta}Y + \frac{\partial c''}{\partial\beta}Z + \frac{\partial p}{\partial\beta} &= 0;
\end{aligned}$$

on pourra donc conclure de là, eu égard aux relations bien connues vérifiées par c, c', c'',

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha^2} &= \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial c}{\partial\alpha} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial c}{\partial\beta} - ec,\\
\frac{\partial^2 c}{\partial\alpha\,\partial\beta} &= \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial c}{\partial\alpha} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial c}{\partial\beta} - fc,\\
\frac{\partial^2 c}{\partial\beta^2} &= \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial c}{\partial\alpha} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial c}{\partial\beta} - gc,
\end{aligned}$$

(¹) On peut aussi parvenir aisément à cette forme en partant de l'expression bien connue de l'élément linéaire sphérique

$$\begin{aligned}
&dc^2 + dc'^2 + dc''^2\\
&= \frac{G}{H^4}(D\,d\alpha + D'\,d\beta)^2 - \frac{2F}{H^4}(D\,d\alpha + D'\,d\beta)(D'\,d\alpha + D''\,d\beta) + \frac{E}{H^4}(D'\,d\alpha + D''\,d\beta)^2
\end{aligned}$$

qu'on identifie à

$$e\,d\alpha^2 + 2f\,d\alpha\,d\beta + g\,d\beta^2.$$

les trois relations analogues

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha^2} - \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{H}} = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial p}{\partial \beta} - ep,$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \, \partial \beta} - \frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{H}} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial p}{\partial \beta} - fp,$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \beta^2} - \frac{\mathrm{D}''}{\mathrm{H}} = \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial p}{\partial \beta} - gp,$$

où les symboles de Christoffel $\left\{ \begin{matrix} ik \\ l \end{matrix} \right\}$ sont, naturellement, relatifs à la *représentation sphérique* de la surface.

Ces relations définissent $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{H}}, \frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{H}}, \frac{\mathrm{D}''}{\mathrm{H}}$ et donnent, par suite, l'expression de l'élément linéaire de la surface au moyen de e, f, g et p.

Si l'on suppose que le système (α, β) est formé de courbes conjuguées, on a

$$\mathrm{D}' = 0,$$

et la relation entre les deux éléments linéaires prend la forme simple

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{H}^2} \, \frac{g}{eg - f^2},$$

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{D}\mathrm{D}''}{\mathrm{H}^2} \, \frac{-f}{eg - f^2},$$

$$\mathrm{G} = \frac{\mathrm{D}''^2}{\mathrm{H}^2} \, \frac{e}{eg - f^2}.$$

On en peut conclure, en particulier, que *si deux surfaces rapportées au système conjugué commun* (α, β) *ont le même élément linéaire, les produits* $g\frac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{H}^2}$, $e\frac{\mathrm{D}''^2}{\mathrm{H}^2}$ *et le coefficient* f *ont la même valeur pour ces deux surfaces*. Il suffit de se rappeler que $\mathrm{D}\mathrm{D}'' - \mathrm{D}'^2$ ne dépend que de l'élément linéaire et qu'il en est, par suite, de même de $eg - f^2$.

Cette remarque nous permet de donner à f, par un changement convenable des variables α et β, une forme *réduite*.

7. Pour l'application particulière que nous avons en vue, les formules se simplifient encore.

On doit d'abord faire $e = 0$ et $\mathrm{D}' = 0$, ce qui donne, pour les symboles de

Christoffel et pour l'élément linéaire, les valeurs

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0, \qquad \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial\alpha}, \qquad \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2f}\frac{\partial g}{\partial\alpha},$$

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial\beta} - \frac{1}{2f}\frac{\partial f}{\partial\beta},$$

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2f}\frac{\partial g}{\partial\beta} + \frac{g}{2f^2}\frac{\partial g}{\partial\alpha} - \frac{g}{f^2}\frac{\partial f}{\partial\beta},$$

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \frac{2}{f}\frac{D}{H}\frac{D''}{H}\,d\alpha\,d\beta - \frac{g}{f^2}\frac{D^2}{H^2}\,d\alpha^2.$$

Calculons maintenant $\frac{D}{H}$ et $\frac{D''}{H}$ en observant que nous devons poser

$$f = \frac{2}{(1+\alpha\beta)^2}, \qquad g = \frac{2B'}{B\beta(1+\alpha\beta)} + C$$

et

$$p = \frac{\omega}{\sqrt{B}} = \frac{1}{\sqrt{B}}\left(2\frac{\beta\varphi + \alpha\psi}{1+\alpha\beta} - \varphi' - \psi'\right).$$

On trouve par un calcul facile

$$\frac{D}{H} = \frac{\partial^2 p}{\partial\alpha^2} - \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{\partial p}{\partial\alpha} = f\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{f}\frac{\partial p}{\partial\alpha}\right) = -\frac{\varphi'''(\alpha)}{\sqrt{B}}$$

et ensuite, à l'aide de la formule

$$\frac{D''}{H} = \frac{\partial^2 p}{\partial\beta^2} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial p}{\partial\alpha} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial p}{\partial\beta} + gp,$$

l'expression un peu compliquée

$$\frac{D''}{H} = \frac{1}{\sqrt{B}}\left(\varphi''\Theta - \varphi'\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} + \varphi\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha^2}\right) + \frac{\mathfrak{F}(\beta)}{\sqrt{B}},$$

où l'on a posé

$$\Theta = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = \left[\left(\frac{B''}{B} - \frac{2B'^2}{B^2} - \frac{B'}{B\beta}\right)\frac{1+\alpha\beta}{2\beta} + \frac{3}{2}\frac{B'\alpha}{B\beta} \right.$$
$$\left. + \frac{C'B - CB'}{4B}(1+\alpha\beta)^2 + C\alpha(1+\alpha\beta)\right]$$

et

$$\mathfrak{F}(\beta) = -\psi''' + \frac{3}{2}\psi''\frac{B'}{B} + \psi'\left[\frac{1}{2}\left(\frac{B''}{B} - \frac{2B'^2}{B^2}\right) - 2\frac{B'}{B\beta} - C\right]$$
$$+ \psi\left[-\frac{1}{\beta}\left(\frac{B''}{B} - \frac{2B'^2}{B^2} - \frac{B'}{B\beta}\right) + \frac{CB' - BC'}{2B}\right].$$

Rien n'est plus aisé maintenant que de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les surfaces (A_1) aient même élément linéaire.

En égalant deux expressions de E, on trouvera

$$\left[\frac{2B'}{B\beta(1+\alpha\beta)}+C\right]\frac{1}{B}=\left[\frac{2B'_1}{B_1\beta(1+\alpha\beta)}+C_1\right]\frac{1}{B_1},$$

ce qui exige que $\frac{B'}{B^2}$ et $\frac{C}{B}$ demeurent invariables, ou encore qu'on prenne

$$B_1=\frac{B}{1+kB},\qquad C_1=\frac{C}{1+kB},$$

en désignant par k une constante arbitraire.

Si l'on pose ensuite, pour simplifier les notations,

$$-\frac{B'}{B^2}=\Sigma',\qquad \frac{C}{B}=\Gamma,$$

on trouve

$$\frac{D}{H}\frac{D''}{H}=-\varphi'''\left[\varphi''\frac{\Theta}{B}-\varphi'\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\Theta}{B}\right)+\varphi\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\Theta}{B}\right)\right]-\varphi'''\frac{\mathcal{F}(\beta)}{B}.$$

La fonction $\frac{\Theta}{B}$ ne dépend que des *éléments invariables* Σ' et Γ, ainsi qu'il résulte de son expression

$$\frac{\Theta}{B}=-\left(\Sigma''-\frac{\Sigma'}{\beta}\right)\frac{(1+\alpha\beta)}{2\beta}-\frac{3}{2}\frac{\alpha\Sigma'}{\beta}+\frac{(1+\alpha\beta)^2}{4}\Gamma'+\alpha(1+\alpha\beta)\Gamma.$$

Pour que le produit $\frac{D}{H}\frac{D''}{H}$ soit le même pour deux surfaces (A_1), il faudra, par conséquent, qu'il en soit de même pour les deux fonctions $\frac{\mathcal{F}(\beta)}{B}$ correspondantes. On devra donc déterminer ψ de façon que $\frac{\mathcal{F}(\beta)}{B}$ demeure invariable; si l'on pose

$$\frac{\mathcal{F}(\beta)}{B}=\Phi(\beta),$$

on obtiendra une équation différentielle linéaire du troisième ordre qui définira ψ au moyen de B, C et Φ.

Il est clair que toutes les fonctions ψ ainsi obtenues conduiront à des surfaces applicables les unes sur les autres, puisque les expressions de E et F sont identiques pour toutes ces surfaces.

Nous remarquons, d'autre part, que les expressions de $\frac{D}{H}$ et $\frac{D''}{H}$ ne dépendent que du seul paramètre k qui figure dans l'expression générale de B; on pourra donc en conclure que les trois constantes nouvelles qui figurent dans ψ n'influent que sur la position dans l'espace des surfaces correspondantes et non sur leur forme.

S'il en est ainsi, à une même valeur de α, β, c'est-à-dire à une même direction du plan tangent à la surface (A_1), correspondent pour ψ toutes les valeurs qu'on obtient par une translation quelconque qui remplace p par $p+\lambda c+\lambda' c'+\lambda'' c'$, λ, λ', λ'' désignant des constantes arbitraires. Ces valeurs s'obtiennent sans difficulté en remarquant, par exemple, qu'on a

$$c=\frac{a_1}{1+\alpha\beta}+a_1\left(\frac{B'\beta}{4B}-\frac{1}{2}\right)+\frac{\beta}{2}a'_1;$$

il suffit d'ajouter à ψ la fonction $-\frac{a_1}{2}\beta\sqrt{B}$ pour augmenter p de c.

L'expression

$$\beta\sqrt{B}(l_1 a_1+l_2 a_2+l_3 a_3)$$

représente donc la solution générale de l'équation différentielle du troisième ordre en ψ

$$\mathcal{F}(\beta)=0,$$

et la recherche de la solution générale de l'équation

$$\frac{\mathcal{F}(\beta)}{B}=\Phi(\beta)$$

exigera au plus une quadrature, si l'on connaît a_1, a_2, a_3 et Φ. En choisissant Φ de telle sorte qu'on possède une solution particulière de cette équation, on aura immédiatement l'expression générale de ψ, *sans aucune intégration*.

8. Ces remarques se prêtent à des vérifications analytiques simples dès qu'on introduit au lieu de a_1, a_2, a_3 les quantités A_1, A_2, A_3 définies par

$$A_i=\frac{\beta}{2}a_i,$$

qui satisfont aux trois équations

$$\mathrm{S}A_1^2=0,\qquad \mathrm{S}A_1'^2=1,\qquad \mathrm{S}A_1''^2=\Omega,$$

où l'on a posé

$$\Omega=C-\frac{5}{4}\frac{B'^2}{B^2}+\frac{2B'}{B\beta}+\frac{B''}{B}.$$

Ces trois fonctions A_1, A_2, A_3 satisfont à l'équation du troisième ordre

$$A''' + \Omega A' + \frac{\Omega'}{2} A = 0,$$

et si l'on pose

$$\psi = \sqrt{B}\,\Psi,$$

on trouvera de même pour l'expression $\mathcal{F}(\beta)$ la nouvelle forme

$$\mathcal{F}(\beta) = -\sqrt{B}\left(\Psi''' + \Omega\Psi' + \frac{\Omega'}{2}\Psi\right).$$

Il résulte de là que le problème revient à l'intégration complète de l'équation du troisième ordre

$$\Psi''' + \Omega_1\Psi' + \frac{\Omega'_1}{2}\Psi = -\Phi(\beta)\sqrt{B_1},$$

dans laquelle B_1 et Ω_1 renferment le paramètre arbitraire k.

Les relations

$$\mathrm{S}A_1^2 = 0, \qquad \mathrm{S}A_1'^2 = 1, \qquad \mathrm{S}A_1''^2 = \Omega_1,$$

qui définissent A_1, A_2, A_3, sont celles qui déterminent sur un cône isotrope une courbe gauche dont on donne le rayon de première courbure en fonction de l'arc; nous en concluons que l'*équation du troisième ordre sans second membre dont les solutions sont* A_1, A_2, A_3 *se ramène en fait à une équation de Riccati. Une quadrature donnera ensuite* Ψ.

On savait d'ailleurs à l'avance que la détermination de toutes les surfaces (A_1) déformées de l'une d'elles avec conservation du réseau conjugué (α, β) exigerait l'intégration d'une équation de Riccati et des quadratures.

Nous connaissons, en effet, pour ces surfaces, les deux formes fondamentales

$$ds^2 = E\,d\alpha^2 + 2F\,d\alpha\,d\beta$$

et

$$\frac{D_1}{H}d\alpha^2 + \frac{D''_1}{H}d\beta^2,$$

par les formules

$$E = -\frac{g}{f^2}\frac{D^2}{H^2} = \frac{[\varphi'''(\alpha)]^2(1+\alpha\beta)^4}{4}\left[\Gamma - \frac{2\Sigma'}{\beta(1+\alpha\beta)}\right],$$

$$F = \frac{1}{f}\frac{DD''}{H^2} = -\frac{\varphi'''(\alpha)(1+\alpha\beta)^2}{2}\left[\varphi''(\alpha)U - \varphi'\frac{\partial U}{\partial\alpha} + \varphi\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2} + \Phi(\beta)\right],$$

où l'on a posé

$$U = \frac{\Theta}{B} = \frac{(1+\alpha\beta)}{2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\Sigma'}{\beta}\right) - \frac{3}{2}\frac{\alpha}{\beta}\Sigma' + \frac{(1+\alpha\beta)}{4}\frac{\partial}{\partial\beta}[(1+\alpha\beta)\Gamma],$$

dans lesquelles ne figurent que des éléments Γ, Σ', Φ indépendants du paramètre k, et par les suivantes :

$$\frac{D_1}{H} = -\frac{\varphi'''(\alpha)}{\sqrt{B_1}} = -\varphi'''(\alpha)\sqrt{\Sigma + k},$$

$$\frac{D_1''}{H} = \left[\varphi''(\alpha)U - \varphi'(\alpha)\frac{\partial U}{\partial\alpha} + \varphi\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2} + \Phi(\beta)\right]\frac{1}{\sqrt{\Sigma + k}}$$

qui renferment ce paramètre k.

9. Tout ceci peut encore être établi par le calcul de façon très simple.

Pour satisfaire à

$$\mathbf{S}\, A_i^2 = 0,$$

posons

$$A_1 = \rho(1 - u^2), \qquad A_2 = i\rho(1 + u^2), \qquad A_3 = 2\rho u;$$

on en déduit

$$\begin{aligned} dA_1 &= \ d\rho(1+u^2) - 2u\rho\, du, \\ dA_2 &= i\, d\rho(1+u^2) + 2i\rho u\, du, \\ dA_3 &= 2\, d\rho\, u + 2\rho\, du, \end{aligned}$$

et, par suite, la relation $\mathbf{S}\, A_i'^2 = 1$ équivaut à

$$d\beta^2 = 4\rho^2\, du^2$$

ou encore à

$$u' = \frac{du}{d\beta} = \frac{1}{2\rho}.$$

Une nouvelle différentiation donne

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_1}{d\beta^2} &= \ \rho''(1 - u^2) - \frac{1}{\rho}\left(u\rho' + \frac{1}{2}\right), \\ \frac{d^2 A_2}{d\beta^2} &= i\rho''(1 + u^2) + \frac{i}{\rho}\left(u\rho' + \frac{1}{2}\right), \\ \frac{d^2 A_3}{d\beta^2} &= 2\rho'' u + \frac{\rho'}{\rho}, \end{aligned}$$

et l'équation $\mathbf{S}\, A_i''^2 = \Omega_1$ se transforme ainsi en

$$-\frac{2\rho''}{\rho} + \frac{\rho'^2}{\rho^2} = \Omega_1.$$

Il suffit d'y poser

$$\frac{\rho'}{\rho} = \mathrm{R}$$

pour lui faire prendre la forme de Riccati :

$$\mathrm{R}' + \frac{1}{2}\mathrm{R}^2 = -\frac{\Omega_1}{2}.$$

Nous avons d'ailleurs

$$\frac{\Omega_1}{\mathrm{B}_1} = \Omega_1(\Sigma + k) = \Gamma - 2\frac{\Sigma'}{\beta} - \Sigma'' + \frac{3}{4}\frac{\Sigma'^2}{(\Sigma + k)},$$

et si l'on pose, pour simplifier les écritures,

$$\Gamma - 2\frac{\Sigma'}{\beta} - \Sigma'' = \mathrm{T},$$

on aura, pour déterminer R, l'équation

$$\mathrm{R}' + \frac{1}{2}\mathrm{R}^2 = -\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{T}}{\Sigma + k} + \frac{3}{4}\frac{\Sigma'^2}{(\Sigma + k)^2}\right],$$

où le paramètre k est mis en évidence.

Nous résumerons les résultats obtenus dans l'énoncé suivant :

Si l'on désigne par R *la solution générale de l'équation de Riccati*

$$\mathrm{R}' + \frac{1}{2}\mathrm{R}^2 = -\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{T}}{\Sigma + k} + \frac{3}{4}\frac{\Sigma'^2}{(\Sigma + k)^2}\right],$$

où T *et* Σ *sont des fonctions arbitraires données de la variable* β *et où k désigne un paramètre arbitraire, et si l'on pose*

$$\rho = e^{\int \mathrm{R}\, d\beta}, \qquad u = \frac{1}{2}\int e^{-\int \mathrm{R}\, d\beta} d\beta,$$

puis

$$\mathrm{A}_1 = \rho(1 - u^2), \qquad \mathrm{A}_2 = i\rho(1 + u^2), \qquad \mathrm{A}_3 = 2\rho u,$$

on a, par les formules

$$c_i = \sqrt{\Sigma + k}\left[\frac{-2\dfrac{\mathrm{A}_i}{\sqrt{\Sigma + k}}}{\dfrac{1}{\alpha} + \beta} + \left(\frac{\mathrm{A}_i}{\sqrt{\Sigma + k}}\right)'\right] \qquad (i = 1, 2, 3),$$

les cosinus directeurs c_1, c_2, c_3 *de la normale, et par*

$$p = \sqrt{\Sigma + k}\left[2\,\frac{\beta\,\varphi(\alpha) + \alpha\,\psi(\beta)}{1 + \alpha\beta} - \varphi'(\alpha) - \psi'(\beta)\right]$$

la distance de l'origine au plan tangent d'une surface, sur laquelle le réseau (α, β) *est conjugué et les lignes* $\beta = \text{const.}$ *ont pour image sphérique les génératrices rectilignes de la sphère.*

Toutes ces surfaces, enveloppes du plan

$$c_1\,X + c_2\,Y + c_3\,Z + p = 0,$$

sont applicables les unes sur les autres pourvu qu'on prenne

$$\psi(\beta) = \Psi : \sqrt{\Sigma + k},$$

la fonction $\Psi(\beta)$ *étant la solution générale de l'équation du troisième ordre*

$$\Psi''' + \Omega_1\,\Psi' + \frac{1}{2}\,\Omega_1'\,\Psi = \frac{\Phi(\beta)}{\sqrt{\Sigma + k}},$$

où $\Phi(\beta)$ *est une fonction arbitraire donnée, indépendante de* k, *et où* Ω_1 *représente l'expression*

$$\Omega_1 = \frac{T}{\Sigma + k} + \frac{3}{4}\,\frac{\Sigma'^2}{(\Sigma + k)^2}.$$

Les fonctions A_1, A_2, A_3 sont trois solutions particulières de l'équation sans second membre

$$A''' + \Omega_1\,A' + \frac{1}{2}\,\Omega_1'\,A = 0,$$

de sorte que *la détermination de la fonction* $\Psi(\beta)$ *exige seulement une quadrature.*

Les surfaces ainsi définies, qui dépendent des quatre fonctions arbitraires

$$\varphi(\alpha),\quad T(\beta),\quad \Sigma(\beta),\quad \Phi(\beta),$$

sont les surfaces les plus générales qu'on puisse déformer d'une manière continue de façon qu'un des systèmes de lignes dont l'image sphérique est formée des génératrices rectilignes de la sphère se conserve dans la déformation.

Leur élément linéaire a été donné explicitement.

Parmi toutes ces surfaces, dont la détermination explicite dépend de l'intégration de l'équation de Riccati

$$R' + \frac{1}{2} R^2 = -\frac{\Omega_1}{2}$$

et de trois quadratures, il en existe qu'on peut obtenir par de simples quadratures.

Considérons, en effet, l'équation précédente

$$R' + \frac{1}{2} R^2 = -\frac{1}{2}\left[\frac{T}{\Sigma + k} + \frac{3}{4}\frac{\Sigma'^2}{(\Sigma + k)^2}\right];$$

on sait qu'il suffirait d'en connaître une solution particulière pour en déduire, par deux quadratures, la solution générale.

Or, si l'on pose

$$R = \lambda \frac{\Sigma'}{\Sigma + k},$$

λ désignant une constante, on en déduira

$$\lambda \frac{\Sigma''}{\Sigma + k} + \left(\frac{\lambda^2}{2} - \lambda\right)\frac{\Sigma'^2}{(\Sigma + k)^2} = -\frac{1}{2}\frac{T}{\Sigma + k} - \frac{3}{8}\frac{\Sigma'^2}{(\Sigma + k)^2}.$$

L'équation admettra la solution $\lambda \frac{\Sigma'}{\Sigma + k}$, pourvu qu'on ait

$$\frac{\lambda^2}{2} - \lambda = -\frac{3}{8}$$

et

$$-\frac{1}{2} T = \lambda \Sigma'',$$

ce qui donne les deux cas :

$$\lambda = \frac{1}{2}, \qquad T = -\Sigma''; \qquad \lambda = \frac{3}{2}, \qquad T = -3\Sigma''.$$

Nous obtenons ainsi deux classes de surfaces qui *dépendent des trois fonctions arbitraires*

$$\varphi(\alpha), \quad \Sigma(\beta), \quad \Phi(\beta),$$

et qu'on peut obtenir explicitement au moyen de cinq quadratures. La forme particulière de la solution connue pour R permet, d'ailleurs, d'effectuer l'une de ces quadratures.

On trouve, par exemple, pour $\lambda = \frac{1}{2}$, $T = -\Sigma''$, l'expression générale

$$R = \frac{\Sigma'}{2(\Sigma + k)} + \frac{1}{\sqrt{\Sigma + k}\left(h + \frac{1}{2}\int \frac{d\beta}{\sqrt{\Sigma + k}}\right)},$$

où ne figure que la quadrature

$$\int \frac{d\beta}{\sqrt{\Sigma + k}}.$$

Les surfaces des deux classes particulières que nous venons de définir s'obtiendront donc explicitement par *quatre quadratures*.

Nous reviendrons ultérieurement sur leur détermination et sur l'étude de leurs propriétés géométriques.

II.

10. Au cours des recherches précédentes, j'ai été amené à déterminer trois solutions θ_1, θ_2, θ_3 de l'équation linéaire de *rang deux* identique à son adjointe

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \frac{-2\omega}{(1 + \alpha\beta)^2},$$

satisfaisant à la condition

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \mathrm{B}(\beta),$$

et à une condition supplémentaire

$$\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha}\right)^2 = 0.$$

Je me propose ici, pour la même équation, la résolution de l'équation générale

$$\sum_1^n \theta_i^2 = \mathrm{A} + \mathrm{B},$$

sans autre condition supplémentaire. L'intérêt de cette étude réside également dans le fait que, *pour* $n = 3$, *les surfaces* (A_1) *enveloppes du plan*

$$\theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z + \omega = 0$$

peuvent être déformées d'une manière continue avec conservation du réseau conjugué (α, β). A ces surfaces se rattachent aussi des surfaces remarquables (S) auxquelles elles sont *associées* au sens de M. Bianchi et des congruences, *cycliques* d'une infinité de manières.

Si l'on écrit l'équation *de rang deux* identique à son adjointe sous la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \frac{-2\theta}{(\alpha - \beta)^2},$$

il s'agit de résoudre l'équation fonctionnelle

$$\sum_{i=1}^{n}\left(2\frac{A_i - B_i}{\alpha-\beta} - A'_i - B'_i\right)^2 = A + B.$$

Soit d'abord à résoudre, de la manière la plus générale, l'équation fonctionnelle

$$(1) \qquad \sum\left(2\frac{A_1 - B_1}{\alpha-\beta} - A'_1 - B'_1\right)^2 = A + B,$$

le nombre des termes figurant dans le premier membre étant égal à 3 :

Nous remarquons qu'on pourra déduire de toute solution A_i, B_i, A, B une solution nouvelle en y remplaçant respectivement α et β par $\alpha+\lambda$, $\beta+\lambda$, où λ est une constante quelconque. Ceci permet de supposer que le point $\beta = 0$ est un point *ordinaire* des fonctions B_i, B.

En outre, de tout système de solutions de l'équation

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = A + B$$

on en peut déduire d'autres en exécutant sur les θ une transformation linéaire et homogène *orthogonale* à coefficients constants. Les θ étant composés linéairement avec les A et les B, il revient au même d'exécuter cette transformation simultanément sur les A et les B.

Ces remarques s'étendent à l'équation plus générale

$$(2) \qquad \sum_{1}^{n} \theta_i^2 = A + B,$$

où le nombre des carrés du premier membre est quelconque.

Posons maintenant [1]

$$\beta = \alpha + u,$$

et développons, par la formule de Taylor, les fonctions $B_i(\beta)$, $B(\beta)$ au voisinage du point ordinaire $u = 0$, ce qui donnera

$$B_i(\beta) = B_i(\alpha) + \frac{u}{1}B'_i(\alpha) + \frac{u^2}{1.2}B''_i(\alpha) + \ldots,$$

$$B(\beta) = B(\alpha) + \frac{u}{1}B'(\alpha) + \frac{u^2}{1.2}B''(\alpha) + \ldots;$$

---

(1) On pourrait traiter symétriquement les A et les B en posant $\beta - \alpha = 2u$, $\beta + \alpha = 2v$; la complication d'écritures qui en résulte ne paraît pas compensée par des avantages sérieux.

l'équation fonctionnelle (1) s'écrira

$$\sum\left(2\frac{A_1 - B_1 - uB'_1 - \frac{u^2}{1.2}B''_1 \ldots}{u} + A'_1 + B'_1 + uB''_1 + \frac{u^2}{1.2}B'''_1 + \ldots\right)^2$$
$$= A + B + \frac{u}{1}B' + \frac{u^2}{1.2}B'' + \ldots.$$

En introduisant les nouvelles inconnues

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} A_i - B_i = c_i, \\ A + B = c, \end{array}\right.$$

on la ramène à la forme simple

$$(4) \qquad \sum\left[2\frac{c_1}{u} + c'_1 + u^2\frac{B'''_1}{3!} + 2u^3\frac{B^{(4)}_1}{4!} + \ldots + (n-2)u^{n-1}\frac{B^{(n)}_1}{n!} + \ldots\right]^2,$$
$$= c + \frac{u}{1}B' + \frac{u^2}{1.2}B'' + \ldots,$$

d'où l'on déduira, en égalant les coefficients des mêmes puissances de u dans les deux membres, *toutes* les relations différentielles qui doivent déterminer les c_i et les B_i.

On obtient ainsi un nombre *illimité* de relations. Dès qu'on fixe le nombre n des solutions θ_i qui figurent dans le premier membre de l'équation (2) et, par suite, le nombre des fonctions arbitraires à déterminer, il est certain que toutes ces relations sont des conséquences d'un nombre limité d'entre elles; un raisonnement délicat permettrait de fixer ce dernier nombre, nous l'éviterons en nous astreignant à vérifier que les expressions obtenues pour les B_i et les c_i satisfont bien à l'équation.

Lorsque le nombre n des solutions θ qui figurent sous le signe $\sum$ n'est pas fixé, il est certain, d'autre part, qu'on ne peut limiter le nombre des équations différentielles à former. Nous devrons nous borner à indiquer un moyen simple de les former par récurrence, et, pour que le nombre n des solutions θ_i n'intervienne pas dans cette formation, nous nous astreindrons à ne faire que des combinaisons linéaires, à coefficients constants, des équations directement obtenues.

Écrivons donc successivement les relations qui résultent de l'égalité des coefficients des diverses puissances $\frac{1}{u^2}$, $\frac{1}{u}$, 1, u, u^2, ..., dans les deux membres de (4); nous aurons le Tableau suivant :

Terme en $\frac{1}{u^2}$:

$$\sum c_1^2 = 0.$$

Terme en $\frac{1}{u}$:

$$\sum c_1 c'_1 = 0,$$

conséquence de la précédente.

Terme constant :

$$\sum c'^2_1 = c.$$

Terme en u :

$$\sum c_1 B'''_1 = \frac{3}{2} B'.$$

Terme en u^2 :

$$\sum c_1 B^{(4)}_1 + \sum c'_1 B'''_1 = \frac{3}{2} B'',$$

conséquence de la précédente.

Terme en u^3 :

$$\frac{3}{5} \sum c_1 B^{(5)}_1 + \sum c'_1 B^{(4)}_1 = B'''.$$

Terme en u^4 :

$$\frac{2}{3} \sum (B'''_1)^2 + \frac{8}{15} \sum c_1 B^{(6)}_1 + \frac{6}{5} \sum c'_1 B^{(5)}_1 = B^{(4)}.$$

Terme en u^5 :

$$\frac{10}{3} \sum B'''_1 B^{(4)}_1 + \frac{10}{21} \sum c_1 B^{(7)}_1 + \frac{4}{3} \sum c'_1 B^{(5)}_1 = B^{(5)}.$$

Terme en u^6 :

$$6 \sum B^{(3)}_1 B^{(5)}_1 + 5 \sum (B^{(4)}_1)^2 + \frac{3}{7} \sum c_1 B^{(8)}_1 + \frac{10}{7} \sum c'_1 B^{(7)}_1 = B^{(6)}.$$

Terme en u^7 :

$$21 \sum B^{(4)}_1 B^{(5)}_1 + \frac{28}{3} \sum B'''_1 B^{(6)}_1 + \frac{3}{2} \sum c'_1 B^{(8)}_1 + \frac{7}{18} \sum c_1 B^{(9)}_1 = B^{(7)}.$$

Terme en u^8 :

$$\frac{126}{5} \sum (B^{(5)}_1)^2 + \frac{112}{3} \sum B^{(4)}_1 B^{(6)}_1 + \frac{40}{3} \sum B'''_1 B^{(7)}_1 + \frac{14}{9} \sum c'_1 B^{(9)}_1 + \frac{16}{45} \sum c_1 B^{(10)}_1 = B^{(8)}.$$

....

Nous regardons les c_i comme assujettis à vérifier la relation

$$(\delta) \qquad \sum c_1^2 = 0$$

(la relation

$$\sum c_1'^2 = c$$

détermine alors c) et nous allons chercher à déterminer les B_i. Il pourra se faire que les équations qui définissent les B_i ne soient compatibles que si les c_i vérifient de nouvelles relations; la suite du calcul montrera si l'on se trouve dans ce cas et quelles sont alors les relations nouvelles.

Pour simplifier les écritures, nous faisons remarquer que les B_i ne figurent dans nos relations que par leurs dérivées d'ordre égal ou supérieur à 3 et nous posons

$$\beta_i = B_i'''.$$

En outre, nous remplaçons partout $\sum u_i v_i$ par le produit symbolique uv, ce qui ne présente pas d'inconvénient *pourvu qu'on se borne à former des combinaisons linéaires à coefficients constants des équations et de leurs dérivées.*

Les équations à considérer s'écrivent avec ces conventions sous la *forme symbolique* simple :

$$(a_1) \qquad c\beta = \frac{3}{2} B',$$

$$(a_2) \qquad c\beta' + c'\beta = \frac{3}{2} B'',$$

$$(a_3) \qquad c\beta'' + \frac{5}{3} c'\beta' = \frac{5}{3} B''',$$

$$(a_4) \qquad c\beta''' + \frac{9}{4} c'\beta'' + \frac{5}{4}\beta^2 = \frac{15}{8} B^{(4)},$$

$$(a_5) \qquad c\beta^{(4)} + \frac{14}{5} c'\beta''' + 7\beta\beta' = \frac{21}{10} B^{(5)},$$

$$(a_6) \qquad c\beta^{(5)} + \frac{10}{3} c'\beta^{(4)} + \frac{35}{3}\beta'^2 + 14\beta\beta'' = \frac{7}{3} B^{(6)},$$

$$(a_7) \qquad c\beta^{(6)} + \frac{27}{7} c'\beta^{(5)} + 24\beta\beta''' + 54\beta'\beta'' = \frac{18}{7} B^{(7)},$$

$$(a_8) \qquad c\beta^{(7)} + \frac{35}{8} c'\beta^{(6)} + \frac{75}{2}\beta\beta^{(4)} + 105\beta'\beta''' + \frac{567}{8}(\beta'')^2 = \frac{45}{16} B^{(8)},$$

. . . .

Nous allons en déduire des relations entre les c et les β seuls.

Différentions (a_2), ce qui donne

$$c\beta'' + 2c'\beta' + c''\beta = \frac{3}{2} B''';$$

comparons cette équation à (a_3), nous aurons

$$(b_1) \qquad c'\beta' + 3c''\beta = -\frac{1}{2}B'''.$$

Différentions maintenant (a_3), nous aurons

$$c\beta''' + \frac{8}{3}c'\beta'' + \frac{5}{3}c''\beta' = \frac{5}{3}B^{(4)},$$

dont la comparaison à (a_4) donne

$$(b_2) \qquad c'\beta'' + 4c''\beta' - 3\beta^2 = -\frac{1}{2}B^{(4)}.$$

La différentiation de (b_1) donne alors

$$c'\beta'' + 4c''\beta' + 3c'''\beta = -\frac{1}{2}B^{(4)},$$

relation qui, comparée à (b_2), conduit à

$$(c_1) \qquad c'''\beta + \beta^2 = 0.$$

Nous continuons l'application de la méthode en différentiant (a_4), ce qui donne

$$c\beta^{(4)} + \frac{13}{4}c'\beta''' + \frac{9}{4}c''\beta'' + \frac{5}{2}\beta\beta' = \frac{15}{8}B^{(5)},$$

dont la comparaison à (a_5) entraîne

$$(b_3) \qquad c'\beta''' + 5c''\beta'' - 10\beta\beta' = -\frac{1}{2}B^{(5)}.$$

La différentiation de (b_2) donne d'autre part

$$c'\beta''' + 5c''\beta'' + 4c'''\beta' - 6\beta\beta' = -\frac{1}{2}B^{(5)},$$

dont la comparaison à (b_3) conduit à

$$(c_2) \qquad c'''\beta' + \beta\beta' = 0.$$

En comparant à (c_2) la relation obtenue en différentiant (c_1)

$$c'''\beta' + c^{(4)}\beta + 2\beta\beta' = 0,$$

on obtient la nouvelle équation

$$(c_3) \qquad c^{(4)}\beta + \beta\beta' = 0.$$

Recommençons les opérations précédentes en partant de (a_5), dont la différentiation donne

$$c\beta^{(5)} + \frac{19}{5} c'\beta^{(4)} + \frac{14}{5} c''\beta''' + 7(\beta'^2 + \beta\beta'') = \frac{21}{10} B^{(6)},$$

relation qui, comparée à (a_6), fournit la nouvelle relation

$$(b_4) \qquad c'\beta^{(4)} + 6c''\beta''' - 10\beta'^2 - 15\beta\beta'' = -\frac{1}{2} B^{(6)}.$$

Cette relation (b_4) comparée avec la dérivée de (b_3), qui s'écrit

$$c'\beta^{(4)} + 6c''\beta''' + 5c'''\beta'' - 10\beta'^2 - 10\beta\beta'' = -\frac{1}{2} B^{(6)},$$

donne la relation

$$(c_4) \qquad c'''\beta'' + \beta\beta'' = 0.$$

D'autre part, en différentiant (c_2), nous aurons

$$c'''\beta'' + c^{(4)}\beta' + \beta'^2 + \beta\beta'' = 0,$$

dont la comparaison avec (c_4) donne

$$(c_5) \qquad c^{(4)}\beta' + \beta'^2 = 0.$$

De même la différentiation de (c_3) donne

$$c^{(4)}\beta' + c^{(5)}\beta + \beta'^2 + \beta\beta'' = 0,$$

et ce résultat, rapproché de (c_5), conduit à

$$(c_6) \qquad c^{(5)}\beta + \beta\beta'' = 0.$$

Nous appliquons à nouveau le procédé en différentiant (a_6), ce qui donne

$$c\beta^{(6)} + \frac{13}{3} c'\beta^{(5)} + \frac{10}{3} c''\beta^{(4)} + \frac{112}{3} \beta'\beta'' + 14\beta\beta''' = \frac{7}{3} B^{(7)},$$

et cette dernière relation, comparée à (a_7), permet d'écrire

$$(b_5) \qquad c'\beta^{(5)} + 7c''\beta^{(4)} - 35\beta'\beta'' - 21\beta\beta''' = -\frac{1}{2} B^{(7)}.$$

La dérivation de (b_4) donnera d'ailleurs

$$c'\beta^{(5)} + 7c''\beta^{(4)} + 6c'''\beta''' - 35\beta'\beta'' - 15\beta\beta''' = -\frac{1}{2} B^{(7)},$$

dont la comparaison avec (b_5) fournit

$$(c_7) \qquad c'''\beta''' + \beta\beta''' = 0.$$

Différentions d'autre part (c_4), nous aurons la relation

$$c'''\beta''' + c^{(4)}\beta'' + \beta'\beta'' + \beta\beta''' = 0,$$

qui, rapprochée de (c_7), donne

$$(c_8) \qquad c^{(4)}\beta'' + \beta'\beta'' = 0.$$

De même (c_5) donne par différentiation

$$c^{(4)}\beta'' + c^{(5)}\beta' + 2\beta'\beta'' = 0,$$

dont la comparaison avec (c_8) permet d'écrire

$$(c_9) \qquad c^{(5)}\beta' + \beta'\beta'' = 0.$$

De même encore la différentiation de (c_6) et la comparaison du résultat avec (c_9) donne

$$(c_{10}) \qquad c^{(6)}\beta + \beta\beta''' = 0.$$

Un calcul identique aux précédents, appliqué à l'équation (a_7), conduit sans difficulté aux relations

$$
\begin{aligned}
&(c_{11}) \qquad & c'''\beta^{(4)} + \beta\beta^{(4)} &= 0,\\
&(c_{12}) \qquad & c^{(4)}\beta''' + \beta'\beta'' &= 0,\\
&(c_{13}) \qquad & c^{(5)}\beta'' + \beta''^2 &= 0,\\
&(c_{14}) \qquad & c^{(6)}\beta' + \beta'\beta''' &= 0,\\
&(c_{15}) \qquad & c^{(7)}\beta + \beta\beta^{(4)} &= 0,
\end{aligned}
$$

entièrement analogues à celles déjà obtenues.

Toutes ces relations sont d'ailleurs des conséquences des équations (c_i) $(i < 10)$ et de l'équation (c_{11}).

Toutes les relations entre les c et les β n'appartiennent pas au type précédent. Il est facile d'obtenir celles qui manquent. En égalant les deux valeurs de B''' obtenues au début, on aura

$$(\Delta) \qquad c\beta'' + 5c'\beta' + 10c''\beta = 0.$$

En égalant les deux valeurs de $B^{(4)}$, on obtiendra la dérivée de la précédente, comme un examen attentif de la formation des équations (c_i) aurait pu le montrer *a priori*.

En dehors de la série des relations (c_i) on n'obtiendra donc que la relation (Δ) et ses dérivées. Il convient d'ajouter que, parmi les (c_i), les équations

$$(c_1) \qquad c'''\beta \;\; + \beta^2 \;\; = 0,$$

$$(c_2) \qquad c'''\beta' \;\; + \beta\beta' \;\; = 0,$$

$$(c_4) \qquad c'''\beta'' \;\; + \beta\beta'' \;\; = 0,$$

$$(c_7) \qquad c'''\beta''' \;\; + \beta\beta''' \;\; = 0,$$

$$(c_{11}) \qquad c'''\beta^{(4)} + \beta\beta^{(4)} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

sont seules distinctes, toutes les autres pouvant s'en déduire par différentiation et combinaison linéaire.

11. Jusqu'à présent nous n'avons pas fixé le nombre des solutions θ qui figurent dans le premier membre de l'équation

$$(2) \qquad \sum_1^n \theta_i^2 = \mathrm{A}(\alpha) + \mathrm{B}(\beta);$$

proposons-nous d'étudier en détail la détermination des c et des β pour $n = 3$. Nous avons entre les c_i la relation

$$(\delta) \qquad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 0;$$

d'autre part, les relations (c_1), (c_2), (c_4) peuvent s'écrire

$$(c_1''' + \beta_1)\beta_1 + (c_2''' + \beta_2)\beta_2 + (c_3''' + \beta_3)\beta_3 = 0,$$

$$(c_1''' + \beta_1)\beta_1' + (c_2''' + \beta_2)\beta_2' + (c_3''' + \beta_3)\beta_3' = 0,$$

$$(c_1''' + \beta_1)\beta_1'' + (c_2''' + \beta_2)\beta_2'' + (c_3''' + \beta_3)\beta_3'' = 0.$$

On en conclut, *dans l'hypothèse où tous les $(c_i''' + \beta_i)$ ne sont pas nuls,* que *les β_i sont liés par au moins une relation linéaire et homogène à coefficients constants.*

I. *Supposons qu'il n'existe entre les β_i qu'une relation de cette nature;* on pourra l'écrire, d'après une remarque antérieure,

$$\beta_3 = 0$$

et les équations précédentes donneront

$$c_1''' + \beta_1 = 0, \qquad c_2''' + \beta_2 = 0.$$

Toutes les équations du type (c_i) sont manifestement satisfaites en vertu des trois relations ainsi obtenues.

Considérons, d'autre part, l'équation (Δ); elle pourra s'écrire

$$c_1 c_1^{(5)} + c_2 c_2^{(5)} + 5(c_1' c_1^{(4)} + c_2' c_2^{(4)}) + 10(c_1'' c_1''' + c_2'' c_2''') = 0.$$

Mais la relation

$$(\delta) \qquad \sum c_i^2 = 0$$

donne par différentiation

$$\sum c_i c_i' = 0,$$

$$\sum (c_i c_i'' + c_i'^2) \quad = 0,$$

$$\sum (c_i c_i''' + 3 c_i' c_i'') = 0,$$

$$\sum \left(c_i c_i^{(4)} + 4 c_i' c_i''' + 3(c_i'')^2\right) = 0,$$

$$\sum (c_i c_i^{(5)} + 5 c_i' c_i^{(4)} + 10 c_i'' c_i''') = 0;$$

la dernière de ces relations, comparée à (Δ), donnera donc

$$\frac{d^5(c_3^2)}{d\alpha^5} = 0,$$

ce qui exige que c_3^2 soit un polynome du quatrième degré en α.

En revenant aux notations initiales nous avons donc, pour déterminer les six fonctions inconnues B_1, B_2, B_3, A_1, A_2, A_3, les relations

$$B_3''' = A_1''' = A_2''' = 0,$$

$$(A_1 - B_1)^2 + (A_2 - B_2)^2 + (A_3 - B_3)^2 = 0,$$

$$A_3 - B_3 = \sqrt{P},$$

P désignant *un polynome quelconque du quatrième degré*. On peut, par suite, poser, en désignant par Q une *fonction arbitraire* de la variable β,

$$\begin{aligned}
A_1 &= f_1(\alpha),\\
A_2 &= f_2(\alpha),\\
A_3 &= f_3(\alpha) + \sqrt{P(\alpha)},\\
B_1 &= f_1(\beta) - i\sqrt{P(\beta)}\cos Q(\beta),\\
B_2 &= f_2(\beta) - i\sqrt{P(\beta)}\sin Q(\beta),\\
B_3 &= f_3(\beta),
\end{aligned}$$

les f_i désignant des polynomes arbitraires *du second degré*.

Un calcul élémentaire montre que ces expressions satisfont à l'équation fonctionnelle

$$\sum_{i=1}^{i=3}\left(2\frac{A_i - B_i}{\alpha-\beta} - A_i' - B_i'\right)^2 = A + B. \tag{1}$$

II. Examinons maintenant le cas où les β sont liés par deux relations linéaires et deux seulement. D'après une remarque antérieure, on pourra poser

$$\beta_2 = \beta_3 = 0,$$

et les équations (c_i) donneront

$$c_1''' + \beta_1 = 0.$$

L'équation (Δ) se réduira simplement, avec ces hypothèses, à

$$c_1 c_1^{(5)} + 5c_1' c_1^{(4)} + 10 c_1'' c_1''' = 0,$$

et donne

$$c_1^2 = P,$$

P désignant un polynome quelconque du quatrième degré.

Les fonctions c_2 et c_3 sont alors déterminées par la relation

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 0. \tag{δ}$$

En revenant aux notations initiales, on obtient donc

$$\begin{gathered}
A_1''' = B_2''' = B_3''' = 0,\\
(A_1 - B_1)^2 + (A_2 - B_2)^2 + (A_3 - B_3)^2 = 0,\\
A_1 - B_1 = \sqrt{P},
\end{gathered}$$

et l'on reconnaît que *cette solution dérive de la précédente par l'échange des* A *et des* B *et des variables* α *et* β.

III. Il reste à étudier le cas où les β sont liés par trois relations linéaires, qui pourront s'écrire

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0.$$

L'équation (Δ) disparaît alors, ainsi que toutes les relations (c_i), et il suffira d'assujettir les c à vérifier la relation

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 0,$$

On trouve, en revenant aux notations initiales,

$$B_1''' = B_2''' = B_3''' = 0,$$
$$(A_1 - B_1)^2 + (A_2 - B_2)^2 + (A_3 - B_3)^2 = 0,$$

ce qui permet de poser

$$B_1 = f_1(\beta), \qquad B_2 = f_2(\beta), \qquad B_3 = f_3(\beta),$$

avec

$$A_1 = f_1(\alpha) + c_1(\alpha),$$
$$A_2 = f_2(\alpha) + c_2(\alpha),$$
$$A_3 = f_3(\alpha) + c_3(\alpha),$$

les trois fonctions c_1, c_2, c_3 étant astreintes à vérifier la seule relation

$$(\gamma) \qquad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 0.$$

Remarquons en passant que *ce cas est le symétrique de celui, écarté au début, où toutes les quantités $c_i''' + \beta_i$ sont nulles* (1).

12. Nous venons de résoudre l'équation fonctionnelle

$$(1) \qquad \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = A + B,$$

dans le cas le plus général où aucune des fonctions $A(\alpha)$, $B(\beta)$ ne se réduit nécessairement à une constante. Il est utile d'examiner aussi les cas où le second membre ne dépend que de l'une des deux variables α et β ou bien se réduit à une constante.

1° Supposons d'abord que B se réduise à une constante ; on aura à ajouter aux relations qui lient les c et les b la relation nouvelle

$$c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 = 0.$$

---

(1) C'est aussi celui qui s'est présenté dans la première partie de ce travail. On constaterait aisément que $B(\beta)$ est nul dans ce cas.

Dans le cas (I), étudié tout à l'heure, où l'on a

$$\beta_3 = 0, \qquad c_1''' + \beta_1 = 0, \qquad c_2''' + \beta_2 = 0$$

avec

$$(5) \qquad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 0$$

et

$$c_3^2 = \mathrm{P},$$

cette relation nouvelle pourra s'écrire

$$c_1 c_1''' + c_2 c_2''' = 0,$$

ou encore, en considérant la dérivée troisième de la relation (δ),

$$3(c_1' c_1'' + c_2' c_2'') + \frac{1}{2}(c_3^2)''' = 0.$$

Elle donne donc immédiatement

$$3(c_1'^2 + c_2'^2) + \mathrm{P}'' = \text{const}.$$

et *les deux fonctions* c_1, c_2 *sont définies par les relations*

$$c_1^2 + c_2^2 = -\mathrm{P}, \qquad c_1'^2 + c_2'^2 = -\frac{\mathrm{P}''}{3} + k,$$

où P *désigne un polynome quelconque du quatrième degré et* k *une constante arbitraire.*

Si nous posons, comme plus haut,

$$c_1 = i\sqrt{\mathrm{P}}\cos \mathrm{Q}, \qquad c_2 = i\sqrt{\mathrm{P}}\sin \mathrm{Q},$$

la fonction inconnue Q *sera donnée par une quadrature*

$$\mathrm{Q}' = \frac{1}{2\mathrm{P}}\sqrt{\frac{4}{3}\mathrm{P}\mathrm{P}'' - \mathrm{P}'^2 + 4k\mathrm{P}};$$

il est essentiel d'observer que *le radical porte sur un polynome du quatrième degré seulement,* de telle sorte que la fonction Q est donnée par *une intégrale elliptique.*

En revenant aux notations initiales, on pourra, dans le cas actuel, prendre

$$\mathrm{A}_1 = f_1(\alpha), \qquad \mathrm{A}_2 = f_2(\alpha), \qquad \mathrm{B}_3 = f_3(\beta),$$

et ensuite

$$A_3 = f_3(\alpha) + \sqrt{P(\alpha)},$$
$$B_1 = f_1(\beta) - i\sqrt{P(\beta)}\cos Q,$$
$$B_2 = f_2(\beta) - i\sqrt{P(\beta)}\sin Q$$

avec

$$Q(\beta) = \int \sqrt{\frac{4}{3}PP'' - P'^2 + 4kP}\,\frac{d\beta}{2P},$$

en désignant, comme toujours, par f_1, f_2, f_3 des polynomes arbitraires du second degré et par P un polynome arbitraire du quatrième degré.

L'examen du cas (II) ne donnera rien de nouveau d'après la remarque faite plus haut.

Enfin, dans le cas (III), où l'on a

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0,$$

l'équation nouvelle

$$c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 = 0$$

est toujours vérifiée. La solution générale du cas (III) conduit donc toujours à une fonction B qui se réduit à une constante.

2° Supposons maintenant que les deux fonctions A et B se réduisent à des constantes.

Avec l'équation

$$c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 = 0,$$

on aura l'équation nouvelle

$$c_1'^2 + c_2'^2 + c_3'^2 = \text{const.} = h.$$

La discussion du cas précédent nous a montré que, dans le cas (I), la première équation entraîne

$$c_1'^2 + c_2'^2 = -\frac{P''}{3} + k;$$

on aura donc cette fois

$$-\frac{P''}{3} + k = h - c_3'^2 = h - \frac{P'^2}{4P},$$

c'est-à-dire

$$\frac{P'^2}{P} - \frac{4}{3}P'' = 4(h+k).$$

Il faut que P'^2 soit divisible par P, ce qui exige que P possède *au plus* deux facteurs linéaires distincts. Si l'on pose alors $P = \varpi^2$, en désignant par ϖ un polynome du second degré, on trouve

$$\varpi'^2 - 2\varpi\varpi'' = 3(h-k);$$

or cette relation est satisfaite par tout polynome du second degré, à condition de choisir convenablement h.

On se trouvera donc dans le cas actuel, (2°), *toutes les fois où* P *est un carré parfait.*

Il est clair que, dans le cas (III), on doit se borner à ajouter à la relation

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 0$$

la relation nouvelle

$$c_1'^2 + c_2'^2 + c_3'^2 = 0.$$

13. L'exposition détaillée de la résolution de l'équation fonctionnelle

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = A + B,$$

où l'on a

$$\theta_i = 2\frac{A_i - B_i}{\alpha - \beta} - A_i' - B_i',$$

nous permet de donner rapidement les résultats auxquels conduit une analyse identique appliquée à l'équation

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \theta_4^2 = A + B.$$

La simplicité des raisonnements est telle que leur extension au cas où le nombre des θ *est quelconque ne présente pas de difficulté.*

Supposons que toutes les fonctions $c_i''' + \beta_i$ ne soient pas nulles; il existera entre les β une ou plusieurs relations linéaires et homogènes, ce qui amène à distinguer les cas suivants :

I. On a

$$\beta_4 = 0, \qquad c_1''' + \beta_1 = c_2''' + \beta_2 = c_3''' + \beta_3 = 0.$$

L'équation (Δ), comparée avec la dérivée cinquième de (δ), donne

$$\frac{d^5(c_4^2)}{d\alpha^5} = 0;$$

on posera donc

$$c_4^2 = P,$$

et les autres c_i sont assujettis à vérifier la seule relation

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + P = 0,$$

P désignant un polynome quelconque du quatrième degré.

Si l'on revient aux notations initiales, on aura

$$B_4 = f_4(\beta), \qquad A_1 = f_1(\alpha), \qquad A_2 = f_2(\alpha), \qquad A_3 = f_3(\alpha),$$

où les f_i sont des polynomes du second degré, et ensuite

$$A_4 = f_4(\alpha) + \sqrt{P(\alpha)}, \qquad B_i = f_i(\beta) - c_i(\beta) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

avec la seule condition

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + P = 0.$$

II. On a

$$\beta_4 = \beta_3 = 0, \qquad c_1''' + \beta_1 = c_2''' + \beta_2 = 0.$$

L'équation (Δ) donne alors, par comparaison avec la dérivée cinquième de (δ),

$$c_3^2 + c_4^2 = P, \qquad c_1^2 + c_2^2 = -P.$$

On aura avec les notations initiales

$$B_3 = f_3(\beta), \qquad B_4 = f_4(\beta), \qquad A_1 = f_1(\alpha), \qquad A_2 = f_2(\alpha)$$

et ensuite

$$\begin{aligned} A_3 &= f_3(\alpha) + c_3(\alpha), & A_4 &= f_4(\alpha) + c_4(\alpha), \\ B_1 &= f_1(\beta) - c_1(\beta), & B_2 &= f_2(\beta) - c_2(\beta), \end{aligned}$$

les fonctions c_i étant assujetties à vérifier les deux relations

$$c_3^2 + c_4^2 = P, \qquad c_1^2 + c_2^2 = -P.$$

Le cas $\beta_4 = \beta_3 = \beta_2 = 0$ est symétrique du cas (I). Il reste simplement à examiner le cas dans lequel $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$, cas symétrique de celui où tous les $c_i''' + \beta_i$ sont nuls.

III. On a

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0.$$

Les c_i sont uniquement assujettis à vérifier la relation

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 = 0.$$

Avec les notations initiales, on a

$$\begin{aligned} B_i &= f_i(\beta) & (i &= 1, 2, 3, 4), \\ A_i &= f_i(\alpha) + c_i(\alpha) & (i &= 1, 2, 3, 4), \end{aligned}$$

pourvu que

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 = 0.$$

L'examen des cas singuliers où le second membre de l'équation

$$\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2+\theta_4^2=\mathrm{A}+\mathrm{B}$$

ne dépend pas des deux variables α et β, ne présente pas de difficultés.

1° Supposons $\mathrm{B}=$ const.; il sera nécessaire d'ajouter aux relations obtenues

$$c_1\beta_1+c_2\beta_2+c_3\beta_3+c_4\beta_4=0.$$

Dans le cas (I), les c_i seront astreints à vérifier la relation nouvelle

$$c_1'^2+c_2'^2+c_3'^2=-\frac{\mathrm{P}''}{3}+k,$$

k désignant une constante arbitraire.

Dans le cas (II), les c_i seront astreints à vérifier

$$c_1'^2+c_2'^2=-\frac{\mathrm{P}''}{3}+k.$$

Enfin le cas (III) est toujours un cas singulier; il n'y aura pas ici de condition nouvelle.

2° Supposons A et B constants; l'équation nouvelle est alors

$$c_1'^2+c_2'^2+c_3'^2+c_4'^2=\text{const.}=h.$$

Dans le cas (I) on trouve immédiatement la relation déjà obtenue

$$\frac{\mathrm{P}'^2}{\mathrm{P}}-\frac{4}{3}\mathrm{P}''=4(h-k),$$

qui exige simplement que P soit *carré parfait.*

Dans le cas (II) on aura, à cause de $c_1'^2+c_2'^2=-\dfrac{\mathrm{P}''}{3}+k$, la relation analogue

$$c_3'^2+c_4'^2=\frac{\mathrm{P}''}{3}+h-k.$$

Les fonctions c_1, c_2 sont donc de la forme

$$c_1=i\sqrt{\mathrm{P}}\cos\mathrm{Q},\qquad c_2=i\sqrt{\mathrm{P}}\sin\mathrm{Q}$$

avec

$$\mathrm{Q}'=\frac{\sqrt{\frac{4}{3}\mathrm{PP}''-\mathrm{P}'^2+4k\mathrm{P}}}{2\mathrm{P}};$$

les deux autres c_3, c_4 peuvent s'écrire de même

$$c_3 = \sqrt{P}\cos R, \qquad c_4 = \sqrt{P}\sin R$$

avec

$$R' = -\frac{\sqrt{\frac{4}{3}PP'' - P'^2 + 4(k-h)P}}{2P}.$$

(Les deux quadratures sont, bien entendu, des quadratures elliptiques.)

Enfin le cas (III) donne simplement, avec $\sum_1^4 c_i^2 = 0$, la relation nouvelle

$$\sum_1^4 c_i'^2 = h.$$

Poitiers, janvier 1908.