Annales de la faculté des sciences de Toulouse

A. Korn

Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité, dans le cas ou les efforts sont donnés à la surface

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 10 (1908), p. 165-269

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1908_2_10__165_0>

SOLUTION GÉNÉRALE DU PROBLÈME D'ÉQUILIBRE

DANS

LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ,

DANS LE CAS OU LES EFFORTS SONT DONNÉS A LA SURFACE,

PAR M. A. KORN.

Pour résoudre d'une manière générale le problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité, dans le cas où les efforts X_ν, Y_ν, Z_ν sont donnés à la surface du corps élastique, il faut trouver un système de solutions u, v, w des équations différentielles

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta u + k\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -X \quad (^1), \\ \Delta v + k\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = -Y, \\ \Delta w + k\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -Z, \end{cases}$$

continues avec leurs premières dérivées dans le domaine τ du corps élastique et satisfaisant aux conditions limites

$$(2)\qquad \begin{cases} 2\mu\dfrac{\partial u}{\partial \nu} - \mu(1-k)\theta\cos(\nu x) + \mu[\mathfrak{w}\cos(\nu y) - \mathfrak{v}\cos(\nu z)] = X_\nu, \\ 2\mu\dfrac{\partial v}{\partial \nu} - \mu(1-k)\theta\cos(\nu y) + \mu[\mathfrak{u}\cos(\nu z) - \mathfrak{w}\cos(\nu x)] = Y_\nu, \\ 2\mu\dfrac{\partial w}{\partial \nu} - \mu(1-k)\theta\cos(\nu z) + \mu[\mathfrak{v}\cos(\nu x) - \mathfrak{u}\cos(\nu y)] = Z_\nu, \end{cases}$$

(1) Nous nous servirons toujours des abréviations

$$\mathfrak{u} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},$$
$$\mathfrak{v} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$
$$\mathfrak{w} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

à la surface σ de τ; X, Y, Z sont des fonctions données dans le domaine τ, X_ν, Y_ν, Z_ν des fonctions données à la surface σ, k et μ sont des constantes inhérentes du milieu élastique; par ν nous désignerons toujours la normale intérieure de la surface σ. En imposant certaines conditions de continuité aux fonctions X, Y, Z, X_ν, Y_ν, Z_ν, on peut facilement démontrer que le problème ne peut avoir qu'un système unique ([1]) de solutions pouvant s'ajouter aux déplacements du corps supposé solide, si

$$k > \frac{1}{3}; \tag{3}$$

mais les démonstrations pour l'existence des solutions n'ont pu être données jusqu'à présent que pour un nombre très restreint de cas spéciaux, par exemple pour le cas où le corps élastique est une sphère.

Dans ce Mémoire je vais résoudre le problème proposé d'une manière générale, toutefois en supposant la surface σ fermée et possédant en chacun de ses points un plan tangent unique et deux rayons de courbure principaux bien déterminés, et en supposant que les fonctions X, Y, Z satisfassent aux conditions

$$\text{(4)}\ ([2])\quad |X(x_2, y_2, z_2) - X(x_1, y_1, z_1)| \leqq a r_{12}^{\varpi}, \quad \ldots \quad \left| \begin{array}{l} a \text{ constante finie}, \\ \varpi > 0, \end{array} \right.$$

pour deux points

$$(x_1, y_1, z_1) \quad \text{et} \quad (x_2, y_2, z_2)$$

quelconques du domaine τ, dont nous désignons la distance par r_{12};

Que les fonctions X_ν, Y_ν, Z_ν satisfassent aux conditions

$$\text{(5)}\ ([3])\quad X_\nu(x_2, y_2, z_2) - X_\nu(x_1, y_1, z_1) \leqq b r_{12}^{\varpi}, \quad \ldots \quad \left| \begin{array}{l} b \text{ constante finie}, \\ \varpi = 0, \end{array} \right.$$

pour deux points

$$(x_1, y_1, z_1) \quad \text{et} \quad (x_2, y_2, z_2)$$

quelconques de la surface σ, dont nous désignons la distance par r_{12}, et aux con-

---

[1] Du moins pour un corps simplement connexe; pour les corps qui ne sont pas simplement connexes, il faut des conditions supplémentaires pour assurer l'unicité de la solution.

[2] Cette condition sera remplie si les fonctions X, Y, Z sont continues avec leurs premières dérivées dans τ.

[3] Cette condition sera remplie si les fonctions X, Y, Z sont continues avec leurs premières dérivées sur σ.

ditions

$$
(6)\quad \begin{cases}
\int_\sigma X_\nu\, d\sigma = \int_\sigma Y_\nu\, d\sigma = \int_\sigma Z_\nu\, d\sigma = 0, \\
\int_\sigma (yZ_\nu - zY_\nu)\, d\sigma = 0, \\
\int_\sigma (zX_\nu - xZ_\nu)\, d\sigma = 0, \\
\int_\sigma (xY_\nu - yX_\nu)\, d\sigma = 0.
\end{cases}
$$

Il est utile de commencer par le cas le plus simple, où les fonctions X, Y, Z sont nulles; après la solution de ce problème, il n'est pas difficile de procéder au problème général; donc, en posant

$$
(7)\quad \begin{cases}
f_1 = \dfrac{X_\nu}{2\mu}, \\
f_2 = \dfrac{X_\nu}{2\mu}, \\
f_3 = \dfrac{X_\nu}{2\mu},
\end{cases}
$$

il s'agira de résoudre le problème fondamental

$$
(8)\quad \begin{Bmatrix}
\Delta u + k\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = 0 \\
\Delta v + k\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = 0 \\
\Delta w + k\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = 0
\end{Bmatrix} \quad \text{dans } \tau;
$$

$$
(9)\quad \begin{Bmatrix}
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{1-k}{2}\theta\cos(\nu x) - \dfrac{1}{2}[\mathfrak{w}\cos(\nu y) - \mathfrak{v}\cos(\nu z)] + f_1 \\
\dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \dfrac{1-k}{2}\theta\cos(\nu y) - \dfrac{1}{2}[\mathfrak{u}\cos(\nu z) - \mathfrak{w}\cos(\nu x)] + f_2 \\
\dfrac{\partial w}{\partial \nu} = \dfrac{1-k}{2}\theta\cos(\nu z) - \dfrac{1}{2}[\mathfrak{v}\cos(\nu x) - \mathfrak{u}\cos(\nu y)] + f_3
\end{Bmatrix} \quad \text{à la surface } \sigma.
$$

Si l'on veut se servir de la méthode des approximations successives pour résoudre ce problème, on peut d'abord essayer de trouver une solution pour le cas

$$k = 0,$$

et puis de trouver, à l'aide d'approximations successives, des solutions aussi pour le cas

$$k \neq 0;$$

mais, en procédant ainsi, on se heurte à des difficultés insurmontables provenant du fait, qui sera démontré du reste, qu'en envisageant k comme un paramètre, et u, v, w comme fonctions de k, on arrive à un point singulier essentiel pour

$$k = 0;$$

donc, si l'on veut se servir de la méthode des approximations successives, il faudrait d'abord savoir résoudre le problème (8), (9) pour *un*

$$k \neq 0.$$

Ainsi, nous résoudrons d'abord un tel problème préliminaire ($k = 1$)

$$(10^a) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta u + \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0 \\ \Delta v + \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0 \\ \Delta w + \frac{\partial \theta}{\partial \nu} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{dans } \tau;$$

$$(10^b) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu} &= -\frac{1}{2}[\mathfrak{w} \cos(\nu y) - \mathfrak{v} \cos(\nu z)] + f_1 \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} &= -\frac{1}{2}[\mathfrak{u} \cos(\nu z) - \mathfrak{w} \cos(\nu x)] + f_2 \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} &= -\frac{1}{2}[\mathfrak{v} \cos(\nu x) - \mathfrak{u} \cos(\nu y)] + f_3 \end{aligned} \right\} \quad \text{à la surface } \sigma.$$

Ce problème nous occupera dans le Chapitre I, où j'en donnerai la solution complète par la solution du problème transformé :

De trouver trois fonctions harmoniques continues avec leurs premières dérivées dans τ, u', v', w' satisfaisant aux conditions

$$(11^a) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial \nu} &= -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial \nu} \int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2}[\mathfrak{w}' \cos(\nu y) - \mathfrak{v}' \cos(\nu z)] + \frac{f_1}{4} \\ \frac{\partial v'}{\partial \nu} &= -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial^2}{\partial y \, \partial \nu} \int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2}[\mathfrak{u}' \cos(\nu z) - \mathfrak{w}' \cos(\nu x)] + \frac{f_2}{4} \\ \frac{\partial w'}{\partial \nu} &= -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial^2}{\partial z \, \partial \nu} \int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2}[\mathfrak{v}' \cos(\nu x) - \mathfrak{u}' \cos(\nu y)] + \frac{f_3}{4} \end{aligned} \right\} \quad \text{à la surface } \sigma,$$

et en posant

$$(11^b)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= 4u' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r},\\ v &= 4v' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r},\\ w &= 4w' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r}.\end{aligned}\right.$$

Je procéderai, pour résoudre le problème (11^a), de la manière suivante : On peut trouver successivement des fonctions harmoniques dans τ : u'_j, v'_j, w'_j $(j = 0, 1, 2, \ldots)$, satisfaisant aux conditions

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{aligned} \frac{\partial u'_0}{\partial \nu} &= f_1\\ \frac{\partial v'_0}{\partial \nu} &= f_2\\ \frac{\partial w'_0}{\partial \nu} &= f_3 \end{aligned}\right\}\quad \text{à la surface } \sigma,\\ \displaystyle\int_\tau u'_0\, d\tau = \int_\tau v'_0\, d\tau = \int_\tau w'_0\, d\tau = 0; \end{array}\right.$$

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{aligned} \frac{\partial u'_j}{\partial \nu} &= -3\frac{\partial u'_{j-1}}{\partial \nu} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\tau \theta'_{j-1}\frac{d\tau}{r}\\ &\quad - 2[\mathfrak{w}'_{j-1}\cos(\nu y) - \mathfrak{v}'_{j-1}\cos(\nu z)]\\ \frac{\partial v'_j}{\partial \nu} &= -3\frac{\partial v'_{j-1}}{\partial \nu} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial \nu}\int_\tau \theta'_{j-1}\frac{d\tau}{r}\\ &\quad - 2[\mathfrak{u}'_{j-1}\cos(\nu z) - \mathfrak{w}'_{j-1}\cos(\nu x)]\\ \frac{\partial w'_j}{\partial \nu} &= -3\frac{\partial w'_{j-1}}{\partial \nu} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \nu}\int_\tau \theta'_{j-1}\frac{d\tau}{r}\\ &\quad - 2[\mathfrak{v}'_{j-1}\cos(\nu x) - \mathfrak{u}'_{j-1}\cos(\nu y)] \end{aligned}\right\}\quad \begin{array}{c}\text{à la surface } \sigma\\ (j = 1, 2, 3, \ldots),\end{array}\\ \displaystyle\int_\tau u'_j\, d\tau = \int_\tau v'_j\, d\tau = \int_\tau w'_j\, d\tau = 0; \end{array}\right.$$

alors nous verrons que les séries

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} u' &= u'_0 + u'_1 + u'_2 + \ldots,\\ v' &= v'_0 + v'_1 + v'_2 + \ldots,\\ w' &= w'_0 + w'_1 + w'_2 + \ldots \end{aligned}\right.$$

seront absolument et uniformément convergentes [1] dans tout le domaine τ avec leurs premières dérivées, dans le cas spécial, où chaque

$$\mathfrak{u}'_{j\nu} \equiv \mathfrak{u}'_j \cos(\nu x) + \mathfrak{v}'_j \cos(\nu y) + \mathfrak{w}'_j \cos(\nu z) = 0 \quad \text{à la surface } \sigma \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

et elles représenteront dans ce cas un système de solutions du problème (11^a).

Il est plus facile de démontrer d'abord la convergence sous cette supposition; nous nous en débarrasserons ensuite par une petite complication [2] de la méthode originale : nous définirons la fonction ψ'_j comme la fonction harmonique du domaine τ ayant les dérivées normales

$$(14^a) \qquad \frac{\partial \psi'_j}{\partial \nu} = \mathfrak{u}'_{j\nu} \quad \text{à la surface } \sigma,$$

et nous définirons les fonctions successives u'_j, v'_j, w'_j au lieu des équations (12), (13) par les équations suivantes :

$$(14^b) \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \dfrac{\partial u'_0}{\partial \nu} = f_1 \\ \dfrac{\partial v'_0}{\partial \nu} = f_2 \\ \dfrac{\partial w'_0}{\partial \nu} = f_3 \end{array} \right\} \quad \text{à la surface } \sigma, \\ \displaystyle\int_\tau u'_0 \, d\tau = \int_\tau v'_0 \, d\tau = \int_\tau w'_0 \, d\tau = 0 \end{array} \right.$$

---

[1] A part des cas exceptionnels, où il faut partir, au lieu des fonctions f_1, f_2, f_3, des fonctions

$$f_1 - F_1, \quad f_2 - F_2, \quad f_3 - F_3,$$

F_1, F_2, F_3 étant des fonctions pour lesquelles on peut très facilement donner les solutions du problème

$$\frac{\partial u'}{\partial \nu} = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial \nu} \int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2}[\mathfrak{w}' \cos(\nu y) - \mathfrak{v}'(\nu z)] + \frac{F_1}{4}, \qquad \ldots$$

(*voir* le théorème III^a du Chapitre I).

[2] Je n'avais pas encore ajouté cette complication à ma Note dans les *Comptes rendus* (t. CXLVI, 1908, p. 578), je m'y suis borné à diriger l'attention des lecteurs à ce Mémoire plus étendu.

et

$$(14^c)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial u'_j}{\partial \nu} &= -3\frac{\partial u'_{j-1}}{\partial \nu} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\tau \theta'_{j-1}\frac{d\tau}{r} + 4\frac{\partial \mathrm{U}'_{j-1}}{\partial \nu} \\
&\quad - 2[(\mathfrak{w}'_{j-1} - \mathfrak{W}'_{j-1})\cos(\nu y) - (\mathfrak{v}'_{j-1} - \mathfrak{V}'_{j-1})\cos(\nu z)] \\
\frac{\partial v'_j}{\partial \nu} &= -3\frac{\partial v'_{j-1}}{\partial \nu} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial \nu}\int_\tau \theta'_{j-1}\frac{d\tau}{r} + 4\frac{\partial \mathrm{V}'_{j-1}}{\partial \nu} \\
&\quad - 2[(\mathfrak{u}'_{j-1} - \mathfrak{U}'_{j-1})\cos(\nu z) - (\mathfrak{w}'_{j-1} - \mathfrak{W}'_{j-1})\cos(\nu x)] \\
\frac{\partial w'_j}{\partial \nu} &= -3\frac{\partial w'_{j-1}}{\partial \nu} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \nu}\int_\tau \theta'_{j-1}\frac{d\tau}{r} + 4\frac{\partial \mathrm{W}'_{j-1}}{\partial \nu} \\
&\quad - 2[(\mathfrak{v}'_{j-1} - \mathfrak{V}'_{j-1})\cos(\nu x) - (\mathfrak{u}'_{j-1} - \mathfrak{U}'_{j-1})\cos(\nu y)]
\end{aligned}\right\} \text{ à la surface } \sigma \; (j=1, 2, \ldots),$$

$$\int_\tau u'_j\,d\tau = \int_\tau v'_j\,d\tau = \int_\tau w'_j\,d\tau = 0,$$

en posant

$$(14^d)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{U}'_j &= \frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left[\frac{\partial\psi'_j}{\partial y}\cos(\nu z) - \frac{\partial\psi'_j}{\partial z}\cos(\nu y)\right]\frac{d\sigma}{r} \\
\mathrm{V}'_j &= \frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left[\frac{\partial\psi'_j}{\partial z}\cos(\nu x) - \frac{\partial\psi'_j}{\partial x}\cos(\nu z)\right]\frac{d\sigma}{r} \\
\mathrm{W}'_j &= \frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left[\frac{\partial\psi'_j}{\partial x}\cos(\nu y) - \frac{\partial\psi'_j}{\partial y}\cos(\nu x)\right]\frac{d\sigma}{r}
\end{aligned}\right\} \quad (j=0, 1, 2, \ldots);$$

alors nous verrons que les séries

$$(14^e)\quad \left\{\begin{aligned}
u' &= u'_0 + u'_1 + u'_2 + \ldots, \\
v' &= v'_0 + v'_1 + v'_2 + \ldots, \\
w' &= w'_0 + w'_1 + w'_2 + \ldots, \\
\mathrm{U}' &= \mathrm{U}'_0 + \mathrm{U}'_1 + \mathrm{U}'_2 + \ldots, \\
\mathrm{V}' &= \mathrm{V}'_0 + \mathrm{V}'_1 + \mathrm{V}'_2 + \ldots, \\
\mathrm{W}' &= \mathrm{W}'_0 + \mathrm{W}'_1 + \mathrm{W}'_2 + \ldots
\end{aligned}\right.$$

seront absolument et uniformément convergentes [1] dans τ avec leurs premières dérivées; elles représenteront des fonctions harmoniques de τ, continues avec

---

[1] *Voir* la Remarque [1], page 170.

leurs premières dérivées et satisfaisant aux conditions limites

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial \nu} &= -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\tau \theta'\frac{d\tau}{r} + \frac{\partial U'}{\partial \nu} \\ &\quad -\frac{1}{2}[(\mathfrak{w}'-\mathfrak{W}')\cos(\nu y) - (\mathfrak{v}'-\mathfrak{V}')\cos(\nu z)] + \frac{f_1}{4} \\ \frac{\partial v'}{\partial \nu} &= -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial \nu}\int_\tau \theta'\frac{d\tau}{r} + \frac{\partial V'}{\partial \nu} \\ &\quad -\frac{1}{2}[(\mathfrak{u}'-\mathfrak{U}')\cos(\nu z) - (\mathfrak{w}'-\mathfrak{W}')\cos(\nu x)] + \frac{f_2}{4} \\ \frac{\partial w'}{\partial \nu} &= -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \nu}\int_\tau \theta'\frac{d\tau}{r} + \frac{\partial W'}{\partial \nu} \\ &\quad -\frac{1}{2}[(\mathfrak{v}'-\mathfrak{V}')\cos(\nu x) - (\mathfrak{u}'-\mathfrak{U}')\cos(\nu y)] + \frac{f_3}{4} \end{aligned}\right\} \text{ à la surface } \sigma.$$

Les fonctions

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} u &= 4(u'-U') + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta'\frac{d\tau}{r}, \\ v &= 4(v'-V') + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta'\frac{d\tau}{r}, \\ w &= 4(w'-W') + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta'\frac{d\tau}{r} \end{aligned}\right.$$

seront des solutions du problème (10^a), (10^b).

On peut ajouter à chaque système de solutions du problème (10^a), (10^b) ou (11^a), (11^b) les expressions

$$\begin{aligned} &a + c_2 z - c_3 y, \\ &b + c_3 x - c_1 z, \\ &c + c_1 y - c_2 x, \end{aligned}$$

a, b, c, c_1, c_2, c_3 étant des constantes quelconques; nous pouvons rendre les solutions uniques en ajoutant par exemple au problème (10^a), (10^b) les conditions

$$\begin{gathered} \int_\tau u\,d\tau = \int_\tau v\,d\tau = \int_\tau w\,d\tau = 0, \\ \int_\tau \mathfrak{u}\,d\tau = \int_\tau \mathfrak{v}\,d\tau = \int_\tau \mathfrak{w}\,d\tau = 0; \end{gathered}$$

au problème (11^a), (11^b) les conditions

$$\begin{gathered} \int_\tau u'\,d\tau = \int_\tau v'\,d\tau = \int_\tau w'\,d\tau = 0, \\ \int \mathfrak{u}'\,d\tau = \int_\tau \mathfrak{v}'\,d\tau = \int_\tau \mathfrak{w}'\,d\tau = 0. \end{gathered}$$

Dans le Chapitre II nous allons résoudre le problème fondamental (8), (9). A l'aide des méthodes données auparavant, nous pouvons trouver successivement des fonctions u'_j, v'_j, w'_j ($j = 0, 1, 2, \ldots$) harmoniques dans τ et satisfaisant aux conditions

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u'_0}{\partial \nu} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\tau \theta'_0\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}[\mathfrak{w}'_0\cos(\nu y) - \mathfrak{v}'_0\cos(\nu z)] = f_1\\
&\frac{\partial v'_0}{\partial \nu} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial \nu}\int_\tau \theta'_0\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}[\mathfrak{u}'_0\cos(\nu z) - \mathfrak{w}'_0\cos(\nu x)] = f_2\\
&\frac{\partial w'_0}{\partial \nu} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \nu}\int_\tau \theta'_0\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}[\mathfrak{v}'_0\cos(\nu x) - \mathfrak{u}'_0\cos(\nu y)] = f_3
\end{aligned}\right\}\ \text{à la surface } \sigma,\\
&\int_\tau u'_0\,d\tau = \int_\tau v'_0\,d\tau = \int_\tau w'_0\,d\tau = 0,\\
&\int_\tau \mathfrak{u}'_0\,d\tau = \int_\tau \mathfrak{v}'_0\,d\tau = \int_\tau \mathfrak{w}'_0\,d\tau = 0,
\end{aligned}\right.$$

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u'_j}{\partial \nu} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\tau \theta'_j\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}[\mathfrak{w}'_j\cos(\nu y) - \mathfrak{v}'_j\cos(\nu z)]\\
&\quad = -\frac{\partial u'_{j-1}}{\partial \nu} + \frac{1}{2}\theta'_{j-1}\cos(\nu x) - \frac{1}{2}[\mathfrak{w}'_{j-1}\cos(\nu y) - \mathfrak{v}'_{j-1}\cos(\nu z)]\\
&\frac{\partial v'_j}{\partial \nu} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial \nu}\int_\tau \theta'_j\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}[\mathfrak{u}'_j\cos(\nu z) - \mathfrak{w}'_j\cos(\nu x)]\\
&\quad = -\frac{\partial v'_{j-1}}{\partial \nu} + \frac{1}{2}\theta'_{j-1}\cos(\nu y) - \frac{1}{2}[\mathfrak{u}'_{j-1}\cos(\nu z) - \mathfrak{w}'_{j-1}\cos(\nu x)]\\
&\frac{\partial w'_j}{\partial \nu} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \nu}\int_\tau \theta'_j\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}[\mathfrak{v}'_j\cos(\nu x) - \mathfrak{u}'_j\cos(\nu y)]\\
&\quad = -\frac{\partial w'_{j-1}}{\partial \nu} + \frac{1}{2}\theta'_{j-1}\cos(\nu z) - \frac{1}{2}[\mathfrak{v}'_{j-1}\cos(\nu x) - \mathfrak{u}'_{j-1}\cos(\nu y)]
\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&\text{à la surface } \sigma\\ &(j = 1, 2, \ldots),\end{aligned}\\
&\int_\tau u'_j\,d\tau = \int_\tau v'_j\,d\tau = \int_\tau w'_j\,d\tau = 0,\\
&\int_\tau \mathfrak{u}'_j\,d\tau = \int_\tau \mathfrak{v}'_j\,d\tau = \int_\tau \mathfrak{w}'_j\,d\tau = 0,
\end{aligned}\right.$$

et les séries

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
u' &= u'_0 + \Lambda u'_1 + \Lambda^2 u'_2 + \ldots,\\
v' &= v'_0 + \Lambda v'_1 + \Lambda^2 v'_2 + \ldots,\\
w' &= w'_0 + \Lambda w'_1 + \Lambda^2 w'_2 + \ldots
\end{aligned}\right.$$

seront des fonctions harmoniques, continues avec leurs premières dérivées dans τ et satisfaisant aux conditions limites

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial \nu} &= -\frac{1}{8\pi}\frac{1}{1+\Lambda}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\tau \theta'\frac{d\tau}{r} \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\theta'\cos(\nu x) - \frac{1}{2}[\mathfrak{w}'\cos(\nu y) - \mathfrak{v}'\cos(\nu z)] + f_1 \\ \frac{\partial v'}{\partial \nu} &= -\frac{1}{8\pi}\frac{1}{1+\Lambda}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial \nu}\int_\tau \theta'\frac{d\tau}{r} \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\theta'\cos(\nu y) - \frac{1}{2}[\mathfrak{u}'\cos(\nu z) - \mathfrak{w}'\cos(\nu x)] + f_2 \\ \frac{\partial w'}{\partial \nu} &= -\frac{1}{8\pi}\frac{1}{1+\Lambda}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \nu}\int_\tau \theta'\frac{d\tau}{r} \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\theta'\cos(\nu z) - \frac{1}{2}[\mathfrak{v}'\cos(\nu x) - \mathfrak{u}'\cos(\nu y)] + f_3 \end{aligned}\right\} \text{à la surface } \sigma,$$

pour tous les nombres Λ, pour lesquels nous pouvons démontrer la convergence absolue et uniforme des séries (19) et de leurs dérivées dans τ.

Nous pourrons démontrer cette convergence [1] aussi longtemps que

$$(21)\qquad |\Lambda| < 1,$$

mais il nous sera possible de résoudre le problème (20) aussi dans les cas

$$|\Lambda| \geqq 1,$$

si Λ n'appartient pas à une suite infinie de nombres

$$1 \leqq |\Lambda_1| \leqq |\Lambda_2| \leqq \ldots$$

ayant un point essentiel à l'infini.

---

[1] A part des cas exceptionnels, où il faut partir, au lieu des fonctions f_1, f_2, f_3, des fonctions

$$f_1 - F_1,\quad f_2 - F_2,\quad f_3 - F_3,$$

F_1, F_2, F_3 étant des fonctions pour lesquelles on peut très facilement donner les solutions du problème :

$$\frac{\partial u'}{\partial \nu} = -\frac{1}{8\pi}\frac{1}{1+\Lambda}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\tau \theta'\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\theta'\cos(\nu x) - \frac{1}{2}[\mathfrak{w}'\cos(\nu y) - \mathfrak{v}'\cos(\nu z)] + F_1,$$

. . . .

(*voir* le théorème VI^a du Chapitre II).

Pour

$$\Lambda = \Lambda_j \qquad (j = 1, 2, \ldots), \tag{22}$$

il sera possible de trouver des fonctions harmoniques U'_j, V'_j, W'_j (¹), continues avec leurs premières dérivées dans τ et satisfaisant aux conditions limites

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial U'_j}{\partial \nu} &= -\frac{1}{8\pi}\,\frac{1}{1+\Lambda_j}\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r} \\
&\quad + \frac{1}{2}\,\frac{\Lambda_j}{1+\Lambda_j}\Theta'_j\cos(\nu x) - \frac{1}{2}\left[\mathfrak{W}'_j\cos(\nu y) - \mathfrak{V}'_j\cos(\nu z)\right]. \\
\frac{\partial V'_j}{\partial \nu} &= -\frac{1}{8\pi}\,\frac{1}{1+\Lambda_j}\,\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial \nu}\int_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r} \\
&\quad + \frac{1}{2}\,\frac{\Lambda_j}{1+\Lambda_j}\Theta'_j\cos(\nu y) - \frac{1}{2}\left[\mathfrak{U}'_j\cos(\nu z) - \mathfrak{W}'_j\cos(\nu x)\right] \\
\frac{\partial W'_j}{\partial \nu} &= -\frac{1}{8\pi}\,\frac{1}{1+\Lambda_j}\,\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \nu}\int_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r} \\
&\quad + \frac{1}{2}\,\frac{\Lambda_j}{1+\Lambda_j}\Theta'_j\cos(\nu z) - \frac{1}{2}\left[\mathfrak{V}'_j\cos(\nu x) - \mathfrak{U}'_j\cos(\nu y)\right]
\end{aligned}\right\}\ \text{à la surface } \sigma. \tag{23}$$

En posant

$$\left\{\begin{aligned}
u &= (1+\Lambda)\,u' + \frac{1}{8\pi}\,\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r}, \\
v &= (1+\Lambda)\,v' + \frac{1}{8\pi}\,\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r}, \\
w &= (1+\Lambda)\,w' + \frac{1}{8\pi}\,\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r},
\end{aligned}\right. \tag{24}$$

$$k = \frac{1}{1+2\Lambda}, \tag{25}$$

u', v', w' étant définies par les séries (19), on verra que les fonctions u, v, w représentent les solutions du problème fondamental (8), (9), si

$$k > \frac{1}{3}. \tag{26}$$

Pour

$$k = k_j \equiv \frac{1}{1+2\Lambda_j}, \tag{27}$$

il y aura des triplets de fonctions U_j, V_j, W_j continues avec leurs premières dérivées

---

(¹) Que nous appellerons *les triplets biharmoniques de seconde espèce* dans τ et satisfaisant aux conditions

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta U_j + k_j \frac{\partial \Theta_j}{\partial x} &= 0 \\ \Delta V_j + k_j \frac{\partial \Theta_j}{\partial y} &= 0 \\ \Delta W_j + k_j \frac{\partial \Theta_j}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{dans } \tau,$$

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial U_j}{\partial \nu} &= \frac{1-k_j}{2}\Theta_j \cos(\nu x) - \frac{1}{2}[\mathfrak{W}_j \cos(\nu y) - \mathfrak{V}_j \cos(\nu x)] \\ \frac{\partial V_j}{\partial \nu} &= \frac{1-k_j}{2}\Theta_j \cos(\nu y) - \frac{1}{2}[\mathfrak{U}_j \cos(\nu z) - \mathfrak{W}_j \cos(\nu x)] \\ \frac{\partial W_j}{\partial \nu} &= \frac{1-k_j}{2}\Theta_j \cos(\nu z) - \frac{1}{2}[\mathfrak{V}_j \cos(\nu x) - \mathfrak{U}_j \cos(\nu y)] \end{aligned}\right\} \quad \text{à la surface } \sigma.$$

Nous appellerons ces triplets *les triplets de Cosserat de seconde espèce,* en analogie avec les triplets de Cosserat de première espèce U_j, V_j, W_j, satisfaisant à des équations de la forme suivante :

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta U_j + k_j \frac{\partial \Theta_j}{\partial x} &= 0 \\ \Delta V_j + k_j \frac{\partial \Theta_j}{\partial y} &= 0 \\ \Delta W_j + k_j \frac{\partial \Theta_j}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{dans } \tau;$$

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} U_j &= 0 \\ V_j &= 0 \\ W_j &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{à la surface } \sigma.$$

Nous pourrons aussi facilement résoudre le problème général (1), (2), où les fonctions X, Y, Z ne sont pas nulles, et nous considérerons les développements en séries procédant d'après les triplets de Cosserat de seconde espèce. Dans le Chapitre III nous traiterons comme exemple de la théorie générale le cas de la sphère, pour lequel la solution a déjà été donnée pour la première fois par Lamé (1) et plus tard par d'autres savants de plusieurs manières différentes; MM. E. et F. Cosserat (2) ont les premiers représenté cette solution à l'aide des triplets U_j, V_j, W_j de seconde espèce; notre théorie est donc une généralisation de la solution

(1) *Journal de Mathématiques,* t. XIX, 1854, p. 51.
(2) *Comptes rendus,* t. CXXXIII, 1901, p. 271.

de MM. Cosserat pour des surfaces quelconques ne satisfaisant qu'aux conditions très générales d'être fermées et de posséder en chaque point un plan tangent unique et deux rayons de courbure principaux bien déterminés.

CHAPITRE I.

LE PROBLÈME PRÉLIMINAIRE ET LES TRIPLETS PRÉLIMINAIRES.

1. Soient f_1, f_2, f_3 trois fonctions données à la surface σ, continues de telle manière que l'on ait

$$(32) \qquad |f_j(x_2, y_2, z_2) - f_j(x_1, y_1, z_1)| \overline{\gtrless} A r_{12}^{\varpi} \quad \left| \begin{array}{l} \text{A constante finie} \\ \varpi > 0, \end{array} \right. \qquad (j = 1, 2, 3)$$

pour deux points (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) de la surface σ quelconques dont nous désignons la distance par r_{12} et satisfaisant aux six conditions

$$(33) \qquad \int_\sigma f_1 \, d\sigma = \int_\sigma f_2 \, d\sigma = \int_\sigma f_3 \, d\sigma = 0,$$

$$(34) \qquad \int_\sigma (y f_3 - z f_2) \, d\sigma = \int_\sigma (z f_1 - x f_3) \, d\sigma = \int_\sigma (x f_2 - y f_1) \, d\sigma = 0;$$

nous construirons successivement les fonctions harmoniques de τ

$$u'_0, \; v'_0, \; w'_0, \qquad u'_1, \; v'_1 \; w'_1, \qquad u'_2, \; v'_2 \; w'_2, \qquad \ldots$$

satisfaisant aux conditions (12), (13); nous nous assurerons d'abord de l'existence de toutes ces fonctions, nous démontrerons que toutes ces fonctions ont des dérivées premières continues dans τ, et nous examinerons la convergence des séries

$$(35) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u' = u'_0 + \lambda u'_1 + \lambda^2 u'_2 + \ldots, \\ v' = v'_0 + \lambda v'_1 + \lambda^2 v'_2 + \ldots, \\ w' = w'_0 + \lambda w'_1 + \lambda^2 w'_2 + \ldots, \end{array} \right.$$

en désignant par λ un nombre réel.

Nous pouvons d'abord affirmer que les fonctions harmoniques u'_0, v_0, w'_0 existent et possèdent des dérivées premières continues dans τ en ayant égard aux relations (33), (34) et à la supposition (32) (*voir* A. Korn, *Abhandlungen zur Potentialtheorie*, 2^e Mém., p. 5-9, Ferd. Dümmler, éditeur, Berlin, 1901). Nous remarquerons qu'à la suite des relations (33) on a

$$\int_\sigma \frac{\partial u'_0}{\partial \nu} d\sigma = \ldots = 0. \tag{36}$$

Si nous posons

$$\left\{\begin{aligned}
f'_1 &= -3\frac{\partial u'_0}{\partial \nu} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\tau \theta'_0 \frac{d\tau}{r} - 2[\mathfrak{w}'_0 \cos(\nu y) - \mathfrak{v}'_0 \cos(\nu z)],\\
f'_2 &= -3\frac{\partial v'_0}{\partial \nu} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial \nu}\int_\tau \theta'_0 \frac{d\tau}{r} - 2[\mathfrak{u}'_0 \cos(\nu z) - \mathfrak{w}'_0 \cos(\nu x)],\\
f'_3 &= -3\frac{\partial w'_0}{\partial \nu} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \nu}\int_\tau \theta'_0 \frac{d\tau}{r} - 2[\mathfrak{v}'_0 \cos(\nu x) - \mathfrak{u}'_0 \cos(\nu y)],
\end{aligned}\right. \tag{37}$$

nous aurons

$$\int_\sigma f'_1\, d\sigma = \int_\sigma f'_2\, d\sigma = \int_\sigma f'_3\, d\sigma = 0, \tag{38}$$

puisque

$$-\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\tau \theta'_0 \frac{d\tau}{r} = -2\int_\tau \frac{\partial \theta'_0}{\partial x} d\tau, \qquad \ldots,$$

$$-2\int_\sigma [\mathfrak{w}'_0 \cos(\nu y) - \mathfrak{v}'_0 \cos(\nu z)]\, d\sigma = 2\int_\tau \left(\frac{\partial \mathfrak{w}'_0}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}'_0}{\partial z}\right) d\tau, \qquad \ldots$$

et

$$\frac{\partial \theta'_0}{\partial x} - \left(\frac{\partial \mathfrak{w}'_0}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}'_0}{\partial z}\right) \equiv \Delta u'_0 = 0, \qquad \ldots. \tag{38'}$$

Toutes les dérivées premières de u'_0, v'_0, w'_0 seront, à cause de la condition (32), continues dans τ de telle manière qu'on ait

(39) (1)
$$\left.\begin{aligned}
&|D_1 u'_0(x_2, y_2, z_2) - D_1 u'_0(x_1, y_1, z_1)|\\
&|D_1 v'_0(x_2, y_2, z_2) - D_1 v'_0(x_1, y_1, z_1)|\\
&|D_1 w'_0(x_2, y_2, z_2) - D_1 w'_0(x_1, y_1, z_1)|
\end{aligned}\right\} \leqq \text{const. fin. } r_{12}^{\varpi}, \qquad 0 < \varpi < 1$$

---

(1) On a, en effet, d'après les théorèmes II et IV de mon Mémoire *Sur les équations de l'élasticité* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXIV, 1907, p. 15 et 23) et d'après la méthode de la moyenne arithmétique, le lemme suivant :

La fonction harmonique F *admettant les dérivées normales f à la surface σ, continues de la manière*

$$|f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)| \leqq \beta r_{12}^{\varpi} \qquad \left|\begin{array}{l}\beta \text{ constante finie,}\\ 0 < \varpi < 1,\end{array}\right.$$

aura des dérivées premières continues dans τ de la manière

$$|D_1 F(x_2, y_2, z_2) - D_1 F(x_1, y_1, z_1)| \leqq (C_1 \beta + C_2 \text{ max. abs. } f)\, r_{12}^{\omega},$$

C_1, C_2 *étant des constantes finies ne dépendant que de la surface σ et de ϖ.*

pour deux points (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) quelconques de τ, dont nous désignons la distance par r_{12}. En ayant égard au théorème II de mon Mémoire *Sur les équations de l'élasticité* (*Annales de l'École Normale,* 3e série, t. XXIV, 1907, p. 29), on trouvera

$$(40)\qquad \left.\begin{cases} |f'_1(x_2, y_2, z_2) - f'_1(x_1, y_1, z_1)| \\ |f'_2(x_2, y_2, z_2) - f'_2(x_1, y_1, z_1)| \\ |f'_3(x_2, y_2, z_2) - f'_3(x_1, y_1, z_1)| \end{cases}\right\} \overline{\overline{<}}\, \text{const. fin. } r_{12}^{\varpi},$$

et, à la suite des conditions (36) et (40), nous savons maintenant que les fonctions u'_1, v'_1, w'_1 admettant les dérivées normales

$$(41)\qquad \frac{\partial u'_1}{\partial \nu} = f'_1, \qquad \frac{\partial v'_1}{\partial \nu} = f'_2, \qquad \frac{\partial w'_1}{\partial \nu} = f'_3 \qquad \text{à la surface } \sigma$$

seront continues dans τ avec leurs premières dérivées. En procédant de la même manière pour les fonctions harmoniques u'_j, v'_j, w'_j $(j = 2, 3, \ldots)$ définies par les équations (13), on trouvera successivement que toutes ces fonctions harmoniques seront continues avec leurs premières dérivées dans tout le domaine τ.

Avant de nous occuper de la convergence des séries (36) nous allons démontrer trois lemmes qui nous seront utiles ensuite.

2. Lemme I. — *Soient*

$$u'_j, \quad v'_j, \quad w'_j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, p)$$

$p+1$ triplets de fonctions harmoniques dans τ, continues avec leurs premières dérivées, et supposons la continuité des premières dérivées de telle manière qu'on ait

$$(42)\qquad |\mathrm{u}'_j(x_2, y_2, z_2) - \mathrm{u}'_j(x_1, y_1, z_1)| \overline{\overline{<}}\, \mathrm{B}'_j r_{12}^{\varpi}, \quad \ldots, \quad 0 < \varpi < 1 \left| \begin{array}{l} \mathrm{B}'_j \text{ étant une constante,} \\ j = 0, 1, 2, \ldots, p, \end{array}\right.$$

pour deux points (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) quelconques de τ, dont nous désignons la distance par r_{12}; posons

$$(43)\qquad \begin{cases} u' = \alpha_0 u'_0 + \alpha_0 u'_1 + \alpha_2 u'_2 + \ldots + \alpha_p u'_p, \\ v' = \alpha_0 v'_0 + \alpha_1 v'_1 + \alpha_2 v'_2 + \ldots + \alpha_p v'_p, \\ w' = \alpha_0 w'_0 + \alpha_1 w'_1 + \alpha_2 w'_2 + \ldots + \alpha_p w'_p, \end{cases}$$

$$(44)\qquad \mathrm{B}' = \alpha_0 \mathrm{B}'_0 + \alpha_1 \mathrm{B}'_1 + \alpha_2 \mathrm{B}'_2 + \ldots + \alpha_p \mathrm{B}'_p,$$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ *étant des constantes réelles satisfaisant à l'équation*

$$(45)\qquad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_p^2 = 1,$$

et définissons les trois fonctions harmoniques $\overline{u'}, \overline{v'}, \overline{w'}$ *par les conditions*

$$(46)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u'}}{\partial \nu} = -3\dfrac{\partial u'}{\partial \nu} - \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\displaystyle\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r} - 2[w'\cos(\nu y) - v'\cos(\nu z)], \quad \ldots, \quad \text{à la surface } \sigma, \\ \displaystyle\int_\tau \overline{u'}\,d\tau = \int_\tau \overline{v'}\,d\tau = \int_\tau \overline{w'}\,d\tau = 0; \end{cases}$$

alors on pourra toujours choisir les constantes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ *de manière qu'on ait*

$$(47)\qquad \int_\tau (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})\,d\tau \leqq \varepsilon_p \int_\tau (u'^2 + v'^2 + w'^2)\,d\tau + \varepsilon'_p B'^2,$$

où ε_p *et* ε'_p *sont des nombres positifs qu'on peut faire aussi petits qu'on veut en agrandissant* p, *et qui ne dépendent nullement du choix des fonctions* u'_j, v'_j, w'_j, *ou*

$$(48)\qquad \overline{I} = \varepsilon_p I + \varepsilon'_p B'^2,$$

en posant

$$(49)\qquad \begin{cases} I = \displaystyle\int_\tau (u'^2 + v'^2 + w'^2)\,d\tau, \\ \overline{I} = \displaystyle\int_\tau (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})\,d\tau. \end{cases}$$

Nous pouvons toujours partager le domaine τ en m parties, où m est égal à $\frac{p}{3}$ ou au nombre entier le plus proche en dessous de $\frac{p}{3}$, de manière que dans chaque partie la distance la plus grande entre deux points de la même partie

$$(50)\qquad r_{12} \leqq \frac{\alpha}{\sqrt[3]{p}},$$

α représentant une constante finie ne dépendant que de la surface σ, et qu'on ait

$$(51)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\tau_i} \overline{u'}\,d\tau = 0, \\ \displaystyle\int_{\tau_i} \overline{v'}\,d\tau = 0, \\ \displaystyle\int_{\tau_i} \overline{w'}\,d\tau = 0 \end{cases}$$

pour chaque petit domaine τ_i; ces relations représentent en effet p (ou moins) équations linéaires et homogènes pour les $p+1$ constantes

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_p$$

qui doivent encore satisfaire à l'équation

$$\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_p^2=1.$$

Comme nous pouvons écrire les équations (46) définissant les fonctions $\overline{u'}$, $\overline{v'}$, $\overline{w'}$ de la manière suivante :

$$(46')\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial\nu}\left(\overline{u'}+3u'+\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\tau \theta'\dfrac{d\tau}{r}-\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{w}'\dfrac{d\tau}{r}+\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{v}'\dfrac{d\tau}{r}\right) \\ \quad =-\dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial y\, d\nu}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{w}'\dfrac{d\tau}{r}-\dfrac{\partial^2}{\partial z\, d\nu}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{v}'\dfrac{\partial\tau}{r}\right)-2[\mathfrak{w}'\cos(\nu y)-\mathfrak{v}'\cos(\nu z)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

les fonctions harmoniques

$$\overline{u'}+3u'+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta'\frac{d\tau}{r}-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}'\frac{d\tau}{r}+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}'\frac{d\tau}{r}, \qquad \ldots,$$

donc aussi

$$\overline{u'}, \quad \overline{v'}, \quad \overline{w'},$$

auront des dérivées premières dont la continuité satisfait dans tout le domaine τ, en raison de la supposition (42), aux conditions

$$(52)\quad |\overline{\mathfrak{u}'}(x_2,y_2,z_2)-\overline{\mathfrak{u}'}(x_1,y_1,z_1)| \overline{\gtrless} [c_1 \text{ max. abs.}(\mathfrak{u}',\mathfrak{v}',\mathfrak{w}')+c_2 B']r_{12}^{\varpi}, \qquad \ldots$$

pour deux points (x_1,y_1,z_1) et (x_2,y_2,z_2) de τ quelconques dont nous désignons la distance par r_{12}; c_1, c_2 étant des constantes finies qui ne dépendent que de la surface σ et de ϖ [1].

En ayant égard aux équations (51) on aura, pour chaque point $(\xi\eta\zeta)$ de chaque domaine τ_i,

$$(53)\qquad \overline{\mathfrak{u}'}(\xi\eta\zeta)=\frac{1}{\tau_i}\int_{\tau_i}[\overline{\mathfrak{u}'}(\xi\eta\zeta)-\overline{\mathfrak{u}'}(x,y,z)]\,d\tau, \qquad \ldots;$$

donc [en vertu de (50) et (52)],

$$|\overline{\mathfrak{u}'}(\xi\eta\zeta)| \overline{\gtrless} [c_1 \text{ max. abs.}(\mathfrak{u}',\mathfrak{v}',\mathfrak{w}')+c_2 B']\left(\frac{\alpha}{\sqrt[3]{p}}\right)^{\varpi},$$

---

[1] *Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XXIV, théorème II, 1907, p. 29.

et

$$(54)\qquad \int_\tau (\overline{\mathfrak{u}'^2} + \overline{\mathfrak{v}'^2} + \overline{\mathfrak{w}'^2})\, d\tau \mathrel{\substack{=\\<}} \{ C_1[\text{max. abs.}(\mathfrak{u}', \mathfrak{v}', \mathfrak{w}')]^2 + C_2 B'^2 \} \frac{1}{\sqrt[3]{p^{2\varpi}}} \quad (^1);$$

or, $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$ étant harmoniques dans τ, on sait qu'on a

$$(55)\qquad |\mathfrak{u}'| \mathrel{\substack{=\\<}} \frac{c}{\sqrt{\rho^3}} \sqrt{\int_\tau (\mathfrak{u}'^2 + \mathfrak{v}'^2 + \mathfrak{w}'^2)\, d\tau} + \rho^\varpi B',$$

où c est une constante finie ne dépendant que de la surface σ, et où ρ est un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut. [*Voir* la remarque page 847 de mon Mémoire *Allgemeine Lösung des biharmonischen Problems im Raume* (*Bull. de Cracovie,* 1907).]

En choisissant convenablement ρ, on pourra donc d'abord, dans l'inégalité

$$(56)\qquad \int_\tau (\overline{\mathfrak{u}'^2} + \overline{\mathfrak{v}'^2} + \overline{\mathfrak{w}'^2})\, d\tau \mathrel{\substack{=\\<}} \varepsilon \int_\tau (\mathfrak{u}'^2 + \mathfrak{v}'^2 + \mathfrak{w}'^2)\, d\tau + \varepsilon' B'^2,$$

faire ε' aussi petit qu'on veut, et, en choisissant après p assez grand, on pourra aussi faire ε aussi petit qu'on voudra. C. Q. F. D.

Lemme II. — *Soient u', v', w' trois fonctions harmoniques dans τ, continues avec leurs premières dérivées, et supposons la continuité des dérivées premières de telle manière qu'on ait*

$$(57)\qquad |\mathfrak{u}'(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{u}'(x_1, y_1, z_1)| \mathrel{\substack{=\\<}} B' r_{12}^\varpi, \quad \ldots \quad \left|\begin{array}{l} B' \text{ une constante donnée,} \\ 0 < \varpi < 1, \end{array}\right.$$

pour deux points (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) quelconques de τ, dont nous désignons la distance par r_{12}; définissons les trois fonctions $\overline{u'}$, $\overline{v'}$, $\overline{w'}$ par les conditions

$$(58)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \overline{u'}}{\partial \nu} = -3 \dfrac{\partial u'}{\partial \nu} - \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial^2}{\partial x\, \partial \nu} \displaystyle\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r} - 2[\mathfrak{w}' \cos(\nu y) - \mathfrak{v}' \cos(\nu z)] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{à la surface } \sigma, \\ \displaystyle\int_\tau \overline{u'}\, d\tau = \int_\tau \overline{v'}\, d\tau = \int_\tau \overline{w'}\, d\tau = 0; \end{array}\right.$$

alors on aura toujours pour deux points (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) quel-

---

(1) C_1, C_2 étant de nouveau deux constantes finies ne dépendant que de la surface σ et de ϖ.

conques de τ dont nous désignons la distance par r_{12}

$$(59)\quad \left|\overline{\mathfrak{u}'}(x_2, y_2, z_2) - \overline{\mathfrak{u}'}(x_1, y_1, z_1)\right| \overline{\overline{<}} \left(\frac{c}{\varepsilon^{1+\frac{\varpi}{3}}}\sqrt{\int_\tau (\mathfrak{u}'^2 + \mathfrak{v}'^2 + \mathfrak{w}'^2)\,d\tau} + \varepsilon B'\right) r_{12}^{\varpi}, \quad \ldots,$$

où c est une constante finie ne dépendant que de la surface σ et de ϖ, ε un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut, SI NOUS AJOUTONS LA SUPPOSITION

$$(60)\ (^1)\quad \mathfrak{u}'_\nu \equiv \mathfrak{u}'\cos(\nu x) + \mathfrak{v}'\cos(\nu y) + \mathfrak{w}'\cos(\nu z) = 0, \quad \text{à la surface } \sigma.$$

Comme nous pouvons écrire les équations (58) dans la forme (46) ou, ce qui est la même chose,

$$(61)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\overline{u'} + 3u' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta'\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}'\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}'\frac{d\tau}{r}\right) \\ &\quad = -\frac{1}{2\pi}\left(\left|\frac{\partial^2 \int_\tau \mathfrak{w}'\frac{d\tau}{r}}{\partial y\,\partial\nu}\right|_e - \left|\frac{\partial^2 \int_\tau \mathfrak{v}'\frac{d\tau}{r}}{\partial z\,\partial\nu}\right|_e\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

nous aurons, en ayant égard à la méthode de la moyenne arithmétique (²) et à l'inégalité

$$\left|D_2\,(^3)\int_\tau \mathfrak{u}'\frac{d\tau}{r}\right| \overline{\overline{<}}\ \text{const. fin.}\ \frac{\text{max. abs.}(\mathfrak{u}', \mathfrak{v}', \mathfrak{w}')}{\varepsilon_1} + \varepsilon_1 B', \qquad \ldots,$$

ε_1 étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut, à la surface σ :

$$(62^a)\quad \left\{\begin{aligned} &\overline{u'} + 3u' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta'\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{u}'\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}'\frac{d\tau}{r} \\ &\quad = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}'\frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}'\frac{d\tau}{r}\right) + \Xi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

(¹) Cette supposition est essentielle pour notre démonstration; elle nécessite la complication de la méthode mentionnée page 5 (*voir* n° 4).

(²) *Voir* le raisonnement tout à fait analogue pages 52-54 de mon Mémoire *Sur les équations de l'élasticité* (*Ann. Éc. Norm.*, 3ᵉ série, t. XXIV, 1907).

(³) En désignant par D_2 une dérivée seconde quelconque. (*Voir* HÖLDER, *Beiträge zur Potentialtheorie*. Thèse de Doctorat, Stuttgart, 1882.)

les premières dérivées de $\Xi H Z$ étant continues de la manière

$$(62^b)\quad \begin{cases} |D_1\Xi(x_2,y_2,z_2)-D_1\Xi(x_1,y_1,z_1)| \\ \quad \overline{\overline{<}}\left[\text{const. fin.}\dfrac{\text{max. abs.}(\mathfrak{u}',\mathfrak{v}',\mathfrak{w})}{\varepsilon_2}+\varepsilon_2 B'\right]r_{12}^{\varpi}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

ε_2 étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut; on aura donc, à la surface σ,

$$(63)\quad \begin{cases} \overline{\mathfrak{u}'}+3\mathfrak{u}'-2\mathfrak{u}'-\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\sigma \mathfrak{u}'_\nu\dfrac{d\sigma}{r}\ \text{(1)} \\ =2\mathfrak{u}'+\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\sigma \mathfrak{u}'_\nu\dfrac{d\sigma}{r}+\xi'-\dfrac{1}{2\pi}\Bigg[\cos(\nu y)\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial\nu}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{v}'\dfrac{d\tau}{r}-\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial\nu}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{u}'\dfrac{d\tau}{r}\right)_{i+e}\ \text{(2)} \\ \qquad -\cos(\nu z)\left(\dfrac{\partial^2}{\partial z\,\partial\nu}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{u}'\dfrac{d\tau}{r}-\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial\nu}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{w}'\dfrac{d\tau}{r}\right)_{i+e}\Bigg], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

où $\xi'\eta'\zeta'$ sont des fonctions continues à la surface σ de la manière

$$(64)\quad |\xi'(x_2,y_2,z_2)-\xi'(x_1,y_1,z_1)|\overline{\overline{<}}\left[\text{const. fin.}\dfrac{\text{max. abs.}(\mathfrak{u}',\mathfrak{v}',\mathfrak{w}')}{\varepsilon_3}+\varepsilon_3 B'\right]r_{12}^{\varpi},\quad \ldots,$$

ε_3 étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut; ou

$$(65)\quad \begin{cases} \overline{\mathfrak{u}'}=\xi'+\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\sigma \mathfrak{u}'_\nu\dfrac{d\sigma}{r}+\mathfrak{u}'+\dfrac{1}{2\pi}\left|\dfrac{\partial^2}{\partial\nu^2}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{u}'\dfrac{d\tau}{r}\right|_{i+e} \\ \quad -\dfrac{1}{2\pi}\Bigg[\cos(\nu x)\left|\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial\nu}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{u}'\dfrac{d\tau}{r}\right|_{i+e}+\cos(\nu y)\left|\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial\nu}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{v}'\dfrac{d\tau}{r}\right|_{i+e} \\ \qquad +\cos(\nu z)\left|\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial\nu}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{w}'\dfrac{d\tau}{r}\right|_{i+e}\Bigg], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

---

(1) On a

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \mathfrak{v}'\frac{d\tau}{r}-\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{u}'\frac{d\tau}{r}\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{u}'\frac{d\tau}{r}-\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \mathfrak{w}'\frac{d\tau}{r}\right]=4\pi\mathfrak{u}'+\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma \mathfrak{u}'_\nu\frac{d\sigma}{r},\quad\ldots,$$

en posant

$$\mathfrak{u}'_\nu=\mathfrak{u}'\cos(\nu x)+\mathfrak{v}'\cos(\nu y)+\mathfrak{w}'\cos(\nu z).$$

(2) En désignant

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\nu}\right|_{i+e}=\left|\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\nu}\right|_i+\left|\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\nu}\right|_e,\qquad\ldots;$$

nous ne mettrons du reste pas l'indice i quand il n'y a pas d'ambiguïté.

Comme on a (¹)

$$(66)\qquad \mathfrak{u}' + \frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\tau \mathfrak{u}'\frac{d\tau}{r}\right|_{i+e} = \xi_1, \qquad \ldots,$$

$$(67)\qquad \left\{\begin{array}{l} \cos(\nu x)\left|\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial\nu}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{u}'\frac{d\tau}{r}\right|_{i+e} + \cos(\nu y)\left|\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial\nu}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{v}'\frac{d\tau}{r}\right|_{i+e} \\ \qquad\qquad + \cos(\nu z)\left|\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial\nu}\displaystyle\int_\tau \mathfrak{w}'\frac{d\tau}{r}\right|_{i+e} = \xi_2 + \dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\sigma \mathfrak{u}'_\nu\frac{d\sigma}{r}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

où $\xi_1\eta_1\zeta_1$, $\xi_2\eta_2\zeta_2$ sont continues à la surface σ de la même manière (64) que $\xi'\eta'\zeta'$, on arrive aux équations très importantes pour notre méthode

$$(68)\qquad \left\{\begin{array}{l} \overline{\mathfrak{u}'} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_\sigma \mathfrak{u}'_\nu\frac{d\sigma}{r} + \xi, \\ \overline{\mathfrak{v}'} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_\sigma \mathfrak{u}'_\nu\frac{d\sigma}{r} + \eta, \\ \overline{\mathfrak{w}'} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_\sigma \mathfrak{u}'_\nu\frac{d\sigma}{r} + \zeta, \end{array}\right.$$

ξ, η, ζ étant des fonctions continues à la surface σ, de telle manière qu'on a, pour deux points (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) quelconques de σ, dont nous désignons la distance par r_{12},

$$(69)\qquad |\xi(x_2, y_2, z_2) - \xi(x_1, y_1, z_1)| \overline{\overline{<}} \left[\text{const. fin.}\,\frac{\text{max. abs.}(\mathfrak{u}', \mathfrak{v}', \mathfrak{w}')}{\varepsilon'} + \varepsilon' B'\right] r_{12}^{\varpi}, \quad \ldots,$$

ε' étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut.

Comme on a

$$|\mathfrak{u}'| \overline{\overline{<}} \frac{\text{const. fin.}}{\sqrt{\rho^3}}\sqrt{\int_\tau (\mathfrak{u}'^2 + \mathfrak{v}'^2 + \mathfrak{w}'^2)\,d\tau} + \rho^{\varpi} B', \qquad \ldots,$$

où ρ est un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut, on peut

---

(¹) Voir *Ann. Éc. Norm.*, 3ᵉ série, t. XXIV, 1907, p. 31, et *Comptes rendus*, t. CXLIII, 1906, p. 673 [formules (4) et (5), dont la première doit s'écrire

$$\frac{\partial V}{\partial \nu} = \frac{1}{2}\int_\omega \theta\frac{d\omega}{r} - \frac{1}{2R}V,$$

si ν désigne la normale *intérieure*].

écrire les inégalités (69) ainsi :

$$(70)\quad \left\{\begin{aligned} & |\xi(x_2, y_2, z_2) - \xi(x_1, y, z_1)| \\ & \quad \overline{\overline{<}} \left(\frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon^{1+\frac{3}{\varpi}}} \sqrt{\int_\tau (\mathfrak{u}'^2 + \mathfrak{v}'^2 + \mathfrak{w}'^2)\, d\tau} + \varepsilon \mathrm{B}' \right) r_{12}^{\varpi}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

en posant

$$\rho^{\varpi} = \varepsilon'^2, \qquad \varepsilon = 2\varepsilon'.$$

Jusqu'à présent, nous n'avons pas encore fait la supposition

$$\mathfrak{u}'_\nu = 0;$$

si nous ajoutons cette supposition, les équations (68) et les inégalités (70) démontrent aussitôt la proposition de notre lemme II.

Lemme III. — *Les fonctions successives* u'_j, v'_j, w'_j $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ *définies par les équations* (12), (13) *remplissent l'identité*

$$(71)\quad \begin{aligned} & \int_\tau (\mathfrak{u}'^2_j + \mathfrak{v}'^2_j + \mathfrak{w}'^2_j)\, d\tau \\ & = \int_\tau (\mathfrak{u}'_{j-1}\mathfrak{u}'_{j+1} + \mathfrak{v}'_{j-1}\mathfrak{v}'_{j+1} + \mathfrak{w}'_{j-1}\mathfrak{w}'_{j+1})\, d\tau \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}$$

En effet, posons

$$(72)\quad u_j = u'_j + 3u'_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta'_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \qquad \ldots,$$

on aura

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned} & \Delta u_j = -2\frac{\partial \theta'_{j-1}}{\partial x}, \qquad \ldots \qquad \text{dans } \tau, \\ & \frac{\partial u_j}{\partial x} = -2[\mathfrak{w}'_{j-1}\cos(\nu y) - \mathfrak{v}'_{j-1}\cos(\nu z)], \qquad \ldots \qquad \text{à la surface } \sigma, \end{aligned}\right.$$

donc

$$\begin{aligned} & \int_\tau \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial v_j}{\partial x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial w_j}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau \\ & \quad = 2\int_\tau (\mathfrak{u}_j\mathfrak{u}'_{j-1} + \mathfrak{v}_j\mathfrak{v}'_{j-1} + \mathfrak{w}_j\mathfrak{w}'_{j-1})\, d\tau; \end{aligned}$$

d'une manière analogue, on trouvera

$$\begin{aligned} & \int_\tau \left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\frac{\partial u_{j+1}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial v_j}{\partial x}\frac{\partial v_{j+1}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial w_j}{\partial x}\frac{\partial w_{j+1}}{\partial x} + \ldots\right) d\tau \\ & \quad = 2\int_\tau (\mathfrak{u}_j\mathfrak{u}'_j + \mathfrak{v}_j\mathfrak{v}'_j + \mathfrak{w}_j\mathfrak{w}'_j)\, d\tau, \end{aligned}$$

et aussi

$$\int_\tau \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial u_{j+1}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial v_j}{dx} \frac{\partial v_{j+1}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial w_j}{\partial x} \frac{\partial w_{j+1}}{\partial x} + \ldots \right) d\tau$$
$$= 2 \int_\tau (\mathfrak{u}_{j+1} \mathfrak{u}'_{j-1} + \mathfrak{v}_{j+1} \mathfrak{v}'_{j-1} + \mathfrak{w}_{j+1} \mathfrak{w}'_{j-1})\, d\tau,$$

donc

$$\int_\tau (\mathfrak{u}_j \mathfrak{u}'_j + \mathfrak{v}_j \mathfrak{v}'_j + \mathfrak{w}_j \mathfrak{w}'_j)\, d\tau = \int_\tau (\mathfrak{u}_{j+1} \mathfrak{u}'_{j-1} + \mathfrak{v}_{j+1} \mathfrak{v}'_{j-1} + \mathfrak{w}_{j+1} \mathfrak{w}'_{j-1})\, d\tau,$$

ou, comme on a, en vertu de (72),

$$(74) \qquad \mathfrak{u}_j = \mathfrak{u}'_j + 3\mathfrak{u}'_{j-1}, \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{u}_{j+1} = \mathfrak{u}'_{j+1} + 3\mathfrak{u}'_j, \qquad \ldots,$$

on trouve

$$\int_\tau [(\mathfrak{u}'_j + 3\mathfrak{u}'_{j-1})\mathfrak{u}'_j + (\mathfrak{v}'_j + 3\mathfrak{v}'_{j-1})\mathfrak{v}'_j + (\mathfrak{w}'_j + 3\mathfrak{w}'_{j-1})\mathfrak{w}'_j]\, d\tau$$
$$= \int_\tau [(\mathfrak{u}'_{j+1} + 3\mathfrak{u}'_j)\mathfrak{u}'_{j-1} + (\mathfrak{v}'_{j+1} + 3\mathfrak{v}'_j)\mathfrak{v}'_{j-1} + (\mathfrak{w}'_{j+1} + 3\mathfrak{w}'_j)\mathfrak{w}'_{j-1}]\, d\tau,$$

d'où l'on tire immédiatement l'identité (71).

3. Définissons les fonctions successives

$$u'_j, \quad v'_j, \quad w'_j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

par les équations (12) et (13), et posons

$$(75) \qquad \begin{cases} u''_j = \alpha_0 u'_j + \alpha_1 u'_{j+1} + \alpha_2 u'_{j+2} + \ldots + \alpha_p u'_{j+p}, \\ v''_j = \alpha_0 v'_j + \alpha_1 v'_{j+1} + \alpha_2 v'_{j+2} + \ldots + \alpha_p v'_{j+p}, \\ w''_j = \alpha_0 w'_j + \alpha_1 w'_{j+1} + \alpha_2 w'_{j+2} + \ldots + \alpha_p w'_{j+p}, \\ \mathrm{B}''_j = \alpha_0 \mathrm{B}'_j + \alpha_1 \mathrm{B}'_{j+1} + \alpha_2 \mathrm{B}'_{j+2} + \ldots + a_p \mathrm{B}'_{j+p}, \end{cases}$$

$$(76) \qquad \begin{cases} u'' = \sum_0^\infty {}_j \lambda^j u''_j, \\ v'' = \sum_0^\infty {}_j \lambda^j v''_j, \\ w'' = \sum_0^\infty {}_j \lambda^j w''_j; \end{cases}$$

nous allons démontrer que nous pouvons toujours, pour un λ quelconque, mais fixe, en choisissant p assez grand, choisir les constantes

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_p$$

de manière qu'on ait

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_p^2 = 1 \tag{77}$$

et que les séries u'', v'', w'' soient absolument et uniformément convergentes [1] avec leurs premières dérivées dans tout le domaine τ. Elles représenteront des solutions du problème :

$$\tag{78} \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \dfrac{\partial u''}{\partial \nu} = \alpha_0 f_1 + \alpha_1 \dfrac{\partial u'_1}{\partial \nu} + \alpha_2 \dfrac{\partial u'_2}{\partial \nu} + \ldots + \alpha_p \dfrac{\partial u'_p}{\partial \nu} \\ \qquad - \lambda \left[3 \dfrac{\partial u''}{\partial \nu} + \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial^2}{\partial x \, \partial \nu} \displaystyle\int_\tau \theta'' \dfrac{d\tau}{r} \right. \\ \qquad\qquad \left. + 2\mathfrak{w}'' \cos(\nu y) - \mathfrak{v}'' \cos(\nu z) \right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} \text{à la surface } \sigma, \\ \displaystyle\int_\tau u'' \, d\tau = \int_\tau v'' \, d\tau = \int_\tau w'' \, d\tau = 0. \end{array} \right.$$

Soit m un nombre fini quelconque, mais fixe; alors on pourra choisir les constantes

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_p$$

de manière qu'on ait

$$\tag{79} \int_\tau (\mathfrak{u}''^2_m + \mathfrak{v}''^2_m + \mathfrak{w}''^2_m) \, d\tau \overline{\overline{<}} \varepsilon_p \int_\tau (\mathfrak{u}''^2_{m-1} + \mathfrak{v}''^2_{m-1} + \mathfrak{w}''^2_{m-1}) \, d\tau + \varepsilon'_p \mathrm{B}''^2_{m-1},$$

puisque $\mathfrak{u}''_{m-1}$, $\mathfrak{v}''_{m-1}$, $\mathfrak{w}''_{m-1}$ satisfont aux conditions

$$\tag{80} \left. \begin{array}{l} |\mathfrak{u}''_{m-1}(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{u}''_{m-1}(x_1, y_1, z_1)| \\ |\mathfrak{v}''_{m-1}(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{v}''_{m-1}(x_1, y_1, z_1)| \\ |\mathfrak{w}''_{m-1}(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{w}''_{m-1}(x_1, y_1, z_1)| \end{array} \right\} \overline{\overline{<}} \mathrm{B}''_{m-1} r_{12}^{\varpi},$$

où ε_p et ε'_p sont des nombres positifs qu'on peut faire aussi petits qu'on veut en agrandissant p (lemme I).

---

[1] En faisant d'abord la supposition

$$\mathfrak{u}'_{j\nu} = 0$$

pour chaque $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Le lemme II nous apprend

$$\mathrm{B}''_j \overline{\overline{<}} \frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon^{-1+\frac{3}{\varpi}}} \sqrt{\mathrm{I}_{j-1}} + \bar{\varepsilon}\mathrm{B}''_{j-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

où

(81)
$$\mathrm{I}_j = \int_\tau (\mathfrak{u}''^2_j + \mathfrak{v}''^2_j + \mathfrak{w}''^2_j)\, d\tau \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

$\bar{\varepsilon}$ étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut; ou

(82)
$$\mathrm{B}''^2_j \overline{\overline{<}} \frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon^{1+\frac{3}{\varpi}}} \mathrm{I}_{j-1} + \varepsilon \mathrm{B}''^2_{j-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m-1),$$

ε étant de nouveau un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut. Nous multiplions les inégalités (82) par

$$\varepsilon^{m-2}, \quad \varepsilon^{m-3}, \quad \ldots, \quad \varepsilon, \quad 1$$

et additionnons; alors nous trouverons

(83)
$$\mathrm{B}''^2_{m-1} \overline{\overline{<}} \frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon^{1+\frac{3}{\varpi}}} (\mathrm{I}_{m-2} + \varepsilon \mathrm{I}_{m-3} + \ldots + \varepsilon^{m-2}\mathrm{I}_0) + \varepsilon^{m-1}\mathrm{B}''^2_0,$$

de façon que l'inégalité (79) peut s'écrire ainsi :

(84)
$$\mathrm{I}_m \overline{\overline{<}} \varepsilon_p \mathrm{I}_{m-1} + \text{const. fin.}\ \frac{\varepsilon'_p}{\varepsilon^{1+\frac{3}{\varpi}}} (\mathrm{I}_{m-2} + \varepsilon \mathrm{I}_{m-3} + \ldots + \varepsilon^{m-2}\mathrm{I}_0) + \varepsilon'_p \varepsilon^{m-1}\mathrm{B}''^2_0.$$

Nous allons démontrer que nous pouvons donner à l'inégalité (84) la forme suivante :

(85)
$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{I}_m + \varepsilon \mathrm{I}_{m-1} + \ldots + \varepsilon^{m-1}\mathrm{I}_1 + \mu_m \varepsilon^m \mathrm{I}_0 + \varepsilon^m \mathrm{B}''^2_0}{\mathrm{I}_{m-1} + \varepsilon \mathrm{I}_{m-2} + \ldots + \varepsilon^{m-2}\mathrm{I}_1 + \mu_{m-1}\varepsilon^{m-1}\mathrm{I}_0 + \varepsilon^{m-1}\mathrm{B}''^2_0} \overline{\overline{<}} 2\sqrt{\varepsilon}, \\ \mu_m = \dfrac{4}{(m+1)\sqrt{\varepsilon^m}}, \qquad \mu_{m-1} = \dfrac{4}{m\sqrt{\varepsilon^{m-1}}}, \end{array} \right.$$

ε représentant toujours un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut; en effet, nous pouvons toujours faire

$$\varepsilon_p \overline{\overline{<}} 2\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon, \qquad \varepsilon'_p \overline{\overline{<}} 2\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon,$$

et

$$\varepsilon'_p \frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon^{1+\frac{3}{\varpi}}} \quad \text{et} \quad \overset{=}{<} 2\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon, \qquad \text{et} \quad \overset{=}{<} \varepsilon^2 \frac{4(m+2)}{m(m+1)} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^m}} \quad (^1),$$

de manière que nous pouvons écrire l'inégalité (84) ainsi :

$$\mathrm{I}_m \overset{=}{<} (2\sqrt{\varepsilon} - \varepsilon)(\mathrm{I}_{m-1} + \varepsilon \mathrm{I}_{m-2} + \ldots + \varepsilon^{m-2}\mathrm{I}_1 + \varepsilon^{m-1}\mathrm{B}_0''^2) + \sqrt{\varepsilon^m}\frac{4(m+2)}{m(m+1)}\mathrm{I}_0$$

ou

$$\begin{aligned}&\mathrm{I}_m + \varepsilon \mathrm{I}_{m-1} + \ldots + \varepsilon^{m-1}\mathrm{I}_1 + \varepsilon^m \mathrm{B}_0''^2\\ &\quad \overset{=}{<} 2\sqrt{\varepsilon}(\mathrm{I}_{m-1} + \varepsilon \mathrm{I}_{m-2} + \ldots + \varepsilon^{m-2}\mathrm{I}_1 + \varepsilon^{m-1}\mathrm{B}_0''^2) + 2\varepsilon^{m-1}\mathrm{I}_0\left(\mu_{m-1}\sqrt{\varepsilon} - \frac{1}{2}\mu_m\varepsilon\right),\end{aligned}$$

et ce n'est pas autre chose que l'inégalité (85) que nous voulions démontrer.

Nous allons démontrer ensuite qu'on aura toujours les inégalités

$$(86)\qquad \begin{aligned}&\frac{\mathrm{I}_1 + \mu_1\varepsilon \mathrm{I}_0 + \varepsilon \mathrm{B}_0''^2}{\mu_0 \mathrm{I}_0 + \mathrm{B}_0''^2}\\ &\overset{=}{<} \frac{\mathrm{I}^2 + \varepsilon \mathrm{I}_1 + \mu_2\varepsilon^2 \mathrm{I}_0 + \varepsilon^2 \mathrm{B}_0''^2}{\mathrm{I}_1 + \mu_1 \varepsilon \mathrm{I}_0 + \varepsilon \mathrm{B}_0''^2} \overset{=}{<} \ldots\\ &\overset{=}{<} \frac{\mathrm{I}_k + \varepsilon \mathrm{I}_{k-1} + \ldots + \varepsilon^{k-1}\mathrm{I}_1 + \mu_k \varepsilon^k \mathrm{I}_0 + \varepsilon^k \mathrm{B}_0''^2}{\mathrm{I}_{k-1} + \varepsilon \mathrm{I}_{k-2} + \ldots + \varepsilon^{k-2}\mathrm{I}_1 + \mu_{k-1}\varepsilon^{k-1}\mathrm{I}_0 + \varepsilon^{k-1}\mathrm{B}_0''^2} \qquad (k = 2, 3, \ldots, m).\end{aligned}$$

En effet, le lemme III nous donne les identités

$$\begin{aligned}\int_\tau (u_k''^2 + v_k''^2 + w_k''^2)\,d\tau &= \int_\tau (u_{k-1}'' u_{k+1}'' + v_{k-1}'' v_{k+1}'' + w_{k-1}'' w_{k+1}'')\,d\tau,\\ \varepsilon \int_\tau (u_{k-1}''^2 + v_{k-1}''^2 + w_{k-1}''^2)\,d\tau &= \varepsilon\int_\tau (u_{k-2}'' u_k'' + v_{k-2}'' v_k'' + w_{k-2}'' w_k'')\,d\tau,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \varepsilon^{k-1}\int_\tau (u_1''^2 + v_1''^2 + w_1''^2)\,d\tau &= \varepsilon^{k-1}\int_\tau (u_0'' u_2'' + v_0'' v_2'' + w_0'' w_2'')\,d\tau,\\ \varepsilon^k \mu_k \int_\tau (u_0''^2 + v_0''^2 + w_0''^2)\,d\tau &= \varepsilon^k \sqrt{\frac{\mu_k^2}{\mu_{k+1}}\mu_{k+1}} \int_\tau (u_0''^2 + v_0''^2 + w_0''^2)\,d\tau,\\ \frac{\varepsilon^k}{\tau}\int_\tau \mathrm{B}_0''^2\,d\tau &= \frac{1}{\tau}\int_\tau \sqrt{\varepsilon^{k-1}\varepsilon^{k+1}}\,\mathrm{B}_0''^2\,d\tau.\end{aligned}$$

En additionnant toutes ces identités nous trouverons, à l'aide de l'inégalité de

(1) On s'aperçoit facilement que cette inégalité peut toujours être remplie par un p indépendant de m.

Schwarz,

$$
\begin{aligned}
(87)\qquad & (\mathrm{I}_k + \varepsilon \mathrm{I}_{k-1} + \ldots + \varepsilon^{k-1}\mathrm{I}_1 + \mu_k \varepsilon^k \mathrm{I}_0 + \varepsilon^k \mathrm{B}_0''^2)^2 \\
& \leqq (\mathrm{I}_{k+1} + \varepsilon \mathrm{I}_k + \ldots + \varepsilon^{k-1}\mathrm{I}_2 + \mu_{k+1}\varepsilon^{k+1}\mathrm{I}_0 + \varepsilon^{k+1}\mathrm{B}_0''^2) \\
& \times \left[\mathrm{I}_{k-1} + \varepsilon \mathrm{I}_{k-2} + \ldots + \varepsilon^{k-2}\mathrm{I}_1 + \varepsilon^{k-1}\left(1 + \frac{\mu_k^2}{\mu_{k+1}}\right)\mathrm{I}_0 + \varepsilon^{k-1}\mathrm{B}_0''^2\right],
\end{aligned}
$$

ou, comme on a toujours

$$1 + \frac{\mu_k^2}{\mu_{k+1}} \leqq \mu_{k-1},$$

c'est-à-dire

$$1 + 4\,\frac{k+2}{(k+1)^2}\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^{k-1}}} \leqq \frac{1}{k}\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^{k-1}}} \qquad (k = 1, 2, \ldots):$$

$$
\begin{aligned}
(88)\qquad & (\mathrm{I}_k + \varepsilon \mathrm{I}_{k-1} + \ldots + \varepsilon^{k-1}\mathrm{I}_1 + \mu_k \varepsilon^k \mathrm{I}_0 + \varepsilon^k \mathrm{B}_0''^2)^2 \\
& \leqq (\mathrm{I}_{k+1} + \varepsilon \mathrm{I}_k + \ldots + \varepsilon^{k}\mathrm{I}_1 + \mu_{k+1}\varepsilon^{k+1}\mathrm{I}_0 + \varepsilon^{k+1}\mathrm{B}_0''^2) \\
& \times (\mathrm{I}_{k-1} + \varepsilon \mathrm{I}_{k-2} + \ldots + \varepsilon^{k-2}\mathrm{I}_1 + \mu_{k-1}\varepsilon^{k-1}\mathrm{I}_0 + \varepsilon^{k-1}\mathrm{B}_0''^2);
\end{aligned}
$$

ce sont les inégalités que nous voulions démontrer.

Nous sommes donc arrivés au résultat suivant :

Soit ε un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut; alors nous pourrons toujours, pour un m entier quelconque, mais fixe, en prenant le nombre p assez grand [1], choisir les constantes

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_p$$

de manière qu'on ait

$$
\begin{aligned}
(89)\qquad & \frac{\mathrm{I}_1 + \mu_1\varepsilon \mathrm{I}_0 + \varepsilon \mathrm{B}_0''^2}{4\mathrm{I}_0 + \mathrm{B}_0''^2} \leqq \frac{\mathrm{I}_2 + \varepsilon \mathrm{I}_1 + \mu_2 \varepsilon^2 \mathrm{I}_0 + \varepsilon^2 \mathrm{B}_0''^2}{\mathrm{I}_1 + \mu_1 \varepsilon \mathrm{I}_0 + \varepsilon \mathrm{B}_0''^2} \leqq \ldots \\
& \leqq \frac{\mathrm{I}_{m-1} + \varepsilon \mathrm{I}_{m-2} + \ldots + \varepsilon^{m-2}\mathrm{I}_1 + \mu_{m-1}\varepsilon^{m-1}\mathrm{I}_0 + \varepsilon^{m-1}\mathrm{B}_0''^2}{\mathrm{I}_{m-2} + \varepsilon \mathrm{I}_{m-1} + \ldots + \varepsilon^{m-3}\mathrm{I}_1 + \mu_{m-2}\varepsilon^{m-2}\mathrm{I}_0 + \varepsilon^{m-2}\mathrm{B}_0''^2} \\
& \leqq \frac{\mathrm{I}_m + \varepsilon \mathrm{I}_{m-1} + \ldots + \varepsilon^{m-1}\mathrm{I}_1 + \mu_m \varepsilon^m \mathrm{I}_0 + \varepsilon^m \mathrm{B}_0''^2}{\mathrm{I}_{m-1} + \varepsilon \mathrm{I}_{m-2} + \ldots + \varepsilon^{m-2}\mathrm{I}_1 + \mu_{m-1}\varepsilon^{m-1}\mathrm{I}_0 + \varepsilon^{m-1}\mathrm{B}_0''^2} \leqq 2\sqrt{\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Après avoir obtenu ces inégalités nous pouvons continuer d'une manière connue :

Considérons les constantes

$$\alpha_0^{(m)}, \quad \alpha_1^{(m)}, \quad \alpha_2^{(m)}, \quad \ldots, \quad \alpha_p^{(m)} \quad [2]$$

---

(1) Sans que p dépende de m.

(2) J'ajoute les indices (m) pour exclure toute ambiguïté.

satisfaisant aux inégalités (89) pour un m donné comme les coordonnées d'un point de la sphère

$$(90) \qquad \alpha_0^1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_p^2 = 1$$

dans un espace de $p+1$ dimensions; alors les inégalités (89) auront lieu pour un certain domaine ∂_m.

De la même manière nous pouvons choisir les constantes

$$\alpha_0^{(m+1)}, \quad \alpha_1^{(m+1)}, \quad \alpha_2^{(m+1)}, \quad \ldots, \quad \alpha_p^{(m+1)}$$

de manière qu'on ait les inégalités

$$(91) \quad \frac{I_1 + \mu_1 \varepsilon I_0 + \varepsilon B_0''^2}{4I_0 + B_0''^2} \leqq \frac{I_2 + \varepsilon I_1 + \mu_2 \varepsilon^2 I_0 + \varepsilon^2 B_0''^2}{I_1 + \mu_1 \varepsilon I_0 + \varepsilon B_0''^2} \leqq \ldots$$
$$\leqq \frac{I_m + \varepsilon I_{m-1} + \ldots + \varepsilon^{m-1} I_1 + \mu_m \varepsilon^m I_0 + \varepsilon^m B_0''^2}{I_{m-1} + \varepsilon I_{m-2} + \ldots + \varepsilon^{m-2} I_1 + \mu_{m-1} \varepsilon^{m-1} I_0 + \varepsilon^{m-1} B_0''^2}$$
$$\leqq \frac{I_{m+1} + \varepsilon I_m + \ldots + \varepsilon^m I_1 + \mu_{m+1} \varepsilon^{m+1} I_0 + \varepsilon^{m+1} B_0''^2}{I_m + \varepsilon I_{m-1} + \ldots + \varepsilon^{m-1} I_1 + \mu_m \varepsilon^m I_0 + \varepsilon^m B_0''^2} \leqq 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Ces inégalités auront lieu pour un certain domaine ∂_{m+1} de la sphère (90), contenu tout à fait dans le domaine ∂_m. En continuant ainsi, on voit que le domaine ∂_{m+2} doit être contenu dans ∂_{m+1}, le domaine ∂_{m+3} dans ∂_{m+2}, et ainsi de suite; il doit donc exister un système de valeurs

$$\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$$

de telle sorte que les inégalités (89) aient lieu aussi pour un m croissant indéfiniment, et, en choisissant pour

$$\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$$

ces valeurs dans les équations (75), on aura

$$(92) \qquad \int_\tau (u_j''^2 + v_j''^2 + w_j''^2)\, d\tau \leqq (4I_0 + B_0''^2)(2\sqrt{\varepsilon})^j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Si λ est un nombre réel quelconque, mais fixe, nous pourrons toujours, en faisant

$$(93) \qquad |2\lambda^2 \sqrt{\varepsilon}| \leqq L, \qquad 0 < L < 1,$$

obtenir l'inégalité

$$(94^a) \qquad \int_\tau (u_j''^2 + v_j''^2 + w_j''^2)\, d\tau \leqq \text{const. fin.} (I_0 + B_0''^2) L^j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

En ajoutant les inégalités

$$(94^b)\quad \left\{\begin{array}{l} |\mathfrak{u}''_j(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{u}''_j(x_1, y_1, z_1)| \\ \quad \overline{\overline{<}} \left[\dfrac{\text{const. fin.}}{\varepsilon} \text{max. abs.}(\mathfrak{u}''_{j-1}, \mathfrak{v}''_{j-1}, \mathfrak{w}''_{j-1}) + \varepsilon B''_{j-1}\right] r_{12}^{\varpi} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

[*voir* la démonstration du lemme II, formules (68) et (69)], on arrivera, par une démonstration identique avec celle donnée pages 51-59 de mon Mémoire *Sur les équations de l'élasticité* (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XXIV, 1907), aux inégalités

$$(95)\quad \left.\begin{array}{l} |\lambda^j \mathfrak{u}''_j| \\ |\lambda^j \mathfrak{v}''_j| \\ |\lambda^j \mathfrak{w}''_j| \end{array}\right\} \overline{\overline{<}} \text{const. fin.} \sqrt{I_0 + B_0''^2}\, \overline{L}^j, \qquad 0 < \overline{L} < 1$$

$$(96)\quad \left.\begin{array}{l} |\lambda^j[\mathfrak{u}''_j(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{u}''_j(x_1, y_1, z_1)]| \\ |\lambda^j[\mathfrak{v}''_j(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{v}''_j(x_1, y_1, z_1)]| \\ |\lambda^j[\mathfrak{w}''_j(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{w}''_j(x_1, y_1, z_1)]| \end{array}\right\} \overline{\overline{<}} \text{const. fin.} \sqrt{I_0 + B_0''^2}\, \overline{L}^j r_{12}^{\varpi} \qquad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

et comme on a, en vertu des équations (46′),

$$|\theta''_{j+1} + \theta''_j| \overline{\overline{<}} \text{const. fin. max. abs.}(\mathfrak{u}''_j, \mathfrak{v}''_j, \mathfrak{w}''_j) + \text{const. fin.} B''_j,$$

$$\begin{array}{l} |\theta''_{j+1}(x_2, y_2, z_2) + \theta''_j(x_2, y_2, z_2) - \theta''_{j+1}(x_1, y_1, z_1) - \theta''_j(x_1, y_1, z_1)| \\ \quad \overline{\overline{<}} [\text{const. fin. max. abs.}(\mathfrak{u}''_j, \mathfrak{v}''_j, \mathfrak{w}''_j) + \text{const. fin.} B''] r_{12}^{\varpi}, \end{array}$$

on aura aussi

$$(97)\qquad |\theta''_{j+1} + \theta''_j| \overline{\overline{<}} \text{const. fin.} \sqrt{I_0 + B_0''^2} \left(\frac{\overline{L}}{\lambda}\right)^j,$$

$$(98)\quad \begin{array}{l} |\theta''_{j+1}(x_2, y_2, z_2) + \theta''_j(x_2, y_2, z_2) - \theta''_{j+1}(x_1, y_1, z_1) - \theta''_j(x_1, y_1, z_1)| \\ \quad \overline{\overline{<}} \text{const. fin.} \sqrt{I_0 + B_0''^2} \left(\dfrac{\overline{L}}{\lambda}\right)^j r_{12}^{\varpi}. \end{array}$$

Nous pouvons maintenant conclure que la fonction

$$(99)\qquad \lim_{j=\infty} \theta''_j \equiv \theta''_0 - (\theta''_0 + \theta''_1) + (\theta''_1 + \theta''_2) - \dots$$

est bien définie dans le domaine τ et continue de la manière

$$(100)\quad \begin{array}{l} \left|\lim\limits_{j=\infty} \theta''_j(x_2, y_2, z_2) - \lim\limits_{j=\infty} \theta''_j(x_1, y_1, z_1)\right| \\ \quad \overline{\overline{<}} [\text{const. fin. max. abs.}(f_1, f_2, f_3) + \text{const. fin.} A] r_{12}^{\varpi}. \end{array}$$

Les fonctions

$$\lim_{j=\infty} u''_j,$$
$$\lim_{j=\infty} v''_j,$$
$$\lim_{j=\infty} w''_j$$

sont bien définies avec leurs premières dérivées, et l'on a

$$(101)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\lim_{j=\infty} w''_j - \frac{\partial}{\partial z}\lim_{j=\infty} v''_j = 0, \qquad \ldots,$$

donc

$$(102)\qquad \lim_{j=\infty} \theta''_j = \text{const.},$$

et, comme

$$\lim_{j=\infty} u''_j, \quad \lim_{j=\infty} v''_j, \quad \lim_{j=\infty} w''_j$$

doivent satisfaire aux conditions limites

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\lim_{j=\infty} u''_j = -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\tau \lim_{j=\infty}\theta''_j \frac{d\tau}{r}, \qquad \ldots \qquad \text{à la surface } \sigma,$$

on aura, dans tout le domaine τ,

$$\lim_{j=\infty} u''_j + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \lim_{j=\infty}\theta''_j \frac{d\tau}{r} = \text{const.}, \qquad \ldots,$$

donc

$$(103)\qquad \lim_{j=\infty} \theta''_j = 0,$$

de manière qu'on aura aussi, d'après (97) et (98),

$$\left.\begin{array}{ll} (104) & |\lambda^j \theta''_j| \overline{\gtrless} \text{const. fin.} \sqrt{\mathrm{I}_0 + \mathrm{B}''^2_0}\, \overline{\mathrm{L}}^j \\ (105) & |\lambda^j[\theta''_j(x_2, y_2, z_2) - \theta''_j(x_1, y_1, z_1)]| \overline{\gtrless} \text{const. fin.} \sqrt{\mathrm{I}_0 + \mathrm{B}''^2_0}\, \overline{\mathrm{L}}^j r_{12}^{\varpi} \end{array}\right\} (j = 1, 2, \ldots),$$

et les séries

$$(106)\qquad \left\{\begin{array}{l} u'' = u''_0 + \lambda u''_1 + \lambda^2 u''_2 + \ldots, \\ v'' = v''_0 + \lambda v''_1 + \lambda^2 v''_2 + \ldots, \\ w'' = w''_0 + \lambda w''_1 + \lambda^2 w''_2 + \ldots \end{array}\right.$$

représenteront, en effet, les solutions du problème (78).

On aura, d'après (95) et (104),

$$(107)\qquad \left.\begin{array}{l} |\theta''| \\ |u''| \\ |v''| \\ |w''| \end{array}\right\} \overline{\overline{<}}\, C_1 \text{ max. abs.}(f_1, f_2, f_3) + C_2 A,$$

d'après (96) et (105),

$$(108)\qquad \left.\begin{array}{l} |\theta''(x_2, y_2, z_2) - \theta''(x_1, y_1, z_1)| \\ |u''(x_2, y_2, z_2) - u''(x_1, y_1, z_1)| \\ |v''(x_2, y_2, z_2) - v''(x_1, y_1, z_1)| \\ |w''(x_2, y_2, z_2) - w''(x_1, y_1, z_1)| \end{array}\right\} \overline{\overline{<}}\, [C_1 \text{ max. abs.}(f_1, f_2, f_3) + C_2 A]\, r_{12}^{\varpi},$$

C_1, C_2 étant des constantes finies ne dépendant que de la surface σ et de ϖ, λ étant regardé comme fixe.

Notons ici une autre forme qu'on peut donner aux inégalités (107). On peut démontrer, de la même manière que nous avons démontré les formules (107), les inégalités suivantes :

$$(109)\qquad \left.\begin{array}{l} |u'' - u''_0| \\ |v'' - v''_0| \\ |w'' - w''_0| \end{array}\right\} \overline{\overline{<}}\, \text{const. fin.} \sqrt{I_1 + B_1''^2},$$

et, comme on peut facilement déduire de la démonstration du lemme II

$$B''_1 \overline{\overline{<}} \frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon_1} \text{ max. abs.}(u''_0, v''_0, w''_0) + \varepsilon_1 B''_0,$$

ε_1 étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut, du reste,

$$|u''_1| \overline{\overline{<}} \frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon_2} \text{ max. abs.}(u''_0, v''_0, w''_0) + \varepsilon_2 B''_0, \qquad \ldots,$$

ε_2 étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut,

$$I_1 \overline{\overline{<}} \frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon_3} [\text{max. abs.}(u''_0, v''_0, w''_0)]^2 + \varepsilon B_0''^2,$$

ε_3 étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut, on trouvera

$$(110^a)\qquad |u'' - u''_0| \overline{\overline{<}} \frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon} \text{ max. abs.}(u''_0, v''_0, w''_0) + \varepsilon B''_0, \qquad \ldots.$$

Ajoutons les inégalités

$$(110^b) \qquad |\mathfrak{u}''_0| \leqq \text{max. abs.}(\mathfrak{u}''_0, \mathfrak{v}''_0, \mathfrak{w}''_0), \qquad \ldots;$$

alors nous obtenons le résultat

$$(111^a) \qquad \left.\begin{array}{l} |\mathfrak{u}''| \\ |\mathfrak{v}''| \\ |\mathfrak{w}''| \end{array}\right\} \leqq \frac{c}{\varepsilon}\,\text{max. abs.}(\mathfrak{u}''_0, \mathfrak{v}''_0, \mathfrak{w}''_0) + \varepsilon B''_0,$$

ε étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut, et c étant une constante finie ne dépendant que de la surface σ et de ϖ.

On trouve de la même manière, à l'aide des inégalités (104),

$$(111^b) \qquad |\theta''| \leqq |\theta''_0| + \frac{c}{\varepsilon}\,\text{max. abs.}(\mathfrak{u}''_0, \mathfrak{v}''_0, \mathfrak{w}''_0) + \varepsilon B''_0.$$

4. Jusqu'à présent nous avons toujours dû supposer

$$\mathfrak{u}'_{j\nu} = 0 \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots);$$

nous allons nous débarrasser de cette restriction par une petite complication de la méthode.

Au lieu de définir les fonctions successives

$$u'_j, \quad v'_j, \quad w'_j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

par les équations (12), (13), nous les définirons par les équations ($14\ a - d$), et nous examinerons les modifications qu'il faut apporter aux raisonnements des n$^{\text{os}}$ **1** et **3** en vertu de ce changement de définitions.

On démontrera d'abord, comme au n° **1**, l'existence des fonctions successives u'_j, v'_j, w'_j, leur continuité et la continuité de leurs premières dérivées; on trouve, en effet, facilement les identités

$$\int_\sigma [\mathfrak{w}'_{j-1}\cos(\nu y) - \mathfrak{v}'_{j-1}\cos(\nu z)]\,d\sigma = 0, \qquad \ldots \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

nécessaires pour l'existence des fonctions successives. On a, en effet,

$$(112^a) \qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{u}'_j &= \frac{\partial\psi'_j}{\partial x} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma \frac{\partial\psi'_j}{\partial\nu}\frac{d\sigma}{r} = \frac{\partial\chi'_j}{\partial x}, \\ \mathfrak{v}'_j &= \frac{\partial\psi'_j}{\partial y} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma \frac{\partial\psi'_j}{\partial\nu}\frac{d\sigma}{r} = \frac{\partial\chi'_j}{\partial y}, \\ \mathfrak{w}'_j &= \frac{\partial\psi'_j}{\partial z} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma \frac{\partial\psi'_j}{\partial\nu}\frac{d\sigma}{r} = \frac{\partial\chi'_j}{\partial z}, \end{aligned}\right.$$

où

$$(112^b) \qquad \chi'_j = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \psi'_j \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\sigma,$$

c'est-à-dire les fonctions $\mathfrak{U}'_j$, $\mathfrak{V}'_j$, $\mathfrak{W}'_j$ sont les dérivées partielles d'une fonction χ'_j, par rapport à x, y, z, donc

$$-\int_\sigma [\mathfrak{w}'_{j-1}\cos(\nu y) - \mathfrak{v}'_{j-1}\cos(\nu z)]\, d\sigma \equiv \int_\tau \left(\frac{\partial \mathfrak{w}'_{j-1}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}'_{j-1}}{\partial z}\right) d\tau = 0, \qquad \ldots$$

$$(j = 1, 2, \ldots).$$

D'autre part, si la fonction $\mathfrak{u}'_{j\nu}$ est continue de la manière

$$|\,\mathfrak{u}'_{j\nu}(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{u}'_{j\nu}(x_1, y_1, z_1)\,| \overline{\overline{<}}\ \text{const. fin.}\, r_{12}^{\varpi}$$

à la surface σ, les premières dérivées des fonctions ψ'_j sont continues dans le domaine τ de la manière

$$|\,D_1 \psi'_j(x_2, y_2, z_2) - D_1 \psi'_j(x_1, y_1, z_1)\,| \overline{\overline{<}}\ \text{const. fin.}\, r_{22}^{\varpi}$$

(*voir* la remarque page 178).

Les modifications des raisonnements du n° 1 n'offrent donc aucune difficulté. Pour examiner les changements qu'il faut apporter au n° 3, nous allons démontrer un corollaire pour chaque lemme démontré dans le n° 2.

Pour rendre notre méthode bien claire, anticipons que le rôle des intégrales

$$\int_\tau (\mathfrak{u}'^2_j + \mathfrak{v}'^2_j + \mathfrak{w}'^2_j)\, d\tau$$

sera maintenant joué par les intégrales

$$(113) \qquad \int_i (\mathfrak{u}'^2_j + \mathfrak{v}'^2_j + \mathfrak{w}'^2_j)\, d\tau - \int_{i+e} \left[\left(\frac{\partial \chi'_j}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi'_j}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi'_j}{\partial z}\right)^2\right] d\tau$$
$$\equiv \int_i \left[\left(\mathfrak{u}'_j - \frac{\partial \chi'_j}{\partial x}\right)^2 + \left(\mathfrak{v}'_j - \frac{\partial \chi'_j}{\partial y}\right)^2 + \left(\mathfrak{w}'_j - \frac{\partial \chi'_j}{\partial z}\right)^2\right] d\tau$$
$$+ \int_e \left[\left(\frac{\partial \chi'_j}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi'_j}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi'_j}{\partial z}\right)^2\right] d\tau,$$

la fonction χ'_j étant définie par l'équation

$$(114) \qquad \chi'_j = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \psi'_j \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\sigma,$$

et pour l'intérieur et pour l'extérieur de σ.

Corollaire du lemme I. — Faisons toutes les suppositions du lemme I, mais définissons les trois fonctions harmoniques $\overline{u'}$, $\overline{v'}$, $\overline{w'}$ au lieu des formules (46) par les formules

$$(115)\quad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\overline{u'}}{\partial\nu} = -3\dfrac{\partial u'}{\partial\nu} - \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial\nu}\displaystyle\int_\tau \theta'\frac{d\tau}{r} + 4\frac{\partial U'}{\partial\nu} \\ \quad - 2[(\mathfrak{w}' - \overline{\mathfrak{w}}')\cos(\nu y) - (\mathfrak{v}' - \overline{\mathfrak{v}}')\cos(\nu z)] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \text{à la surface } \sigma, \\ U' = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma \left[\frac{\partial\psi'}{\partial y}\cos(\nu z) - \frac{\partial\psi'}{\partial z}\cos(\nu y)\right]\frac{d\sigma}{r}, \qquad \dots, \end{array}\right.$$

ψ', $\overline{\psi'}$ étant les fonctions harmoniques de τ possédant les normales intérieures

$$(116)\qquad \frac{\partial\psi'}{\partial\nu} = \mathfrak{u}'_\nu, \qquad \frac{\partial\overline{\psi'}}{\partial\nu} = \overline{\mathfrak{u}'_\nu};$$

on pourra toujours choisir les constantes α_0, α_1, α_2, ..., α_p de manière qu'on ait

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_p^2 = 1$$

et

$$(117)\qquad \begin{aligned} &\int_i (\overline{\mathfrak{u}'^2} + \ldots)\,d\tau - \int_{i+e}\left[\left(\frac{\partial\overline{\chi'}}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right]d\tau \\ &\quad \overset{=}{<} \varepsilon_p \left\{\int_i (\mathfrak{u}'^2 + \ldots)\,d\tau - \int_{i+e}\left[\left(\frac{\partial\chi'}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right]d\tau\right\} + \varepsilon'_p B'^2, \end{aligned}$$

où ε_p et ε_p sont des nombres positifs qu'on peut faire aussi petits qu'on veut en agrandissant p, et qui ne dépendent nullement du choix des fonctions u'_j, v'_j, w'_j.

La démonstration est tout à fait analogue à celle du lemme I. Nous pouvons partager le domaine τ en m parties, où m est égal à $\frac{p}{3}$ ou au nombre entier le plus proche en dessous de $\frac{p}{3}$, de manière que dans chaque partie la distance la plus grande entre deux points de la même partie

$$(118)\qquad r_{12} \overset{=}{<} \frac{\alpha}{\sqrt[3]{p}},$$

α représentant une constante finie ne dépendant que de la surface σ, et qu'on ait

$$(119)\qquad \begin{cases} \int_{\tau_i} \overline{\mathfrak{u}'}\, d\tau = 0, \\ \int_{\tau_i} \overline{\mathfrak{v}'}\, d\tau = 0, \\ \int_{\tau_i} \overline{\mathfrak{w}'}\, d\tau = 0, \end{cases}$$

pour chaque petit domaine τ_i et du reste

$$(120)\qquad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + a_p^2 = 1.$$

Comme nous pouvons écrire les équations (115) définissant les fonctions $\overline{u'}$, $\overline{v'}$, $\overline{w'}$ de la manière suivante :

$$(115')\qquad \begin{cases} \left. \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \nu}\Big(\overline{u'} + 3u' - 4U' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r} \\ &\qquad - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}'\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}'\frac{d\tau}{r}\Big) \\ &\quad = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial \nu}\int_\tau \mathfrak{w}'\frac{d\tau}{r} - \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \nu}\int_\tau \mathfrak{v}'\frac{d\tau}{r}\right) \\ &\qquad - 2[(\mathfrak{w}' - \mathfrak{W}')\cos(\nu y) - (\mathfrak{v}' - \mathfrak{V}')\cos(\nu z)] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right\} \text{ à la surface } \sigma, \\ \int_\tau \overline{u'}\, d\tau = \int_\tau \overline{v'}\, d\tau = \int_\tau \overline{w'}\, d\tau = 0, \end{cases}$$

les fonctions harmoniques

$$\overline{u'} + 3u' - 4U' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta'\frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \mathfrak{w}'\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \mathfrak{v}'\frac{d\tau}{r},$$

donc aussi

$$\overline{u'},\quad \overline{v'},\quad \overline{w'},$$

auront des dérivées premières dont la continuité satisfait, en raison de la supposition (42), aux conditions

$$(121)\qquad |\overline{\mathfrak{u}'}(x_2, y_2, z_2) - \overline{\mathfrak{u}'}(x_1, y_1, z_1)| \overline{\overline{<}} [c_1 \text{ max. abs.}(\mathfrak{u}', \mathfrak{v}', \mathfrak{w}') + c_2 B'] r_{12}^{\varpi}, \qquad \ldots,$$

c_1, c_2 étant des constantes finies ne dépendant que de la surface σ et de ϖ.

En ayant égard aux équations (119) on aura, pour chaque point (ξ, η, ζ) du domaine τ,

$$\overline{\mathfrak{u}'} = \frac{1}{\tau_i}\int_{\tau_i}[\overline{\mathfrak{u}'}(\xi, \eta, \zeta) - \overline{\mathfrak{u}'}(x, y, z)]\,d\tau, \qquad \ldots,$$

ou, à cause de (118) et (121),

$$|\overline{\mathfrak{u}'}| \overline{\overline{<}} [c_1 \max.\ \text{abs.}(\mathfrak{u}', \mathfrak{v}', \mathfrak{w}') + c_2 B'] \left(\frac{\alpha}{\sqrt[3]{p}}\right)^{\varpi}, \qquad \ldots,$$

donc

$$(122) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_i (\overline{\mathfrak{u}'^2} + \overline{\mathfrak{v}'^2} + \overline{\mathfrak{w}'^2})\,d\tau \\ \displaystyle\quad - \int_{i+e}\left[\left(\frac{\partial\overline{\chi'}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\overline{\chi'}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\overline{\chi'}}{\partial z}\right)^2\right] d\tau \overline{\overline{<}} \int_i (\overline{\mathfrak{u}'^2} + \overline{\mathfrak{v}'^2} + \overline{\mathfrak{w}'^2})\,d\tau, \\ \displaystyle\qquad \overline{\overline{<}} \left\{ C_1[\max.\ \text{abs.}(\mathfrak{u}', \mathfrak{v}', \mathfrak{w}')]^2 + C_2 B'^2 \right\} \frac{1}{\sqrt[3]{p^{2\varpi}}}, \end{cases}$$

C_1, C_2 étant des constantes finies ne dépendant que de la surface σ et de ϖ. Or, $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$, $\frac{\partial\chi'}{\partial x}$, $\frac{\partial\chi'}{\partial y}$, $\frac{\partial\chi'}{\partial z}$ étant harmoniques dans τ, on sait qu'on a

$$\left|\mathfrak{u}' - \frac{\partial\chi'}{\partial x}\right| \overline{\overline{<}} \frac{c}{\sqrt{\rho^3}}\sqrt{\int_i\left[\left(\mathfrak{u}' - \frac{\partial\chi'}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau} + \rho^{\varpi} B',$$

$$\left|\frac{\partial\chi'}{\partial x}\right| \overline{\overline{<}} \frac{c}{\sqrt{\rho^3}}\sqrt{\int_i\left[\left(\frac{\partial\chi'}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau} + \rho^{\varpi} B',$$

où c est une constante finie ne dépendant que de la surface σ et de ϖ, et où ρ est un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut. On aura donc aussi

$$|\mathfrak{u}'| \overline{\overline{<}} \left|\mathfrak{u}' - \frac{\partial\chi'}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\chi'}{\partial x}\right|,$$

$$\overline{\overline{<}} \frac{\text{const. fin.}}{\sqrt{\rho^3}}\sqrt{\int_i\left[\left(\mathfrak{u}' - \frac{\partial\chi'}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau + \int_i\left[\left(\frac{\partial\chi'}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau} + 2\rho^{\varpi} B',$$

et, comme on sait qu'on a toujours [1]

$$\int_i\left[\left(\frac{\partial\chi'}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau \overline{\overline{<}} \text{const. fin.} \int_e\left[\left(\frac{\partial\chi'}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau,$$

(1) A. Korn, *Abhandlungen zur Potentialtheorie,* Mém. V, Ferd. Duemmler, édit., Berlin, 1902.

on trouvera

$$(123)\quad |\mathfrak{u}'| \overline{\overline{<}} \frac{\text{const. fin.}}{\sqrt{\rho^3}} \sqrt{\int_i \left[\left(\mathfrak{u}' - \frac{\partial\chi'}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau + \int_e \left[\left(\frac{\partial\chi'}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau + 2\rho^{\varpi} B'}.$$

En choisissant convenablement ρ on pourra donc d'abord, dans l'inégalité

$$(124)\quad \begin{aligned} &\int_i \left[\left(\overline{\mathfrak{u}'} - \frac{\partial\overline{\chi'}}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau + \int_e \left[\left(\frac{\partial\overline{\chi'}}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau \\ &\overline{\overline{<}} \varepsilon \left\{\int_i \left[\left(\mathfrak{u}' - \frac{\partial\chi'}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau + \int_e \left[\left(\frac{\partial\chi'}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau\right\} + \varepsilon' B'^2, \end{aligned}$$

faire ε' aussi petit qu'on veut, et, en choisissant après p assez grand, on pourra aussi faire ε aussi petit qu'on veut. C. Q. F. D.

Corollaire du lemme II. — Faisons toutes les suppositions du lemme II, mais définissons les trois fonctions harmoniques $\overline{u'}$, $\overline{v'}$, $\overline{w'}$ au lieu des formules (58) par les formules (115) et (116); alors on aura toujours, pour deux points (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) quelconques de τ, dont nous désignons la distance par r_{12},

$$(125)\quad \left\{\begin{aligned} &|\overline{\mathfrak{u}'}(x_2, y_2, z_2) - \overline{\mathfrak{u}'}(x_1, y_1, z_1)| \\ &\overline{\overline{<}} \left\{\frac{c}{\varepsilon^{1+\frac{3}{\varpi}}} \sqrt{\int_i \left[\left(\mathfrak{u}' - \frac{\partial\chi'}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau + \int_e \left[\left(\frac{\partial\chi'}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau} + \varepsilon B'\right\} r_{12}^{\varpi}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

où c est une constante finie ne dépendant que de la surface σ et de ϖ, ε un nombre positif aussi petit qu'on veut, sans que nous ayons besoin d'ajouter la supposition

$$\mathfrak{u}'_\nu = 0,$$

comme pour le lemme II.

En effet, la démonstration du lemme II reçoit cette modification qu'il faut ajouter aux seconds membres des équations (68) les termes

$$\begin{aligned} &4\mathfrak{U}' - \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma [\mathfrak{V}' \cos(\nu x) - \mathfrak{U}' \cos(\nu y)] \frac{d\sigma}{r} \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma [\mathfrak{U}' \cos(\nu z) - \mathfrak{W}' \cos(\nu x)] \frac{d\sigma}{r}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ou

$$-\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma \mathfrak{U}'_\nu \frac{d\sigma}{r}, \quad \ldots,$$

et des termes qui satisfont aux conditions (69), et qui peuvent être compris dans ξ, η, ζ; comme on peut, d'après (112), poser ici

$$\mathfrak{U}'_\nu \equiv \frac{\partial \psi'}{\partial \nu} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \nu} \int_\sigma \frac{\partial \psi'}{\partial \nu} \frac{d\sigma}{r} = \frac{1}{2} \frac{\partial \psi'}{\partial \nu} = \frac{1}{2} \mathfrak{u}'_\nu,$$

aussi à des termes du genre ξ, η, ζ près, on voit que par notre modification on arrive, au lieu des équations (58), aux équations

$$(126) \qquad \begin{cases} \overline{\mathfrak{u}'} = \xi, \\ \overline{\mathfrak{v}'} = \eta, \\ \overline{\mathfrak{w}'} = \zeta, \end{cases}$$

ξ, η, ζ étant des fonctions continues à la surface σ de telle manière qu'on a, pour deux points (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) quelconques de la surface σ dont nous désignons la distance par r_{12},

$$(127) \qquad \begin{cases} |\xi(x_2, y_2, z_2) - \xi(x_1, y_1, z_1)| \overline{\overline{<}} \left[\frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon'} \text{max. abs.}(\mathfrak{u}', \mathfrak{v}', \mathfrak{w}') + \varepsilon' \mathrm{B}' \right] r_{12}^{\varpi}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

ε' étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut, ou, ce qui est la même chose, d'après la démonstration que nous avons donnée à l'occasion du corollaire du lemme I,

$$(127') \qquad \begin{cases} |\xi(x_2, y_2, z_2) - \xi(x_1, y_1, z_1)| \\ \quad \overline{\overline{<}} \left\{ \frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon^{1+\frac{3}{\varpi}}} \sqrt{\int_i (\mathfrak{u}'^2 + \dots)\, d\tau - \int_{i+e} \left[\left(\frac{\partial \chi'}{\partial x} \right)^2 + \dots \right] d\tau} + \varepsilon \mathrm{B}' \right\} r_{12}^{\varpi}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

ε étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut.

Corollaire du lemme III. — Les fonctions successives

$$u'_j, \quad v'_j, \quad w'_j \qquad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

définies par les équations ($14\,a - d$), remplissent les identités

$$(128) \qquad \int_i \left[\left(\mathfrak{u}'_j - \frac{\partial \chi'_j}{\partial x} \right)^2 + \dots \right] d\tau + \int_e \left[\left(\frac{\partial \chi'_j}{\partial x} \right)^2 + \dots \right] d\tau$$
$$\equiv \int_i \left[\left(\mathfrak{u}'_{j-1} - \frac{\partial \chi'_{j-1}}{\partial x} \right) \left(\mathfrak{u}'_{j+1} - \frac{\partial \chi'_{j+1}}{\partial x} \right) + \dots \right] d\tau + \int_e \left(\frac{\partial \chi'_{j-1}}{\partial x} \frac{\partial \chi'_{j+1}}{\partial x} + \dots \right) d\tau.$$

En effet, posons

$$u_j = u'_j + 3u'_{j-1} - 4\,\mathrm{U}'_{j-1} + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta'_{j-1}\frac{d\tau}{r}, \qquad \dots; \tag{129}$$

on aura

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta u_j = -2\frac{\partial \theta'_{j-1}}{\partial x}, \qquad \dots \qquad \text{dans } \tau;\\ &\frac{\partial u_j}{\partial \nu} = -2\left[(\mathfrak{w}'_{j-1} - \mathfrak{W}'_{j-1})\cos(\nu y) - (\mathfrak{v}'_{j-1} - \mathfrak{V}'_{j-1})\cos(\nu z)\right], \quad \dots \quad \text{à la surface } \sigma, \end{aligned}\right. \tag{130}$$

donc

$$\int_\tau \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial v_j}{\partial x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial w_j}{\partial x}\right)^2 + \dots\right] d\tau = 2\int_\tau [\mathfrak{u}_j(\mathfrak{u}'_{j-1} - \mathfrak{U}'_{j-1}) + \dots]\, d\tau;$$

d'une manière analogue, on aura

$$\int_\tau \left[\frac{\partial u_j}{\partial x}\frac{\partial u_{j+1}}{\partial x} + \dots + \frac{\partial v_j}{\partial x}\frac{\partial v_{j+1}}{\partial x} + \dots + \frac{\partial w_j}{\partial x}\frac{\partial w_{j+1}}{\partial x} + \dots\right] d\tau = 2\int_\tau [\mathfrak{u}_j(\mathfrak{u}'_j - \mathfrak{U}'_j) + \dots]\, d\tau$$

et aussi

$$\int_\tau \left[\frac{\partial u_j}{\partial x}\frac{\partial u_{j+1}}{\partial x} + \dots + \frac{\partial v_j}{\partial x}\frac{\partial v_{j+1}}{\partial x} + \dots + \frac{\partial w_j}{\partial x}\frac{\partial w_{j+1}}{\partial x} + \dots\right] d\tau = 2\int_\tau [\mathfrak{u}_{j+1}(\mathfrak{u}'_{j-1} - \mathfrak{U}'_{j-1}) + \dots]\, d\tau,$$

donc

$$\int_\tau [\mathfrak{u}_j(\mathfrak{u}'_j - \mathfrak{U}'_j) + \dots]\, d\tau = \int_\tau [\mathfrak{u}_{j+1}(\mathfrak{u}'_{j-1} - \mathfrak{U}'_{j-1}) + \dots]\, d\tau,$$

ou, comme on a, d'après (129),

$$\mathfrak{u}_j = \mathfrak{u}'_j + 3\,\mathfrak{u}'_{j-1} - 4\,\mathfrak{U}'_{j-1}, \qquad \dots, \qquad \mathfrak{u}_{j+1} = \mathfrak{u}'_{j+1} + 3\,\mathfrak{u}'_j - 4\,\mathfrak{U}'_j, \qquad \dots: \tag{131}$$

$$\int_\tau [\mathfrak{u}'^2_j + \dots - \mathfrak{u}'_{j+1}\mathfrak{u}'_{j-1} - \dots]\, dt = \int_\tau [\mathfrak{U}'_j(\mathfrak{u}'_j - \mathfrak{u}'_{j-1}) + \dots - \mathfrak{U}'_{j-1}(\mathfrak{u}'_{j+1} - \mathfrak{u}'_j) - \dots]\, d\tau. \tag{132}$$

Une transformation de Green nous donne

$$\begin{aligned} &\int_\tau [\mathfrak{U}'_j(\mathfrak{u}'_j - \mathfrak{u}'_{j-1}) + \dots - \mathfrak{U}'_{j-1}(\mathfrak{u}'_{j+1} - \mathfrak{u}'_j) - \dots]\, d\tau \\ &\qquad = -\int_\sigma \left[\chi'_j\left(\frac{\partial \psi'_j}{\partial \nu} - \frac{\partial \psi'_{j-1}}{\partial \nu}\right) - \chi'_{j-1}\left(\frac{\partial \psi'_{j+1}}{\partial \nu} - \frac{\partial \psi'_j}{\partial \nu}\right)\right] d\sigma, \\ &\int_\tau [\mathfrak{U}'_j(\mathfrak{u}'_j - \mathfrak{u}'_{j-1}) + \dots - \mathfrak{U}'_{j-1}(\mathfrak{u}'_{j+1} - \mathfrak{u}'_j) - \dots]\, d\tau \\ &\qquad = -\int_\sigma \left[(\psi'_j - \psi'_{j-1})\frac{\partial \chi'_j}{\partial \nu} - (\psi'_{j+1} - \psi'_j)\frac{\partial \chi'_{j-1}}{\partial \nu}\right] d\sigma, \end{aligned}$$

et puisque l'on a, à la surface σ,

$$\chi'_{je} - \chi'_{ji} = -\psi'_j,$$

on trouve

$$\int_\tau [\mathfrak{U}'_j(\mathfrak{u}'_j - \mathfrak{u}'_{j-1}) + \ldots - \mathfrak{U}'_{j-1}(\mathfrak{u}'_{j+1} - \mathfrak{u}'_j) - \ldots]\, d\tau$$
$$= \int_{i+e} \left[\left(\frac{\partial \chi'_j}{\partial x} \right)^2 + \ldots - \frac{\partial \chi'_{j+1}}{\partial x} \frac{\partial \chi'_{j-1}}{\partial x} - \ldots \right] d\tau,$$

de manière que nous pouvons écrire notre identité (132) ainsi :

$$(133) \qquad \int_i (\mathfrak{u}'^2_j + \ldots)\, d\tau - \int_{i+e} \left[\left(\frac{\partial \chi'_j}{\partial x} \right)^2 + \ldots \right] d\tau$$
$$= \int_i (\mathfrak{u}'_{j-1}\mathfrak{u}'_{j+1} + \ldots)\, d\tau - \int_{i+e} \left[\frac{\partial \chi'_{j-1}}{\partial x} \frac{\partial \chi'_{j+1}}{\partial x} + \ldots \right] d\tau,$$

ce qui est identique avec notre proposition (128).

Les trois corollaires nous permettent de conclure que tous les raisonnements du n° 3 restent valables pour notre méthode modifiée, dans laquelle nous n'avons plus besoin de la supposition

$$\mathfrak{u}'_{j\nu} = 0, \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots) \qquad \text{à la surface } \sigma;$$

nous devons seulement, au lieu de définir les intégrales I_k par les équations

$$\mathrm{I}_k = \int_\tau (\mathfrak{u}''^2_k + \ldots)\, d\tau,$$

les définir par les équations

$$(134) \qquad \mathrm{I}_k = \int_\tau (\mathfrak{u}''^2_k + \ldots)\, d\tau - \int_{i+e} \left[\left(\frac{\partial \chi''_k}{\partial x} \right)^2 + \ldots \right] d\tau.$$

5. Après la solution du problème (78) par les séries (76),

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_p$$

étant des constantes convenablement choisies, nous arrivons d'une manière connue au résultat suivant pour le problème,

$$(135) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \dfrac{\partial u'}{\partial \nu} = \lambda \left[-3 \dfrac{\partial u'}{\partial \nu} - \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial \nu} \displaystyle\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r} + 4 \frac{\partial \mathrm{U}'}{\partial \nu} \right] \\ \qquad - 2[(\mathfrak{w}' - \mathfrak{W}')\cos(\nu y) - (\mathfrak{v}' - \mathfrak{V}')\cos(\nu z)] + f_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} \text{à la surface } \sigma, \\ \displaystyle\int_\tau u'\, d\tau = \int_\tau v'\, dt = \int_\tau w'\, d\tau = 0, \end{array} \right.$$

où nous désignons par ψ' la fonction harmonique possédant les normales intérieures

$$\frac{\partial \psi'}{\partial \nu} = \mathfrak{u}'_\nu, \qquad \text{à la surface } \sigma, \tag{136}$$

et où nous posons

$$U' = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left[\frac{\partial \psi'}{\partial y}\cos(\nu z) - \frac{\partial \psi'}{\partial z}\cos(\nu y)\right]\frac{d\sigma}{r}. \tag{137}$$

I (1). On peut toujours construire un système de solutions du problème (125) pour un λ réel quelconque dont la valeur absolue est plus petite qu'un nombre positif m quelconque, mais fixe, dans la forme

$$\left\{\begin{aligned} u' &= \frac{P(\lambda, x, y, z)}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)}, \\ v' &= \frac{Q(\lambda, x, y, z)}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)}, \\ w' &= \frac{R(\lambda, x, y, z)}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)}, \end{aligned}\right. \tag{138}$$

où n est de nouveau un nombre fini;

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n$$

sont des nombres bien définis, différents les uns des autres,

$$|\lambda_j| \leqq m \qquad (j = 1, 2, \ldots, n);$$

P, Q, R sont des fonctions harmoniques continues avec leurs premières dérivées dans τ pour chaque

$$|\lambda| \leqq m,$$

et, pour

$$\lambda = \lambda_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

---

(1) On aura remarqué que la démonstration de ce théorème devient douteuse, si l'on pouvait avoir

$$\alpha_0 \mathfrak{u}'_0 + \alpha_1 \mathfrak{u}'_1 + \alpha_2 \mathfrak{u}'_2 + \ldots + \alpha_p \mathfrak{u}'_p \equiv 0, \qquad \ldots,$$

c'est-à-dire si les triplets $\mathfrak{u}'_0, \mathfrak{u}'_1, \mathfrak{u}'_2, \ldots, \mathfrak{u}'_p \ldots$ (p étant un nombre fini) n'étaient pas linéairement indépendants; mais il est facile de voir que dans ce cas spécial $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$ peuvent être développés en une série finie de la forme

$$\sum_j C_j \frac{\lambda_j \widehat{\mathfrak{u}'_j}}{\lambda - \lambda_j}, \qquad \ldots,$$

de manière que ce cas n'est pas une exception pour le théorème I.

les fonctions P, Q, R deviennent des fonctions que nous appellerons des *triplets préliminaires* (à des facteurs constants près) des fonctions

$$\widehat{u'_j},\quad \widehat{v'_j},\quad \widehat{w'_j}$$

harmoniques et continues avec leurs premières dérivées dans τ et satisfaisant aux équations

$$(139)\quad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \widehat{u'_j}}{\partial \nu} = \lambda_j \left\{ -3\dfrac{\partial \widehat{u'_j}}{\partial \nu} - \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\displaystyle\int_\tau \widehat{\theta'_j}\frac{d\tau}{r} + 4\frac{\partial \widehat{\mathrm{U}'_j}}{\partial \nu} \right. \\ \qquad \left. -2\left[\left(\widehat{\mathfrak{w}'_j} - \widehat{\mathfrak{W}'_j}\right)\cos(\nu y) - \left(\widehat{\mathfrak{v}'_j} - \widehat{\mathfrak{V}'_j}\right)\cos(\nu z)\right]\right\} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{ à la surface } \sigma, \\ \displaystyle\int_\tau \widehat{u'_j}\,d\tau = \int \widehat{v'_j}\,d\tau = \int_\tau \widehat{w'_j}\,d\tau = 0 \end{array}\right.$$

$\widehat{\psi'_j}$ étant les fonctions harmoniques possédant les dérivées normales

$$(140^a)\qquad \frac{\partial \widehat{\psi'_j}}{\partial \nu} = \widehat{\mathfrak{u}'_{j\nu}}, \qquad \text{à la surface } \sigma,$$

et

$$(140^b)\qquad \widehat{\mathrm{U}'_j} = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left[\frac{\partial \widehat{\psi'_j}}{\partial y}\cos(\nu z) - \frac{\partial \widehat{\psi'_j}}{\partial z}\cos(\nu y)\right]\frac{d\sigma}{r}, \qquad \ldots,$$

et à la condition supplémentaire

$$(141^a)\qquad \int_i \left(\widehat{\mathfrak{u}'^2_j} + \ldots\right)dz - \int_{i+e}\left[\left(\frac{\partial \widehat{\chi'_j}}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right]d\tau = 1,$$

en posant

$$(141^b)\qquad \widehat{\chi'_j} = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \widehat{\psi'_j}\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\tau.$$

Pour la démonstration de ce théorème, nous n'avons qu'à rappeler les raisonnements de M. Poincaré dans son Mémoire *Sur les équations de la Physique* *mathématique* (*Rendiconti del Circ. mat. di Palermo,* 1894), d'après lesquels

$$
(142) \qquad \left\{ \begin{aligned} u' &= \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{D}}, \\ v' &= \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{D}}, \\ w' &= \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{D}} \end{aligned} \right.
$$

doivent être les solutions du problème (135), si nous posons

$$
(143) \qquad \mathrm{D} = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & . & \alpha_p \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & . & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & . & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix},
$$

$$
(144) \qquad \mathrm{P} = \begin{vmatrix} u'' & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & . & \alpha_p \\ u'_0 & -\lambda & 0 & \dots & . & 0 \\ u'_1 & 1 & -\lambda & \dots & . & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ u'_{p-1} & 0 & 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix}, \quad \dots .
$$

Les fonctions P, Q, R seront des fonctions harmoniques, continues avec leurs premières dérivées dans τ et satisfaisant aux conditions (135) proposées pour u', v', w' avec cette seule différence qu'il faut remplacer f_1, f_2, f_3 dans (135) par

$$
f_1 \mathrm{D}, \quad f_2 \mathrm{D}, \quad f_3 \mathrm{D}.
$$

La seule chose qui n'est pas si facile à démontrer dans notre cas, c'est le fait que l'équation

$$
\mathrm{D} = 0
$$

ne peut pas avoir des racines multiples. Il faut démontrer pour cela que dans le cas où un λ satisferait aux deux équations

$$
\mathrm{D} = 0,
$$

$$
\frac{d\mathrm{D}}{d\lambda} = 0,
$$

c'est-à-dire dans le cas où les fonctions P, Q, R deviendraient des fonctions $\widehat{u'}$, $\widehat{v'}$, $\widehat{w'}$ satisfaisant aux conditions

$$(145)\quad \left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\widehat{u'}}{\partial\nu}=\lambda\left\{-3\frac{\partial\widehat{u'}}{\partial\nu}-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\nu}\int_\tau\widehat{\theta'}\frac{d\tau}{r}+4\frac{\partial\widehat{U'}}{\partial\nu}\right.\\
&\qquad\left.-2[(\widehat{\mathfrak{w}'}-\widehat{\mathfrak{W}'})\cos(\nu y)-(\widehat{\mathfrak{v}'}-\widehat{\mathfrak{V}'})\cos(\nu z)]\right\}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{d\widehat{u'}}{d\lambda}=\lambda\left\{-3\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{d\widehat{u'}}{d\lambda}-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\nu}\int_\tau\frac{d\widehat{\theta'}}{d\lambda}\frac{d\tau}{r}+4\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{d\widehat{U'}}{d\lambda}\right.\\
&\qquad\left.-2\left[\left(\frac{d\widehat{\mathfrak{w}'}}{d\lambda}-\frac{d\widehat{\mathfrak{W}'}}{d\lambda}\right)\cos(\nu y)-\left(\frac{d\widehat{\mathfrak{v}'}}{d\lambda}-\frac{d\widehat{\mathfrak{V}'}}{d\lambda}\right)\cos(\nu z)\right]\right\}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\widehat{u'}}{\partial\nu}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\}\text{ à la surface }\sigma,$$

on aura

$$\widehat{u'}=\widehat{v'}=\widehat{w'}=0.$$

En effet, posons

$$(146)\quad \left\{\begin{aligned}
&\widehat{u}=\widehat{u'}(1+3\lambda)-4\lambda\widehat{U'}+\frac{\lambda}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau\widehat{\theta'}\frac{d\tau}{r},\qquad\dots,\\
&\frac{d\widehat{u}}{d\lambda}=\frac{d\widehat{u'}}{d\lambda}(1+3\lambda)-4\lambda\frac{d\widehat{U'}}{d\lambda}+\frac{\lambda}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau\frac{d\widehat{\theta'}}{d\lambda}\frac{d\tau}{r},\qquad\dots,
\end{aligned}\right.$$

alors, on aura

$$(147)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&\Delta\widehat{u}=-2\lambda\frac{\partial\widehat{\theta'}}{\partial x},\qquad\dots\\
&\Delta\frac{d\widehat{u}}{d\lambda}=-2\lambda\frac{\partial}{\partial x}\frac{d\widehat{\theta'}}{d\lambda},\qquad\dots
\end{aligned}\right\}\text{ dans }\tau,\\
&\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\widehat{u}}{\partial\nu}=-2\lambda[(\widehat{\mathfrak{w}'}-\widehat{\mathfrak{W}'})\cos(\nu y)-(\widehat{\mathfrak{v}'}-\widehat{\mathfrak{V}'})\cos(\nu z)],\qquad\dots\\
&\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{\partial\widehat{u}}{\partial\lambda}=-2\lambda\left[\left(\frac{d\widehat{\mathfrak{w}'}}{d\lambda}-\frac{d\widehat{\mathfrak{W}'}}{d\lambda}\right)\cos(\nu y)-\left(\frac{d\widehat{\mathfrak{v}'}}{d\lambda}-\frac{d\widehat{\mathfrak{V}'}}{d\lambda}\right)\cos(\nu z)\right]+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\widehat{u'}}{\partial\nu},\qquad\dots
\end{aligned}\right\}\text{ à la surface }\sigma,
\end{aligned}\right.$$

donc

$$\int_\tau \left\{ \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{d\hat{u}}{d\lambda} + \ldots + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{d\hat{v}}{d\lambda} + \ldots + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{d\hat{w}}{d\lambda} + \ldots \right\} d\tau$$
$$= 2\lambda \int_\tau \left\{ \frac{d\hat{\mathfrak{u}}}{d\lambda}\left(\hat{\mathfrak{u}}' - \hat{\mathfrak{U}}'\right) + \ldots \right\} d\tau,$$

et aussi

$$= 2\lambda \int_\tau \left[\hat{\mathfrak{u}}\left(\frac{d\hat{\mathfrak{u}}'}{d\lambda} - \frac{d\hat{\mathfrak{U}}'}{d\lambda}\right) + \ldots \right] d\tau - \frac{1}{\lambda}\int_\sigma \left(\hat{\mathfrak{u}}\frac{\partial \hat{u}'}{\partial \nu} + \ldots\right) d\sigma.$$

Nous trouverions donc

$$\int_\sigma \left(\hat{\mathfrak{u}}\frac{\partial \hat{u}'}{\partial \nu} + \ldots\right) d\sigma = 0 \tag{148}$$

si nous pouvions démontrer l'identité

$$\int_\tau \left[\frac{d\hat{\mathfrak{u}}}{d\lambda}\left(\hat{\mathfrak{u}}' - \hat{\mathfrak{U}}'\right) + \ldots - \hat{\mathfrak{u}}\left(\frac{d\hat{\mathfrak{u}}'}{d\lambda} - \frac{d\hat{\mathfrak{U}}'}{d\lambda}\right) - \ldots \right] d\tau = 0.$$

Ceci n'offre pas de grandes difficultés, puisqu'il vient, d'après (146),

$$\hat{\mathfrak{u}} = \hat{\mathfrak{u}}'(1 + 3\lambda) - 4\lambda\hat{\mathfrak{U}}', \qquad \ldots,$$
$$\frac{d\hat{\mathfrak{u}}}{d\lambda} = \frac{d\hat{\mathfrak{u}}'}{d\lambda}(1 + 3\lambda) - 4\lambda\frac{d\hat{\mathfrak{U}}'}{d\lambda}, \qquad \ldots,$$

donc

$$\int_\tau \left[\frac{d\hat{\mathfrak{u}}}{d\lambda}\left(\hat{\mathfrak{u}}' - \hat{\mathfrak{U}}'\right) + \ldots - \hat{\mathfrak{u}}\left(\frac{d\hat{\mathfrak{u}}'}{d\lambda} - \frac{d\hat{\mathfrak{U}}'}{d\lambda}\right) - \ldots \right] d\tau$$
$$= (1 - \lambda)\int_\tau \left[\frac{d\hat{\mathfrak{U}}'}{d\lambda}\left(\hat{\mathfrak{u}}' - \hat{\mathfrak{U}}'\right) + \ldots - \hat{\mathfrak{U}}'\left(\frac{d\hat{\mathfrak{u}}'}{d\lambda} - \frac{d\hat{\mathfrak{U}}'}{d\lambda}\right) - \ldots \right] d\tau,$$

et l'on trouve, par une transformation pareille à celle donnée pages 203-204,

$$\left.\begin{aligned} -\int_\tau \left[\frac{d\hat{\mathfrak{U}}'}{d\lambda}\left(\hat{\mathfrak{u}}' - \hat{\mathfrak{U}}'\right) + \ldots \right] d\tau &\equiv \\ -\int_\tau \left[\hat{\mathfrak{U}}'\left(\frac{d\hat{\mathfrak{u}}'}{d\lambda} - \frac{d\hat{\mathfrak{U}}'}{d\lambda}\right) + \ldots \right] d\tau &\equiv \end{aligned}\right\} \int_i \left(\hat{\mathfrak{U}}'\frac{d\hat{\mathfrak{U}}'}{d\lambda} + \ldots\right) d\tau - \int_{i+e}\left(\frac{\partial \hat{\chi}'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{d\hat{\chi}'}{d\lambda} + \ldots\right) d\tau;$$

il vient donc, en effet,

$$\int_\sigma \left(\hat{\mathfrak{u}} \frac{\partial \widehat{u'}}{\partial \nu} + \ldots \right) d\sigma = 0.$$

Nous écrivons cette identité un peu autrement,

$$-\int_\tau (\widehat{u'}\, \Delta \hat{u} + \ldots)\, d\tau + \int_\sigma \left(\widehat{u'}\, \frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu} + \ldots \right) d\sigma = 0,$$

ou, d'après (147),

$$\int_\tau \left[\widehat{\mathfrak{u}'} \left(\widehat{\mathfrak{u}'} - \widehat{\mathfrak{U}'} \right) + \ldots \right] d\tau = 0,$$

et, par une transformation pareille à celle donnée pages 203-204,

$$(149) \qquad \int_i \left[\left(\widehat{\mathfrak{u}'} - \frac{\partial \widehat{\chi'}}{\partial x} \right)^2 + \ldots \right] d\tau + \int_e \left[\left(\frac{\partial \widehat{\chi'}}{\partial x} \right)^2 + \ldots \right] d\tau = 0;$$

on aura donc

$$(150) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial \widehat{\chi'}}{\partial x} = \dfrac{\partial \widehat{\chi'}}{\partial y} = \dfrac{\partial \widehat{\chi'}}{\partial z} \equiv 0 & \text{à l'extérieur et à l'intérieur,} \\ \widehat{\mathfrak{u}'} = \widehat{\mathfrak{v}'} = \widehat{\mathfrak{w}'} = 0, & \end{array} \right.$$

et, d'après (147), (146),

$$(151) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \widehat{u'} = \widehat{v'} = \widehat{w'} = 0, \\ \hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = \text{const.} \end{array} \right.$$

Nous pouvons ajouter au théorème I le corollaire suivant :

Corollaire. — Deux solutions du problème (135) ne peuvent différer que d'un triplet préliminaire; s'il n'en existe pas pour le nombre λ, le problème ne peut avoir qu'un système de solutions.

6. Dans ce numéro nous allons démontrer quelques théorèmes sur les triplets préliminaires, définis par les équations (139).

II_a. Formons avec les triplets préliminaires $\widehat{u'_j}$, $\widehat{v'_j}$, $\widehat{w'_j}$ les fonctions

$$(152)\quad \left\{\begin{aligned} \widehat{u_j} &= \widehat{u'_j}(1+3\lambda_j) - 4\lambda_j\,\widehat{\mathrm{U}'_j} + \frac{\lambda_j}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \widehat{\theta'_j}\frac{d\tau}{r},\\ \widehat{v_j} &= \widehat{v'_j}(1+3\lambda_j) - 4\lambda_j\,\widehat{\mathrm{V}'_j} + \frac{\lambda_j}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \widehat{\theta'_j}\frac{d\tau}{r},\\ \widehat{w_j} &= \widehat{w'_j}(1+3\lambda_j) - 4\lambda_j\,\widehat{\mathrm{W}'_j} + \frac{\lambda_j}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \widehat{\theta'_j}\frac{d\tau}{r}; \end{aligned}\right.$$

ces fonctions seront continues avec leurs premières dérivées dans τ, et elles satisferont aux équations

$$(153)\quad \Delta\widehat{u_j} = -2\frac{\lambda_j}{1+\lambda_j}\frac{\partial\widehat{\theta_j}}{\partial x} = -\frac{2\lambda_j}{1+3\lambda_j}\left(\frac{\partial\widehat{\mathfrak{w}_j}}{\partial y} - \frac{\partial\widehat{\mathfrak{v}_j}}{\partial z}\right), \quad \dots \quad \text{dans } \tau,$$

$$(154)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\widehat{u_j}}{\partial\nu} = &-\frac{2\lambda_j}{1+3\lambda_j}[\widehat{\mathfrak{w}_j}\cos(\nu y) - \widehat{\mathfrak{v}_j}\cos(\nu z)]\\ &-\frac{\lambda_j(\lambda_j-1)}{1+3\lambda_j}[\widehat{\mathfrak{W}'_j}\cos(\nu y) - \widehat{\mathfrak{V}'_j}\cos(\nu z)]\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \quad \text{à la surface } \sigma.$$

On aura, en effet,

$$(155)\quad \left\{\begin{aligned} \widehat{\theta_j} &= (1+\lambda_j)\widehat{\theta'_j},\\ \widehat{\mathfrak{u}_j} &= \widehat{\mathfrak{u}'_j}(1+3\lambda_j) - 4\lambda_j\widehat{\mathfrak{U}'_j}, \quad \dots; \end{aligned}\right.$$

en introduisant ces fonctions un calcul facile nous donne les équations (153) et (154).

II_b. Les nombres λ_j correspondant à des triplets préliminaires satisfont à l'inégalité

$$(156)\qquad \lambda_j \overline{\gtrless} 1 \quad \text{ou} \quad \lambda_j < -\frac{1}{3}.$$

En effet, on a, d'après (153) et (154),

$$\int_\tau \left[\left(\frac{\partial \widehat{u_j}}{\partial x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \widehat{v_j}}{\partial x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \widehat{w_j}}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau$$
$$= \frac{2\lambda_j}{1+3\lambda_j}\int_\tau (\widehat{\mathfrak{u}_j^2} + \ldots)\, d\tau + \frac{2\lambda_j(\lambda_j - 1)}{1+3\lambda_j}\int_\tau (\widehat{\mathfrak{u}_j}\widehat{\mathfrak{U}'_j} + \ldots)\, d\tau \quad [1]$$

et

$$(157) \quad \int_\tau \left[\left(\frac{\partial \widehat{u_j}}{\partial x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \widehat{v_j}}{\partial x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \widehat{w_j}}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau - \frac{1}{2}\int_\tau (\widehat{\mathfrak{u}_j^2} + \ldots)\, d\tau$$
$$= \frac{\lambda_j - 1}{2(1+3\lambda_j)}\left\{\int_\tau (\widehat{\mathfrak{u}_j^2} + \ldots)\, d\tau + 4\lambda_j(1+3\lambda_j)\int_e \left[\left(\frac{\partial \widehat{\chi'_j}}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau \right.$$
$$\left. + 4\lambda_j(1-\lambda_j)\int_i \left[\left(\frac{\partial \widehat{\chi'_j}}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau\right\}.$$

Comme cette expression, qui est identique avec

$$\int_\tau \left[\left(\frac{\partial \widehat{u_j}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \widehat{v_j}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \widehat{w_j}}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \widehat{w_j}}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{v_j}}{\partial z}\right)^2 + \ldots\right] d\tau,$$

doit être positive, on trouverait, pour un λ_j qui serait plus grand que zéro et plus petit que l'unité,

$$\widehat{\mathfrak{u}'_j} = \widehat{\mathfrak{v}'_j} = \widehat{\mathfrak{w}'_j} \equiv 0,$$
$$\widehat{\mathfrak{u}_j} = \widehat{\mathfrak{v}_j} = \widehat{\mathfrak{w}_j} \equiv 0,$$

donc

$$\widehat{u_j} = \widehat{v_j} = \widehat{w_j} = \text{const.},$$
$$\widehat{u'_j} = \widehat{v'_j} = \widehat{w'_j} \equiv 0.$$

Pour voir que λ_j ne peut pas être négatif $\overline{\gtrless} -\frac{1}{3}$, on peut donner à l'expres-

---

[1] On a

$$\int_i (\widehat{\mathfrak{u}_j}\widehat{\mathfrak{U}'_j} + \ldots)\, d\tau = \int_i [(1+3\lambda_j)\widehat{\mathfrak{u}'_j}\widehat{\mathfrak{U}'_j} + \ldots - 4\lambda_j \widehat{\mathfrak{U}'^2_j} - \ldots]\, d\tau$$
$$= (1+3\lambda_j)\int_{i+e}\left[\left(\frac{\partial \widehat{\chi'_j}}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau - 4\lambda_j\int_i \left[\left(\frac{\partial \widehat{\chi'_j}}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau.$$

sion (157) la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda_j - 1}{2(1+3\lambda_j)}\Bigg\{\int_i (\widehat{\mathfrak{u}_j'^2}+\ldots)\,d\tau\,(1+3\lambda_j)^2 \\
&\qquad + 16\lambda_j^2 \int_i \left[\left(\frac{\partial \widehat{\chi_j'}}{\partial x}\right)^2+\ldots\right] d\tau \\
&\qquad - 8\lambda_j(1+3\lambda_j)\int_{i+e} \left[\left(\frac{\partial \widehat{\chi_j'}}{\partial x}\right)^2+\ldots\right] d\tau \\
&\qquad + 4\lambda_j(1+3\lambda_j)\int_e \left[\left(\frac{\partial \widehat{\chi_j'}}{\partial x}\right)^2+\ldots\right] d\tau \\
&\qquad + 4\lambda_j(1-\lambda_j)\int_i \left[\left(\frac{\partial \widehat{\chi_j'}}{\partial x}\right)^2+\ldots\right] d\tau\Bigg\} \\
&= \frac{(\lambda_j-1)(1+3\lambda_j)}{2}\left\{\int_i (\widehat{\mathfrak{u}_j'^2}+\ldots)\,d\tau - \frac{4\lambda_j}{1+3\lambda_j}\int_{i+e}\left[\left(\frac{\partial \widehat{\chi_j'}}{\partial x}\right)^2+\ldots\right] d\tau\right\}.
\end{aligned}$$

II$_c$. Le nombre des triplets préliminaires $\widehat{u_j'}$, $\widehat{v_j'}$, $\widehat{w_j'}$ possédant des $\widehat{\mathfrak{u}_j'}$, $\widehat{\mathfrak{v}_j'}$, $\widehat{\mathfrak{w}_j'}$ linéairement indépendants et des nombres correspondants λ_j dont la valeur absolue est plus petite qu'un nombre fini m,

$$|\lambda_j| \overline{\overline{<}} m,$$

est fini.

Pour démontrer ce théorème formons les séries

$$\begin{gathered}
u_1' + \lambda\, u_2' + \lambda^2\, u_3' + \ldots, \\
v_1' + \lambda\, v_2' + \lambda^2\, v_3' + \ldots, \\
w_1' + \lambda\, w_2' + \lambda^2\, w_3' + \ldots,
\end{gathered}$$

de manière qu'on ait

$$\begin{gathered}
u_1' = \widehat{u_k'}, \\
v_1' = \widehat{v_k'}, \\
w_1' = \widehat{w_k'},
\end{gathered}$$

$\widehat{u_k'}$, $\widehat{v_k'}$, $\widehat{w_k'}$ étant un triplet préliminaire, les fonctions u_2', v_2', w_2', ... étant formées à l'aide des équations (14^c); alors on aura

$$\begin{aligned}
u_2' &= \frac{1}{\lambda_k}\widehat{u_k'}, \qquad \ldots, \\
u_3' &= \frac{1}{\lambda_k^2}\widehat{u_k'}, \qquad \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots,
\end{aligned}$$

donc

$$u'_1 + \lambda u'_2 + \lambda^2 u'_3 + \ldots = \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda} \widehat{u'_k}, \qquad \ldots \qquad |\lambda| < |\lambda_k|.$$

En posant

$$u'_1 = \alpha_1 \widehat{u'_1} + \alpha_2 \widehat{u'_2} + \ldots + \alpha_p \widehat{u'_p},$$

$$v'_1 = \alpha_1 \widehat{v'_1} + \alpha_2 \widehat{v'_2} + \ldots + \alpha_p \widehat{v'_p},$$

$$w'_1 = \alpha_1 \widehat{w'_1} + \alpha_2 \widehat{w'_2} + \ldots + \alpha_p \widehat{w'_p},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ étant des constantes, $\widehat{u'_j}, \widehat{v'_j}, \widehat{w'_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ des triplets préliminaires, on aura

$$u'_1 + \lambda u'_2 + \lambda^2 u'_3 + \ldots = -\sum_1^p {}_j \frac{\alpha_j \lambda_j}{\lambda - \lambda_j} u'_j,$$

$$v'_1 + \lambda v'_2 + \lambda^2 v'_3 + \ldots = -\sum_1^p {}_j \frac{\alpha_j \lambda_j}{\lambda - \lambda_j} v'_j,$$

$$w'_1 + \lambda w'_2 + \lambda^2 w'_3 + \ldots = -\sum_1^p {}_j \frac{\alpha_j \lambda_j}{\lambda - \lambda_j} w'_j,$$

si $|\lambda|$ est plus petit que la plus petite des valeurs absolues de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Supposons qu'il y ait un nombre infini de triplets préliminaires possédant des $\widehat{\mathfrak{u}'_j}, \widehat{\mathfrak{v}'_j}, \widehat{\mathfrak{w}'_j}$ linéairement indépendants et des nombres correspondants $|\lambda_j| \overline{\overline{<}} m$; alors on pourrait, en choisissant p assez grand, d'après notre démonstration du théorème I (*voir* la remarque page 205), obtenir la convergence des séries

$$u'_1 + \lambda u'_2 + \lambda^2 u'_3 + \ldots,$$

$$v'_1 + \lambda v'_2 + \lambda^2 v'_3 + \ldots,$$

$$w'_1 + \lambda w'_2 + \lambda^2 w'_3 + \ldots$$

pour n'importe quel

$$|\lambda| \overline{\overline{<}} m,$$

de telle manière qu'elles représentent des fonctions continues avec leurs premières dérivées dans τ. D'autre part, nous savons qu'on a

$$u'_1 + \lambda u'_2 + \lambda^2 u'_3 + \ldots = -\sum_1^p {}_j \frac{\alpha_j \lambda_j}{\lambda - \lambda_j} \widehat{u'_j}, \qquad \ldots,$$

si $|\lambda|$ est plus petit que la valeur absolue la plus petite des $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, et ces expressions deviennent infinies, si le α_j correspondant n'est pas nul; comme ils ne peuvent pas disparaître tous, nous arrivons à une contradiction de la supposition qu'il y ait un nombre infini de triplets préliminaires possédant des $\widehat{\mathfrak{u}'_j}$, $\widehat{\mathfrak{v}'_j}$, $\widehat{\mathfrak{w}'_j}$ linéairement indépendants et des nombres correspondants

$$|\lambda_j| \overline{\overline{<}} m.$$

II$_d$. Soient $\widehat{u'_j}$, $\widehat{v'_j}$, $\widehat{w'_j}$ et $\widehat{u'_k}$, $\widehat{v'_k}$, $\widehat{w'_k}$ deux triplets préliminaires et

$$\lambda_j \neq \lambda_k; \tag{158}$$

alors, on aura

$$\int_i (\widehat{\mathfrak{u}'_j}\widehat{\mathfrak{u}'_k}+\ldots)\,d\tau - \int_{i+e}\left(\frac{\partial\widehat{\chi'_j}}{\partial x}\frac{\partial\widehat{\chi'_k}}{\partial x}+\ldots\right)d\tau = 0. \tag{159}$$

On a, en effet,

$$\int_i \left(\frac{\partial\widehat{u_j}}{\partial x}\frac{\partial\widehat{u_k}}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial\widehat{v_j}}{\partial x}\frac{\partial\widehat{v_k}}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial\widehat{w_j}}{\partial x}\frac{\partial\widehat{w_k}}{\partial x}+\ldots\right)d\tau$$
$$= 2\lambda_k\int_i [\widehat{\mathfrak{u}'_j}(\widehat{\mathfrak{u}'_k}-\widehat{\mathfrak{U}'_k})+\ldots]\,d\tau$$

et aussi

$$\int_i \left(\frac{\partial\widehat{u_j}}{\partial x}\frac{\partial\widehat{u_k}}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial\widehat{v_j}}{\partial x}\frac{\partial\widehat{v_k}}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial\widehat{w_j}}{\partial x}\frac{\partial\widehat{w_k}}{\partial x}+\ldots\right)d\tau$$
$$= 2\lambda_j\int_i [\widehat{\mathfrak{u}_k}(\widehat{\mathfrak{u}'_j}-\widehat{\mathfrak{U}'_j})+\ldots]\,d\tau,$$

donc

$$\lambda_k(1-\lambda_j)\int_i [\widehat{\mathfrak{u}'_j}(\widehat{\mathfrak{u}'_k}-\widehat{\mathfrak{U}'_k})+\ldots]\,d\tau = \lambda_j(1-\lambda_k)\int_i [\widehat{\mathfrak{u}'_k}(\widehat{\mathfrak{u}'_j}-\widehat{\mathfrak{U}'_j})+\ldots]\,d\tau,$$

ou

$$(\lambda_k-\lambda_j)\int_i (\widehat{\mathfrak{u}'_j}\widehat{\mathfrak{u}'_k}+\ldots)\,d\tau - \lambda_k(1-\lambda_j)\int_i (\widehat{\mathfrak{u}'_j}\widehat{\mathfrak{U}'_k}+\ldots)\,d\tau$$
$$+\lambda_j(1-\lambda_k)\int_i (\widehat{\mathfrak{u}'_k}\widehat{\mathfrak{U}'_j}+\ldots)\,d\tau = 0,$$

$$(\lambda_k-\lambda_j)\int_i (\widehat{\mathfrak{u}'_j}\widehat{\mathfrak{u}'_k}+\ldots)\,d\tau\,[\lambda_k(1-\lambda_j)-\lambda_j(1-\lambda_k)]\int_{i+e}\left(\frac{\partial\widehat{\chi'_j}}{\partial x}\frac{\partial\widehat{\chi'_k}}{\partial x}+\ldots\right)d\tau = 0,$$

donc

$$(\lambda_k-\lambda_j)\left[\int_i (\widehat{\mathfrak{u}'_j}\widehat{\mathfrak{u}'_k}+\ldots)\,d\tau - \int_{i+e}\left(\frac{\partial\widehat{\chi'_j}}{\partial x}\frac{\partial\widehat{\chi'_k}}{\partial x}+\ldots\right)\right]d\tau = 0; \tag{160}$$

la supposition (158) entraîne donc l'identité (159).

II_e. S'il est possible de développer trois fonctions harmoniques u', v', w', continues dans τ avec leurs premières dérivées, d'après les triplets préliminaires

$$(161)\qquad \begin{cases} u' = C_1\widehat{u'_1} + C_2\widehat{u'_2} + \ldots, \\ v' = C_1\widehat{v'_1} + C_2\widehat{v'_2} + \ldots, \\ w' = C_1\widehat{w'_1} + C_2\widehat{w'_2} + \ldots, \end{cases}$$

on connaît aussitôt les valeurs des coefficients C_j,

$$(162)\qquad C_j = \int_i (\mathfrak{u}'_j\widehat{\mathfrak{u}'_j} + \ldots)\, d\tau - \int_{i+e}\left(\frac{\partial\chi'}{\partial x}\frac{\partial\widehat{\chi'_j}}{\partial x} + \ldots\right) d\tau,$$

ψ' étant la fonction harmonique possédant les dérivées normales

$$(163)\qquad \frac{\partial\psi'}{\partial\nu} = \mathfrak{u}'_\nu \qquad \text{à la surface } \sigma$$

et

$$(164)\qquad \chi' = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \psi' \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\sigma.$$

On tire cette formule aussitôt des formules (159) et (141).

Nous ne nous occuperons pas ici de la possibilité de ces développements; notre but principal est la solution de notre problème (135) pour le cas

$$\lambda = 1;$$

nous sommes maintenant préparés à le résoudre.

7. Le cas

$$\lambda = 1$$

a ceci de particulier, qu'il y a trois triplets préliminaires $\widehat{u'}$, $\widehat{v'}$, $\widehat{w'}$ de telle forme que l'on ait

$$(165^a)\qquad \hat{u} = 0, \qquad \hat{v} = -\alpha z, \qquad \hat{w} = \alpha y,$$

$$(165^b)\qquad \hat{u} = \beta z, \qquad \hat{v} = 0, \qquad \hat{w} = -\beta x,$$

$$(165^c)\qquad \hat{u} = -\gamma y, \qquad \hat{v} = \gamma x, \qquad \hat{w} = 0$$

ayant le nombre correspondant $\lambda = 1$, et que pourtant les solutions données par le théorème I restent en vigueur pour $\lambda = 1$, parce qu'on peut démontrer (¹) que les résidus des fonctions u', v', w' au point

$$\lambda = 1$$

sont nuls. C'est ce que nous allons démontrer dans ce numéro.

D'abord, s'il y a un triplet préliminaire $\widehat{u'}$, $\widehat{v'}$, $\widehat{w'}$ pour

$$\lambda = 1,$$

on doit, en posant

$$\hat{u} = 4(\widehat{u'} - \widehat{U'}) + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \widehat{\theta'}\frac{d\tau}{r}, \tag{165}$$

avoir les équations

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta\hat{u} = -\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial x} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{\mathfrak{w}}}{\partial y} - \frac{\partial\hat{\mathfrak{v}}}{\partial z}\right), \quad \ldots \quad \text{dans } \tau, \\ &\frac{\partial\hat{u}}{\partial\nu} = -\frac{1}{2}[\hat{\mathfrak{w}}\cos(\nu y) - \hat{\mathfrak{v}}\cos(\nu z)], \quad \ldots \quad \text{à la surface } \sigma \end{aligned}\right. \tag{166}$$

[*voir* (153) et (154)], donc

$$\int_\tau \left[\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial\hat{v}}{\partial x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial\hat{w}}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau = \frac{1}{2}\int_\tau (\hat{\mathfrak{u}}^2 + \ldots)\, d\tau \tag{167}$$

et

$$\int_\tau \left[\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\hat{v}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\hat{w}}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{w}}{\partial y} + \frac{\partial\hat{v}}{\partial z}\right)^2 + \ldots\right] d\tau = 0; \tag{168}$$

ce n'est possible que quand on a

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\hat{u}}{\partial x} = \frac{\partial\hat{v}}{\partial y} = \frac{\partial\hat{w}}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial\hat{w}}{\partial y} + \frac{\partial\hat{v}}{\partial z} = \text{const.}, \quad \frac{\partial\hat{u}}{\partial z} + \frac{\partial\hat{w}}{\partial x} = \text{const.}, \quad \frac{\partial\hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial\hat{u}}{\partial y} = \text{const.}; \end{aligned}\right. \tag{169}$$

donc le triplet préliminaire général possédant le nombre correspondant

$$\lambda = 1$$

(¹) A l'aide des formules

$$\int_\sigma (y f_3 - z f_2)\, d\sigma, \quad \ldots. \tag{164}$$

doit avoir la propriété

$$(170)\quad \left\{\begin{aligned} \hat{u} &= a + c_2 z - c_3 y,\\ \hat{v} &= b + c_3 x - c_1 z,\\ \widehat{w} &= c + c_1 y - c_2 x,\end{aligned}\right.$$

a, b, c, c_1, c_2, c_3 étant des constantes.

Si nous voulons avoir les triplets $\widehat{u'}$, $\widehat{v'}$, $\widehat{w'}$ eux-mêmes, il faut se rappeler qu'on tire de (165)

$$\frac{1}{4}\hat{u} = \widehat{u'} - \widehat{U'}, \qquad \ldots,$$

$$\frac{1}{4}\widehat{u_\nu} = \frac{\partial\widehat{\psi'}}{\partial\nu} - \left(\frac{\partial\widehat{\psi'}}{\partial\nu} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\nu}\int_\sigma \frac{\partial\widehat{\psi'}}{\partial\nu}\frac{d\sigma}{r}\right), \qquad \ldots \qquad \text{à la surface } \sigma.$$

Il faudra donc construire une fonction harmonique $\widehat{\psi'}$ de τ de manière qu'on ait

$$(171)\quad -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\nu}\int_\sigma \frac{\partial\widehat{\psi'}}{\partial\nu}\frac{d\sigma}{r} = c_1\cos(\nu x) + c_2\cos(\nu y) + c_3\cos(\nu z) \qquad \text{à la surface } \sigma,$$

ce qu'on pourra faire à l'aide de la méthode de la moyenne arithmétique; alors on trouvera

$$(172)\quad \left\{\begin{aligned} \widehat{u'} &= \frac{1}{4}(a + c_2 z - c_3 y) + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left[\frac{\partial\widehat{\psi'}}{\partial y}\cos(\nu z) - \frac{\partial\widehat{\psi'}}{\partial z}\cos(\nu y)\right]\frac{d\sigma}{r},\\ \widehat{v'} &= \frac{1}{4}(b + c_3 x - c_1 z) + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left[\frac{\partial\widehat{\psi'}}{\partial z}\cos(\nu x) - \frac{\partial\widehat{\psi'}}{\partial x}\cos(\nu z)\right]\frac{d\sigma}{r},\\ \widehat{w'} &= \frac{1}{4}(c + c_1 y - c_2 x) + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left[\frac{\partial\widehat{\psi'}}{\partial x}\cos(\nu y) - \frac{\partial\widehat{\psi'}}{\partial y}\cos(\nu x)\right]\frac{d\sigma}{r}.\end{aligned}\right.$$

Reprenons maintenant les notations du théorème I et remplaçons les fonctions f_1, f_2, f_3 dont nous sommes partis par les fonctions

$$(173)\quad \left\{\begin{aligned} R_m &= f_1 - C_1\frac{\partial\widehat{u'_1}}{\partial\nu} - C_2\frac{\partial\widehat{u'_2}}{\partial\nu} - \ldots - C_n\frac{\partial\widehat{u'_n}}{\partial\nu},\\ S_m &= f_2 - C_1\frac{\partial\widehat{v'_1}}{\partial\nu} - C_2\frac{\partial\widehat{v'_2}}{\partial\nu} - \ldots - C_n\frac{\partial\widehat{v'_n}}{\partial\nu},\\ T_m &= f_3 - C_1\frac{\partial\widehat{w'_1}}{\partial\nu} - C_2\frac{\partial\widehat{w'_2}}{\partial\nu} - \ldots - C_n\frac{\partial\widehat{w'_n}}{\partial\nu},\end{aligned}\right.$$

en faisant

$$(174)\qquad C_j = \int_i (\mathfrak{u}'_0 \widehat{\mathfrak{u}'_j} + \ldots)\, d\tau - \int_{i+e} \left(\frac{\partial \chi'_0}{\partial x} \frac{\partial \widehat{\chi'_j}}{\partial x} + \ldots \right) d\tau,$$

de manière que le théorème I nous donne des solutions u'', v'', w'' du problème

$$(175)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u''}{\partial \nu} = \lambda \left\{ -3 \dfrac{\partial u''}{\partial \nu} - \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial^2}{\partial x \,\partial \nu} \displaystyle\int_\tau \theta'' \frac{d\tau}{r} + 4 \frac{\partial U''}{\partial \nu} \right. \\ \qquad \left. - 2[(\mathfrak{w}'' - \mathfrak{W}'') \cos(\nu y) - (\mathfrak{v}'' - \mathfrak{V}'') \cos(\nu z)] \right\} + R_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} \text{à la surface } \sigma.$$

Je dis que les valeurs

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n$$

ne peuvent pas être des pôles des fonctions u'', v'', w''.

On aura, en posant

$$(176)\qquad \overline{u''} = u''(1 + 3\lambda) - 4\lambda U'' + \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \theta'' \frac{d\tau}{r}, \qquad \ldots,$$

les équations

$$(177)\qquad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta \overline{u''} = -2\lambda \dfrac{\partial \theta''}{\partial x}, \quad \ldots & \text{dans } \tau, \\ \dfrac{\partial \overline{u''}}{\partial \nu} = -2\lambda [(\mathfrak{w}'' - \mathfrak{W}'') \cos(\nu y) - (\mathfrak{v}'' - \mathfrak{V}'') \cos(\nu z)] + R_m & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{à la surface } \sigma, \end{array} \right.$$

donc

$$(178)\qquad \begin{aligned} &\int_\tau \left(\frac{\partial \widehat{u_j}}{\partial x} \frac{\partial \overline{u''}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial \widehat{v_j}}{\partial x} \frac{\partial \overline{v''}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial \widehat{w_j}}{\partial x} \frac{\partial \overline{w''}}{\partial x} + \ldots \right) d\tau \\ &\qquad = 2\lambda \int_\tau [\widehat{\mathfrak{u}_j}(\mathfrak{u}'' - \mathfrak{U}'') + \ldots]\, d\tau - \int_\sigma (R_m \widehat{u_j} + \ldots)\, d\sigma, \end{aligned}$$

et aussi

$$(179)\qquad \begin{aligned} &\int_\tau \left(\frac{\partial \widehat{u_j}}{\partial x} \frac{\partial \overline{u''}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial \widehat{v_j}}{\partial x} \frac{\partial \overline{v''}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial \widehat{w_j}}{\partial x} \frac{\partial \overline{w''}}{\partial x} + \ldots \right) d\tau \\ &\qquad = 2\lambda_j \int_\tau [\overline{\mathfrak{u}''}(\widehat{\mathfrak{u}'_j} - \widehat{\mathfrak{U}'_j}) + \ldots]\, d\tau. \end{aligned}$$

On trouvera ainsi, puisque

$$\int_\sigma (\mathrm{R}_m \widehat{u_j} + \ldots)\, d\sigma = 0 \quad (^1),$$

en vertu de (173) et (174),

$$\lambda \int_\tau [\widehat{\mathfrak{u}'_j}(\mathfrak{u}'' - \mathfrak{U}'') + \ldots]\, d\tau = \lambda_j \int_\tau [\mathfrak{u}''(\widehat{\mathfrak{u}'_j} - \widehat{\mathfrak{U}'_j}) + \ldots]\, d\tau$$

ou

$$(180) \qquad (\lambda - \lambda_j)\left[\int_i (\mathfrak{u}''\widehat{\mathfrak{u}'_j} + \ldots)\, d\tau - \int_{i+e}\left(\frac{\partial \chi''}{\partial x}\frac{\partial \widehat{\chi_j}}{\partial x} + \ldots\right) d\tau\right] = 0.$$

En désignant par u''_j, v''_j, w''_j les fonctions successives définies par les équations (14^c), quand nous partons des fonctions R_m, S_m, T_m au lieu des fonctions f_1, f_2, f_3, nous aurons

$$(181) \quad u'' = u''_0 + \lambda u''_1 + \lambda^2 u''_2 + \ldots = u' - \sum_1^n{}_j \frac{\mathrm{C}_j \lambda_j}{\lambda_j - \lambda}\widehat{u'_j}, \quad \ldots$$

et, d'après le théorème I,

$$(182) \qquad u' = \frac{\gamma_1 \widehat{u'_1}}{\lambda_1 - \lambda} + \Phi, \quad \ldots$$

$$|\lambda| < |\lambda_1|,$$

où γ_1 est une constante, Φ, X, Ψ des fonctions qui restent finies pour

$$\lim(\lambda_1 - \lambda) = 0;$$

il vient ainsi

$$(183) \qquad u'' = (\gamma_1 - \mathrm{C}_1\lambda_1)\frac{\widehat{u'_1}}{\lambda_1 - \lambda} + \Phi - \sum_2^n{}_j \frac{\mathrm{C}_j\lambda_j}{\lambda_j - \lambda}\widehat{u'_j}, \quad \ldots$$

---

(1) On a, en effet,

$$\int_\sigma \left[\widehat{u_j}\left(\frac{\partial u'_0}{\partial \nu} - \mathrm{C}_1\frac{\partial \widehat{u'_1}}{\partial \nu} - \ldots - \mathrm{C}_n\frac{\partial \widehat{u'_n}}{\partial \nu}\right)\right] d\sigma$$

$$= \quad 2\lambda \int_\tau \left[\frac{\partial \widehat{\theta'_j}}{\partial x}(u'_0 - \mathrm{C}_1\widehat{u'_1} - \ldots - \mathrm{C}_n\widehat{u'_n}) + \ldots\right] d\tau$$

$$- 2\lambda \int_\sigma \{[(\widehat{\mathfrak{w}'_j} - \widehat{\mathfrak{W}'_j})\cos(\nu y) - (\widehat{\mathfrak{v}'_j} - \widehat{\mathfrak{V}'_j})\cos(\nu z)](u'_0 - \mathrm{C}_1\widehat{u'_1} - \ldots - \mathrm{C}_n\widehat{u'_n}) + \ldots\}\, d\sigma$$

$$= - 2\lambda \int_\tau [(\widehat{\mathfrak{u}'_j} - \widehat{\mathfrak{U}'_j})(\mathfrak{u}'_0 - \mathrm{C}_1\mathfrak{u}'_1 - \ldots - \mathrm{C}_n\widehat{\mathfrak{u}'_n}) + \ldots]\, d\tau$$

$$= 0.$$

ou

$$(184)\qquad \begin{cases} (\lambda_1-\lambda)u''=(\gamma_1-C_1\lambda_1)\widehat{u'_1}+\varepsilon_1,\\ (\lambda_1-\lambda)v''=(\gamma_1-C_1\lambda_1)\widehat{v'_1}+\varepsilon_2,\\ (\lambda_1-\lambda)w''=(\gamma_1-C_1\lambda_1)\widehat{w'_1}+\varepsilon_3,\end{cases}$$

où nous pouvons faire ε_1, ε_2, ε_3 aussi petits que nous voulons en diminuant $|\lambda-\lambda_1|$.

De là nous tirons, à l'aide de l'identité (180), en passant à la limite

$$\lim(\lambda-\lambda_1)=0,$$

qu'on aura

$$\gamma_1-C_1\lambda_1=0,$$

donc

$$(185)\qquad u''=\Phi-\sum_2^n{}_j\frac{C_j\lambda_j}{\lambda_j-\lambda}\widehat{u'_j},\qquad \ldots,$$

où Φ, X, Ψ restent finies, même si l'on approche indéfiniment λ de λ_1.

Le point

$$\lambda=\lambda_1$$

ne peut donc être un pôle des solutions u'', v'', w''; les séries (181) convergeront, pour cette raison, non seulement pour toutes les valeurs de $|\lambda|$ plus petites que $|\lambda_1|$, mais aussi pour toutes les valeurs de $|\lambda|$ plus petites que le $|\lambda_2|$ le plus proche; nous pouvons continuer d'une manière analogue, et nous trouverons que les séries (181) doivent être convergentes avec leurs premières dérivées dans τ pour toutes les valeurs de $|\lambda|$ satisfaisant à l'inégalité

$$|\lambda|\leqq m.$$

Soit

$$m=1;$$

alors les triplets préliminaires possibles

$$\widehat{u'_j},\quad \widehat{v'_j},\quad \widehat{w'_j}\qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

ne pourraient être que des triplets avec des nombres correspondants λ_j satisfaisant à l'inégalité

$$-1\leqq\lambda_j<-\frac{1}{3},$$

ou il pourrait y avoir un triplet préliminaire avec le nombre correspondant

$$\lambda=1.$$

Le dernier cas est impossible, car on trouve, pour le coefficient C respectif, d'après (174),

$$(186)\qquad \begin{aligned} C &= \int_i (\mathfrak{u}'_0 \widehat{\mathfrak{u}'} + \ldots)\, d\tau - \int_{i+e} \left(\frac{\partial \chi'_0}{\partial x} \frac{\partial \widehat{\chi'}}{\partial x} + \ldots \right) d\tau \\ &= \int_i (\mathfrak{u}'_0 \widehat{\mathfrak{u}} + \ldots)\, d\tau = 2c_1 \int_i \mathfrak{u}'_0\, d\tau + 2c_2 \int_i \mathfrak{v}'_0\, d\tau + 2c_3 \int_i \mathfrak{w}'_0\, d\tau, \end{aligned}$$

et la supposition

$$(187)\qquad \int_\sigma (y f_3 - z f_2)\, d\tau = 0, \qquad \ldots$$

nous donne les identités

$$(188)\ (^1)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_i \mathfrak{u}'_0\, d\tau = -\int_\sigma \left(y \frac{\partial w'_0}{\partial \nu} - z \frac{\partial v'_0}{\partial \nu} \right) d\sigma, \\ &\int_i \mathfrak{u}'_0\, d\tau = 0, \qquad \ldots . \end{aligned} \right.$$

Nous arrivons ainsi au résultat suivant :

III$_a$. A défaut de triplets préliminaires possédant des nombres correspondants négatifs

$$-1 \overset{=}{<} \lambda_j < -\frac{1}{3},$$

les séries

$$(189)\qquad \left\{ \begin{aligned} u' &= u'_0 + u'_1 + u'_2 + \ldots, \\ v' &= v'_0 + v'_1 + v'_2 + \ldots, \\ w' &= w'_0 + w'_1 + w'_2 + \ldots, \end{aligned} \right.$$

où les fonctions successives u'_j, v'_j, w'_j sont définies par les équations (14^c), seront absolument et uniformément convergentes dans tout le domaine τ avec leurs pre-

---

(1) En continuant, on trouve

$$\int_i \mathfrak{u}'_1\, d\tau = -\int_\sigma \left(y \frac{\partial w'_1}{\partial \nu} - z \frac{\partial v'_1}{\partial \nu} \right) d\sigma,$$

$$\int_i \mathfrak{u}'_1\, d\tau = 0,$$

et ainsi de suite

$$(188')\qquad \int_i \mathfrak{u}'_j\, d\tau = 0, \qquad \ldots \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

mières dérivées, et elles représenteront les solutions du problème

$$(190)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u'}{\partial \nu} = -\dfrac{1}{8\pi}\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\displaystyle\int_\tau \theta' \dfrac{d\tau}{r} + \dfrac{\partial \mathrm{U}'}{\partial \nu} \\ \qquad - \dfrac{1}{2}[(\mathfrak{w}' - \mathfrak{W}')\cos(\nu y) - (\mathfrak{v}' - \mathfrak{V}')\cos(\nu z)] + \dfrac{f_1}{4} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \text{ à la surface } \sigma,$$

ayant les propriétés

$$(191)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_\tau u'\,d\tau = \int_\tau v'\,d\tau = \int_\tau w'\,d\tau = 0, \\ \displaystyle\int_\tau \mathfrak{u}'\,d\tau = \int_\tau \mathfrak{v}'\,d\tau = \int_\tau \mathfrak{w}'\,d\tau = 0. \end{array}\right.$$

Dans le cas qu'il y ait des triplets préliminaires possédant des nombres correspondants négatifs

$$-1 \leqq \lambda_j < -\frac{1}{3},$$

il faudra former ces séries en partant des fonctions

$$(192)\quad \left\{\begin{array}{l} f_1 - \displaystyle\sum_{-1\leqq\lambda_j<-\frac{1}{3}}^{j} \mathrm{C}_j \frac{\partial \widehat{u'_j}}{\partial \nu}, \\ f_2 - \displaystyle\sum_{-1\leqq\lambda_j<-\frac{1}{3}}^{j} \mathrm{C}_j \frac{\partial \widehat{v'_j}}{\partial \nu}, \\ f_3 - \displaystyle\sum_{-1\leqq\lambda_j<-\frac{1}{3}}^{j} \mathrm{C}_j \frac{\partial \widehat{w'_j}}{\partial \nu} \end{array}\right.$$

au lieu des fonctions f_1, f_2, f_3, où

$$(193)\quad \mathrm{C}_j = \int_i (\mathfrak{u}'_0 \widehat{\mathfrak{u}'_j} + \ldots)\,d\tau - \int_{i+e} \left(\frac{\partial \chi'_0}{\partial x}\frac{\partial \widehat{\chi'_j}}{\partial x} + \ldots\right) d\tau.$$

Les séries

$$(194)\quad \left\{\begin{array}{l} u'' = u''_0 + u''_1 + u''_2 + \ldots, \\ v'' = v''_0 + v''_1 + v''_2 + \ldots, \\ w'' = w''_0 + w''_1 + w''_2 + \ldots, \end{array}\right.$$

formées de cette manière en partant des fonctions (192), seront uniformément et absolument convergentes dans τ avec leurs premières dérivées, et les fonctions

$$(194')\quad \left\{\begin{aligned} u' &= u''_0 + u''_1 + u''_2 + \ldots + \sum_j \frac{C_j\lambda_j}{1-\lambda_j}\widehat{u'_j}, \\ v' &= v''_0 + v''_1 + v''_2 + \ldots + \sum_j \frac{C_j\lambda_j}{1-\lambda_j}\widehat{v'_j}, \\ w' &= w''_0 + w''_1 + w''_2 + \ldots + \sum_j \frac{C_j\lambda_j}{1-\lambda_j}\widehat{w'_j} \end{aligned}\right.$$

représenteront les solutions du problème (190), ayant les propriétés

$$(195)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_\tau u'\,d\tau = \int_\tau v'\,d\tau = \int_\tau w'\,d\tau = 0, \\ &\int_\tau \mathfrak{u}'\,d\tau = \int_\tau \mathfrak{v}'\,d\tau = \int_\tau \mathfrak{w}'\,d\tau = 0. \end{aligned}\right.$$

Corollaire de III_a. — Les solutions du problème (190) ayant les propriétés (195) satisferont aux inégalités

$$(196)\quad \left\{\begin{aligned} &\left.\begin{matrix} |u'|, & |v'|, & |w'| \\ |D_1 u'|, & |D_1 v'|, & |D_1 w'| \end{matrix}\right\} \leqq C_1 \text{ max. abs. } (f_1, f_2, f_3) + C_2 A, \\ &|D_1 u'(x_2, y_2, z_2) - D_1 u'(x_1, y_1, z_1)| \leqq [C_1 \text{ max. abs. } (f_1, f_2, f_3) + C_2 A]\, r_{12}^{\varpi}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

$$(197)\quad \left\{\begin{aligned} &|\mathfrak{u}'|, \quad |\mathfrak{v}'|, \quad |\mathfrak{w}'| \leqq \frac{c}{\varepsilon}\text{ max. abs. } (\mathfrak{u}'_0, \mathfrak{v}'_0, \mathfrak{w}'_0) + \varepsilon B'_0, \\ &|\theta'| \leqq |\theta'_0| + \frac{c}{\varepsilon}\text{ max. abs. } (\mathfrak{u}'_0, \mathfrak{v}'_0, \mathfrak{w}'_0) + \varepsilon B'_0, \end{aligned}\right.$$

si

$$(198)\qquad |\mathfrak{u}'_0(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{u}'_0(x_1, y_1, z_1)| \leqq B'_0\, r_{12}^{\varpi}, \qquad \ldots,$$

C_1, C_2, c étant des constantes finies ne dépendant que de la surface σ et de ϖ, ε un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut.

On tire ces résultats immédiatement des formules (107), (108), (111), quand il n'y a pas de triplets préliminaires à nombre correspondant négatif

$$-1 \leqq \lambda_j < -\frac{1}{3},$$

et, quand il y en a, on n'a qu'à considérer que les valeurs des

$$|\widehat{\mathfrak{u}'_j}|, \quad |\widehat{\mathfrak{v}'_j}|, \quad |\widehat{\mathfrak{w}'_j}|$$

et des constantes B'_j dans les inégalités

$$|\widehat{\mathfrak{u}'_j}(x_2, y_2, z_2) - \widehat{\mathfrak{u}'_j}(x_1, y_1, z_1)| \lesseqgtr \widehat{B'_j} r_{12}^{\varpi}, \qquad \ldots$$

doivent être plus petites que des nombres finis ne dépendant que de la surface σ et de ϖ, et qu'on a

$$C_j = \int_i (\mathfrak{u}'_0 \widehat{\mathfrak{u}'_j} + \ldots)\, d\tau - \int_{i+e} \left(\frac{\partial \chi'_0}{\partial x} \frac{\partial \widehat{\chi'_j}}{\partial x} + \ldots \right) d\tau.$$

III$_b$. Les fonctions

(199) $$u' - U', \quad v' - V', \quad w' - W'$$

représentent des solutions du problème

(200) $$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(u' - U')}{\partial \nu} &= -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial \nu} \int_\tau (\theta' - \Theta') \frac{d\tau}{r} \\ &\quad - \frac{1}{2}[(\mathfrak{w}' - \mathfrak{W}') \cos(\nu y) - (\mathfrak{v}' - \mathfrak{V}') \cos(\nu z)] + \frac{f_1}{4}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{aligned} \right.$$

comme on peut toujours ajouter à ces solutions les expressions

$$\begin{gathered} a + c_2 z - c_3 y, \\ b + c_3 x - c_1 z, \\ c + c_1 y - c_2 x, \end{gathered}$$

c_1, c_2, c_3, a, b, c étant des constantes quelconques, on peut toujours trouver un et un seul système de solutions du problème (200) ayant les propriétés

(201) $$\left\{ \begin{aligned} &\int_\tau (u' - U')\, d\tau = \int_\tau (v' - V')\, d\tau = \int_\tau (w' - W')\, d\tau = 0, \\ &\int_\tau (\mathfrak{u}' - \mathfrak{U}')\, d\tau = \int_\tau (\mathfrak{v}' - \mathfrak{V}')\, d\tau = \int_\tau (\mathfrak{w}' - \mathfrak{W}')\, d\tau = 0. \end{aligned} \right.$$

Corollaire de III$_b$. — Les solutions du problème (200) ayant les propriétés (201) satisferont aux inégalités

$$(202^a)\quad \begin{cases} \left.\begin{array}{lll} |u'-\mathrm{U}'|, & |v'-\mathrm{V}'|, & |w'-\mathrm{W}'| \\ |\mathrm{D}_1(u'-\mathrm{U}')|, & |\mathrm{D}_1(v'-\mathrm{V}')|, & |\mathrm{D}_1(w'-\mathrm{W}')| \end{array}\right\} \overline{\overline{<}}\ \mathrm{C}_1 \text{ max. abs. } (f_1, f_2, f_3) + \mathrm{C}_2 \mathrm{A}, \\ |\mathrm{D}_1(u'-\mathrm{U}')(x_2, y_2, z_2) - \mathrm{D}_1(u'-\mathrm{U}')(x_1, y_1, z_1)| \overline{\overline{<}} [\mathrm{C}_1 \text{ max. abs. } (f_1, f_2, f_3) + \mathrm{C}_2 \mathrm{A}] r_{12}^{\varpi}, \end{cases}$$

$$(202^b)\quad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} |\mathfrak{u}' - \mathfrak{U}'| \\ |\mathfrak{v}' - \mathfrak{V}'| \\ |\mathfrak{w}' - \mathfrak{W}'| \end{array}\right\} \overline{\overline{<}} \quad \dfrac{c}{\varepsilon} \text{ max. abs. } (\mathfrak{u}'_0, \mathfrak{v}'_0, \mathfrak{w}'_0) + \varepsilon \mathrm{B}'_0, \\ |\theta' - \Theta'| \quad \overline{\overline{<}} |\theta'_0| + \dfrac{c}{\varepsilon} \text{ max. abs. } (\mathfrak{u}'_0, \mathfrak{v}'_0, \mathfrak{w}'_0) + \varepsilon \mathrm{B}'_0, \end{cases}$$

c, C_1, C_2 étant des constantes finies ne dépendant que de la surface σ et de ϖ, ε un nombre positif qu'on peut faire aussi petit qu'on veut.

III$_c$. Les fonctions

$$(203)\quad \begin{cases} u = 4(u' - \mathrm{U}') + \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial}{\partial x} \displaystyle\int_\tau \theta' \dfrac{d\tau}{r}, \\ v = 4(v' - \mathrm{V}') + \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial}{\partial y} \displaystyle\int_\tau \theta' \dfrac{d\tau}{r}, \\ w = 4(w' - \mathrm{W}') + \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial}{\partial z} \displaystyle\int_\tau \theta' \dfrac{d\tau}{r} \end{cases}$$

représenteront les solutions du problème préliminaire

$$(204)\quad \begin{cases} \Delta u + \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \ldots, \quad \text{dans } \tau, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -\dfrac{1}{2}[\mathfrak{w} \cos(\nu y) - \mathfrak{v} \cos(\nu z)], \quad \ldots, \quad \text{à la surface } \sigma; \end{cases}$$

comme on peut ajouter à ces solutions les expressions

$$\begin{aligned} &a + c_2 z - c_3 y, \\ &b + c_3 x - c_1 z, \\ &c + c_1 y - c_2 x, \end{aligned}$$

a, b, c, c_1, c_2 c_3 étant des constantes quelconques, on peut toujours trouver un et un seul système de solutions du problème préliminaire ayant les propriétés

$$(204')\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\tau u\, d\tau = \int_\tau v\, d\tau = \int_\tau w\, d\tau = 0, \\ \displaystyle\int_\tau \mathfrak{u}\, d\tau = \int_\tau \mathfrak{v}\, d\tau = \int_\tau \mathfrak{w}\, d\tau = 0. \end{cases}$$

Corollaire. — Les solutions du problème préliminaire ayant les propriétés (204′) satisferont aux inégalités

$$(205)\quad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{lll} |u|, & |v|, & |w| \\ |D_1 u|, & |D_1 v|, & |D_1 w| \end{array}\right\} \overline{\overline{<}}\ C_1 \max.\text{abs.}(f_1, f_2, f_3) + C_2 A, \\ |D_1 u(x_2, y_2, z_2) - D_1 u(x_1, y_1, z_1)| \overline{\overline{<}} [C_1 \max.\text{abs.}(f_1, f_2, f_3) + C_2 A) r_{12}^{\varpi}, \quad \ldots, \end{array}\right.$$

C_1, C_2 étant des constantes finies ne dépendant que de la surface σ et de ϖ.

CHAPITRE II.

LE PROBLÈME FONDAMENTAL ET LES TRIPLETS DE COSSERAT DE SECONDE ESPÈCE.

1. Soient de nouveau f_1, f_2, f_3 trois fonctions données à la surface σ, continues de telle manière qu'on ait

$$(206)\quad |f_j(x_2, y_2, z_2) - f_j(x_1, y_1, z_1)| \overline{\overline{<}} A r_{12}^{\varpi} \left| \begin{array}{c} A \text{ constante finie} \\ 0 < \varpi < 1 \end{array} \right\} \qquad (j = 1, 2, 3)$$

pour deux points (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) quelconques de σ dont nous désignons la distance par r_{12}, et satisfaisant aux conditions

$$(207)\quad \left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\int_\sigma f_1\, d\sigma = 0, & \ldots \\ \displaystyle\int_\sigma (y f_3 - z f_2)\, d\sigma = 0, & \ldots; \end{array}\right.$$

nous construirons successivement les solutions (harmoniques dans τ)

$$\begin{array}{lll} u'_0, & v'_0, & w'_0, \\ u'_1, & v'_1, & w'_1, \\ u'_2, & v'_2, & w'_2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

des problèmes

$$(208)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u'_0}{\partial \nu}+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\tau \theta'_0\frac{d\tau}{r}+\frac{1}{2}[\mathfrak{w}'_0\cos(\nu y)-\mathfrak{v}'_0\cos(\nu z)]=f_1\\
&\frac{\partial v'_0}{\partial \nu}+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial \nu}\int_\tau \theta'_0\frac{d\tau}{r}+\frac{1}{2}[\mathfrak{u}'_0\cos(\nu z)-\mathfrak{w}'_0\cos(\nu x)]=f_2\\
&\frac{\partial w'_0}{\partial \nu}+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \nu}\int_\tau \theta'_0\frac{d\tau}{r}+\frac{1}{2}[\mathfrak{v}'_0\cos(\nu x)-\mathfrak{u}'_0\cos(\nu y)]=f_3
\end{aligned}\right\}\ \text{à la surface } \sigma,\\
&\qquad\qquad\int_\tau u'_0\,d\tau=\int_\tau v'_0\,d\tau=\int_\tau w'_0\,d\tau=0,\\
&\qquad\qquad\int_\tau \mathfrak{u}'_0\,d\tau=\int_\tau \mathfrak{v}'_0\,d\tau=\int_\tau \mathfrak{w}'_0\,d\tau=0,
\end{aligned}\right.$$

$$(209)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u'_j}{\partial \nu}+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\tau \theta'_j\frac{d\tau}{r}+\frac{1}{2}[\mathfrak{w}'_j\cos(\nu y)-\mathfrak{v}'_j\cos(\nu z)]\\
&\quad=-\frac{\partial u'_{j-1}}{\partial \nu}+\frac{1}{2}\theta'_{j-1}\cos(\nu x)-\frac{1}{2}[\mathfrak{w}'_{j-1}\cos(\nu y)-\mathfrak{v}'_{j-1}\cos(\nu z)]\\
&\frac{\partial v'_j}{\partial \nu}+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial \nu}\int_\tau \theta'_j\frac{d\tau}{r}+\frac{1}{2}[\mathfrak{u}'_j\cos(\nu z)-\mathfrak{w}'_j\cos(\nu x)]\\
&\quad=-\frac{\partial v'_{j-1}}{\partial \nu}+\frac{1}{2}\theta'_{j-1}\cos(\nu y)-\frac{1}{2}[\mathfrak{u}'_{j-1}\cos(\nu z)-\mathfrak{w}'_{j-1}\cos(\nu x)]\\
&\frac{\partial w'_j}{\partial \nu}+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \nu}\int_\tau \theta'_j\frac{d\tau}{r}+\frac{1}{2}[\mathfrak{v}'_j\cos(\nu x)-\mathfrak{u}'_j\cos(\nu y)]\\
&\quad=-\frac{\partial w'_{j-1}}{\partial \nu}+\frac{1}{2}\theta'_{j-1}\cos(\nu z)-\frac{1}{2}[\mathfrak{v}'_{j-1}\cos(\nu x)-\mathfrak{u}'_{j-1}\cos(\nu y)]
\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&\text{à la}\\&\text{surface } \sigma\end{aligned}\\
&\qquad\qquad\int_\tau u'_j\,d\tau=\int_\tau v'_j\,d\tau=\int_\tau w'_j\,d\tau=0,\\
&\qquad\qquad\int_\tau \mathfrak{u}'_j\,d\tau=\int_\tau \mathfrak{v}'_j\,d\tau=\int_\tau \mathfrak{w}'_j\,d\tau=0,
\end{aligned}\right\}\quad (j=1,2,3,\ldots)$$

que nous pourrons construire d'après le théorème III_b et qui auront des propriétés de continuité faciles à déduire du corollaire du théorème III_b; nous examinerons la convergence des séries

$$(210)\quad \left\{\begin{aligned}
u'&=u'_0+\Lambda u'_1+\Lambda^2 u'_2+\ldots,\\
v'&=v'_0+\Lambda v'_1+\Lambda^2 v'_2+\ldots,\\
w'&=w'_0+\Lambda w'_1+\Lambda^2 w'_2+\ldots,
\end{aligned}\right.$$

en désignant par Λ un nombre réel.

Comme au Chapitre I, nous aurons besoin de trois lemmes que nous allons démontrer avant d'aborder la question de la convergence des séries en question.

LEMME I. — *Soient*

$$u'_j, \quad v'_j, \quad w'_j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, p)$$

$p + 1$ triplets de fonctions harmoniques, continues dans τ avec leurs premières dérivées, et supposons qu'on ait

$$\int_\tau \mathfrak{u}'_j \, d\tau = 0, \qquad \ldots, \tag{211}$$

$$|\theta'_j(x_2, y_2, z_2) - \theta'_j(x_1, y_1, z_1)| \overline{\underset{<}{}} C'_j r_{12}^{\varpi} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, p) \tag{212}$$

les C_j étant des constantes données, $0 < \varpi < 1$,

pour deux points (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) quelconques de τ dont nous désignons la distance par r_{12}; posons

$$\left\{\begin{aligned} u' &= \alpha_0 u'_0 + \alpha_1 u'_1 + \alpha_2 u'_2 + \ldots + \alpha_p u'_p, \\ v' &= \alpha_0 v'_0 + \alpha_1 v'_1 + \alpha_2 v'_2 + \ldots + \alpha_p v'_p, \\ w' &= \alpha_0 w'_0 + \alpha_1 w'_1 + \alpha_2 w'_2 + \ldots + \alpha_p w'_p, \\ C' &= \alpha_0 C'_0 + \alpha_1 C'_1 + \alpha_2 C'_2 + \ldots + \alpha_p C'_p, \end{aligned}\right. \tag{213}$$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ étant des constantes réelles satisfaisant à l'équation

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_p^2 = 1, \tag{214}$$

et soient $\overline{u'}$, $\overline{v'}$, $\overline{w'}$ trois fonctions harmoniques satisfaisant aux conditions

$$\left\{\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{u'}}{\partial \nu} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial \nu} \int_\tau \overline{\theta'} \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}\left[\overline{\mathfrak{w}'} \cos(\nu y) - \overline{\mathfrak{v}'} \cos(\nu z)\right] \\ &\quad = -\frac{\partial u'}{\partial \nu} + \frac{1}{2}\theta' \cos(\nu x) - \frac{1}{2}[\mathfrak{w}' \cos(\nu y) - \mathfrak{v}' \cos(\nu z)] \end{aligned}\right\} \text{ à la surface } \sigma, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad\qquad \int_\tau \overline{\mathfrak{u}'} \, d\tau = 0, \qquad \ldots, \\ &\qquad\qquad \int_\tau \mathfrak{u}' \, d\tau = 0, \qquad \ldots; \end{aligned}\right. \tag{215}$$

alors on pourra toujours choisir les constantes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ de manière qu'on ait

$$\int_\tau \overline{\theta'^2} \, d\tau \overline{\underset{<}{}} \varepsilon_p \int_\tau \theta'^2 \, d\tau + \varepsilon'_0 C'^2, \tag{216}$$

où ε_p et ε'_p sont des nombres positifs qu'on peut faire aussi petits qu'on veut en agrandissant p, et qui ne dépendent nullement du choix des fonctions u_j, v'_j, w'_j, ou

$$\bar{\mathrm{I}} \leqq \varepsilon_p \mathrm{I} + \varepsilon'_p \mathrm{C}'^2, \tag{217}$$

si nous posons

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{I} &= \int_\tau \theta'^2 \, d\tau, \\ \bar{\mathrm{I}} &= \int_\tau \overline{\theta'^2} \, d\tau. \end{aligned} \right. \tag{218}$$

Nous pouvons toujours partager le domaine τ en p parties de manière que dans chaque partie la distance la plus grande entre deux points de la même partie

$$r_{12} \leqq \frac{\alpha}{\sqrt[3]{p}}, \tag{219}$$

α représentant une constante finie ne dépendant que de la surface σ, et qu'on ait

$$\int_{\tau_i} \overline{\theta'} \, d\tau = 0, \tag{220}$$

pour chaque petit domaine τ_i; ces relations sont en effet p équations linéaires et homogènes pour les $p+1$ constantes

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_p$$

qui doivent encore satisfaire à l'équation

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_p^2 = 1.$$

Comme nous pouvons écrire les équations (215) de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \nu}(\overline{u'} + u') + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial \nu} \int_\tau (\overline{\theta'} + \theta') \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}\left[(\overline{\mathfrak{w}'} + \mathfrak{w}') \cos(\nu y) - (\overline{\mathfrak{v}'} + \mathfrak{v}') \cos(\nu z)\right] \\ &\quad = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial \nu} \int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2} \theta' \cos(\nu x), \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \right. \tag{215'}$$

nous aurons, d'après le corollaire de III_b du Chapitre I,

$$\begin{aligned} &|\overline{\theta'}(x_2, y_2, z_2) + \theta'(x_2, y_2, z_2) - \overline{\theta'}(x_1, y_1, z_1) - \theta'(x_1, y_1, z_1)| \\ &\quad \leqq (\text{const. fin. max. abs. } \theta' + \text{const. fin. C}') r_{12}^{\varpi}, \end{aligned}$$

donc aussi

$$(221)\qquad |\overline{\theta'}(x_2, y_2, z_2) - \overline{\theta'}(x_1, y_1, z_1)| \overline{\overline{<}} (c_1 \text{ max. abs. } \theta + c_2 C') r_{12}^{\varpi},$$

c_1, c_2 étant des constantes finies ne dépendant que de la surface σ et de ϖ.

En ayant égard à l'équation (220), on aura, pour chaque point (ξ, η, ζ) de chaque domaine τ_i,

$$(222)\qquad \overline{\theta'}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\tau_i}\int_{\tau_i} [\overline{\theta'}(\xi, \eta, \zeta) - \overline{\theta'}(x, y, z)]\, d\tau$$

ou, à cause de (219) et (221),

$$|\overline{\theta'}(\xi, \eta, \zeta)| \overline{\overline{<}} (c_1 \text{ max. abs. } \theta' + c_2 C')\left(\frac{\alpha}{\sqrt[3]{p}}\right)^{\varpi},$$

donc

$$(223)\qquad \int_\tau \overline{\theta'^2}\, d\tau \overline{\overline{<}} [C_1 (\text{max. abs. } \theta')^2 + C_2 C'^2] \frac{1}{\sqrt[3]{p^{2\varpi}}} \quad (^1).$$

Or, θ' étant harmonique dans τ, on sait qu'on a

$$(224)\qquad |\theta'| \overline{\overline{<}} \frac{c}{\sqrt{\rho^3}} \sqrt{\int_\tau \theta'^2\, d\tau} + \rho^{\varpi} C',$$

où c est une constante finie ne dépendant que de la surface σ et de ϖ, et où ρ est un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut.

En choisissant convenablement ρ, on pourra donc d'abord, dans l'inégalité

$$(225)\qquad \int_\tau \overline{\theta'^2}\, d\tau \overline{\overline{<}} \varepsilon \int_\tau \theta'^2\, d\tau + \varepsilon' C'^2,$$

faire ε' aussi petit qu'on veut, et en choisissant après p assez grand on pourra aussi faire ε aussi petit qu'on voudra. C. Q. F. D.

Lemme II. — *Soient u', v', w' trois fonctions harmoniques, continues dans τ avec leurs premières dérivées, et supposons qu'on ait*

$$(226)\qquad \int_\tau u'\, d\tau = 0, \qquad \ldots,$$

$$(227)\qquad |\theta'(x_2, y_2, z_2) - \theta'(x_1, y_1, z_1)| \overline{\overline{<}} C' r_{12}^{\varpi} \qquad \left|\ \begin{array}{l} C' \text{ étant une constante donnée,} \\ 0 < \varpi < 1, \end{array}\right.$$

---

(1) C_1, C_2 étant des constantes finies ne dépendant que de la surface σ et de ϖ.

pour deux points (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) quelconques de τ dont nous désignons la distance par r_{12}; soient $\overline{u'}$, $\overline{v'}$, $\overline{w'}$ trois fonctions harmoniques satisfaisant aux conditions

$$(228)\quad \left\{\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\overline{u'}}{\partial\nu}+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\nu}\int_\tau\overline{\theta'}\frac{d\tau}{r}+\frac{1}{2}[\overline{\mathfrak{w}'}\cos(\nu y)-\overline{\mathfrak{v}'}\cos(\nu z)]\\ &\quad=-\frac{\partial u'}{\partial\nu}+\frac{1}{2}\theta'\cos(\nu x)-\frac{1}{2}[\mathfrak{w}'\cos(\nu y)-\mathfrak{v}'\cos(\nu z)]\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\text{ à la surface }\sigma,\\ &\int_\tau\overline{u'}\,d\tau=0,\qquad\ldots,\\ &\int_\tau\overline{\mathfrak{u}'}\,d\tau=0,\qquad\ldots;\end{aligned}\right.$$

alors on aura toujours pour deux points (x_1, y_1, z_1) et $(x_2, y_2, z_2$ quelconques de τ dont nous désignons la distance par r_{12} :

$$(229)\qquad |\overline{\theta'}(x_2, y_2, z_2)-\overline{\theta'}(x_1, y_1, z_1)|\overline{\overline{<}}\left(\frac{c}{\varepsilon^{1+\frac{3}{\varpi}}}\sqrt{\int_\tau\theta'^2\,d\tau}+\varepsilon C'\right)r_{12}^{\varpi},$$

où c est une constante finie ne dépendant que de la surface σ et de ϖ, ε un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut.

Comme nous pouvons écrire les équations (228) dans la forme (215′) ou, ce qui est la même chose,

$$(230)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial(\overline{u'}+u')}{\partial\nu}=&\ \frac{1}{8\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\nu}\int_\tau\theta'\frac{d\tau}{r}\right|_e\\ &-\frac{1}{8\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\nu}\int_\tau(\overline{\theta'}+\theta')\frac{d\tau}{r}\right|_e+\frac{1}{2}(\overline{\theta'}+\theta')\cos(\nu x)\\ &-\frac{1}{2}[(\overline{\mathfrak{w}'}+\mathfrak{w}')\cos(\nu y)-(\overline{\mathfrak{v}'}+\mathfrak{v}')\cos(\nu z)]\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\text{ à la surface }\sigma,$$

nous aurons, en ayant égard à la méthode de la moyenne arithmétique à la surface σ,

$$(231)\quad \begin{aligned}\overline{u'}+u'=&+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau\overline{\theta'}\frac{d\tau}{r}+\Xi\\ &-\frac{1}{4\pi}\int_\sigma[(\overline{\theta'}+\theta')\cos(\nu x)-(\overline{\mathfrak{w}'}+\mathfrak{w}')\cos(\nu y)+(\overline{\mathfrak{v}'}+\mathfrak{v}')\cos(\nu z)]\frac{d\sigma}{r},\end{aligned}$$

les premières dérivées de ΞHZ étant continues de la manière [1]

$$(232)\quad |D_1\Xi(x_2,y_2,z_2)-D_1\Xi(x_1,y_1,z_1)| \overline{\overline{<}} \left(\frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon_1}\max.\text{abs.}\,\theta'+\varepsilon_1 C'\right) r_{12}^{\varpi},\quad \ldots,$$

ε_1 étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut; on aura donc à la surface σ

$$(233)\quad \overline{\theta'}+\theta' = -\frac{1}{2}\overline{\theta'}+\overline{\theta'}+\theta'$$
$$-\frac{1}{8\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\tau \overline{\theta'}\frac{d\tau}{r}\right|_{i+e} \text{ [2]}$$
$$+\frac{1}{4\pi}\Big\{\cos(\nu x)\frac{\partial}{\partial\nu}\int_\sigma [(\overline{\theta'}+\theta')\cos(\nu x)$$
$$-(\overline{\mathfrak{w}'}+\mathfrak{w}')\cos(\nu y)+(\overline{\mathfrak{v}'}+\mathfrak{v}')\cos(\nu z)]\frac{d\sigma}{r}+\ldots\Big\}$$
$$+\frac{1}{2}(\overline{\theta'}+\theta')+\varphi,$$

où φ est une fonction continue à la surface σ de la manière

$$(234)\quad |\varphi(x_2,y_2,z_2)-\varphi(x_1,y_1,z_1)| \leqq \left(\frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon_2}\max.\text{abs.}\,\theta'+\varepsilon_2 C'\right) r_{12}^{\varpi},$$

ε_2 étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut. Comme

---

(1) D'après le corollaire du théorème III_b du Chapitre I et les équations (215′), on a

$$(232')\quad \left\{\begin{array}{l} |\overline{\theta'}+\theta'|,\quad |\overline{\mathfrak{u}'}+\mathfrak{u}'|,\quad |\overline{\mathfrak{v}'}+\mathfrak{v}'|,\quad |\overline{\mathfrak{w}'}+\mathfrak{w}'| \quad \overline{\overline{<}} \dfrac{\text{const. fin.}}{\varepsilon}\max.\text{abs.}\,\theta'+\varepsilon C', \\ \left.\begin{array}{l} |\overline{\theta'}(x_2,y_2,z_2)+\theta'(x_2,y_2,z_2)-\overline{\theta'}(x_1,y_1,z_1)-\theta'(x_1,y_1,z_1)| \\ |\overline{\mathfrak{u}'}(x_2,y_2,z_2)+\mathfrak{u}'(x_2,y_2,z_2)-\overline{\mathfrak{u}'}(x_1,y_1,z_1)-\mathfrak{u}'(x_1,y_1,z_1)| \\ |\overline{\mathfrak{v}'}(x_2,y_2,z_2)+\mathfrak{v}'(x_2,y_2,z_2)-\overline{\mathfrak{v}'}(x_1,y_1,z_1)-\mathfrak{v}'(x_1,y_1,z_1)| \\ |\overline{\mathfrak{w}'}(x_2,y_2,z_2)+\mathfrak{w}'(x_2,y_2,z_2)-\overline{\mathfrak{w}'}(x_1,y_1,z_1)-\mathfrak{w}'(x_1,y_1,z_1)| \end{array}\right\} \overline{\overline{<}}(\text{const. fin. max. abs. }\theta' \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \text{const. fin. } C')\, r_{12}^{\varpi}, \end{array}\right.$$

ε étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut.

(2) En nous servant de l'abréviation

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\right|_{i+e}=\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\right|_{i}+\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\right|_{e}.$$

on a (*Ann. Éc. Norm.*, 3[e] série, t. XXIV, 1907, p. 31)

$$-\frac{1}{8\pi}\left|\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\int_\tau \overline{\theta'}\frac{d\tau}{r}\right|_{i+e} = \frac{1}{4}\overline{\theta'} + \psi,$$

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\cos(\nu x)\frac{\partial}{\partial\nu}\int_\tau\left[(\overline{\theta'}+\theta')\cos(\nu x) - (\overline{\mathfrak{w}'}+\mathfrak{w}')\cos(\nu y) + (\overline{\mathfrak{v}'}+\mathfrak{v}')\cos(\nu z)\right]\frac{d\sigma}{r} + \ldots\right\}$$
$$= -\frac{1}{2}(\overline{\theta'}+\theta') + \chi,$$

où ψ et χ sont continues à la surface σ de la même manière (234) que φ, on arrive à l'équation

$$\overline{\theta'} = \frac{3}{4}\overline{\theta'} + \chi + \psi,$$

donc

$$\overline{\theta'} = \omega, \tag{235}$$

la fonction ω étant continue à la surface σ de telle manière que pour deux points (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) quelconques de σ dont nous désignons la distance par r_{12}

$$|\omega(x_2, y_2, z_2) - \omega(x_1, y_1, z_1)| \overline{\overline{<}} \left(\frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon'}\,\text{max. abs.}\,\theta' + \varepsilon' C'\right) r_{12}^{\varpi}, \tag{236}$$

ε' étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut.

Comme on a

$$|\theta'| \overline{\overline{<}} \frac{\text{const. fin.}}{\sqrt{\rho^3}}\sqrt{\int_\tau \theta'^2\,d\tau} + \rho^{\varpi} C',$$

où ρ est un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut, on peut écrire l'inégalité (236) ainsi :

$$|\omega(x_2, y_2, z_2) - \omega(x_1, y_1, z_1)| \overline{\overline{<}} \left(\frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon^{1+\frac{3}{\varpi}}}\sqrt{\int_\tau \theta'^2\,d\tau} + \varepsilon C'\right), \tag{237}$$

en posant

$$\rho^{\varpi} = \varepsilon'^2, \qquad \varepsilon = 2\varepsilon'.$$

C. Q. F. D.

Lemme III. — *Les fonctions successives*

$$u'_j, \quad v'_j, \quad w'_j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

satisfaisant aux conditions (209) *remplissent l'identité*

$$\int_\tau \theta'^2_j\,d\tau = \int_\tau \theta'_{j-1}\theta'_{j+1}\,d\tau \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{238}$$

En effet, posons

$$u_j = u'_j + u'_{j-1} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta'_j \frac{d\tau}{r}, \qquad \ldots; \tag{239}$$

on aura

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta u_j = -\frac{1}{2}\frac{\partial \theta'_j}{\partial x}, \qquad \ldots \qquad \text{dans } \tau, \\ &\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u_j}{\partial \nu} = \frac{1}{2}\theta'_{j-1}\cos(\nu x) \\ &\qquad -\frac{1}{2}[(\mathfrak{w}'_j + \mathfrak{w}'_{j-1})\cos(\nu y) - (\mathfrak{v}'_j + \mathfrak{v}'_{j-1})\cos(\nu z)], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \text{à la surface } \sigma, \end{aligned}\right. \tag{240}$$

donc

$$\int_\tau \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial v_j}{\partial x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial w_j}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau$$
$$= \frac{1}{2}\int_\tau [\theta_j \theta'_{j-1} + \mathfrak{u}_j(\mathfrak{u}'_j + \mathfrak{u}'_{j-1}) + \ldots]\, d\tau;$$

d'une manière analogue, on aura

$$\int_\tau \left[\frac{\partial u_j}{\partial x}\frac{\partial u_{j+1}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial v_j}{\partial x}\frac{\partial v_{j+1}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial w_j}{\partial x}\frac{\partial w_{j+1}}{\partial x} + \ldots\right] d\tau$$
$$= \frac{1}{2}\int_\tau [\theta_j \theta'_j + \mathfrak{u}_j(\mathfrak{u}'_{j+1} + \mathfrak{u}'_j) + \ldots]\, d\tau,$$

et aussi

$$\int_\tau \left[\frac{\partial u_j}{\partial x}\frac{\partial u_{j+1}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial v_j}{\partial x}\frac{\partial v_{j+1}}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial w_j}{\partial x}\frac{\partial w_{j+1}}{\partial x} + \ldots\right] d\tau$$
$$= \frac{1}{2}\int_\tau [\theta_{j+1} \theta'_{j-1} + \mathfrak{u}_{j+1}(\mathfrak{u}'_j + \mathfrak{u}'_{j-1}) + \ldots]\, d\tau,$$

donc

$$\int_\tau [\theta_j \theta'_j + \mathfrak{u}_j(\mathfrak{u}'_{j+1} + \mathfrak{u}'_j) + \ldots]\, d\tau = \int_\tau [\theta_{j+1}\theta'_{j-1} + \mathfrak{u}_{j+1}(\mathfrak{u}'_j + \mathfrak{u}'_{j-1}) + \ldots]\, d\tau,$$

et comme on a, en vertu de (239),

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_j = \theta'_j + \frac{1}{2}\theta'_{j-1}, \qquad && \theta_{j+1} = \theta'_{j+1} + \frac{1}{2}\theta'_j, \\ &\mathfrak{u}_j = \mathfrak{u}'_j + \mathfrak{u}'_{j-1}, \quad \ldots, && \mathfrak{u}_{j+1} = \mathfrak{u}'_{j+1} + \mathfrak{u}'_j, \quad \ldots. \end{aligned}\right. \tag{241}$$

il vient

$$\int_\tau \left[\left(\theta'_j + \frac{1}{2}\theta'_{j-1}\right)\theta'_j + (\mathfrak{u}'_j + \mathfrak{u}'_{j-1})(\mathfrak{u}'_{j+1} + \mathfrak{u}'_j) + \ldots\right] d\tau$$
$$= \int_\tau \left[\left(\theta'_{j+1} + \frac{1}{2}\theta'_j\right)\theta'_{j-1} + (\mathfrak{u}'_{j+1} + \mathfrak{u}'_j)(\mathfrak{u}'_j + \mathfrak{u}'_{j-1}) + \ldots\right] d\tau$$

ou

$$\int_\tau \left(\theta'_j + \frac{1}{2}\theta'_{j-1}\right)\theta'_j\, d\tau = \int_\tau \left(\theta'_{j+1} + \frac{1}{2}\theta'_j\right)\theta'_{j-1}\, d\tau,$$

d'où l'on tire immédiatement la proposition (238).

2. Définissons les fonctions successives

$$u'_j, \quad v'_j, \quad w'_j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

par les équations (208), (209), et posons

$$(242) \qquad \begin{cases} u''_j = \alpha_0 u'_j + \alpha_1 u'_{j+1} + \alpha_2 u'_{j+2} + \ldots + \alpha_p u'_{j+p}, \\ v''_j = \alpha_0 v'_j + \alpha_1 v'_{j+1} + \alpha_2 v'_{j+2} + \ldots + a_p v'_{j+p}, \\ w''_j = \alpha_0 w'_j + \alpha_1 w'_{j+1} + \alpha_2 w'_{j+2} + \ldots + \alpha_p w'_{j+p}, \\ C''_j = \alpha_0 C'_j + \alpha_1 C'_{j+1} + \alpha_2 C'_{j+2} + \ldots + \alpha_p C'_{j+p}, \end{cases}$$

$$(243) \qquad \begin{cases} u'' = \sum_0^\infty {}_j\, \Lambda^j u''_j, \\ v'' = \sum_0^\infty {}_j\, \Lambda^j v''_j, \\ w'' = \sum_0^\infty {}_j\, \Lambda^j w''_j; \end{cases}$$

nous allons démontrer que nous pouvons toujours pour un Λ quelconque, mais fixe, en prenant p assez grand, choisir les constantes

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad \alpha_p$$

de manière qu'on ait

$$(244) \qquad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_p^2 = 1,$$

et que les séries u'', v'', w'' soient absolument et uniformément convergentes dans tout le domaine τ. Elles représenteront les solutions du problème

$$(245)\quad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u''}{\partial \nu} + \dfrac{1}{8\pi}\dfrac{\partial^2}{\partial x\, \partial \nu}\displaystyle\int_\tau \theta'' \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}[\mathfrak{w}'' \cos(\nu y) - \mathfrak{v}'' \cos(\nu z)] \\ \quad = \alpha_0 f_1 + \displaystyle\sum_1^p{}^j \alpha_j \left\{ \frac{\partial u'_j}{\partial \nu} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial \nu}\int_\tau \theta'_j \frac{d\tau}{r} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{1}{2}[\mathfrak{w}'_j \cos(\nu y) - \mathfrak{v}'_j \cos(\nu z)] \right\} \\ \qquad + \Lambda\left[-\dfrac{\partial u''}{\partial \nu} + \dfrac{1}{2}\theta'' \cos(\nu x) - \dfrac{1}{2}\mathfrak{w}'' \cos(\nu y) + \dfrac{1}{2}\mathfrak{v}'' \cos(\nu z)\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{à la surface } \sigma, \\ \qquad \displaystyle\int_\tau u''\, d\tau = 0, \quad \ldots, \quad \int_\tau \mathfrak{u}''\, d\tau = 0, \quad \ldots. \end{array}\right.$$

Soit m un nombre fini quelconque, mais fixe; alors on pourra choisir les constantes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ de manière qu'on ait

$$(246)\qquad \int_\tau \theta''^2_m\, d\tau \overline{\overline{<}}\, \varepsilon_p \int_\tau \theta''^2_{m-1}\, d\tau + \varepsilon'_p C''^2_{m-1},$$

puisque θ'_{m-1} satisfait à la condition

$$(247)\qquad |\theta'_{m-1}(x_2, y_2, z_2) - \theta''_{m-1}(x_1, y_1, z_1)| \overline{\overline{<}}\, C''_{m-1} r_{12}^{\varpi},$$

où ε_p et ε'_p sont des nombres positifs qu'on peut faire aussi petits qu'on veut en agrandissant p (lemme I).

Le lemme II nous apprend

$$C''_j \overline{\overline{<}} \frac{\text{const. fin.}}{\bar{\varepsilon}^{1+\frac{3}{\varpi}}} \sqrt{I_{j-1}} + \bar{\varepsilon} C''_{j-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots);$$

si nous posons

$$(248)\qquad I_j = \int_\tau \theta''^2_j\, d\tau \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

$\bar{\varepsilon}$ étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut; ou

$$(249)\qquad C''^2_j \overline{\overline{<}} \frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon^{1+\frac{3}{\varpi}}} I_{j-1} + \varepsilon C''^2_{j-1},$$

ε étant de nouveau un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut.

A l'aide des inégalités (246) et (249), nous pouvons démontrer de la même manière que nous avons démontré le résultat analogue pages 189-192 qu'on peut, en choisissant p assez grand, trouver un système de constantes

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_p$$

de manière qu'on ait

$$(250)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{I_1+\mu_1\varepsilon I_0+\varepsilon C_0''^2}{4I_0+C_0''^2} \overline{\overline{<}} \frac{I_2+\varepsilon I_1+\mu_2\varepsilon^2 I_0+\varepsilon^2 C_0''^2}{I_1+\mu_1\varepsilon I_0+\varepsilon C_0''^2} \overline{\overline{<}} \ldots \\ &\qquad \overline{\overline{<}} \frac{I_j+\varepsilon I_{j-1}+\ldots+\varepsilon^{j-1}I_1+\mu_j\varepsilon^j I_0+\varepsilon^j C_0''^2}{I_{j-1}+\varepsilon I_{j-2}+\ldots+\varepsilon^{j-2}I_1+\mu_{j-1}\varepsilon^{j-1}I_0+\varepsilon^{j-1}C_0''^2} \overline{\overline{<}} \ldots \overline{\overline{<}} 2\sqrt{\varepsilon}, \\ &\qquad \mu_j = \frac{4}{(j+1)\sqrt{\varepsilon^j}} \qquad (j=1, 2, \ldots), \end{aligned}\right.$$

ε étant un nombre positif quelconque, mais fixe, choisi préalablement aussi petit qu'on veut. En choisissant ces valeurs de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ dans les équations (242), on aura

$$(251)\qquad \int_\tau \theta_j''^2\, d\tau \overline{\overline{<}} (4I_0+C_0''^2)(2\sqrt{\varepsilon})^j \qquad (j=0, 1, 2, \ldots).$$

Si Λ est un nombre réel quelconque, mais fixe, nous pourrons toujours, en faisant

$$(252)\qquad |2\Lambda^2\sqrt{\varepsilon}| \overline{\overline{<}} L, \qquad 0 < L < 1,$$

obtenir l'inégalité

$$(253)\qquad \int_\tau \theta_j''^2\, d\tau \overline{\overline{<}} \text{const. fin.}(I_0+C_0''^2)L^j \qquad (j=0, 1, 2, \ldots).$$

En ajoutant l'inégalité

$$(254)\qquad |\theta_j''(x_2, y_2, z_2)-\theta_j''(x_1, y_1, z_1)| \overline{\overline{<}} \frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon}\,\text{max. abs.}\,\theta_{j-1}''+\varepsilon C_{j-1}'',$$

ε étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut [démonstration du lemme II, formules (235) et (236)], on arrive, par une démonstration identique avec celle donnée pages 51-59 de mon Mémoire *Sur les équations de l'élasticité* (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XXIV, 1907), aux inégalités

$$\left.\begin{aligned} &(255)\qquad |\Lambda^j\theta_j''| \overline{\overline{<}} \text{const. fin.}\sqrt{I_0+C_0''^2}\,\overline{L}^j, \qquad 0<\overline{L}<1 \\ &(256)\qquad |\Lambda^j[\theta_j''(x_2, y_2, z_2)-\theta_j''(x_1, y_1, z_1)]| \overline{\overline{<}} \text{const. fin.}\sqrt{I_0+C_0''^2}\,\overline{L}^j r_{12}^{\varpi} \end{aligned}\right\} \quad (j=0, 1, 2, \ldots),$$

et comme on a, en vertu des inégalités (252),

$$|\mathfrak{u}''_{j+1} + \mathfrak{u}''_j| \overline{\gtrless} \text{const. fin. max. abs.}\,\theta''_j + \text{const. fin.}\,C''_j, \qquad \ldots,$$

$$\begin{aligned}&|\mathfrak{u}''_{j-1}(x_2, y_2, z_2) + \mathfrak{u}''_j(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{u}''_{j+1}(x_1, y_1, z_1) - \mathfrak{u}''_j(x_1, y_1, z_1)|\\ &\quad \overline{\gtrless} (\text{const. fin. max. abs.}\,\theta''_j + \text{const. fin.}\,C''_j)\, r_{12}^{\varpi},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

on aura aussi

$$(257)\qquad |\mathfrak{u}''_{j+1} + \mathfrak{u}''_j| \overline{\gtrless} \text{const. fin.}\sqrt{I_0 + C''^2_0}\left(\frac{L}{\Lambda}\right)^j, \qquad \ldots$$

$$(258)\qquad \left\{\begin{aligned}&|\mathfrak{u}''_{j+1}(x_2, y_2, z_2) + \mathfrak{u}''_j(x_2, y_2, z_2)\\ &\quad - \mathfrak{u}''_{j+1}(x_1, y_1, z_1) - \mathfrak{u}''_j(x_1, y_1, z_1)|\\ &\quad \overline{\gtrless} \text{const. fin.}\sqrt{I_0 + C''^2_0}\left(\frac{L}{\Lambda}\right)^j r_{12}^{\varpi},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Nous pouvons maintenant conclure que les fonctions

$$(259)\qquad \lim_{j=\infty} \mathfrak{u}''_j = \mathfrak{u}''_0 - (\mathfrak{u}''_0 + \mathfrak{u}''_1) + (\mathfrak{u}''_1 + \mathfrak{u}''_2) - \ldots$$

sont bien définies dans le domaine τ et continues de la manière

$$(260)\qquad \left\{\begin{aligned}&\lim_{j=\infty} |\mathfrak{u}''_j(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{u}''_j(x_1, y_1, z_1)|\\ &\quad \overline{\gtrless} [\text{const. fin. max. abs.}(f_1, f_2, f_3) + \text{const. fin.}\,A]\, r_{12}^{\varpi},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

Les fonctions

$$\lim_{j=\infty} u''_j,$$
$$\lim_{j=\infty} v''_j,$$
$$\lim_{j=\infty} w''_j$$

sont donc bien définies avec leurs premières dérivées, et l'on a

$$(261)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\lim_{j=\infty} u''_j + \frac{\partial}{\partial y}\lim_{j=\infty} v''_j + \frac{\partial}{\partial z}\lim_{j=\infty} w''_j = 0,$$

et comme, en vertu de (261) et (257),

$$\lim_{j=\infty} u''_j, \quad \lim_{j=\infty} v''_j, \quad \lim_{j=\infty} w''_j$$

doivent satisfaire aux conditions limites

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \lim_{j=\infty} u''_j = 0, \qquad \dots, \tag{262}$$

il vient

$$\lim_{j=\infty} u''_j = \lim_{j=\infty} v''_j = \lim_{j=\infty} w''_j = 0,$$

donc

$$\lim_{j=\infty} \mathfrak{u}''_j = \lim_{j=\infty} \mathfrak{v}''_j = \lim_{j=\infty} \mathfrak{w}''_j = 0, \tag{263}$$

de manière qu'on aura aussi, en vertu de (257) et (258),

$$\left.\begin{array}{ll} (264) & |\Lambda^j \mathfrak{u}''_j| \lesseqgtr \text{const. fin.} \sqrt{I_0 + C''^2_j}\, \overline{L^j} \quad \dots \\ (265) & \left\{\begin{array}{l} |\Lambda^j[\mathfrak{u}''_j(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{u}''_j(x_1, y_1, z_1)]| \\ \quad \lesseqgtr \text{const. fin.} \sqrt{I_0 + C''^2_0}\, \overline{L^j}\, r_{12}^{\varpi} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad (j = 1, 2, \dots),$$

et les séries

$$\left\{\begin{array}{l} u'' = u''_0 + \Lambda\, u''_1 + \Lambda^2\, u''_2 + \dots, \\ v'' = v''_0 + \Lambda\, v''_1 + \Lambda^2\, v''_2 + \dots, \\ w'' = w''_0 + \Lambda\, w''_1 + \Lambda^2\, w''_2 + \dots \end{array}\right. \tag{266}$$

représenteront, en effet, des solutions du problème (245).

On aura, d'après (255) et (264),

$$\left.\begin{array}{c} |\theta''| \\ |\mathfrak{u}''| \\ |\mathfrak{v}''| \\ |\mathfrak{w}''| \end{array}\right\} \lesseqgtr C_1 \text{ max. abs.} (f_1, f_2, f_3) + C_2 A, \tag{267}$$

d'après (256) et (265),

$$\left.\begin{array}{l} |\theta''(x_2, y_2, z_2) - \theta''(x_1, y_1, z_1)| \\ |\mathfrak{u}''(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{u}''(x_1, y_1, z_1)| \\ |\mathfrak{v}''(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{v}''(x_1, y_1, z_1)| \\ |\mathfrak{w}''(x_2, y_2, z_2) - \mathfrak{w}''(x_1, y_1, z_1)| \end{array}\right\} \lesseqgtr [C_1 \text{ max. abs.} (f_1, f_2, f_3) + C_2 A]\, r_{12}^{\varpi}, \tag{268}$$

C_1, C_2 étant des constantes finies qui ne dépendent que de la surface σ et de ϖ.

3. Après la solution du problème (245) par les séries (266),

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \dots, \quad \alpha_p$$

étant des constantes convenablement choisies, nous arrivons d'une manière connue au résultat suivant pour le problème :

$$(269)\quad \begin{cases} \left.\begin{aligned} &\frac{\partial u'}{\partial \nu} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}[\mathfrak{w}'\cos(\nu y) - \mathfrak{v}'\cos(\nu z)] \\ &\quad = \Lambda\left[-\frac{\partial u'}{\partial \nu} + \frac{1}{2}\theta'\cos(\nu x) - \frac{1}{2}\mathfrak{w}'\cos(\nu y) + \frac{1}{2}\mathfrak{v}'\cos(\nu z)\right] + f_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \text{à la surface } \sigma, \\ \displaystyle\int_\tau u'\,d\tau = 0, \qquad \ldots, \\ \displaystyle\int_\tau \mathfrak{u}'\,d\tau = 0, \qquad \ldots. \end{cases}$$

IV [1]. On peut toujours construire une solution du problème (269) pour un Λ réel quelconque dont la valeur absolue est plus petite qu'un nombre m fini quelconque, mais fixe, dans la forme

$$(270)\quad \begin{cases} u' = \dfrac{P(\Lambda, x, y, z)}{(\Lambda - \Lambda_1)(\Lambda - \Lambda_2)\ldots(\Lambda - \Lambda)_n}, \\ v' = \dfrac{Q(\Lambda, x, y, z)}{(\Lambda - \Lambda_1)(\Lambda - \Lambda_2)\ldots(\Lambda - \Lambda_n)}, \\ w' = \dfrac{R(\Lambda, x, y, z)}{(\Lambda - \Lambda_1)(\Lambda - \Lambda_2)\ldots(\Lambda - \Lambda_n)}, \end{cases}$$

où n est de nouveau un nombre fini;

$$\Lambda_1, \quad \Lambda_2, \quad \ldots, \quad \Lambda_n$$

sont des nombres bien définis, différents les uns des autres,

$$|\Lambda_j| \lesseqgtr m \qquad (j = 1, 2, \ldots, n);$$

P, Q, R sont des fonctions harmoniques, continues avec leurs premières dérivées dans τ pour chaque

$$|\Lambda| \leqq m,$$

---

(1) On aura remarqué que la démonstration du théorème IV devient douteuse, si l'on peut avoir

$$\alpha_0\theta'_0 + \alpha_1\theta'_1 + \alpha_2\theta'_2 + \ldots + \alpha_p\theta'_p \equiv 0,$$

c'est-à-dire, si les fonctions $\theta'_0, \theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_p$ (p étant fini) n'étaient pas linéairement indépendantes, mais il est facile à voir que dans ce cas spécial θ' peut être développé en série finie de la forme

$$\sum\nolimits_j C_j \frac{\Lambda_j\theta'_j}{\Lambda - \Lambda_j},$$

de manière que ce cas n'est, en réalité, pas une exception du théorème IV.

et pour

$$\Lambda = \Lambda_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

les fonctions P, Q, R deviennent des fonctions que nous appellerons des *triplets biharmoniques de seconde espèce* (à des facteurs constants près) des fonctions U'_j, V'_j, W'_j harmoniques et continues dans τ avec leurs premières dérivées, satisfaisant aux équations

$$(271)\quad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial U'_j}{\partial \nu} + \dfrac{1}{8\pi}\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\displaystyle\int_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}[\mathfrak{W}'_j \cos(\nu y) - \mathfrak{V}'_j \cos(\nu z)] \\ \quad = \Lambda\left[-\dfrac{\partial U'_j}{\partial \nu} + \dfrac{1}{2}\Theta'_j \cos(\nu x) - \dfrac{1}{2}\mathfrak{W}'_j \cos(\nu y) + \dfrac{1}{2}\mathfrak{V}'_j \cos(\nu z)\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{à la surface } \sigma, \\ \displaystyle\int_\tau U'_j\, d\tau = 0, \qquad \ldots, \\ \displaystyle\int_\tau \mathfrak{U}'_j\, d\tau = 0, \qquad \ldots, \\ \displaystyle\int_\tau \Theta'^2_j\, d\tau = 1. \end{array}\right.$$

Pour la démonstration de ce théorème nous n'avons qu'à rappeler de nouveau les raisonnements de M. Poincaré dans son Mémoire *Sur les équations de la Physique mathématique* (*Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo,* 1894), d'après lesquels

$$(272)\quad \left\{\begin{array}{l} u' = \dfrac{P}{D}, \\ v' = \dfrac{Q}{D}, \\ w' = \dfrac{R}{D} \end{array}\right.$$

doivent être les solutions du problème (269); si nous posons

$$(273)\qquad D = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_p \\ 1 & -\Lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -\Lambda & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ 1 & -\Lambda \end{vmatrix},$$

$$(274)\qquad P = \begin{vmatrix} u'' & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_p \\ u'_0 & -\Lambda & 0 & \ldots & 0 \\ u'_1 & 1 & -\Lambda & \ldots & 0 \\ \cdot\cdot & \cdot & \ldots & \ldots & \cdot \\ u'_{p-1} & 0 & 0 & \ldots\ 1 & -\Lambda \end{vmatrix}, \qquad \ldots,$$

les fonctions P, Q, R seront des fonctions harmoniques, continues avec leurs premières dérivées dans τ; elles satisferont aux conditions (269) proposées pour u', v', w', avec cette seule différence qu'il faut remplacer f_1, f_2, f_3 dans (269) par

$$f_1 D, \quad f_2 D, \quad f_3 D.$$

La seule chose qui demande encore un raisonnement spécial, c'est le fait que l'équation

$$D = 0$$

ne peut pas avoir des racines multiples. Il faut démontrer pour cela que dans le cas où un Λ satisferait aux deux équations

$$D = 0, \qquad \frac{dD}{d\Lambda} = 0,$$

c'est-à-dire dans le cas où les fonctions P, Q, R deviendraient des fonctions harmoniques de τ satisfaisant aux conditions

$$(275)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial U'}{\partial \nu} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\tau \Theta'\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}[\mathfrak{W}'\cos(\nu y) - \mathfrak{V}'\cos(\nu z)] \\
&\quad = \Lambda\left[-\frac{\partial U'}{\partial \nu} + \frac{1}{2}\Theta'\cos(\nu x) - \frac{1}{2}\mathfrak{W}'\cos(\nu y) + \frac{1}{2}\mathfrak{V}'\cos(\nu z)\right] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{dU'}{d\Lambda} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\tau \frac{d\Theta'}{d\Lambda}\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}\left[\frac{d\mathfrak{W}'}{d\Lambda}\cos(\nu y) - \frac{d\mathfrak{V}'}{d\Lambda}\cos(\nu z)\right] \\
&\quad = \Lambda\left[-\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{dU'}{d\Lambda} + \frac{1}{2}\frac{d\Theta'}{d\Lambda}\cos(\nu x)\right. \\
&\qquad\quad \left. - \frac{1}{2}\frac{d\mathfrak{W}'}{d\Lambda}\cos(\nu y) + \frac{1}{2}\frac{d\mathfrak{V}'}{\partial \Lambda}\cos(\nu z)\right] \\
&\qquad + \frac{1}{\Lambda}\left\{\frac{\partial U'}{\partial \nu} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\tau \Theta'\frac{d\tau}{r}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1}{2}[\mathfrak{W}'\cos(\nu y) - \mathfrak{V}'\cos(\nu z)]\right\}
\end{aligned}\right\} \text{à la surface } \sigma,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_\tau U'\,d\tau = 0, \qquad \ldots, \qquad \int_\tau \mathfrak{U}'\,d\tau = 0, \qquad \ldots,$$

$$\int_\tau \frac{dU'}{d\Lambda}\,d\tau = 0, \qquad \ldots, \qquad \int_\tau \frac{d\mathfrak{U}'}{d\Lambda}\,d\tau = 0, \qquad \ldots,$$

on aura

$$U' = V' = W' \equiv 0.$$

En effet, posons

$$(276)\quad \left\{\begin{aligned} U &= U'(1+\Lambda) + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \Theta' \frac{d\tau}{r}, && \ldots, \\ \frac{dU}{d\Lambda} &= \frac{dU'}{d\Lambda}(1+\Lambda) + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \frac{d\Theta'}{d\Lambda}\frac{d\tau}{r}, && \ldots, \end{aligned}\right.$$

alors on aura

$$(277)\quad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{aligned} \Delta U &= -\frac{1}{2}\frac{\partial \Theta'}{\partial x}, && \ldots \\ \Delta\frac{dU}{d\Lambda} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{d\Theta'}{d\Lambda}, && \ldots \end{aligned}\right\} \text{ dans } \tau, \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial \nu} = \dfrac{\Lambda}{2}\,\Theta'\cos(\nu x) - \dfrac{1+\Lambda}{2}\,[\mathfrak{w}'\cos(\nu y) - \mathfrak{v}'\cos(\nu z)] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu}\dfrac{dU}{d\Lambda} = \dfrac{\Lambda}{2}\dfrac{d\Theta'}{d\Lambda}\cos(\nu x) - \dfrac{1+\Lambda}{2}\left[\dfrac{d\mathfrak{w}'}{d\Lambda}\cos(\nu y) - \dfrac{d\mathfrak{v}'}{d\Lambda}\cos(\nu z)\right] \\ \qquad - \dfrac{\partial U'}{\partial \nu} + \dfrac{1}{2}\Theta'\cos(\nu x) - \dfrac{1}{2}\mathfrak{w}'\cos(\nu y) + \dfrac{1}{2}\mathfrak{v}'\cos(\nu z) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{à la}\\ \text{surface } \sigma,\end{array} \end{array}\right.$$

donc

$$\int_\tau \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{dU}{d\Lambda} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{dV}{d\Lambda} + \ldots + \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{dW}{d\Lambda} + \ldots\right) d\tau$$
$$= \int_\tau \left[\frac{\Lambda}{2}\Theta'\frac{d\Theta'}{d\Lambda} + \frac{1+\Lambda}{2}\left(\mathfrak{u}'\frac{d\mathfrak{u}'}{d\Lambda} + \ldots\right)\right] d\tau,$$

et aussi

$$\int_\tau \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{dU}{d\Lambda} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{dV}{d\Lambda} + \ldots + \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{dW}{d\Lambda} + \ldots\right) d\tau$$
$$= \int_\tau \left[\frac{\Lambda}{2}\frac{d\Theta'}{d\Lambda}\Theta' + \frac{1+\Lambda}{2}\left(\frac{d\mathfrak{u}'}{d\Lambda}\mathfrak{u}' + \ldots\right)\right] d\tau$$
$$+ \int_\sigma \left\{ U\left[\frac{\partial U'}{\partial \nu} - \frac{1}{2}\Theta'\cos(\nu x) + \frac{1}{2}\mathfrak{w}'\cos(\nu y) - \frac{1}{2}\mathfrak{v}'\cos(\nu z)\right] + \ldots \right\} d\sigma.$$

Nous aurons donc

$$\int_\sigma \left\{ U\left[\frac{\partial U'}{\partial \nu} - \frac{1}{2}\Theta'\cos(\nu x) + \frac{1}{2}\mathfrak{w}'\cos(\nu y) - \frac{1}{2}\mathfrak{v}'\cos(\nu z)\right] + \ldots \right\} d\sigma = 0$$

ou

$$\int_\sigma U' \frac{\partial U}{\partial \nu} d\sigma + \int_\tau \left(- U' \Delta U - \ldots + \frac{1}{2} \Theta\Theta' + \frac{1}{2} \mathfrak{U}\mathfrak{U}' + \ldots \right) d\tau = 0,$$

et, d'après (277),

$$\int_\tau \left[- \frac{\Lambda}{2} \Theta'^2 - \frac{1+\Lambda}{2} (\mathfrak{U}'^2 + \ldots) + \frac{1}{2} (\Theta\Theta' + \mathfrak{U}\mathfrak{U}' + \ldots) \right] d\tau = 0;$$

comme on a

$$\Theta = \Theta' \left(\frac{1}{2} + \Lambda \right),$$

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}'(1 + \Lambda), \qquad \ldots,$$

nous trouvons

$$\frac{1}{4} \int_\tau \Theta'^2 d\tau = 0,$$

d'où l'on tire

$$\Theta' \equiv 0$$

et

(278) $$U' = V' = W' \equiv 0.$$

Nous pouvons ajouter au théorème IV le corollaire suivant :

Corollaire. — Deux solutions du problème (269) ne peuvent différer que d'un triplet biharmonique de seconde espèce; s'il n'en existe pas pour le nombre Λ, le problème n'admet qu'un seul système de solutions.

4. Dans ce numéro nous allons démontrer quelques théorèmes sur les triplets biharmoniques de seconde espèce, définis par les équations (271).

V_a. Formons avec les triplets biharmoniques de seconde espèce les fonctions que nous appellerons les *triplets de Cosserat de seconde espèce*

(279) $$\left\{ \begin{aligned} U_j &= U'_j\,(1 + \Lambda_j) + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r}, \\ V_j &= V'_j\,(1 + \Lambda_j) + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r}, \\ W_j &= W'_j(1 + \Lambda_j) + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r}, \end{aligned} \right.$$

et posons

(280) $$k_j = \frac{1}{1 + 2\Lambda_j};$$

ces fonctions seront continues avec leurs premières dérivées dans τ, et elles satisferont aux équations

$$(281)\quad \begin{cases} \Delta U_j + k_j \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial x} = 0, \quad \ldots \quad \text{dans } \tau, \\ \dfrac{\partial U_j}{\partial \nu} = \dfrac{1-k_j}{2}\Theta_j \cos(\nu x) - \dfrac{1}{2}[\mathfrak{W}_j \cos(\nu y) - \mathfrak{V}_j \cos(\nu z)], \quad \ldots \quad \text{à la surface } \sigma, \\ \displaystyle\int_\tau \Theta_j^2 \, d\tau = \dfrac{1}{4k_j^2}. \end{cases}$$

On aura, en effet,

$$(282^a)\quad \begin{cases} \Theta_j = \dfrac{1+2\Lambda_j}{2}\Theta'_j = \dfrac{1}{2k_j}\Theta'_j, \\ \mathfrak{U}_j = (1+\Lambda_j)\mathfrak{U}'_j, \quad \ldots, \end{cases}$$

donc

$$(282^b)\quad \begin{cases} \Delta U_j = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \Theta'_j}{\partial x} = -k_j \dfrac{\partial \Theta_j}{\partial x} = \dfrac{1-k_j}{2}\dfrac{\partial \Theta_j}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial z}\right), \quad \ldots \quad \text{dans } \tau, \\ \left.\begin{aligned} \dfrac{\partial U_j}{\partial \nu} &= \dfrac{\Lambda_j}{2}\Theta'_j \cos(\nu x) - \dfrac{1+\Lambda_j}{2}[\mathfrak{W}'_j \cos(\nu y) - \mathfrak{V}'_j \cos(\nu z)] \\ &= \dfrac{1-k_j}{2}\Theta_j \cos(\nu x) - \dfrac{1}{2}[\mathfrak{W}_j \cos(\nu y) - \mathfrak{V}_j \cos(\nu z)], \quad \ldots \end{aligned}\right\} \text{à la surface } \sigma. \end{cases}$$

V_b. Les nombres Λ_j correspondant à des triplets biharmoniques de seconde espèce et les nombres k_j correspondant à des triplets de Cosserat de seconde espèce satisferont aux inégalités

$$(283^a)\qquad \Lambda_j \overline{\overline{>}} + 1 \quad \text{ou} \quad \overline{\overline{<}} -\frac{1}{2},$$

$$(283^b)\qquad k_j \overline{\overline{<}} + \frac{1}{3}.$$

En effet, on a, d'après (282^b),

$$\int_\tau \left[\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial V_j}{\partial x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial W_j}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau = \frac{1}{2}\int_\tau [(1-k_j)\Theta_j^2 + \mathfrak{U}_j^2 + \ldots]\, d\tau$$

et

$$\int_\tau \left[\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial V_j}{\partial x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial W_j}{\partial x}\right)^2 + \ldots\right] d\tau - \frac{1}{3}\int_\tau \Theta_j^2\, d\tau - \frac{1}{2}\int_\tau (\mathfrak{U}_j^2 + \ldots)\, d\tau$$
$$= \frac{1}{2}\int_\tau \left(\frac{1}{3} - k_j\right)\Theta_j^2\, d\tau.$$

Comme cette expression qui est identique avec l'expression

$$\int_\tau \left[\frac{1}{3}\left(\frac{\partial V_j}{\partial y} + \frac{\partial W_j}{\partial z}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_j}{\partial y} - \frac{\partial V_j}{\partial z}\right)^2 + \ldots \right] d\tau$$

doit toujours être positive, on trouverait, pour un $k_j > \frac{1}{3}$:

$$\Theta_j \equiv 0,$$

donc aussi

$$U_j = V_j = W_j = \text{const.},$$
$$U'_j = V'_j = W'_j \equiv 0.$$

V_c. Le nombre des triplets biharmoniques de seconde espèce U'_j, V'_j, W'_j possédant des Θ'_j linéairement indépendants et des nombres correspondants Λ_j dont la valeur absolue est plus petite qu'un nombre fini m

$$|\Lambda_j| \leqq m$$

est fini.

Pour démontrer ce théorème, formons les séries

$$u'_1 + \Lambda u'_2 + \Lambda^2 u'_3 + \ldots,$$
$$v'_1 + \Lambda v'_2 + \Lambda^2 v'_3 + \ldots,$$
$$w'_1 + \Lambda w'_2 + \Lambda^2 w'_3 + \ldots,$$

de manière qu'on ait

$$u'_1 = U'_k,$$
$$v'_1 = V'_k,$$
$$w'_1 = W'_k,$$

U'_k, V'_k, W'_k étant un triplet biharmonique de seconde espèce, les fonctions u'_j, v'_j, w'_j étant formées à l'aide des équations (209); alors on aura

$$u'_2 = \frac{U'_k}{\Lambda_k}, \qquad \ldots,$$
$$u'_3 = \frac{U'_k}{\Lambda_k^2}, \qquad \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots,$$

donc

$$u'_1 + \Lambda u'_2 + \Lambda^2 u'_3 + \ldots = \frac{\Lambda_k}{\Lambda_k - \Lambda} U'_k, \qquad \ldots, \qquad |\Lambda| < |\Lambda_k|.$$

En posant

$$u'_1 = \alpha_1 U'_1 + \alpha_2 U'_2 + \ldots + \alpha_p U'_p,$$
$$v'_1 = \alpha_1 V'_1 + \alpha_2 V'_2 + \ldots + \alpha_p V'_p,$$
$$w'_1 = \alpha_1 W'_1 + \alpha_2 W'_2 + \ldots + \alpha_p W'_p,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ étant des constantes, U'_j, V'_j, W'_j des triplets biharmoniques de seconde espèce, on aura

$$u'_1 + \Lambda u'_2 + \Lambda^2 u'_3 + \ldots = -\sum_1^p {}_j \frac{\alpha_j \Lambda_j}{\Lambda - \Lambda_j} U'_j,$$

$$v'_1 + \Lambda v'_2 + \Lambda^2 v'_3 + \ldots = -\sum_1^p {}_j \frac{\alpha_j \Lambda_j}{\Lambda - \Lambda_j} V'_j,$$

$$w'_1 + \Lambda w'_2 + \Lambda^2 w'_3 + \ldots = -\sum_1^p {}_j \frac{\alpha_j \Lambda_j}{\Lambda - \Lambda_j} W'_j,$$

si $|\Lambda|$ est plus petit que la plus petite des valeurs absolues de $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_p$. Supposons qu'il y ait un nombre infini de triplets biharmoniques de seconde espèce possédant des Θ'_j linéairement indépendants et des nombres correspondants

$$\Lambda_1, \quad \Lambda_2, \quad \ldots, \quad \Lambda_p$$

satisfaisant à l'égalité

$$|\Lambda_j| \overline{\gtrless} m \qquad (j = 1, 2, \ldots, p);$$

alors on pourrait, en choisissant p assez grand, d'après notre démonstration du théorème IV, obtenir la convergence des séries

$$u'_1 + \Lambda u'_2 + \Lambda^2 u'_3 + \ldots,$$
$$v'_1 + \Lambda v'_2 + \Lambda^2 v'_3 + \ldots,$$
$$w'_1 + \Lambda w'_2 + \Lambda^2 w'_3 + \ldots$$

pour n'importe quel

$$|\Lambda| \overline{\gtrless} m,$$

de telle manière qu'elles représentent des fonctions continues avec leurs premières dérivées dans τ. D'autre part, nous savons qu'on a

$$u'_1 + \Lambda u'_2 + \Lambda^2 u'_3 + \ldots = -\sum_1^p {}_j \frac{\alpha_j \Lambda_j}{\Lambda - \Lambda_j} U'_j, \qquad \ldots,$$

si $|\Lambda|$ est plus petit que la valeur absolue la plus petite des $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_p$, et ces expressions deviennent infinies si le α_j correspondant n'est pas nul; comme ils ne peuvent pas disparaître tous, nous arrivons à une contradiction de la supposition qu'il y ait un nombre infini de triplets biharmoniques de seconde espèce possédant des Θ'_j linéairement indépendants et des nombres correspondants

$$|\Lambda_j| \overline{\gtrless} m.$$

V_d. Soient U'_j, V'_j, W'_j et U'_k, V'_k, W'_k deux triplets biharmoniques de seconde espèce et

$$\Lambda_j \neq \Lambda_k;$$

alors on aura

$$\int_\tau \Theta'_j \Theta'_k \, d\tau = 0. \tag{284}$$

Corollaire. — Soient U_j, V_j, W_j et U_k, V_k, W_k deux triplets de Cosserat de seconde espèce et

$$k_j \neq k_k;$$

alors on aura

$$\int_\tau \Theta_j \Theta_k \, d\tau = 0. \tag{285}$$

On a, en effet, d'après (282^a),

$$\int_\tau \left(\frac{\partial U_j}{\partial x} \frac{\partial U_k}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial W_j}{\partial x} \frac{\partial W_k}{\partial x} + \ldots \right) d\tau$$
$$= \frac{1}{2} \int_\tau [(1 - k_j) \Theta_j \Theta_k + \mathfrak{U}_j \mathfrak{U}_k + \ldots] \, d\tau,$$

et aussi

$$\int_\tau \left(\frac{\partial U_j}{\partial x} \frac{\partial U_k}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial V_j}{\partial x} \frac{\partial V_k}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial W_j}{\partial x} \frac{\partial W_k}{\partial x} + \ldots \right) d\tau$$
$$= \frac{1}{2} \int_\tau [1 - k_k) \Theta_j \Theta_k + \mathfrak{U}_j \mathfrak{U}_k + \ldots] \, d\tau,$$

donc

$$\frac{1}{2} \int_\tau (1 - k_j) \Theta_j \Theta_k \, d\tau = \frac{1}{2} \int_\tau (1 - k_k) \Theta_j \Theta_k \, d\tau,$$

d'où l'on tire facilement les équations (284) et (285).

V_e. S'il est possible de développer trois fonctions harmoniques u', v', w' continues avec leurs premières dérivées dans τ d'après les triplets biharmoniques de seconde espèce

$$\left\{ \begin{aligned} u' &= C_1 U'_1 + C_2 U'_2 + \ldots, \\ v' &= C_1 V'_1 + C_2 V'_2 + \ldots, \\ w' &= C_1 W'_1 + C_2 W'_2 + \ldots, \end{aligned} \right. \tag{286}$$

on connaît aussitôt les coefficients C_j :

$$C_j = \int_\tau \theta' \Theta'_j \, d\tau \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{287}$$

On tire cette formule aussitôt des formules (284) et (271).

V_f. S'il est possible de développer trois fonctions u, v, w continues dans τ avec leurs premières dérivées d'après les triplets de Cosserat de seconde espèce

$$(288) \qquad u = C_1 U_1 + C_2 U_2 + \ldots, \qquad \ldots,$$

on connaît aussitôt les valeurs des coefficients C_j :

$$(288') \qquad C_j = \frac{k_j^2}{4} \int_\tau \theta \Theta_j \, d\tau \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Corollaire de V_f. — Si les fonctions u, v, w satisfont aux équations

$$\Delta u + k \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \qquad \ldots \qquad \text{dans } \tau,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{1-k}{2} \theta \cos(\nu x) - \frac{1}{2} [\mathfrak{w} \cos(\nu y) - \mathfrak{v} \cos(\nu z)] + f_1, \qquad \ldots \qquad \text{à la surface } \sigma,$$

on aura [1]

$$(289) \qquad C_j = \frac{1}{2} \frac{k_j^2}{k_j - k} \int_\tau (U_j f_1 + V_j f_2 + W_j f_3) \, d\sigma \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Nous traiterons, dans le n° 6, la question de la possibilité de ces développements.

5. Reprenons les notations du théorème IV et remplaçons les fonctions f_1, f_2,

---

[1] On a, en effet,

$$\int_\sigma \left\{ U_j \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{1-k}{2} \theta \cos(\nu x) + \frac{1}{2} \mathfrak{w} \cos(\nu y) - \frac{1}{2} \mathfrak{v} \cos(\nu z) \right] + \ldots \right\} d\sigma$$

$$= \int_\tau (u \, \Delta U_j + \ldots - U_j \Delta u - \ldots) \, d\sigma$$

$$+ \int_\sigma \left\{ u \frac{\partial U_j}{\partial \nu} + \ldots - U_j \left[\frac{1-k}{2} \theta \cos(\nu x) - \frac{1}{2} \mathfrak{w} \cos(\nu y) + \frac{1}{2} \mathfrak{v} \cos(\nu z) \right] - \ldots \right\} d\sigma$$

$$= \int_\tau \left(\frac{1-k}{2} \theta \Theta_j + \frac{1}{2} \mathfrak{u} \mathfrak{U}_j + \ldots - \frac{1-k_j}{2} \theta \Theta_j - \frac{1}{2} \mathfrak{u} \mathfrak{U}_j - \ldots \right) d\tau = \frac{k_j - k}{2} \int_\tau \theta \Theta_j \, d\tau.$$

f_3 dont nous sommes partis, par les fonctions

$$(290)\quad \left\{\begin{aligned}
R_m &= f_1 - \sum_1^n {}_j C_j \left\{ \frac{\partial U'_j}{\partial \nu} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial \nu} \int_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}[\mathfrak{w}'_j \cos(\nu y) - \mathfrak{v}'_j \cos(\nu z)] \right\},\\
S_m &= f_2 - \sum_1^n {}_j C_j \left\{ \frac{\partial V'_j}{\partial \nu} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial \nu} \int_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}[\mathfrak{u}'_j \cos(\nu z) - \mathfrak{w}'_j \cos(\nu x)] \right\},\\
T_m &= f_3 - \sum_1^n {}_j C_j \left\{ \frac{\partial W'_j}{\partial \nu} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \nu} \int_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}[\mathfrak{v}'_j \cos(\nu x) - \mathfrak{u}'_j \cos(\nu y)] \right\},
\end{aligned}\right.$$

en posant

$$(291)\qquad C_j = \int_\tau \theta'_0 \Theta'_j \, d\tau \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

de manière que le théorème IV nous donne les solutions

$$u'', \quad v'', \quad w''$$

du problème

$$(292)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u''}{\partial \nu} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial \nu} \int_\tau \theta'' \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}[\mathfrak{w}'' \cos(\nu y) - \mathfrak{v}'' \cos(\nu z)]\\
&\quad = \Lambda \left[-\frac{\partial u''}{\partial \nu} + \frac{1}{2} \theta'' \cos(\nu x) - \frac{1}{2} \mathfrak{w}'' \cos(\nu y) + \frac{1}{2} \mathfrak{v}'' \cos(\nu z) \right] + R_m\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \text{à la surface } \sigma,\\
&\int_\tau u''\, d\tau = 0, \qquad \ldots\\
&\int_\tau \mathfrak{u}''\, d\tau = 0, \qquad \ldots.
\end{aligned}\right.$$

Je dis que les valeurs

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n$$

ne peuvent pas être des pôles des fonctions u'', v'', w''.

On aura, en posant

$$(293)\quad \left\{\begin{aligned}
&\overline{u''} = u''(1 + \Lambda) + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_\tau \theta'' \frac{d\tau}{r}, \qquad \ldots,\\
&k = \frac{1}{1 + 2\Lambda},
\end{aligned}\right.$$

les équations

$$(294)\quad \left\{\begin{array}{ll} \Delta\overline{u''} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\theta''}{\partial x} = \frac{1-k}{2}\frac{\partial\overline{\theta''}}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{w}''}}{\partial y} - \frac{\partial\overline{\mathfrak{v}''}}{\partial z}\right), \quad \ldots & \text{dans } \tau, \\ \frac{\partial\overline{u''}}{\partial\nu} = \frac{1-k}{2}\overline{\theta''}\cos(\nu x) - \frac{1}{2}\left[\overline{\mathfrak{w}''}\cos(\nu y) - \overline{\mathfrak{v}''}\cos(\nu z)\right] + \mathrm{R}_m & \text{à la} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{surface } \sigma, \end{array}\right.$$

donc

$$(295)\quad \int_\tau \left(\frac{\partial\overline{u''}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{U}_j}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial\overline{v''}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{V}_j}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial\overline{w''}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x} + \ldots\right) d\tau$$
$$= \int_\tau \left(\frac{1-k}{2}\overline{\theta''}\Theta_j + \frac{1}{2}\overline{\mathfrak{u}''}\mathfrak{U}_j + \ldots\right) d\tau - \int_\tau (\mathrm{U}_j \mathrm{R}_m + \ldots)\, d\sigma,$$

et aussi

$$\int_\tau \left(\frac{\partial\overline{u''}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{U}_j}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial\overline{v''}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{V}_j}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial\overline{w''}}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{W}_j}{\partial x} + \ldots\right) d\tau$$
$$= \int_\tau \left(\frac{1-k_j}{2}\Theta_j\overline{\theta''} + \frac{1}{2}\mathfrak{U}_j\overline{\mathfrak{u}''} + \ldots\right) d\tau;$$

on trouvera ainsi, puisque

$$\int_\tau (\mathrm{U}_j \mathrm{R}_m + \ldots)\, d\tau = 0 \quad (^1):$$
$$(k - k_j)\int_\tau \overline{\theta''}\Theta_j\, d\tau = 0,$$

---

(1) On a, en effet, si u', v', w' sont des fonctions harmoniques quelconques, continues dans τ avec leurs premières dérivées,

$$\int_\sigma \left[\mathrm{U}_j\left\{\frac{\partial u'}{\partial\nu} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\nu}\int_\tau \theta'\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}\left[\mathfrak{w}'\cos(\nu y) - \mathfrak{v}'\cos(\nu z)\right]\right\} + \ldots\right] d\tau$$
$$= -\frac{1-k_j}{4}\int_\tau \theta'\Theta_j\, d\tau,$$

comme on voit facilement en posant

$$u = u' + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta'\frac{d\tau}{r},$$

à l'aide de transformations de Green.

et aussi

$$(296) \qquad (\Lambda - \Lambda_j)\int_\tau \theta''\Theta'_j\, d\tau = 0.$$

En désignant par u''_j, v''_j, w''_j les fonctions successives définies par les équations (208) et (209), quand nous partons des fonctions R_m, S_m, T_m au lieu des fonctions f_1, f_2, f_3, nous aurons

$$(297) \qquad u'' = u''_0 + \Lambda u''_1 + \Lambda^2 u''_2 + \ldots = u' - \sum_1^n{}_j \frac{C_j \Lambda_j}{\Lambda_j - \Lambda} U'_j, \qquad \ldots \qquad (|\Lambda| < |\Lambda_1|),$$

et, d'après le théorème IV,

$$(298) \qquad u' = \frac{\gamma_1 U'_1}{\Lambda_1 - \Lambda} + \Phi, \qquad \ldots,$$

où γ_1 est une constante, Φ, X, Ψ des fonctions qui restent finies pour

$$\lim(\Lambda_1 - \Lambda) = 0.$$

Il vient ainsi

$$(299) \qquad u'' = (\gamma_1 - C_1\Lambda_1)\frac{U'}{\Lambda_1 - \Lambda} + \Phi - \sum_1^n{}_j \frac{C_j\Lambda_j}{\Lambda_j - \Lambda} U'_j, \qquad \ldots$$

ou

$$(300) \qquad \begin{cases} (\Lambda_1 - \Lambda) u'' = (\gamma_1 - C_1\Lambda_1) U'_1 + \varepsilon_1, \\ (\Lambda_1 - \Lambda) v'' = (\gamma_1 - C_1\Lambda_1) V'_1 + \varepsilon_2, \\ (\Lambda_1 - \Lambda) w'' = (\gamma_1 - C_1\Lambda_1) W'_1 + \varepsilon_3, \end{cases}$$

où nous pouvons faire ε_1, ε_2, ε_3 aussi petits que nous voulons en diminuant $|\Lambda_1 - \Lambda|$.

On aura donc

$$\begin{aligned} &\int_\sigma \Bigg\{ U_j \Bigg[\frac{\partial u'_0}{\partial \nu} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial \nu}\int_\tau \theta'_0 \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}[\mathfrak{w}'_0 \cos(\nu y) - \mathfrak{v}'_0 \cos(\nu z)] \\ &\quad - \sum_1^n{}_j C_j \left\{ \frac{\partial U'_j}{\partial \nu} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial \nu}\int_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}[\mathfrak{W}'_j \cos(\nu y) - \mathfrak{V}'_j \cos(\nu z)] \right\} \Bigg] \Bigg\} d\tau \\ &= -\frac{1-k_j}{4}\int_\tau \Theta_j(\theta'_0 - C_1\Theta'_1 - C_2\Theta'_2 - \ldots - C_n\Theta'_n)\, d\tau \\ &= -\frac{1}{8}\frac{1-k_j}{k_j}\int_\tau \Theta'_j(\theta'_0 - C_1\Theta'_1 - C_2\Theta'_2 - \ldots - C_n\Theta'_n)\, d\tau \\ &= 0. \end{aligned}$$

De là nous tirons, à l'aide de l'identité (296), en passant à la limite

$$\lim(\Lambda_1 - \Lambda) = 0,$$

qu'on aura

$$\gamma_1 - C_1 \Lambda_1 = 0,$$

donc

$$(301) \qquad u'' = \Phi - \sum_2^n {}_j \frac{C_j \Lambda_j}{\Lambda_j - \Lambda} U'_j, \qquad \ldots,$$

où Φ, X, Ψ restent finies, même si l'on approche Λ indéfiniment de Λ_1.

Le point

$$\Lambda = \Lambda_1$$

ne peut donc être un pôle des solutions u'', v'', w''; les séries (297) convergeront pour cette raison, non pas seulement pour toutes les valeurs de $|\Lambda|$ plus petites que $|\Lambda_1|$, mais aussi pour toutes les valeurs de $|\Lambda|$ qui sont plus petites que le $|\Lambda_2|$ le plus proche; d'une manière analogue nous pouvons continuer, et nous trouverons que les séries (297) doivent être convergentes avec leurs premières dérivées dans τ pour toutes les valeurs de Λ satisfaisant à l'inégalité

$$|\Lambda| \leqq m.$$

Soit

$$(302) \qquad m < 1;$$

alors les triplets biharmoniques de seconde espèce possibles

$$U'_1, \quad V'_1, \quad W'_1, \quad \ldots, \quad U'_n, \quad V'_n, \quad W'_n$$

ne pourraient être que des triplets possédant des nombres correspondants qui satisferaient à l'inégalité

$$-1 \leqq \Lambda_j \leqq -\frac{1}{2}.$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

VI$_a$. A défaut de triplets biharmoniques de seconde espèce possédant des nombres correspondants négatifs

$$-1 \leqq \Lambda_j \leqq -\frac{1}{2},$$

les séries

$$(303) \qquad \begin{cases} u' = u'_0 + \Lambda u'_1 + \Lambda^2 u'_2 + \ldots, \\ v' = v'_0 + \Lambda v'_1 + \Lambda^2 v'_2 + \ldots, \\ w' = w'_0 + \Lambda w'_1 + \Lambda^2 w'_2 + \ldots \end{cases}$$

dans lesquelles les fonctions successives u'_j, v'_j, w'_j sont définies par les équations (208) et (209) seront absolument convergentes dans tout le domaine τ avec leurs premières dérivées, si

$$|\Lambda| < 1, \tag{304}$$

et elles représenteront les solutions du problème

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta u' = 0, \quad \ldots \quad \text{dans } \tau, \\ &\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u'}{\partial \nu} = -\frac{1}{8\pi}\frac{1}{1+\Lambda}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\tau \theta'\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\theta'\cos(\nu x) \\ &\qquad -\frac{1}{2}[\mathfrak{w}'\cos(\nu y) - \mathfrak{v}'\cos(\nu z)] + f_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \text{ à la surface } \sigma, \\ &\qquad\qquad \int_\tau u'\,d\tau = 0, \quad \ldots, \\ &\qquad\qquad \int_\tau \mathfrak{u}'\,d\tau = 0, \quad \ldots. \end{aligned}\right. \tag{305}$$

Dans le cas qu'il y ait des triplets biharmoniques à nombre correspondant négatif

$$-1 \leqq \Lambda_j \leqq -\frac{1}{2},$$

ce résultat est toujours vrai aussi longtemps qu'on aura

$$|\Lambda| < \frac{1}{2}.$$

Pour arriver, dans ce cas, à des séries absolument et uniformément convergentes, aussi pour

$$-\frac{1}{2} \leqq |\Lambda| < 1,$$

il faut former les séries (303) en partant des fonctions

$$\left\{\begin{aligned} &f_1 - \sum_{-1\leqq\lambda_j\leqq-\frac{1}{2}}^{j} C_j\left\{\frac{\partial U'_j}{\partial\nu} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\nu}\int_\tau \Theta'_j\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}[\mathfrak{W}'_j\cos(\nu y) - \mathfrak{V}'_j\cos(\nu z)]\right\}, \\ &f_2 - \sum_{-1\leqq\lambda_j\leqq-\frac{1}{2}}^{j} C_j\left\{\frac{\partial V'_j}{\partial\nu} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial\nu}\int_\tau \Theta'_j\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}[\mathfrak{U}'_j\cos(\nu z) - \mathfrak{W}'_j\cos(\nu x)]\right\}, \\ &f_3 - \sum_{-1\leqq\lambda_j\leqq-\frac{1}{2}}^{j} C_j\left\{\frac{\partial W'_j}{\partial\nu} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\nu}\int_\tau \Theta'_j\frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}[\mathfrak{V}'_j\cos(\nu x) - \mathfrak{U}'_j\cos(\nu y)]\right\}, \end{aligned}\right. \tag{306}$$

et en faisant

$$C_j = \int_\tau \theta'_0 \Theta'_j \, d\tau, \tag{307}$$

au lieu des fonctions f_1, f_2, f_3. Les séries formées de cette manière, en partant des fonctions (306),

$$u''_0 + \Lambda u''_1 + \Lambda^2 u''_2 + \ldots,$$

$$v''_0 + \Lambda v''_1 + \Lambda^2 v''_2 + \ldots,$$

$$w''_0 + \Lambda w''_1 + \Lambda^2 w''_2 + \ldots,$$

seront absolument et uniformément convergentes dans τ avec leurs premières dérivées dans tout le domaine τ, si

$$|\Lambda| < 1,$$

et les fonctions

$$\left\{\begin{aligned} u' &= u''_0 + \Lambda u''_1 + \Lambda^2 u''_2 + \ldots + \sum\nolimits_j C_j \frac{\Lambda_j}{\Lambda - \Lambda_j} U'_j, \\ v' &= v''_0 + \Lambda v''_1 + \Lambda^2 v''_2 + \ldots + \sum\nolimits_j C_j \frac{\Lambda_j}{\Lambda - \Lambda_j} V'_j, \\ w' &= w''_0 + \Lambda w''_1 + \Lambda^2 w''_2 + \ldots + \sum\nolimits_j C_j \frac{\Lambda_j}{\Lambda - \Lambda_j} W'_j \end{aligned}\right. \tag{308}$$

représenteront les solutions du problème (305).

Corollaire de VI$_a$. — Les solutions du problème (305) satisferont aux inégalités

$$\left.\begin{matrix} |u'|, & |v'|, & |w'| \\ |D_1 u'|, & |D_1 v'|, & |D_1 w'| \end{matrix}\right\} \leqq C_1 \text{ max. abs.} (f_1, f_2, f_3) + C_2 A, \tag{309}$$

$$\left.\begin{matrix} |D_1 u'(x_2, y_2, z_2) - D_1 u'(x_1, y_1, z_1)| \\ |D_1 v'(x_2, y_2, z_2) - D_1 v'(x_1, y_1, z_1)| \\ |D_1 w'(x_2, y_2, z_2) - D_1 w'(x_1, y_1, z_1)| \end{matrix}\right\} \leqq [C_1 \text{ max. abs.} (f_1, f_2, f_3) + C_2 A] r_{12}^{\varpi}, \tag{310}$$

C_1, C_2 étant des constantes finies, qui ne dépendent que de la surface σ et de ϖ, si

$$|f_j(x_2, y_2, z_2) - f_j(x_1, y_1, z_1)| \leqq A r_{12}^{\varpi} \qquad (0 < \varpi < 1). \tag{311}$$

VI_b. Les fonctions

$$(312)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= u'(1+\Lambda) + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r},\\ v &= v'(1+\Lambda) + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r},\\ w &= w'(1+\Lambda) + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r}\end{aligned}\right.$$

seront, si l'on pose

$$(313)\qquad k = \frac{1}{1+2\Lambda},$$

des solutions du problème fondamental

$$(314)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Delta u + k\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0, \quad \ldots \quad \text{dans } \tau,\\ &\frac{\partial u}{\partial\nu} = \frac{1-k}{2}\theta\cos(\nu x) - \frac{1}{2}[\mathfrak{w}\cos(\nu y) - \mathfrak{v}\cos(\nu z)] + f_1, \quad \ldots \quad \text{à la surface } \sigma.\end{aligned}\right.$$

Comme on peut ajouter à chaque solution du problème (314) les expressions

$$\begin{aligned} &a + c_2 z - c_3 y,\\ &b + c_3 x - c_1 z,\\ &c + c_1 y - c_2 x,\end{aligned}$$

a, b, c, c_1, c_2, c_3 étant des constantes quelconques, on peut, du reste, donner aux intégrales

$$\int_\tau u\, d\tau,\quad \int_\tau v\, d\tau,\quad \int_\tau w\, d\tau,$$
$$\int_\tau \mathfrak{u}\, d\tau,\quad \int_\tau \mathfrak{v}\, d\tau,\quad \int_\tau \mathfrak{w}\, d\tau$$

des valeurs que l'on veut.

Corollaire de VI_b. — Les solutions du problème fondamental, pour lesquelles on a

$$(315)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_\tau u\, d\tau = \int_\tau v\, d\tau = \int_\tau w\, d\tau = 0,\\ &\int_\tau \mathfrak{u}\, d\tau = \int_\tau \mathfrak{v}\, d\tau = \int_\tau \mathfrak{w}\, d\tau = 0,\end{aligned}\right.$$

satisferont aux inégalités

$$(316) \quad \left.\begin{matrix} |u|, & |v|, & |w| \\ |D_1 u|, & |D_1 v|, & |D_1 w| \end{matrix}\right\} \overline{\overline{<}}\ C_1 \,\text{max.abs.}\,(f_1, f_2, f_3) + C_2 A,$$

$$(317) \quad \left.\begin{matrix} |D_1 u(x_2, y_2, z_2) - D_1 u(x_1, y_1, z_1)| \\ |D_1 v(x_2, y_2, z_2) - D_1 v(x_1, y_1, z_1)| \\ |D_1 w(x_2, y_2, z_2) - D_1 w(x_1, y_1, z_1)| \end{matrix}\right\} \overline{\overline{<}}\ [C_1 \,\text{max.abs.}\,(f_1, f_2, f_3) + C_2 A]\, r_{12}^{\varpi},$$

C_1, C_2 étant des constantes finies ne dépendant que de la surface σ et de ϖ.

VI$_c$. Pour réduire le problème général

$$(318^a) \quad \left\{\begin{aligned} &\Delta u + k\frac{\partial \theta}{\partial x} = -X, \quad \ldots \quad \text{dans } \tau, \\ &\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{1-k}{2}\theta \cos(\nu x) - \frac{1}{2}[\mathfrak{w} \cos(\nu y) - \mathfrak{v} \cos(\nu z)] + f_1, \quad \ldots \quad \text{à la surface } \sigma, \end{aligned}\right.$$

X, Y, Z étant des fonctions continues dans τ de la manière

$$(318^b) \quad |X(x_2, y_2, z_2) - X(x_1, y_1, z_1)| \overline{\overline{<}}\ B r_{12}^{\varpi}, \quad \ldots$$

au problème fondamental, on n'a qu'à résoudre d'abord le problème (¹)

$$(318^c) \quad \left\{\begin{aligned} &\Delta u_0 + k\frac{\partial \theta_0}{\partial x} = -X, \quad \ldots \quad \text{dans } \tau, \\ &u_0 = v_0 = w_0 = 0 \quad \text{à la surface } \sigma \end{aligned}\right.$$

d'une manière connue (*Ann. Éc. Norm.*, 3ᵉ série, t. XXIV, 1907) et à ajouter aux solutions de ce problème les solutions

$$u - u_0, \quad v - v_0, \quad w - w_0$$

du problème fondamental

$$(318^d) \quad \left\{\begin{aligned} &\Delta(u - u_0) + k\frac{\partial(\theta - \theta_0)}{\partial x} = 0, \quad \ldots \quad \text{dans } \tau, \\ &\left.\begin{aligned} \frac{\partial(u - u_0)}{\partial \nu} = \frac{1-k}{2}(\theta - \theta_0)\cos(\nu x) - \frac{1}{2}[(\mathfrak{w} - \mathfrak{w}_0)\cos(\nu y) - (\mathfrak{v} - \mathfrak{v}_0)\cos(\nu z)] \\ + f_1 - \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \frac{1-k}{2}\theta_0 \cos(\nu x) - \frac{1}{2}[\mathfrak{w}_0 \cos(\nu y) - \mathfrak{v}_0 \cos(\nu z)] \end{aligned}\right\} \text{à la surface } \sigma. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

(¹) Ce qui est toujours possible pour

$$-1 < k < +\infty.$$

Corollaire de VI_c. — Les solutions du problème général, pour lesquelles on a

$$\int_\tau u\,d\tau = 0, \qquad \ldots$$

$$\int_\tau \mathfrak{u}\,d\tau = 0, \qquad \ldots$$

satisferont aux inégalités

$$(319)\quad \left.\begin{matrix} |u|, & |v|, & |w| \\ |\mathrm{D}_1 u|, & |\mathrm{D}_1 v|, & |\mathrm{D}_1 w| \end{matrix}\right\} \overline{\overline{<}}\ c_1 \mathrm{A} + c_2 \max.\mathrm{abs}.(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + c_3 \max.\mathrm{abs}.(f_1, f_2, f_3),$$

$$(320)\quad \left.\begin{matrix} |\mathrm{D}_1 u(x_2, y_2, z_2) - \mathrm{D}_1 u(x_1, y_1, z_1)| \\ |\mathrm{D}_1 v(x_2, y_2, z_2) - \mathrm{D}_1 v(x_1, y_1, z_1)| \\ |\mathrm{D}_1 w(x_2, y_2, z_2) - \mathrm{D}_1 w(x_1, y_1, z_1)| \end{matrix}\right\} \overline{\overline{<}} [c_1 \mathrm{A} + c_2 \max.\mathrm{abs}.(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + c_3 \max.\mathrm{abs}.(f_1, f_2, f_3)]\, r_{12}^{\varpi},$$

c_1, c_2, c_3 étant des constantes finies qui ne dépendent que de la surface τ et de ϖ.

Pour démontrer ce corollaire, on n'a qu'à combiner le corollaire de VI_b avec les formules (132), page 74, de mon Mémoire *Sur les équations de l'élasticité* (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XXIV, 1907).

6. Dans ce paragraphe, nous nous occuperons des développements d'après les triplets biharmoniques de seconde espèce et par conséquent aussi des développements d'après les triplets de Cosserat de seconde espèce.

Reprenons, comme au n° 6, les notations du théorème IV et remplaçons de nouveau les fonctions f_1, f_2, f_3 dont nous sommes partis par les fonctions

$$(321)\quad \begin{cases} \mathrm{R}_m = f_1 - \sum_1^n {}_j\, \mathrm{C}_j \left\{ \dfrac{\partial \mathrm{U}'_j}{\partial \nu} + \dfrac{1}{8\pi} \dfrac{\partial^2}{\partial x\, \partial \nu} \displaystyle\int_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2} [\mathfrak{w}'_j \cos(\nu y) - \mathfrak{v}'_j \cos(\nu z)] \right\}, \\ \mathrm{S}_m = f_2 - \sum_1^n {}_j\, \mathrm{C}_j \left\{ \dfrac{\partial \mathrm{V}'_j}{\partial \nu} + \dfrac{1}{8\pi} \dfrac{\partial^2}{\partial y\, \partial \nu} \displaystyle\int_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2} [\mathfrak{u}'_j \cos(\nu z) - \mathfrak{w}'_j \cos(\nu x)] \right\}, \\ \mathrm{T}_m = f_3 - \sum_1^n {}_j\, \mathrm{C}_j \left\{ \dfrac{\partial \mathrm{W}'_j}{\partial \nu} + \dfrac{1}{8\pi} \dfrac{\partial^2}{\partial z\, \partial \nu} \displaystyle\int_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2} [\mathfrak{v}'_j \cos(\nu x) - \mathfrak{u}'_j \cos(\nu y)] \right\}, \end{cases}$$

en posant

$$(322)\qquad \mathrm{C}_j = \int_\tau \theta'_0\, \Theta'_j\, d\tau.$$

Si nous formons, en partant de ces fonctions R_m, S_m, T_m, les fonctions successives

u''_j, v''_j, w''_j d'après les formules (208) [1], (209), les séries

$$(323)\qquad \left\{\begin{aligned} u'' &= u''_0 + \Lambda u''_1 + \Lambda^2 u''_2 + \ldots, \\ v'' &= v''_0 + \Lambda v''_1 + \Lambda^2 v''_2 + \ldots, \\ w'' &= w''_0 + \Lambda w''_1 + \Lambda^2 w''_2 + \ldots \end{aligned}\right.$$

seront convergentes, comme nous avons vu au n° 6, pour chaque

$$(324)\qquad |\Lambda| \leqq m.$$

Nous pouvons en conclure qu'on aura

$$(325)\qquad \frac{\int_\tau \theta''^2_1\, d\tau}{\int_\tau \theta''^2_1\, d\tau} \left(\equiv \frac{\int_\tau \theta''^2_1\, d\tau}{{}^{(2)}\int_\tau \tau'^2_m\, d\tau} \right) \leqq \frac{1}{m^2}.$$

En effet, on a, d'après le lemme III, page 234, l'identité

$$\int_\tau \theta''^2_j\, d\tau = \int_\tau \theta''_{j-1}\theta''_{j+1}\, d\tau \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

d'où l'on tire les inégalités

$$\frac{\int_\tau \theta''^2_1\, d\tau}{\int_\tau \tau'^2_m\, d\tau} \leqq \frac{\int_\tau \theta''^2_2\, d\tau}{\int_\tau \theta''^2_1\, d\tau} \leqq \ldots$$

$$\leqq \frac{\int_\tau \theta''^2_k\, d\tau}{\int_\tau \theta''^2_{k-1}\, d\tau} \leqq \ldots .$$

---

[1] Les formules (208) deviennent

$$(323')\qquad u''_0 = u'_0 - C_1 U'_1 - C_2 U'_2 - \ldots - C_n U'_n \equiv R'_m, \qquad \ldots .$$

[2] En posant

$$(325')\qquad \tau'_m = \frac{\partial R'_m}{\partial x} + \frac{\partial S'_m}{\partial y} + \frac{\partial T'_m}{\partial z}$$

et en définissant R'_m, S'_m, T'_m par les équations (323'), remarque [1] de cette page.

Si l'on avait

$$\frac{\int_\tau \theta_1''^2\, d\tau}{\int_\tau \tau_m'^2\, d\tau} > \frac{1}{m^2},$$

il viendrait

$$\Lambda^{2k}\int_\tau \theta_k''^2\, d\tau > \left(\frac{\Lambda}{m}\right)^{2k}\int_\tau \tau_m'^2\, d\tau,$$

et cela serait en contradiction avec la convergence des séries (323) pour

$$\Lambda = m.$$

Comme l'expression

$$(326)\qquad \int_\tau \tau_m'^2\, d\tau = \int_\tau \theta_0'^2\, d\tau - C_1^2 - C_2^2 - \ldots - C_n^2$$

est une expression positive qui diminue sans cesse, si l'on fait croître m, cette expression restera finie aussi pour

$$\lim m = \infty,$$

et l'on trouve ainsi

$$(327)\qquad \int_\tau \theta_1''^2\, d\tau \leqq \text{const. fin.}\,\frac{1}{m^2}.$$

Ce résultat nous montre que nous pouvons faire l'intégrale

$$\int_\tau \tau_m'^2\, d\tau$$

aussi petite que nous voulons en agrandissant m, si nous connaissons trois fonctions harmoniques $\overline{u'}$, $\overline{v'}$, $\overline{w'}$ continues avec leurs premières dérivées dans τ, satisfaisant aux relations

$$(328^a)\qquad \int_\tau \overline{\mathfrak{u}'}\, d\tau = 0, \qquad \ldots,$$

$$(328^b)\qquad \begin{cases} f_1 = -\dfrac{\partial \overline{u'}}{\partial \nu} + \dfrac{1}{2}\overline{\theta_0'}\cos(\nu x) - \dfrac{1}{2}\left[\overline{\mathfrak{w}_0'}\cos(\nu y) - \overline{\mathfrak{v}_0'}\cos(\nu z)\right], \\ f_2 = -\dfrac{\partial \overline{v'}}{\partial \nu} + \dfrac{1}{2}\overline{\theta_0'}\cos(\nu y) - \dfrac{1}{2}\left[\overline{\mathfrak{u}_0'}\cos(\nu z) - \overline{\mathfrak{w}_0'}\cos(\nu x)\right], \\ f_3 = -\dfrac{\partial \overline{w'}}{\partial \nu} + \dfrac{1}{2}\overline{\theta_0'}\cos(\nu z) - \dfrac{1}{2}\left[\overline{\mathfrak{v}_0'}\cos(\nu x) - \overline{\mathfrak{u}_0'}\cos(\nu y)\right]. \end{cases}$$

Pour aller plus loin, nous nous demanderons si l'on peut conclure de l'inégalité (327) qu'on pourra faire aussi

$$R'_m, \quad S'_m, \quad T'_m$$

aussi petits qu'on voudra en agrandissant m, et démontrer ainsi la convergence des séries

$$\begin{aligned}
&C_1 U'_1 + C_2 U'_2 + \ldots + C_n U'_n,\\
&C_1 V'_1 + C_2 V'_2 + \ldots + C_n V'_n,\\
&C_1 W'_1 + C_2 W'_2 + \ldots + C_n W'_n,
\end{aligned}$$

en supposant l'existence des fonctions $\overline{u'}$, $\overline{v'}$, $\overline{w'}$.

Nous nous servirons, pour traiter cette question, du lemme suivant :

Lemme. — *Pour chaque triplet biharmonique de seconde espèce* U'_j, V'_j, W'_j, *on a*

$$(329) \qquad |\Theta'_j(x_2, y_2, z_2) - \Theta'_j(x_1, y_1, z_1)| \overline{\overline{<}} c\,|A_j|^{1+\frac{3}{\varpi}} r_{12}^{\varpi},$$

ϖ *étant un nombre positif quelconque satisfaisant à l'inégalité*

$$0 < \varpi < 1,$$

et c étant une constante finie ne dépendant que de la surface σ *et du choix de* ϖ.

On a, en effet, d'après le lemme II,

$$C_j \overline{\overline{<}} \frac{\text{const. fin.}}{\varepsilon^{1+\frac{3}{\varpi}}} + \varepsilon\,|A_j|\,C_j,$$

ε étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut, si

$$|\Theta'_j(x_2, y_2, z_2) - \Theta'_j(x_1, y_1, z_1)| \overline{\overline{<}} C_j r_{12}^{\varpi}.$$

Nous arriverons donc à notre proposition (329) en posant

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{|A_j|} \qquad (\alpha < 1).$$

Nous tirons maintenant de l'inégalité (327) l'inégalité suivante :

$$|\theta''_1(O)| \overline{\overline{<}} \frac{\text{const. fin.}}{m} \frac{1}{\sqrt{\rho^3}} + \theta''_1(O) - \theta''_1(O'),$$

en désignant par O′ un point voisin du point O, où θ''_1 a son maximum absolu, à l'intérieur de τ et séparé du point O par la distance ρ.

Comme on a

$$\theta''_1 = \theta'_1 - \frac{C_1}{\Lambda_1}\Theta'_1 - \frac{C_2}{\Lambda_2}\Theta'_2 - \ldots - \frac{C_n}{\Lambda_n}\Theta'_n,$$

le lemme que nous venons de démontrer nous apprend

$$|\theta''_1(O) - \theta''_1(O')| \leqq \left(\text{const. fin.} + |C_1|\,|\Lambda_1|^{\frac{3}{\varpi}} + |C_2|\,|\Lambda_2|^{\frac{3}{\varpi}} + \ldots + |C_n|\,|\Lambda_n|^{\frac{3}{\varpi}}\right)\rho^{\varpi},$$

donc

$$(330) \qquad |\theta''_1| \leqq \frac{\text{const. fin.}}{m}\,\frac{1}{\sqrt{\rho^3}} + \text{const. fin.}\sqrt{n}\,m^{\frac{3}{\varpi}}\rho^{\varpi} \quad (1),$$

où nous pouvons disposer encore de ρ.

Nous aurons, d'une manière analogue,

$$(331) \qquad \left\{\begin{array}{l} |\theta''_2| \leqq \dfrac{\text{const. fin.}}{m^2}\,\dfrac{1}{\sqrt{\rho^3}} + \text{const. fin.}\sqrt{n}\,m^{\frac{3-\varpi}{\varpi}}\rho^{\varpi}, \\ \dotfill, \\ |\theta''_j| \leqq \dfrac{\text{const. fin.}}{m^j}\,\dfrac{1}{\sqrt{\rho^3}} + \text{const. fin.}\sqrt{n}\,m^{\frac{3-(j-1)\varpi}{\varpi}}\rho^{\varpi}, \\ \dotfill, \end{array}\right.$$

ϖ étant un nombre positif quelconque satisfaisant à l'inégalité

$$0 < \varpi < 1,$$

et ces inégalités seront vraies aussi longtemps qu'on aura

$$3 - (j-1)\varpi \geqq 0;$$

dans le cas

$$3 - (j-1)\varpi \leqq 0,$$

nous aurons

$$(332) \qquad |\theta''_j| \leqq \frac{\text{const. fin.}}{m^j}\,\frac{1}{\sqrt{\rho^3}} + \text{const. fin.}\sqrt{n}\,\rho^{\varpi}.$$

La démonstration du lemme I, page 229, nous fait voir, en ayant égard à la formule (223), page 231, qu'on aura en tout cas

$$(333) \qquad n \leqq m^{\alpha},$$

(1) Nous savons, d'après (326), que $C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_n^2$ est fini, donc

$$|C_1| + |C_2| + \ldots + |C_n| \leqq \text{const. fin.}\sqrt{n}.$$

α étant un certain nombre positif; donc, si nous posons

(334) $$\rho = m^{-\beta},$$

et si nous choisissons convenablement β, nous pourrons toujours obtenir pour un s fini

(335) $$|\theta''_s| \leqq \text{const. fin.}\, m^{-\gamma} \qquad (\gamma > 0)$$

et que nous pourrons de la même manière faire $|\theta''_{s+1}|$, $|\theta''_{s+2}|$, ... aussi petits que nous voulons en agrandissant m, et aussi

$$|\theta''_s + \Lambda\theta''_{s+1} + \Lambda^2\theta''_{s+2} + \ldots|,$$

Λ étant un nombre réel quelconque, mais fixe, pourvu que pour le Λ en question ces séries soient absolument et uniformément convergentes. Donc, quoique nous ne puissions pas démontrer la convergence des séries

$$\begin{gathered} C_1\, U'_1 + C_2\, U'_2 + \ldots, \\ C_1\, V'_1 + C_2\, V'_2 + \ldots, \\ C_1\, W'_1 + C_2\, W'_2 + \ldots, \end{gathered}$$

même en supposant l'existence des fonctions $\overline{u'}$, $\overline{v'}$, $\overline{w'}$ satisfaisant aux relations (328), nous pouvons toujours, en formant successivement des fonctions harmoniques u'_j, v'_j, w'_j, à l'aide des solutions des problèmes

(336^a) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u'_0}{\partial\nu} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\nu}\int_\tau \theta'_0 \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}[\mathfrak{w}'_0\cos(\nu y) - \mathfrak{v}'_0\cos(\nu z)] = f_1, \quad \ldots \quad \text{à la surface } \sigma, \\ &\int_\tau u'_0\, d\tau = 0, \qquad \ldots, \\ &\int_\tau \mathfrak{u}'_0\, d\tau = 0, \qquad \ldots, \end{aligned}\right.$$

(336^b) $$\left\{\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u'_j}{\partial\nu} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\nu}\int_\tau \theta'_j \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}[\mathfrak{w}'_j\cos(\nu y) - \mathfrak{v}'_j\cos(\nu z)] \\ &\quad = -\frac{\partial u'_{j-1}}{\partial\nu} + \frac{1}{2}\theta'_{j-1}\cos(\nu x) \\ &\quad\quad - \frac{1}{2}[\mathfrak{w}'_{j-1}\cos(\nu y) - \mathfrak{v}'_{j-1}\cos(\nu z)] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{à la surface } \sigma \\ (j = 1, 2, \ldots),\end{array} \\ &\int_\tau u'_j\, d\tau = 0, \qquad \ldots, \\ &\int_\tau \mathfrak{u}'_j\, d\tau = 0, \qquad \ldots, \end{aligned}\right.$$

arriver après un nombre fini de telles opérations à un triplet de fonctions u'_s, v'_s, w'_s qui permettra les développements en séries d'après les triplets biharmoniques de seconde espèce (à des fonctions harmoniques additives $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ près pour lesquelles on a $\overline{\theta} = 0$), et non seulement le triplet u'_s, v'_s, w'_s admettra ces développements, mais aussi les fonctions

$$\begin{gathered}
u'_s + \Lambda\, u'_{s+1} + \Lambda^2\, u'_{s+2} + \ldots, \\
v'_s + \Lambda\, v'_{s+1} + \Lambda^2\, v'_{s+2} + \ldots, \\
w'_s + \Lambda\, w'_{s+1} + \Lambda^2\, w'_{s+2} + \ldots,
\end{gathered}$$

si ces séries sont pour le Λ en question absolument et uniformément convergentes dans τ avec leurs premières dérivées.

VII$_a$. *On peut toujours mettre les solutions u', v', w' du problème*

$$(337)\quad \left\{\begin{array}{l}
\Delta u' = 0, \qquad \ldots \qquad \text{dans } \tau, \\
\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u'}{\partial \nu} = -\dfrac{1}{8\pi}\dfrac{1}{1+\Lambda}\dfrac{\partial^2}{\partial x\, \partial \nu}\displaystyle\int_\tau \theta' \frac{d\tau}{r} + \frac{1}{2}\frac{\Lambda}{1+\Lambda}\theta' \cos(\nu x) \\
\qquad - \dfrac{1}{2}[\mathfrak{w}' \cos(\nu y) - \mathfrak{v}' \cos(\nu z)] + f_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \text{ à la surface } \sigma, \\
\displaystyle\int_\tau u'\, d\tau = 0, \qquad \ldots, \\
\displaystyle\int_\tau \mathfrak{u}'\, d\tau = 0, \qquad \ldots
\end{array}\right.$$

dans la forme

$$(338)\quad \left\{\begin{aligned}
u' &= u'_0 + \Lambda\, u'_1 + \ldots + \Lambda^{s-1}\, u'_{s-1} + C_1\, U'_1 + C_2\, U'_2 + \ldots + \overline{u}, \\
v' &= v'_0 + \Lambda\, v'_1 + \ldots + \Lambda^{s-1}\, v'_{s-1} + C_1\, V'_1 + C_2\, V'_2 + \ldots + \overline{v}, \\
w' &= w'_0 + \Lambda\, w'_1 + \ldots + \Lambda^{s-1}\, w'_{s-1} + C_1\, W'_1 + C_2\, W'_2 + \ldots + \overline{w},
\end{aligned}\right.$$

où les C_j sont des constantes faciles à calculer, d'après le théorème V$_e$, *page* 249, *et où s est un nombre entier fini, $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ étant des fonctions harmoniques dans τ satisfaisant à l'équation $\overline{\theta} = 0$.*

VII$_b$. On peut toujours mettre les solutions du problème fondamental

$$(339)\quad \left\{\begin{array}{l}
\Delta u + k\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \qquad \ldots \qquad \text{dans } \tau, \\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{1-k}{2}\theta \cos(\nu x) - \dfrac{1}{2}[\mathfrak{w} \cos(\nu y) - \mathfrak{v} \cos(\nu z)] + f_1, \quad \ldots \quad \text{à la surface } \sigma,
\end{array}\right.$$

dans la forme

$$(340)\quad \begin{cases} u = \bar{u} + u_0 + \dfrac{1-k}{2k} u_1 + \left(\dfrac{1-k}{2k}\right)^2 u_2 + \ldots + \left(\dfrac{1-k}{2k}\right)^{s-1} u_{s-1} + C_1 U_1 + C_2 U_2 + \ldots, \\ v = \bar{v} + v_0 + \dfrac{1-k}{2k} v_1 + \left(\dfrac{1-k}{2k}\right)^2 v_2 + \ldots + \left(\dfrac{1-k}{2k}\right)^{s-1} v_{s-1} + C_1 V_1 + C_2 V_2 + \ldots, \\ w = \bar{w} + w_0 + \dfrac{1-k}{2k} w_1 + \left(\dfrac{1-k}{2k}\right)^2 w_2 + \ldots + \left(\dfrac{1-k}{2k}\right)^{s-1} w_{s-1} + C_1 W_1 + C_2 W_2 + \ldots, \end{cases}$$

où les C_j sont des constantes faciles à calculer d'après le théorème V_f, page 250, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ étant des fonctions harmoniques dans τ et satisfaisant à l'équation $\bar{\theta} = 0$; les fonctions u_0, u_1, u_2, ... sont définies par les équations (239), page 235.

CHAPITRE III.

L'EXEMPLE DE LA SPHÈRE.

1. Nous connaissons les triplets biharmoniques de seconde espèce et les triplets de Cosserat de seconde espèce pour la sphère de rayon R autour de l'origine comme centre.

Nous introduirons les coordonnées polaires r_1, θ_1, φ_1 par les transformations

$$(341)\quad \begin{cases} x = r_1 \mu_1, \\ y = r_1 \sqrt{1-\mu_1^2} \cos\varphi_1, \qquad \mu_1 = \cos\theta_1, \\ z = r_1 \sqrt{1-\mu_1^2} \sin\varphi_1, \end{cases}$$

et nous posons

$$(342)\quad F_j(x, y, z) = r_1^j\, Y_j(\mu_1, \varphi_1),$$

où Y_j représente une fonction sphérique générale d'ordre j; je dis que les triplets biharmoniques de seconde espèce seront les fonctions suivantes :

$$(343)\quad \begin{Bmatrix} U'_j = \dfrac{\alpha_j}{(j+1)(2j+3)} \left[(2j+1) x F_j - r_1^2 \dfrac{\partial F_j}{\partial x} \right] \\ V'_j = \dfrac{\alpha_j}{(j+1)(2j+3)} \left[(2j+1) y F_j - r_1^2 \dfrac{\partial F_j}{\partial y} \right] \\ W'_j = \dfrac{\alpha_j}{(j+1)(2j+3)} \left[(2j+1) z F_j - r_1^2 \dfrac{\partial F_j}{\partial z} \right] \end{Bmatrix} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

α_j étant une constante [1] qui peut servir à faire

$$\int_i \Theta_j'^2\, d\tau = 1\,;$$

je dis donc que les triplets biharmoniques de seconde espèce sont pour la sphère, à des facteurs constants près, identiques avec ceux de première espèce [*voir* mon Mémoire *Allgemeine Lösung des biharmonischen problems im Raume* (*Bull. de Cracovie*, 1907, p. 893)].

On aura, pour ces triplets,

$$(344)\quad \left\{\begin{aligned} \Theta'_j &= \alpha_j \mathrm{F}_j,\\ \mathfrak{U}'_j &= -\frac{\alpha_j}{j+1}\left(y\frac{\partial \mathrm{F}_j}{\partial z} - z\frac{\partial \mathrm{F}_j}{\partial y}\right),\\ \mathfrak{V}'_j &= -\frac{\alpha_j}{j+1}\left(z\frac{\partial \mathrm{F}_j}{\partial x} - x\frac{\partial \mathrm{F}_j}{\partial z}\right),\\ \mathfrak{W}'_j &= -\frac{\alpha_j}{j+1}\left(x\frac{\partial \mathrm{F}_j}{\partial y} - y\frac{\partial \mathrm{F}_j}{\partial x}\right),\\ \mathfrak{W}'_j\cos(\nu y) - \mathfrak{V}'_j\cos(\nu z) &= \frac{\alpha_j}{(j+1)\mathrm{R}}\left(jx\mathrm{F}_j - \mathrm{R}^2\frac{\partial \mathrm{F}_j}{\partial x}\right)\\ \mathfrak{U}'_j\cos(\nu z) - \mathfrak{W}'_j\cos(\nu x) &= \frac{\alpha_j}{(j+1)\mathrm{R}}\left(jy\mathrm{F}_j - \mathrm{R}^2\frac{\partial \mathrm{F}_j}{\partial y}\right)\\ \mathfrak{V}'_j\cos(\nu x) - \mathfrak{U}'_j\cos(\nu y) &= \frac{\alpha_j}{(j+1)\mathrm{R}}\left(jz\mathrm{F}_j - \mathrm{R}^2\frac{\partial \mathrm{F}_j}{\partial z}\right) \end{aligned}\right. \quad \text{à la surface de la sphère}$$

et

$$(345)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{4\pi}\int_\tau \Theta'_j\frac{d\tau}{r} &= \frac{\alpha_j \mathrm{F}_j}{2j+3}\left[\frac{r_1^2}{2j+3} - \frac{1}{2}(r_1^2 - \mathrm{R}^2)\right],\\ \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \Theta'_j\frac{d\tau}{r} &= -\frac{\alpha_j}{2j+3}\left[x\mathrm{F}_j + \frac{1}{2}\left(r_1^2 - \frac{2j+3}{2j+1}\mathrm{R}^2\right)\frac{\partial \mathrm{F}_j}{\partial x}\right], \quad \ldots, \end{aligned}\right.$$

donc

$$(346)\quad \frac{\partial \mathrm{U}'_j}{\partial \nu} = -\frac{\alpha_j}{(2j+3)\mathrm{R}}\left[(2j+1)x\mathrm{F}_j - \mathrm{R}^2\frac{\partial \mathrm{F}_j}{\partial x}\right] = -\frac{j+1}{\mathrm{R}}\mathrm{U}'_j, \quad \ldots$$

$$(347)\quad \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\tau \Theta'_j\frac{d\tau}{r} = \frac{\alpha_j}{(2j+3)\mathrm{R}}\left[(j+1)x\mathrm{F}_j + \frac{j+2}{2j+1}\mathrm{R}^2\frac{\partial \mathrm{F}_j}{\partial x}\right] \quad \ldots$$

à la surface de la sphère,

---

[1] Il est à noter qu'il y a un triplet de seconde espèce aussi pour $j = 0$, pendant qu'il n'y en a pas de première espèce.

et, si nous posons

$$(348)\quad \Lambda_j = \frac{j^2+j+1}{2j+1}, \qquad 1+\Lambda_j = \frac{(j+1)(j+2)}{2j+1}, \qquad \frac{\Lambda_j}{1+\Lambda_j} = \frac{j^2+j+1}{(j+1)(j+2)},$$

il viendra, en effet,

$$(349)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial U'_j}{\partial \nu} + \frac{1}{1+\Lambda_j}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial \nu}\int_\tau \Theta'_j \frac{d\tau}{r} - \frac{1}{2}\frac{\Lambda_j}{1+\Lambda_j}\Theta'_j \cos(\nu x) \\ &\quad + \frac{1}{2}[\mathfrak{w}'_j \cos(\nu y) - \mathfrak{w}'_j \cos(\nu z)] \\ &= -\frac{j+1}{R}U'_j + \frac{1}{2}\frac{\alpha_j}{R}\frac{2j+1}{(j+1)(j+2)(2j+3)}\left[(j+1)\,x\,F_j + \frac{j+2}{2j+1}R^2\frac{\partial F_j}{\partial x}\right] \\ &\quad + \frac{j^2+j+1}{2(j+1)(j+2)}\frac{\alpha_j}{R}\,x\,E_j + \frac{\alpha_j}{2R(j+1)}\left(j\,x\,F_j - R^2\frac{\partial F_j}{\partial x}\right) \\ &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

2. Les triplets de Cosserat de seconde espèce seront

$$(350)\quad \left\{\begin{aligned} U_j &\equiv U'_j\,(1+\Lambda_j) + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \Theta'_j\frac{d\tau}{r} = \frac{\alpha_j}{2}x\,F_j + \frac{\alpha_j}{4(2j+1)}(R^2 - 3r_1^2)\frac{\partial F_j}{\partial x} \\ V_j &\equiv V'_j\,(1+\Lambda_j) + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \Theta'_j\frac{d\tau}{r} = \frac{\alpha_j}{2}y\,F_j + \frac{\alpha_j}{4(2j+1)}(R^2 - 3r_1^2)\frac{\partial F_j}{\partial y} \\ W_j &\equiv W'_j(1+\Lambda_j) + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \Theta'_j\frac{d\tau}{r} = \frac{\alpha_j}{2}z\,F_j + \frac{\alpha_j}{4(2j+1)}(R^2 - 3r_1^2)\frac{\partial F_j}{\partial z} \end{aligned}\right\}\quad (j=0,1,2,\ldots)$$

et leur nombre correspondant

$$(351)\qquad k_j = \frac{2j+1}{2j^2+4j+3}$$

(*voir* la Note de MM. E. et F. Cosserat dans les *Comptes rendus*, t. CXXXIII, 1901, p. 272).

Comme, pour la sphère, le nombre s dans les théorèmes VII_a et VII_b peut être posé $=0$, on peut toujours développer les solutions du problème fondamental

$$(352)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta u + k\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0_0 \qquad \ldots \qquad \text{dans la sphère,} \\ &\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{1-k}{2}\theta\cos(\nu x) - \frac{1}{2}[\mathfrak{w}\cos(\nu y) - \mathfrak{v}\cos(\nu z)] + f_1, \qquad \ldots \qquad \text{à la surface de la sphère,} \end{aligned}\right.$$

d'après les triplets de Cosserat de seconde espèce, si les fonctions f_1, f_2, f_3 satisfont aux conditions

$$(353)\qquad |f_j(x_2, y_2, z_2) - f_j(x_1, y_1, z_1)| \overline{\overline{<}} A\, r_{12}^{\varpi} \quad \left|\begin{array}{l}\text{A constante donnée,}\\ \varpi > 0\end{array}\right.$$

de la manière suivante :

$$(354)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \bar{u} + \sum_0^\infty {}_j c_j \mathrm{U}_j,\\ v &= \bar{v} + \sum_0^\infty {}_j c_j \mathrm{V}_j,\\ w &= \bar{w} + \sum_0^\infty {}_j c_j \mathrm{W}_j,\end{aligned}\right.$$

où $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ sont des fonctions satisfaisant aux conditions

$$(355)\qquad \bar{\theta} \equiv \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \qquad \Delta\bar{u} = \Delta\bar{v} = \Delta\bar{w} = 0 \qquad \text{dans la sphère,}$$

et où l'on doit poser

$$(356)\qquad c_j = \frac{1}{2}\,\frac{k_j^2}{k_j - k}\int_\sigma (\mathrm{U}_j f_1 + \mathrm{V}_j f_2 + \mathrm{W}_j f_3)\, d\sigma.$$

Le calcul des fonctions $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ est un problème qu'on sait résoudre à l'aide des fonctions sphériques [1].

---

[1] Soient

$$(354^a)\qquad \left\{\begin{aligned} \chi_j &= r_1^j\, \mathrm{H}_j(\mu_1, \varphi_1),\\ \psi_j &= r_1^j\, \mathrm{Z}_j(\mu_1, \varphi_1),\end{aligned}\right.$$

H_j, Z_j étant des fonctions sphériques générales d'ordre j ; alors on posera

$$(354^b)\qquad \bar{u} = \sum{}_j \left(\frac{\partial \chi_{j+1}}{\partial x} + y\frac{\partial \psi_j}{\partial z} - z\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\right), \qquad \dots;$$

on connaît les développements en fonctions sphériques

$$(354^c)\qquad \left\{\begin{aligned} f_1\cos(\nu x) + f_2\cos(\nu y) + f_3\cos(\nu z) &= \sum{}_j \eta_j(\mu_1, \varphi_1),\\ f_3\cos(\nu y) - f_2\cos(\nu z) &= \sum{}_j \Xi_j(\mu_1, \varphi_1),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\dots\dots,\end{aligned}\right.$$

et l'on trouvera à l'aide des deuxième, troisième, quatrième équations (352), facilement, les fonctions χ_j et ψ_j.