ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

HENRI DULAC

Sur les points singuliers d'une équation différentielle

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 2, n° 1-2 (1910), p. 85-142
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1910_3_2_1-2_85_0>

SUR LES POINTS SINGULIERS

D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

(*suite**)

PAR HENRI DULAC,

Professeur à l'Université de Lyon.

[**19**] *Exemples divers.* — Afin de bien mettre en évidence les circonstances qui peuvent se présenter lorsque l'exposant μ, relatif à un facteur simple $y + a_i x$ est rationnel, je citerai quelques exemples. Soit d'abord l'exemple suivant, où l'*on est assuré que l'intégrale* $\mathrm{L}\overline{x,\, t}$ *existe, sans que l'on sache si l'intégrale* $f\overline{x,\, y}$ *existe.* Supposons que $y\mathrm{Y}_n(x, y) + x\mathrm{X}_n(x, y)$ soit du troisième degré et n'admette que des facteurs simples. Un changement convenable d'axes permet de supposer que ces facteurs simples sont x, y et $x + y$. Nous désignerons par λ et μ les exposants relatifs à x et à y, l'exposant relatif à $x + y$ sera supposé égal à -1. La somme des trois exposants devant être égale à 1, on a

$$\lambda + \mu = 2.$$

Nous pouvons supposer que les courbes intégrales tangentes aux droites $x = 0$, $y = 0$ sont respectivement $x = 0$, $y = 0$, et nous pouvons supposer également qu'une des solutions holomorphes [22] tangentes à $x + y = 0$ se réduit à $x + y = 0$. On voit facilement que l'équation (1) est alors de la forme

$$(78)\quad (xdy - ydx)[(\mu - 1)y + \mu x + \overline{\mathrm{P}}_2 + \overline{\mathrm{P}}_3 + \ldots] + y(x + y)(1 + \overline{\mathrm{R}}_1 + \overline{\mathrm{R}}_2 + \ldots)dx = 0,$$

$\overline{\mathrm{P}}_i$ et $\overline{\mathrm{R}}_i$ désignant des polynomes homogènes en x et y de degré i.

(*) Voir *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, année 1909, p. 329.

[22] Nous devons nous placer dans le cas A où il y a une infinité de ces solutions, si nous voulons que $f\overline{x,\, y}$ puisse exister.

En posant $y = tx$ nous obtenons l'équation

$$x[(\mu - 1)t + \mu + xP_1 + x^2P_2 + \ldots]dt + t(1+t)(1 + xR_1 + x^2R_2 + \ldots)dt = 0$$

où P_i et R_i sont des polynomes en t de degré i. Si nous cherchons à vérifier l'équation par une intégrale de la forme

$$xt^\mu(1+t)^{-1}L = \text{const.}$$

où nous posons

$$L = 1 + xL_1 + x^2L_2 + \ldots;$$

L vérifie l'équation

$$(79)\qquad t(1+t)(1+xR_1+\ldots)\frac{\partial L}{\partial t} - x[(\mu-1)t + \mu + xP_2 + \ldots]\frac{\partial L}{\partial x}$$
$$= [(\mu - 1)t + \mu](xR_1 + x^2R_2 + \ldots)L - (xP_2 + x^2P_3 + \ldots)L.$$

Nous aurons, en désignant par L_i' la dérivée de L_i par rapport à t,

$$t(1+t)L_1' - [(\mu-1)t+\mu]L_1 = At^2 + Bt + C,$$

A, B, C étant des constantes. On voit immédiatement que si μ n'est égal ni à -2 ni à -1 on peut prendre

$$L_1 = (at^2 + lt + c)(1+t)^{-1},$$

a, b, c étant des constantes convenables. Nous allons montrer que d'une façon générale on peut prendre

$$L_s = Q_{2s}(t)\,.\,(1+t)^{-s},$$

Q_{2s} étant un polynome en t de degré $2s$. Il suffit de montrer que s'il en est ainsi pour s, il en est de même pour $s+1$. En égalant les coefficients de $s+1$ dans (79), nous avons

$$t(1+t)L'_{s+1} - (s+1)[(\mu-1)t+\mu]L_{s+1} = D_{2s+2}X(1+t)^{-s};$$

D_{2s+2} est un polynome en t de degré $2s+2$. On voit que, sauf pour des valeurs de μ entières et négatives, on peut prendre

$$L_{s+1} = Q_{2s+2}(t)(1+t)^{-s-1},$$

Q_{2s+2} étant un polynome en t convenablement choisi.

L'intégrale $L\overline{x,t}$ existe, mais il ne paraît pas possible d'avoir dans le cas le plus général une intégrale $f\overline{x,y}$, c'est-à-dire de la forme

$$[1 + A(x,y]x^\lambda y^\mu \prod_{i=1}^{p}(y + x + x\psi_i)^{\lambda_i} = \text{const.},$$

ψ_i est de la forme $\psi_i = c_ix + d_ix^2 + \ldots$. La constante c_i peut prendre n'importe quelle valeur, puisque, en posant $y = -x + zx$ l'équation différentielle en z et x

déduite de (78) est une équation à point dicritique $x=0$, $z=0$. Une fois choisi c_i, les coefficients suivants sont bien déterminés. La somme des p exposants λ_i doit être égale à -1. Nous devrions avoir

$$(80)\qquad 1+A(x, tx)=(1+xL_1+x^2L^2+\ldots)\prod_{i=1}^{p}\left(1+\frac{\psi_i}{1+t}\right)^{-\lambda_i}$$

en supposant toutefois que μ ne soit pas rationnel. Rien ne nous indique le nombre p des facteurs que nous devons prendre dans le produit. Cependant, quelle que soit la valeur de p choisie, il paraît impossible de vérifier l'identité (80) au moyen d'une fonction $A(x, y)$ convenablement choisie.

Nous disposons de p constantes, les c_i, et de $p-1$ autres constantes en remarquant que les λ_i ne sont assujettis pour le moment qu'à la seule condition : avoir leur somme égale à -1. Si nous posons

$$A(x, tx)=xA_1+x^2A_2+x^3A_3+\ldots$$

où A_i est un polynome en t de degré égal à l'indice et si nous égalons successivement les coefficients de x, x^2, x^3, ... dans les deux membres de (80), nous aurons des équations déterminant successivement A_1, A_2, A_3, ... Pour que cette détermination soit possible, il faudra que les dénominateurs $1+t$, $(1+t)^2$, $(1+t)^3$ ... disparaissent dans le second membre de (80). Cela nous donne une infinité de conditions successives, alors que nous ne disposons que d'un nombre fini d'arbitraires. Il ne paraît pas vraisemblable, si P_2, P_3, ... R_1, R_2, R_3 ... sont pris au hasard, que ces conditions en nombre infini soient la conséquence d'un nombre fini d'entre elles. Il pourrait ne pas en être de même si les polynomes P_i et R_i n'étaient pas quelconques, en particulier si les coefficients de dx et de dy dans (78), au lieu d'être des développements illimités, se réduisent à des polynomes.

Dans cet ordre d'idées, donnons un exemple où l'existence de l'intégrale $L\overline{x, t}$ entraîne l'existence d'une intégrale $f\overline{x, y}$. Prenons l'équation

$$(81)\qquad [P_2(x, y)+P_{n+2}(x, y)]dy+[Q_2(x, y)+Q_{n+2}(x, y)]dx=0,$$

P_i et Q_i étant des polynomes homogènes de degré i. En posant $y=tx$ et supposant que l'on ait

$$(82)\qquad \begin{gathered} yP_{n+2}(x, y)+xQ_{n+2}(x, y)=0, \\ \frac{P_2(1, t)}{tP_2(1, t)+Q_2(1, t)}=\frac{-1}{2t}+\frac{\lambda}{t+1}+\frac{\mu}{t-1}, \end{gathered}$$

nous devrons avoir

$$\lambda+\mu=\frac{3}{2},$$

et l'équation (80) devient

$$x\left[t^2+\nu t+\frac{1}{2}+x^n \mathrm{R}_{n+1}\right]dt+t(t^2-1)dx=0, \tag{83}$$

en posant

$$\nu=\mu-\lambda, \qquad \mathrm{R}_{n+1}=\mathrm{P}_{n+2}(1,\, t),$$

R_{n+1} est un polynome en t, de degré au plus égal à $n+1$ d'après l'identité (82). En intégrant, nous avons

$$\frac{1}{x^n}=\frac{\mathrm{C}(t+1)^{n\lambda}(t-1)^{n\mu}}{t^{\frac{n}{2}}}+\frac{(t+1)^{n\lambda}(t-1)^{n\mu}}{t^{\frac{n}{2}}}\int\frac{n\mathrm{R}_{n+1}t^{\frac{n}{2}-1}\,dt}{(t+1)^{n\lambda+1}(t-1)^{n\mu+1}}, \tag{84}$$

C étant une constante arbitraire. Or, si l'équation (81) admet une intégrale $\mathrm{L}\overline{x,\,t}$, il est évident, en élevant à la puissance n, que cette intégrale peut se mettre sous la forme

$$\frac{x^n(t+1)^{n\lambda}(t-1)^{n\mu}t^{-\frac{n}{2}}}{1+l(x,\,t)}=\text{const.},$$

en posant

$$l(x|t)=xl_1+x^2 l_2+x^3 l_3+\ldots,$$

l_1, l_2, l_3 étant des fractions rationnelles en t. La fonction l vérifie l'équation

$$t(t^2-1)\frac{\partial l}{\partial t}-x\left[t^2+\nu t+\frac{1}{2}+x^n\mathrm{R}_{n+1}\right]\frac{\partial x}{\partial l}+nx^n\mathrm{R}_{n+1}(1+l)=0.$$

On vérifie sans peine que l'on a

$$l_1=0,\quad l_2=0,\quad l_3=0,\quad \ldots,\quad l_{n-1}=0,$$

$$l_n=\frac{(t+1)^{n\lambda}(t-1)^{n\mu}}{t^{\frac{n}{2}}}\int\frac{n\mathrm{R}_{n+1}t^{\frac{n}{2}-1}\,dt}{(t+1)^{n\lambda+1}(t-1)^{n\mu+1}} \tag{85}$$

et que l'on a ensuite

$$l_{n+1}=0,\quad l_{n+2}=0,\quad \ldots.$$

Puisque l_n est une fraction rationnelle, la comparaison des formules (84) et (85) nous montre que l'équation (83) admet une solution particulière donnée par $1+x^n l^n=0$. La fraction l_n est de la forme

$$l_n=\frac{\mathrm{P}}{t^r}\equiv\frac{a_s t^s+a_{s-1}t^{s-1}+\ldots+a_1 t+a_0}{t^r},$$

a_0, a_1, ... sont des constantes, s est un entier positif, r est un entier positif ou nul. S'il est positif, nous supposons que a_0 n'est pas nul. Nous allons déterminer les entiers inconnus r et s, ainsi que les coefficients du polynome P en exprimant que l'équation (83) admet la solution $x^n = -t^r : P$. Nous obtenons ainsi :

$$(86) \qquad (t^2 - 1)(rP - tP') + n\left(t^2 + \nu t + \frac{1}{2}\right)T = nt^r R_{n+1}.$$

Le terme de plus haut degré dans le premier membre de cette identité est $(r + n - s)a_s t^{s+2}$. Donc si l'on a $r + n - s \neq 0$, on devra avoir $s + 2 = n + 1 + r$, c'est-à-dire $s = n + r - 1$. Si l'on a $n + r - s = 0$, les termes de degré maximum dans les deux membres de (86) sont encore de même degré. Nous pouvons donc toujours supposer que l'on prend $s = n + r$, toutefois nous pouvons accepter pour a_s une valeur nulle. Si nous considérons maintenant les termes de degré minimum dans les deux membres de (86), nous voyons que si l'on a $r > 0$, on doit avoir $n = 2r$. Si n est pair ($n = 2m$), nous aurons $s = 3m$ et $r = m$. En identifiant les deux membres de (86), nous aurons $3m + 1$ équations pour déterminer les $3m + 1$ coefficients inconnus. La discussion de ces équations linéaires est intéressante; on vérifie sans trop de difficultés que ces équations sont compatibles et admettent un seul système de solutions, sauf pour des valeurs de ν, en nombre fini, pour lesquelles un des deux nombres $n\lambda$ ou $n\mu$ est un entier positif. On voit du reste que, dans ce cas, l'intégrale qui figure dans l'expression (85) de l_n présente un point critique logarithmique si R_{n+1} n'est pas choisi d'une façon particulière. Les coefficients de P étant ainsi déterminés, on voit qu'en remplaçant t par $y : x$ la formule (84) fournit l'intégrale générale de l'équation (83) sous la forme

$$(87) \qquad \frac{(y + x)^{2m\lambda}(y - x)^{2m\mu}}{y^m - a_{3m}y^{3m} - a_{3m-1}y^{3m-1}x - \ldots - a_1 yx^{3m-1} - a_0 x^{3m}} = C.$$

Si n est impair, on devra avoir, d'après les conditions trouvées, $r = 0$ et $s = n$. Nous aurons $n + 2$ équations linéaires pour déterminer les $n + 1$ coefficients de P. On vérifie facilement que ces équations sont en général incompatibles. Si une condition est vérifiée, ces équations sont compatibles et on obtient l'intégrale générale de (83) sous la forme

$$\frac{(y + x)^{n\lambda}(y - x)^{n\mu}}{y^{\frac{n}{2}}(1 - a_n y^n - a_{n-1}y^{n-1}x - \ldots - a_1 yx^{n-1} - a_0 x^n)} = C.$$

Nous voyons que, soit dans le cas de n pair, soit dans le cas de n impair, dès que l'équation (83) admet une intégrale $L\overline{x, t}$, elle admet une intégrale $f\overline{x, y}$. Le cas de n pair montre de plus que le nombre des facteurs $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$ que l'on fait figurer dans l'intégrale $f\overline{x, y}$ de l'équation (83) n'est pas toujours égal à 3, puisque dans (87) figurent $m + 2$ facteurs $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$.

L'équation que nous venons de citer appartient à une classe qui fournirait de nombreux exemples des diverses circonstances qui peuvent se présenter. Considérons une équation

$$(88)\qquad [Y_n(x, y) + Y_{n+1}(x, y) + \ldots]dy + [X_n(x, y) + X_{n+1}(x, y) + \ldots]dx = 0.$$

Supposons que cette équation admette pour courbes intégrales ([23]) les $n+1$ droites

$$y + a_1 x = 0, \quad y + a_2 x = 0, \quad \ldots, \quad y + a_n x = 0, \quad y + a_{n+1} x = 0.$$

Posons $y = tx$, nous avons

$$(89)\qquad x[Y_n(1, t) + xY_{n+1}(1, t) + \ldots]dt + \sum_{i=0}^{\infty}[tY_{n+i}(1, t) + X_{n+i}(1, t)]x^i dx = 0,$$

le coefficient de dx devra contenir en facteur $\prod_{i=1}^{n+1}(t + a_i)$, c'est-à-dire $tY_n(1, t) + X_n(1, t)$, on aura donc

$$\sum_{i=0}^{\infty} tY_{n+i}(1, t) + X_{n+i}(1, t) = [tY_n(1, t) + X_n(1, t)]\left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i \overline{P}_i\right],$$

$\overline{P}_i$ étant un polynome en t de degré i. On a

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^i P_i = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(x, y);$$

donc en divisant, comme on peut toujours le faire, les deux membres de l'équation (88) par $1 + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(x, y)$, l'équation (89) aura la forme

$$[xY_n(1, t) + x^2 Y_{n+1}(1, t) + \ldots]dt + \prod_{i=1}^{n+1}(t + a_i)dx = 0.$$

L'équation (88) sera par suite de la forme

$$[Y_n(x, y) + xA(x, y)]dy + [X_n(x, y) - yA(x, y)]dx = 0,$$

([23]) On peut toujours supposer qu'il en est ainsi, en faisant un changement de variable convenable, si en désignant par

$$y + \varphi_1 = 0, \quad y + \varphi_2 = 0, \quad \ldots\ldots, \quad y + \varphi_n = 0, \quad y + \varphi_{n+1} = 0,$$

$n+1$ solutions holomorphes et nulles pour $x = 0$, il existe entre trois quelconques de ces solutions une relation linéaire à coefficients constants, de telle façon que l'on ait, par exemple :

$$y + \varphi_i = a_i(y + \varphi_1) + b_i(y + \varphi_2).$$

les termes de degré minimum de $A(x, y)$ étant au moins de degré n. Comme exemple simple de ce genre, nous pouvons citer l'équation

$$(90) \quad x[\mu x + (\mu - 2)y + P_2(x, y)]dy + y[(3 - \mu)y + (1 - \mu)x - P_2(x, y)]dx = 0.$$

En posant $y = tx$ on obtient une équation dont l'intégrale générale peut s'écrire

$$\frac{xt^\mu}{(1+t)^2} = C\left[1 + \frac{(at^3 + bt^2 + ct + d)x}{(1+t)^2}\right],$$

en désignant par C une constante arbitraire, par a, b, c, d des constantes déterminées et en supposant que μ n'est égal à aucun des nombres 0, 1, 2, 3. En revenant à la variable y, on a l'intégrale

$$\frac{x^{3-\mu} y^\mu}{(y+x)^2 + ay^3 + by^2 x + cyx^2 + dx^3} = C.$$

Ce qui est une intégrale de la forme $f\overline{x, y}$ avec cinq facteurs nuls pour $x = 0$, $y = 0$ au lieu du nombre normal de trois.

Si μ a l'une des valeurs 0, 1, 2, 3, il n'y a en général ni intégrale $L\overline{x, t}$, ni intégrale $f\overline{x, y}$; mais, si une condition est vérifiée, on a une infinité de formes d'intégrales $L\overline{x, t}$ et de formes $f\overline{x, y}$. Par exemple, si μ est égal à 1, on a l'intégrale

$$[(y+x)^2 + ay^3 + by^2 x + cx^3 + Cx^2 y]x^{-2}y^{-1} = \text{const.}$$

où a, b, c sont des constantes déterminées et C une constante arbitraire. Si C est quelconque, on a une forme d'intégrale où figurent quatre facteurs nuls pour $x = 0$, $y = 0$ au lieu du nombre normal de trois. Si l'on donne à C la valeur particulière $C = b + c - a$, on reconnaît sans peine que la quantité entre parenthèse est divisible par $(y + x)^2$ et l'on a la forme simple d'intégrale

$$x^{-2}y^{-1}(y+x)^2(1 + ay + cx) = \text{const.}$$

[20] *Etude du cas signalé* § 18. — Nous allons exposer (en nous bornant toutefois à indiquer certains raisonnements) quelques considérations permettant d'éclaircir un peu les circonstances qui se présentent lorsque, une intégrale $L\overline{x, t}$ existant, on est dans l'un des cas où nous n'avons pu démontrer qu'il existe une intégrale $f\overline{x, y}$. Ces considérations nous permettront d'indiquer une méthode pour déterminer les facteurs $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$ qui figurent dans $f\overline{x, y}$, lorsque le nombre de ces facteurs est donné.

Si le polynome $yY_n(x, y) + xX_n(x, y)$ n'admet pas de facteur multiple et si dans l'identité

$$\frac{Y_n(x, y)}{yY_n(x, y) + xX_n(x, y)} = + \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{y + a_i x}$$

aucun des nombres $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_p$, ($\mu_0 = 1 - \mu_1 - \mu_2 - \ldots - \mu_p$) n'a aucune valeur rationnelle et négative, nous dirons que les *premiers coefficients* de l'équation ne sont pas des *coefficients exceptionnels*.

Conditions ordinaires d'existence de $L\overline{x, t}$. — Considérons une équation (1) dont les premiers coefficients ne sont pas *exceptionnels* et dont les autres coefficients sont des coefficients littéraux indéterminés pour le moment. Cherchons les conditions pour qu'il existe une intégrale $L\overline{x, t}$, c'est-à-dire de la forme

$$x(1 + xL_1 + x^2 L_2 + x^3 L_3 + \ldots) \prod_{i=1}^{q} (t + a_i)^{\mu_i} = \text{const.},$$

les L_i étant des fractions rationnelles en t qui sont fournies par des équations différentielles linéaires [voir équation (101)]. Nous aurons à exprimer d'abord que l'équation qui donne L_1 admet pour solution une fraction rationnelle. On connaîtra facilement, d'après la forme de l'équation, quel est l'ordre de chacun des pôles $t = -a_i$ qui sont les seuls que puisse admettre cette fraction. On sait également (§ 18) que, les premiers coefficients de l'équation (1) n'étant pas exceptionnels (μ_0 pas rationnel), le point $t = \infty$ sera un pôle d'ordre 1 de L_1. Connaissant le dénominateur de L_1, ainsi que le degré du numérateur, on déterminera ce dernier par la méthode des coefficients indéterminés. Ces coefficients seront obtenus par des équations linéaires où les coefficients des inconnues seront les coefficients de $X_n(x, y)$ et $Y_n(x, y)$, tandis que les termes connus seront linéaires par rapport aux coefficients de X_{n+1} et Y_{n+1}.

Le nombre des inconnues sera, si l'on a $n = 1 + n'$, inférieur de n' au nombre des équations. Il y aura par suite n' relations de condition pour que L_1 existe. On procédera de la même façon pour exprimer que $L_2, L_3, \ldots$ sont des fractions rationnelles. On aura ainsi une série de conditions nécessaires et suffisantes pour que $L\overline{x, t}$ existe. Les conditions que nous formons ainsi sont ce que nous appellerons les *conditions ordinaires* d'existence de $L\overline{x, t}$.

Si les *premiers coefficients* de l'équation (1) sont *exceptionnels*, on pourra avoir des conditions toutes différentes pour l'existence de $L\overline{x, t}$, ce seraient les *conditions exceptionnelles*. En effet, lorsque μ_1 par exemple est un nombre rationnel négatif, l'ordre du pôle $t = -a_1$ [voir § 19, équation (78)] peut être différent de l'ordre que possède ce pôle lorsque μ_1 n'est pas rationnel. De même, si μ_0 est rationnel et négatif, $t = \infty$ peut être un pôle d'ordre supérieur à i de L_i. De plus, si, dans les équations qui fournissent les coefficients des termes du numérateur de L_i, les coefficients des inconnues ont des valeurs exceptionnelles, les conditions pour que ces équations soient compatibles peuvent changer de forme.

Nous voyons que, dans l'exemple cité [équation (78)], les coefficients des polynomes P_i et R_i n'ont besoin de vérifier aucune condition pour que $L\overline{x, t}$ existe, tandis que si les premiers coefficients de (78) n'avaient pas des valeurs particulières, il faudrait qu'une infinité de conditions soient vérifiées : *nous avons un développement* $L\overline{x, t}$ *qui existe dans des conditions exceptionnelles.*

Si les premiers coefficients de l'équation (1) *ne sont pas exceptionnels et si les conditions ordinaires d'existence de* $L\overline{x, t}$ *sont vérifiées, l'équation* (1) *admet une intégrale* $f\overline{x, y}$.

Pour chercher dans quels cas une équation (1), dont les *premiers coefficients* sont *exceptionnels,* possède une intégrale $f\overline{x, y}$, lorsqu'il existe une intégrale $L\overline{x, t}$, nous allons considérer différents cas suivant le nombre de facteurs $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$ qui figurent dans $f\overline{x, y}$. Nous supposerons qu'on ait fait en sorte (§ 3) que $x = 0$ ne soit pas une courbe intégrale de (1) et que par conséquent on ait $\mu_0 = 0$.

Si une équation (1) possède une intégrale $f\overline{x, y}$ où figurent $n + 1$ facteurs $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$, il existe une équation (voir § 3, 1°)

$$(91) \qquad [A_n(x, y) + A_{n+1}(x, y) + \ldots] dy + [B_n(x, y) + B_{n+1}(x, y) + \ldots] dx = 0$$

jouissant des propriétés suivantes : 1° Les coefficients des divers termes de A_i et B_i sont des polynomes dépendant d'un paramètre α et se réduisent aux coefficients correspondants de l'équation (1) lorsqu'on fait $\alpha = 0$. 2° Les *premiers coefficients* de l'équation (90) ne sont pas exceptionnels pour toutes les valeurs de α voisines de 0. 3° Cette équation (91) admet une intégrale $f\overline{x, y}$.

En effet, si l'équation (1) admet une intégrale

$$e^{H(x,y)} \prod_{i=1}^{n+1} (y + \varphi_i)^{\lambda_i} = \text{const.},$$

nous aurons

$$Y(x, y) dy + X(x, y) dx = [1 + M(x, y)] \left[H'_x dx + H'_y dy + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\lambda_i (dy + \varphi_i dx)}{y + \varphi_i} \right] \prod_{i=1}^{n+1} (y + \varphi_i).$$

Remplaçons dans le second membre de cette relation λ_i par $\lambda_i + m_i \alpha$, la somme $m_1 + m_2 + \ldots + m_n + m_{n+1}$ étant nulle, soit $A(x, y) dy + B(x, y) dx$, ce que devient le premier membre de cette relation. En égalant cette expression à zéro, on obtient l'équation (91) qui jouit bien des trois propriétés énoncées plus haut. En particulier, son intégrale générale est

$$e^{H(x,y)} \prod_{i=1}^{n+1} (y + \varphi_i)^{\lambda_i + m_i \alpha} = \text{const.}$$

Nous pouvons énoncer ce résultat en disant que *si l'équation* (1) *admet une intégrale* $f\overline{x, y}$ *avec* $n + 1$ *facteurs* $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$, *elle est la limite d'une équation* (91) *qui admet une intégrale de même forme, mais dont les premiers coefficients ne sont pas des coefficients exceptionnels.*

Les coefficients de l'équation (91) vérifient *les conditions ordinaires d'existence* de $L\overline{x, t}$, puisque les *premiers coefficients* ne sont pas exceptionnels et puisqu'il existe une intégrale $f\overline{x, y}$ (*R. C. M. P.*, p. 348). Les valeurs limites de ces coefficients, pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire les coefficients de l'équation (1), vérifient donc les *conditions ordinaires d'existence* de $L\overline{x, t}$. Les *coefficients de toute équation* (1), *qui admet une intégrale* $f\overline{x, y}$ *avec* $n + 1$ *facteurs* $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$, *vérifient les conditions ordinaires d'existence de* $L\overline{x, t}$.

Réciproquement, *s'il en est ainsi, l'équation* (1), *bien que ses premiers coefficients soient exceptionnels, admet une intégrale* $f\overline{x, y}$. Modifions, en effet, un ou plusieurs des premiers coefficients de l'équation (1) en leur ajoutant par exemple un polynome en α, de telle façon que ces coefficients n'aient plus des valeurs exceptionnelles pour toutes les valeurs de α. Modifions ensuite les coefficients de X_{n+1} et de Y_{n+1} en leur ajoutant des fonctions de α convenables, de telle manière que les nouveaux coefficients, comme les anciens, vérifient les conditions ordinaires d'existence de $L\overline{x, t}$. Nous pouvons faire en sorte que pour $\alpha = 0$ les nouveaux coefficients se réduisent aux anciens. Il est à peu près évident que la modification que nous indiquons peut se faire d'une infinité de manières, car, quels que soient les coefficients de X_n et Y_n, il existe une infinité d'équations (1) ayant une intégrale $f\overline{x, y}$; il y a par conséquent une infinité de façons de choisir les coefficients de X_{n+i} et Y_{n+i} (quel que soit i), de manière à vérifier les conditions ordinaires d'existence de $L\overline{x, t}$. Nous modifierons successivement pour les diverses valeurs de i les coefficients de X_{n+i} et Y_{n+i}, de telle manière que, pour $\alpha = 0$, ils se réduisent aux anciens coefficients et que pour α quelconque ils vérifient les conditions ordinaires d'existence de $L\overline{x, t}$. Nous désignerons par

$$A(x, y)dy + B(x, y)dx = 0 \tag{91'}$$

l'équation que nous obtenons en remplaçant les coefficients de $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ par les coefficients modifiés. Cette équation (91') admet une intégrale $L\overline{x, t}$ et, par suite, une intégrale $f\overline{x, y}$, puisque ses premiers coefficients ne sont pas exceptionnels. Pour $\alpha = 0$, cette intégrale se réduira à une intégrale $f\overline{x, y}$ relative à (1). Les divers facteurs $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$ de l'intégrale relative à (91') se réduiront pour $\alpha = 0$ à des facteurs $(x + \varphi_i)^{\lambda_i}$ de l'intégrale relative à (1). Nous avons ainsi un moyen de déterminer, même dans le cas où il y a une infinité de solutions holomorphes, celles de ces solutions qu'il faut faire figurer dans l'intégrale $f\overline{x, y}$ de (1). Insistons un peu sur l'application de la méthode qui résulte de ce qui précède.

Moyen de reconnaître si l'équation (1) *vérifie les conditions ordinaires d'existence de* $L\overline{x, t}$. — Prenons deux polynomes homogènes de degré n, $A_n(x, y)$ et $B_n(x, y)$, de telle façon que l'équation

$$A_n(x, y)dy + B_n(x, y)dx = 0$$

admette pour intégrale générale

$$\prod_{i=1}^{n+1}(y+c_i x)^{\nu_i}=\text{const.},$$

les c_i et les ν_i restant indéterminés pour le moment. Nous supposerons que les ν_i ne sont pas rationnels et négatifs. Considérons l'équation

$$[A_n(x,y)+A_{n+1}(x,y)+\ldots]\,dy+[B_n(x,y)+B_{n+1}(x,y)+\ldots]\,dx=0,$$

où nous laissons indéterminés pour le moment les coefficients de A_i et B_i pour $i>n+1$. Formons les conditions ordinaires d'existence de $L\overline{x,t}$. Nous cherchons ensuite si l'on peut déterminer les nombres c_i et ν_i de telle façon que les conditions suivantes soient vérifiées : 1° on a $A_n(x,y)=Y_n(x,y)$ et $B_n(x,y)=X_n(x,y)$; 2° si on remplace les coefficients de A_i et B_i pour $i>n+1$ par les coefficients correspondants de X_i et Y_i, les conditions ordinaires d'existence de $L\overline{x,t}$ sont vérifiées. S'il en est ainsi, l'équation (1) admet une intégrale $f\overline{x,y}$ avec $n+1$ facteurs $(y+\varphi)^{\lambda_i}$ et nous avons indiqué plus haut une méthode, pénible sans doute, mais applicable pour trouver cette intégrale.

Il n'est pas douteux que toutes les équations (1) qui admettent une intégrale $L\overline{x,t}$ ne rentrent pas dans le cas que nous venons de considérer : certaines n'admettent pas d'intégrales $f\overline{x,y}$ avec $n+1$ facteurs $(y+\varphi_i)^{\lambda_i}$. Les considérations que nous venons de développer le démontrent et ces raisonnements sont confirmés par l'exemple des équations (78), (81) et (90). Nous avons, en particulier, à considérer le cas où l'équation (1) admet une intégrale $f\overline{x,y}$ avec plus de $n+1$ facteurs $(y+\varphi_i)^{\lambda_i}$.

Considérons une équation (1) admettant une intégrale $f\overline{x,y}$ avec $n+1+s$ facteurs $(y+\varphi_i)^{\lambda_i}$; c'est-à-dire de la forme

$$e^{H(x,y)}\prod_{i=1}^{n+1+s}(y+\varphi_i)^{\lambda_i}=\text{const.}$$

On a

$$(92)\quad \left[dH(x,y)+\sum_{i=1}^{n+1+s}\frac{\lambda_i(dy+\varphi_i'\,dx)}{y+\varphi_i}\right]\prod_{i=1}^{n+1+s}(y+\varphi_i)=[Y(x,y)dy+X(x,y)dx]\,M(x,y),$$

$$M(x,y)=\sum_{i=s}^{\infty}M_i(x,y).$$

Si dans le premier membre de la relation (92) nous remplaçons λ_i par $\lambda_i+m_i\alpha$, ce premier membre égalé à o fournit une équation de la forme

$$(93)\quad [A_{n+s}(x,y)+A_{n+s+1}(x,y)+\ldots]dy+[B_{n+s}(x,y)+B_{n+s+1}(x,y)+\ldots]\,dx=0$$

qui pour $\alpha=0$ se réduit à

$$[Y(x,y)+X(x,y)dx]\,M(x,y).$$

Cette équation (93) jouit des propriétés suivantes : 1° Les coefficients des différents termes en x et y sont des polynomes en α et, pour $\alpha = 0$, le premier membre de cette équation se réduit au produit du premier membre de l'équation (1) par un facteur $M(x, y)$ holomorphe et nul pour $x = 0$, $y = 0$. 2° Les *premiers coefficients* de cette équation (93) ne sont pas des *coefficients exceptionnels*. 3° Cette équation admet une intégrale $f\overline{x.\, y}$. Plus brièvement, nous pouvons énoncer ceci en disant : *si une équation* (1) *admet une intégrale* $f\overline{x, y}$ *avec* $n + 1 + s$ *facteurs* $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$ *le produit du premier membre de cette équation par un certain facteur* $M(x, y)$ *dont les termes de degré minimum sont de degré* s, *est la limite d'une équation* (93) *qui admet une intégrale* $f\overline{x, y}$ *et dont les premiers coefficients ne sont pas des coefficients exceptionnels.*

Il en résulte que les coefficients de l'équation obtenue en multipliant par $M(x, y)$ les deux membres de (1) vérifient les *conditions ordinaires* d'existence d'une intégrale $L\overline{x, t}$, pour une équation (93) où les termes de degré minimum sont de degré $n + s$. Réciproquement, *s'il en est ainsi, l'équation* (1) *admet une intégrale* $f\overline{x, y}$ *avec* $n + s$ *facteurs* $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$. Pour le démontrer, nous raisonnerons comme dans le cas où l'équation (1) vérifiait les conditions ordinaires d'existence de $L\overline{x, t}$ pour une équation (93), de manière à obtenir une équation de la forme (93) dont les coefficients dépendent d'un paramètre α et dont les premiers coefficients ne sont pas *exceptionnels*. Pour $\alpha = 0$, l'intégrale $f\overline{x, y}$ que possède cette équation (93) se réduit à une intégrale $f\overline{x, y}$ de l'équation (1) avec $n + s + 1$ facteurs $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$. Nous avons, comme dans le premier cas traité, le moyen de déterminer, par le passage à la limite obtenue pour $\alpha = 0$, les facteurs $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$.

Pour reconnaître si nous sommes dans le cas indiqué, où l'on a une intégrale $f\overline{x, y}$ avec $n + s + 1$ facteurs $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$, nous procéderons aussi comme dans le cas particulier déjà traité où l'on a $s = 0$. Nous prenons deux polynomes homogènes de degré $n + s$, $A_{n+s}(x, y)$ et $B_{n+s}(x, y)$, de telle façon que l'intégrale générale de

$$A_{n+s+1}(x, y)\,dy + B_{n+s+1}(x, y)\,dx = 0,$$

soit

$$\prod_{i=1}^{n+s+1} (y + c_i x)^{\nu_i} = \text{const.},$$

les c_i et les ν_i étant indéterminés, les c_i n'étant pas égaux entre eux, les ν_i n'étant pas rationnels et négatifs. Nous considérons l'équation

$$\sum_{i=n+s}^{\infty} A_i(x, y)\,dy + \sum_{i=n+1}^{\infty} B_i(x, y)\,dx = 0, \tag{94}$$

et nous formons les conditions ordinaires d'existence de $L\overline{x, t}$.

Nous cherchons ensuite si l'on peut déterminer les nombres c_i et ν_i et les coefficients de

$$M(x, y) = M_s(x, y) + M_{s+1}(x, y) + \ldots,$$

de telle façon que les conditions suivantes soient vérifiées ([24]).

1° On a

$$A_{n+s}(x, y) = M_s(x, y) Y_n(x, y), \qquad B_{n+s}(x, y) = M_s(x, y) X_n(x, y).$$

2° Si on remplace dans les conditions ordinaires d'existence de $L\overline{x, t}$, pour une équation (94), les coefficients de cette équation (94) par les coefficients correspondants de

$$M(x, y) Y(x, y) dy + M(x, y) X(x, y) dx = 0,$$

ces conditions ordinaires d'existence sont vérifiées.

S'il en est ainsi, l'équation (1) *admet une intégrale* $f\overline{x, y}$ *avec* $n + s + 1$ *facteurs* $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$, *facteurs que nous saurons déterminer.*

Nous pouvons considérer d'une façon analogue le cas où l'équation (1) admet une intégrale $f\overline{x, y}$ avec $n + 1 - s$ facteurs $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$. L'équation (1) est alors la limite pour $\alpha = 0$ d'une équation

$$\sum_{i=n-s}^{\infty} A_i(x, y) dy + \sum_{i=n-s}^{\infty} B_i(x, y) dx = 0 \tag{94'}$$

qui jouit des propriétés mentionnées pour l'équation (91).

Les polynomes $A_i(x, y)$ et $B_i(x, y)$ s'annulent donc, pour $\alpha = 0$, si l'on a $i < n$, et les coefficients de l'équation (1) vérifient les conditions ordinaires d'existence de $L\overline{x, t}$ pour une équation (94'). Nous pourrons par suite reconnaître si l'équation (1) admet une intégrale $f\overline{x, y}$ avec $n + 1 - s$ facteurs, et dans l'affirmative déterminer ces facteurs.

Nous voyons que les diverses équations (1) pour lesquelles il existe une intégrale $L\overline{x, t}$ se classent en diverses catégories, suivant le nombre $n + s + 1$ des facteurs $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$ qui figurent dans l'intégrale $f\overline{x, y}$. A chacune de ces catégories correspond un système de conditions permettant de reconnaître si une équation (1) appartient à cette catégorie. Il peut enfin y avoir des équations (1) admettant une intégrale $L\overline{x, t}$ et n'appartenant à aucune de ces catégories. Ces équations (1) n'admettent pas d'intégrale $f\overline{x, y}$, quel que soit le nombre des facteurs $(y + \varphi_i)^{\lambda_i}$ que l'on y fait figurer.

([24]) Puisque nous pouvons évidemment, sans rien changer aux résultats, multiplier $M(x, y)$ par un facteur $D(x, y)$ holomorphe pour $x = y = 0$, mais tel que $D(0, 0)$ ne soit pas nul, nous pouvons supposer que $M(x, y)$ se réduit au produit de s facteurs $y + \Psi_i$, c'est-à-dire est de la forme

$$M(x, y) = y^s F_0(x) + y^{s-1} x F_1(x) + \ldots.. y x^{s-1} F_{s-1}(x) + x^s F_s(x),$$

$F_i(x)$ étant holomorphe et différent de 0, en général, pour $x = 0$.

Nous devons remarquer que si l'équation (1) est quelconque, il faudrait un nombre infini d'opérations pour savoir si cette équation (1) admet une intégrale $f\overline{x,y}$ avec un nombre donné de facteurs. Il faut *a fortiori* un nombre infini d'opérations pour reconnaître si l'équation (1) admet une intégrale $f\overline{x,y}$. Ce n'est que dans des cas où l'équation (1) a une forme simple, par exemple si $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ sont des polynomes, qu'on pourrait reconnaître, à l'aide d'un nombre fini d'opérations, si l'équation (1) admet des intégrales de la forme indiquée (cf. *B. D.*, p. 231).

Rien dans ce qui précède ne nous permet de déterminer le nombre des facteurs $(y+\varphi_i)^{\lambda_i}$ qui doivent figurer dans $f\overline{x,y}$. Nous retrouvons la conclusion du paragraphe 13.

[**21**] *Nouvelle forme de l'intégrale* (4). — Supposons que l'équation (1) admette une intégrale $f\overline{x,y}$ où la somme $\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_q$ des exposants ne soit pas nulle et puisse par suite être supposée égale à 1. Si nous posons $y=tx$, chacun des facteurs $(y+\varphi_i)^{\lambda_i}$ qui figurent dans cette intégrale prend la forme $x^{\lambda_i}(t+b_i+\psi_i)^{\lambda_i}$. L'expression ψ_i est une fonction de x holomorphe et nulle pour $x=0$. L'ensemble des nombres b_i est identique à l'ensemble des nombres a_i sans que l'on ait nécessairement $a_i=b_i$. Si nous posons

$$Q(x|t)=xA_1(1,t)+x^2A_2(1,t)+\ldots,$$

l'intégrale $f\overline{x,y}$ [équation (3)] peut s'écrire

$$x[1+Q(x|t)]\prod_{i=1}^{q}(t+b_i+\psi_i)^{\lambda_i}=\text{const.}\tag{95}$$

Cette intégrale (95) est, ainsi que nous avons convenu de l'appeler, une intégrale $R\overline{x,t}$ régulière pour toutes les valeurs de t. Réciproquement, une intégrale de cette forme (95) se met immédiatement sous la forme d'une intégrale $f\overline{x,y}$. Nous savons donc qu'il existe une intégrale $R\overline{x,t}$ régulière pour toutes les valeurs de t, dans tous les cas où nous avons pu démontrer que l'existence de $L\overline{x,t}$ entraîne l'existence de $f\overline{x,y}$. Comme il y a de nombreux cas où nous n'avons pu démontrer qu'il en est ainsi, nous allons établir une forme d'intégrale intermédiaire entre $L\overline{x,t}$ et l'intégrale (95). C'est une forme d'intégrale dont nous aurons par la suite à faire usage dans certaines démonstrations.

Si nous supposons qu'il existe une intégrale $L\overline{x,t}$

$$x(1+xL_1+x^2L_2+\ldots)\prod_{i=1}^{q}(t+a_i)^{\mu_i}=\text{const.}\tag{96}$$

nous avons (§ 18) :

$$(97)\qquad \begin{cases} t\mathrm{Y}_n(1, t) + \mathrm{X}_n(1, t) = \prod_{i=1}^{p} (t + a_i)^{r_i}, \\ \dfrac{\mathrm{Y}_n(1, t)}{t\mathrm{Y}_n(1, t) + \mathrm{X}_n(1, t)} = \sum_{i=1}^{p} \dfrac{\mu_i}{t + a_i}. \end{cases}$$

Les entiers r_i désignent les ordres de multiplicité des divers facteurs $t + a_i$.

Supposons maintenant qu'il existe une intégrale $\mathrm{R}\overline{x, t}$ régulière pour $t = -a_1$, $t = -a_2$, ..., $t = -a_{p'}$, c'est-à-dire de la forme

$$(98)\qquad x(1 + x\mathrm{R}_1 + x^2\mathrm{R}_2 + \ldots) \prod_{j=1}^{q} (t + b_j + \chi_j)^{\lambda_j}$$

où R_1, R_2, R_3, ... sont des fractions rationnelles en t qui ne peuvent admettre comme pôles que les points $t = -a_{p'+1}$, $t = -a_{p'+2}$, ..., $t = -a_p$. Les nombres b_1, b_2, ..., $b_{r_1'}$ sont supposés égaux à a_1. De même, les autres nombres b_j se divisent en groupes tels que tous les nombres d'un même groupe soient égaux à l'un des nombres a_i. Les facteurs $(t + b_j + \chi_j)^{\lambda_j}$, pour lesquels les nombres b_j sont égaux à a_i seront dits appartenir au même groupe. La somme des exposants λ_j des facteurs d'un même groupe sera égale au nombre μ_i correspondant; en effet, la relation (98) peut s'écrire

$$x[1 + x\overline{\mathrm{L}}_1 + x^2\overline{\mathrm{L}}_2 + \ldots] \prod_{j=1}^{q} (t + b_j)^{\lambda_j} = \text{const.},$$

en posant

$$1 + x\overline{\mathrm{L}}_1 + x^2\overline{\mathrm{L}}_2 + \ldots = [1 + x\mathrm{R}_1 + x^2\mathrm{R}_2 + \ldots] \prod_{j=1}^{q} \left(1 + \frac{\chi_j}{t + b_j}\right)^{\lambda_j}$$

où $\overline{\mathrm{L}}_1$, $\overline{\mathrm{L}}_2$, L_3, ... sont des fractions rationnelles en t. Nous retrouvons donc la forme d'intégrale $\mathrm{L}\overline{x, t}$, ce qui démontre que la somme des exposants λ_j pour lesquels on a $b_j = a_i$ est égale à μ_i.

Posons maintenant $t + a_1 = y_1$, l'intégrale (98) s'écrira :

$$(99)\qquad x[1 + \mathrm{H}(x, y_1)] \prod_{j=1}^{r_1'} (y_1 + \chi_j)^{\lambda_j} = \text{const.}$$

L'équation différentielle en x et y_1 déduite de (1) admettra donc une intégrale de la forme $f\overline{x, y_1}$. *Pour qu'il existe une intégrale* $\mathrm{R}\overline{x, t}$ *régulière pour* $t = -a_i$, *il est donc nécessaire que l'équation obtenue en posant* $y_i = t + a_i$ *admette une intégrale de la forme* $f\overline{x, y_i}$. S'il en est ainsi, nous dirons que la condition (f) est vérifiée pour le facteur $t+a_i$. Pour qu'il existe une intégrale $R\overline{x, t}$ régulière pour $t=-a_1$, $t=-a_2$, ..., $t=-a_{p'}$, il faut que la condition (f) soit vérifiée pour les divers facteurs $t+a_1$, $t+a_2$, $t+a_3$, ..., $t+a_{p'}$. Nous remarquerons que si un facteur $t+a_i$, par exemple $t+a_1$, est un facteur simple $(r_i=1)$ de $tY_n(1, t+X_n(1, t)$, et si μ_i n'est pas nul et n'est pas l'inverse d'un entier négatif, la condition (f) sera vérifiée d'elle-même pour le facteur $t+a_i$. On sait, en effet, que dans ce cas l'équation en x et y_j admet une intégrale de la forme (99) avec $r_i'=1$ et $\lambda_j=\mu_1$.

Si le nombre μ_i relatif à un facteur simple $t+a_i$ est nul ou négatif et rationnel, si le nombre μ_i relatif à un facteur multiple $(r_i>1)$ est nul ou rationnel (positif ou négatif), nous dirons que ce nombre μ_i a une *valeur exceptionnelle*.

Nous venons de trouver des conditions nécessaires pour l'existence d'une intégrale $R\overline{x, t}$ régulière pour $t=-a_1$, $t=-a_2$, ..., $t=-a_{p'}$, ces conditions sont les suivantes :

1° Il existe une intégrale $L\overline{x, t}$.

2° Les conditions (f) sont vérifiées pour les facteurs $t+a_1$, $t+a_2$, ..., $t+a_{p'}$.

Ces conditions ne nous suffiront pas pour démontrer l'existence de l'intégrale $R\overline{x, t}$ en question ; nous devons, pour les besoins de la démonstration, ajouter une troisième condition qui n'est nullement nécessaire et que nous énoncerons en disant : aucun des nombres μ_1, μ_2, ..., $\mu_{p'}$ n'a une *valeur exceptionnelle.* Pour établir la démonstration que nous avons en vue, il nous sera nécessaire de former l'équation que vérifie la fonction

$$R=1+xR_1+x^2R_2+\ldots.$$

Si on pose, pour abréger,

$$V=tY_n(1, t)+X_n(1, t)$$

et si l'on écrit l'équation (75) sous la forme

$$x[Y_n(1, t)+x\overline{Y}]dt+[V+x\overline{V}]dx=0, \tag{100}$$

la fonction R des deux variables x et t vérifie l'équation

$$\begin{aligned}[V+x\overline{V}]R'_t-[Y_n(1, t)+x\overline{Y}]xR'_x \\ =R\left[Y_n(1, t)+x\overline{Y}+\sum_{j=1}^{q}\frac{\lambda_j(x\gamma'_jY_n+x^2\gamma'_j\overline{Y}-V-x\overline{V})}{t+b_j+\gamma_j}\right].\end{aligned} \tag{101}$$

Si $t=-b_j-\gamma_j$ est une solution de l'équation (100), le numérateur du coefficient de λ_j dans le second membre de (101) sera divisible par $t+b_j+X_j$. Si pour certaines valeurs de j il n'en est pas ainsi, nous remarquerons que V est divisible par $t+b_j$, puisque les nombres b_j sont égaux aux nombres a_i. En divisant alors le numérateur et le dénominateur du coefficient de λ_j par $t+b_j$ et développant ensuite ce coefficient de λ_j suivant les puissances croissantes de x, nous voyons que le second membre de (101) pourra s'écrire d'après (97)

$$\mathrm{R}[x\mathrm{C}_1 + x^2\mathrm{C}^2 + x^3\mathrm{C}_3 + \ldots],$$

les expressions C_1, C_2, C_3, ... désignant des fractions rationnelles en t qui n'admettent pour pôles que les valeurs $t = -b_j$, telles que $t = -b_j + \mathrm{X}_j$, ne soit pas une solution de l'équation (100).

Il est facile de voir comment doivent être choisis les facteurs $(t+b_j+\mathrm{X}_j)^{\lambda_i}$ pour lesquels l'on a $b_j = a_1$. Nous supposons que μ_1 n'a pas une valeur exceptionnelle et nous supposons que la condition (f) est vérifiée pour le facteur $t+a_1$, c'est-à-dire que l'équation obtenue en posant $t+a_1 = y_1$ admet une intégrale de la forme

$$(102) \qquad x[1+\mathrm{K}(x, y_1)] \prod_{i=1}^{r'} (y_1 + \psi_i)^{\lambda_i'} = \text{const.}$$

En comparant avec l'intégrale (99) que l'on déduit de l'intégrale $\mathrm{R}\overline{x, t}$, on voit que ces deux formes d'intégrales doivent être identiques parce que μ_1 n'est pas rationnel. Nous n'avons pour nous en rendre compte qu'à appliquer à l'équation en x et y_1 le raisonnement que nous avons fait pour l'équation en x et y afin de démontrer que, si tous les nombres μ_i ne sont pas rationnels, il est impossible qu'il y ait deux intégrales distinctes $f\overline{x, y}$. On devra prendre : $r_1' = r'$, $\chi_j = \psi_j$ et $\lambda_j = \lambda_j'$ pour les valeurs 1, 2, ... r' de l'indice j. Il n'y a donc aucune difficulté pour choisir les facteurs $(t+b_j+\chi_j)^{\lambda j}$ pour lesquels les nombres b_j sont égaux à un certain nombre a_i, si la condition (f) est vérifiée pour $t+a_i$ et si μ_i n'a pas une valeur exceptionnelle. Les fractions C_1, C_2, C_3, ... n'admettront pas comme pôles les valeurs $t = -a_i$ correspondantes. Nous choisirons arbitrairement les facteurs $(t+b_j+\chi_j)^{\lambda j}$ pour lesquels les nombres b_j seront égaux à un nombre a_i, si la condition (f) n'est pas vérifiée pour $t+a_i$ où si μ_i a une valeur exceptionnelle. Seule la somme des exposants λ_j des facteurs faisant partie du même groupe devra être égale au nombre μ_i correspondant. Le choix le plus simple que nous puissions faire, si la condition (f) n'est pas vérifiée pour $t+a_i$ où si μ_i a une valeur exceptionnelle, sera de prendre un seul facteur pour lequel b_j soit égal à a_i, ce facteur sera donc $(t+a_i)^{\mu_i}$. Les fractions C_1, C_2, C_3, ... admettront en général les valeurs correspondantes $t = -a_i$ pour pôles. D'après nos hypothèses, les valeurs de i pour lesquelles nous serons dans le cas que nous venons d'indiquer sont les valeurs $i = p'+1$, $p'+2$, ... p.

Montrons, qu'en nous plaçant dans les conditions indiquées et en choisissant les facteurs $(t+a_j+\chi_j)^{\lambda j}$ comme nous l'avons fait, il existe une intégrale $\mathrm{R}\overline{x, t}$ [voir équation (98)] où R_1, R_2, R_3, ... sont des fractions dont les seuls pôles possibles sont $t = -a_{p'+1}$, $t = -a_{p'+2}$, ..., $t = -a_p$.

L'intégrale $L\overline{x, t}$ [voir équation (96)] dont nous supposons l'existence peut s'écrire

$$x[1 + B(x|t)] \prod_{j=1}^{q} (t + b_j + \gamma_j)^{\lambda_j} = \text{const.}, \tag{103}$$

en posant

$$1 + B(x|t) = (1 + xL_1 + x^2 L_2 + \ldots) \prod_{j=1}^{q} \left(1 + \frac{\gamma_j}{t + b_j}\right)^{-\lambda_j}.$$

Si on développe $B(x|t)$ suivant les puissances de x, on a

$$B(x|t) = xB_1 + x^2 B_2 + x^3 B_3 + \ldots,$$

B_i étant une fraction rationnelle en t, dont les seuls pôles possibles sont les valeurs $t = -a_i (i = 1, 2, \ldots p)$. Nous allons démontrer que $t = -a_1$ n'est pas un pôle de ces fractions. La même démonstration s'appliquera pour $t = -a_2$, $t = -a_3$, $\ldots t = -a_{p'}$.

L'intégrale (102) dont nous supposons l'existence peut s'écrire

$$x[1 + A(x|t)] \prod_{j=1}^{q} (t + b_j + \gamma_j)^{\lambda_j} = \text{const.} \tag{104}$$

On a

$$A(x, t) = A_0 + xA_1 + x^2 A_2 + \ldots,$$

A_0, A_1, A_2, ... sont des fonctions de t holomorphes pour $t = -a_1$.

Les fonctions $1 + A(x|t)$ et $1 + B(x|t)$ vérifient l'équation aux dérivées partielles (101) où la fonction inconnue est R, il en résulte immédiatement que l'on a $A_0' = 0$ d'où $A_0 = k$, k étant une constante. Nous pouvons diviser les deux membres de (104) par $1 + k$ et, par suite, nous avons le droit de supposer que l'on a $A_0 = 0$. Nous avons en posant

$$V_i = tY_{n+i}(1, t) + X_{n+i},$$

$$\begin{aligned}
&[V + xV_1 + x^2 V_2 + \ldots][xB_1' + x^2 B_2' + x^3 B_3' + \ldots] \\
&\quad - [Y_n(1, t) + Y_{n+1}(1, t) + \ldots][xB_1 + x^2 B_2 + x^3 B_3 + \ldots] \\
&\quad = [xC_1 + x^2 C_2 + x^3 C_3 + \ldots][1 + xB_1 + x^2 B_2 + x^3 B_3 + \ldots].
\end{aligned}$$

Si nous donnons à s successivement les valeurs 1, 2, 3, ..., on voit que B_s vérifie l'équation

$$VB_s' - sY_n(1, t) B_s = D_s, \tag{105}$$

D_s étant une fraction rationnelle en t qui n'admet pas $t = -a_1$ pour pôle, si l'on suppose démontré que B_1, B_2, ..., B_{s-1} sont des fractions rationnelles holomorphes pour $t = -a_1$.

Faisons d'abord $s=1$ dans l'équation (105), nous obtenons

$$VB'_1 - Y_n(1, t)B_1 = C_1, \tag{106}$$

V contient en facteur $(t+a_1)^{r_1}$ et $Y_n(1, t)$ contient en facteur $(t+a_1)^{r_1-1}$ [voir § 18, condition (2)]. Cette équation (106), où C_1 est holomorphe pour $t=-a_1$, est également vérifiée par la fonction A_1 qui est holomorphe pour $t=-a$. En substituant à B_1 dans (106) le développement de A_1 suivant les puissances de $t+a_1$, on voit que C_1 est divisible par $(t+a_1)^{r_1-1}$. En supprimant ce facteur dans les deux membres de (106) et en divisant également par les divers facteurs $(t+a_i)^{r_i-1}$ qui sont communs à V et à $Y_n(1, t)$, on obtient l'équation

$$PB'_1 - QB_1 = \Delta_1 \tag{107}$$

où Δ_1 est une fraction rationnelle en t, holomorphe pour $t=-a_1$ et où l'on a :

$$P = \prod_{i=1}^{p}(t+a_i), \qquad \frac{Q}{P} = \sum_{i=1}^{p}\frac{\mu_i}{t+a_i}.$$

Si μ_1 n'est pas un entier négatif, le raisonnement que nous avons fait (*R. C. M. P.*, p. 346) montre que la fraction rationnelle B_1 n'admet pas $t=+a_1$ pour pôle. Si μ_1 n'est pas non plus un entier positif ou nul, la forme de l'intégrale générale de l'équation (107) qui est

$$B_1 = A_1 + c\prod_{i=1}^{p}(t+a_i)^{\mu_i}$$

montre que, puisque B_1 et A_1 sont holomorphes pour $t=-a_1$, la constante c doit être nulle. On a donc $A_1 = B_1$.

Si on fait ensuite $s=2$ dans (105), on obtient une équation qui est vérifiée à la fois par A_2 et par B_2. En raisonnant sur cette équation comme sur l'équation (106), on voit que B_2 n'admet pas $t=-a_1$ pour pôle si $2\mu_1$ n'est pas un entier positif. Si μ_1 n'est ni égal à o ni égal à un nombre rationnel positif ou négatif, le même raisonnement pourra se répéter pour toutes les valeurs de s. Les fractions rationnelles B_1, B_2, B_3, ... n'admettront pas $t=-a_1$ comme pôle.

Si $t=a_1$, au lieu d'être un facteur multiple de V, est un facteur simple, il suffit pour notre démonstration de supposer que μ_1 n'est ni égal à o ni égal à un nombre rationnel négatif. Nous n'avons plus en effet, une fois choisi le facteur $(t+b_1+\chi_1)^{\lambda_1}$, à faire usage de l'intégrale (102) ou (104), le raisonnement déjà cité (*R. C. M. P.*, p. 346) suffit pour démontrer que, quel que soit s, la fraction B_s n'admet pas $t=-a_1$ comme pôle.

Nous avons donc démontré qu'il existe une intégrale $R(\overline{x, t})$ de l'équation (1), intégrale qui est régulière pour $t = -a_1$, $t = -a_2$, ..., $t = -a_{p'}$, c'est-à-dire de la forme (98), si les conditions suivantes sont vérifiées :

1° L'équation (1) admet une intégrale $L\overline{x, t}$;

2° Les conditions (f) sont vérifiées pour $t + a_1$, $t + a_2$, ..., $t + a_{p'}$;

3° Les nombres μ_1, μ_2, ..., $\mu_{p'}$ n'ont pas des valeurs exceptionnelles.

Les conditions 1° et 2° sont nécessaires pour que le théorème soit exact, la condition 3° n'est pas nécessaire.

Conformément à ce que nous avons dit, on voit que la relation (98) peut s'écrire

$$x(1 + xP_1 + x^2P_2 + \ldots)\prod_{j=1}^{q'}(t + b_j + \gamma_j)^{\lambda_j}\prod_{i=p'+1}^{p}(t + a_i)^{\mu_i} = \text{const.},$$

les fractions rationnelles P_1, P_2, P_3, ... ne pouvant encore admettre comme pôles que les points $t = -a_{p'+1}$, $t = -a_{p'+2}$, ..., $t = -a_p$.

Si, la condition 1° de l'énoncé précédent étant vérifiée, on a $p' = p$ dans l'énoncé des conditions 2° et 3°, les fractions R_1, R_2, R_3 ... [équation (98)] étant régulières pour toutes les valeurs de t seront des polynomes. Si le nombre $\mu_0 = 1 - \mu_1 - \mu_2 - \ldots - \mu_p$ n'est pas rationnel et négatif, R_i est un polynome de degré égal à i (voir § 18). Il résulte de là que l'intégrale (98) se met, en remplaçant t par $y : x$, sous la forme d'une intégrale $f\overline{x, y}$.

[**22**] *Forme d'une intégrale* $R\overline{x, t}$ *qui n'est pas régulière pour toutes les valeurs de* t. — Je me propose de rechercher quelle est la forme des fractions R_s qui figurent dans (103), si, les conditions 1° et 2° de l'énoncé du théorème précédent étant vérifiées, la condition 3° ne l'est pas. Je suppose que μ_1, par exemple, ait une valeur exceptionnelle. Ce que nous dirons sur la manière dont $t + a_1$ figure dans R_s sera vrai pour tout facteur $t + a_i$ pour lequel la condition (f) est vérifiée, tandis que μ_i a une valeur exceptionnelle; le résultat que nous obtiendrons ne serait plus exact si la condition (f) n'était plus vérifiée pour $t + a_1$.

Remarquons d'abord que, même si μ_1 est rationnel et négatif, on peut toujours supposer que $1 + \mu_1$ est positif. En effet, $\mu_1 = \lambda_1' + \lambda_2' \ldots + \lambda'_{r_1'}$ étant négatif, les exposants λ_1', λ_2', ... $\lambda'_{r_1'}$ dans (102) ne peuvent pas être tous positifs; il en résulte que le développement $K(x, y)_1)$ est convergent [25] si x et y_1 sont assez petits en module. Si nous posons $x = uy_1$, l'intégrale (102) devient

$$uy_1^{1+\mu_1}[1 + \overline{K}(u, y_1)] = C.$$

---

(25) Dans les raisonnements du paragraphe précédent, nous n'avions pas besoin de supposer la convergence des développements ordonnés suivant les puissances de x, que nous avons employés; il nous suffisait de supposer l'existence formelle des développements en question.

Cette égalité montre que, si nous supposons $1 + \mu_1$ négatif et rationnel, il y a une infinité de solutions $u(y_1)$ algébroïdes et nulles pour $y_1 = 0$. Toutes ces solutions fournissent des solutions $y(x)$ de l'équation (1). Ces solutions $y(x)$ sont algébroïdes et nulles pour $x = 0$, mais ne sont pas holomorphes pour $x = 0$, puisque $y_1 : x = u^{-1}$ croît indéfiniment lorsque x et y tendent vers 0. Or, nous avons supposé (§ 3) que les solutions $y(x)$ algébroïdes et nulles pour $x = 0$ sont holomorphes pour $x = 0$. En nous plaçant dans ce cas, ainsi que nous avons toujours le droit de le faire, nous voyons que l'on a $1 + \mu_1 > 0$.

Je vais démontrer que $t = -a_1$ est un pôle d'ordre au plus égal à s de la fraction R_s, quelle que soit la valeur de l'indice s. Si nous faisons, dans l'équation (1), les changements successifs de variable

$$y = tx, \qquad t = y_1 - a_1,$$

nous obtenons une équation qu'on peut écrire

$$xV(x, y_1)dy_1 + Z(x, y_1)dx = 0. \tag{108}$$

Si, α étant une constante que nous fixerons daus la suite, nous désignons par

$$I = x[1 + A(x|y_1 - a_1)] \prod_{j=1}^{q} \left(\frac{y_1 + b_j - a_1 + \chi_j}{\alpha + b_j - a_1}\right)^{\lambda_j}$$

le premier membre de (104) divisé par une certaine constante, l'intégrale de (108) pourra s'écrire $I = \text{const}$. Il existe des nombres positifs tels que si l'on a

$$|x| < \varepsilon, \qquad \rho_1 \leqslant y_1 \leqslant \rho_2, \tag{109}$$

on ait

$$\begin{aligned} |\chi_j| &< |y_1 + b_j - a_1|, & j &= 1, 2, \ldots, q, \\ |y_1| &< |a_i - a_1|, & i &= 2, 3, \ldots, p. \end{aligned}$$

Prenons pour α une valeur telle que l'on ait $|\alpha| = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$. Nous pourrons écrire, puisque pour $j = 1, 2, \ldots r'$ on a $b_j = a_1$

$$I = x\left(\frac{y_1}{\alpha}\right)^{\mu_1}[1 + A(x|y_1 - a_1)]P(x|y_1) \prod_{i=1}^{r'} \left(1 + \frac{\chi_i}{y_1}\right)^{\lambda_i},$$

en posant

$$P(x|y_1) = \prod_{i=2}^{p} \left(\frac{a_i - a_1 + y_1}{a_i - a_1 + \alpha}\right)^{\mu_i} \prod_{j=r'+1}^{q} \left(1 + \frac{\chi_j}{y_1 + b_j - a_1}\right)^{\lambda_j}.$$

Dans les facteurs susceptibles de plusieurs déterminations, nous choisirons la détermination qui pour $y_1 = \alpha$ et $x = 0$ se réduit à 1. En développant, suivant les puissances croissantes de x, les divers produits qui figurent dans I, nous obtenons

$$\mathrm{I}=xy_1^{\mu_1}\left(\mathrm{F}_0+\frac{x\mathrm{F}_1}{y_1}+\frac{x^2\mathrm{F}_2}{y_1^2}+\frac{x^3\mathrm{F}_3}{y_1^3}+\ldots\right).$$

F_0, F_1, F_2, ... sont des fonctions de y_1 qui sont holomorphes, si l'on a $|y_1|\leqslant\rho_2$. Les fonctions F_1, F_2, F_3, ... peuvent être nulles pour $y_1=0$; il ne peut en être ainsi de F_0, qui pour $y_1=\alpha$ se réduit à $\alpha^{-\mu_1}$. Tous les développements que nous employons sont convergents, si les conditions (109) sont vérifiées. En opérant d'une façon analogue sur le premier membre de l'intégrale (103), on peut écrire cette intégrale $\mathrm{J}=$ const. en posant

$$\mathrm{J}=x\left(\frac{y_1}{\alpha}\right)^{\mu_1}[1+\mathrm{B}(x|y_1-a_1)]\,\mathrm{P}(x|y_1)\prod_{i=1}^{r_1'}\left(1+\frac{\chi_i}{y_1}\right)^{\lambda_i}.$$

Pour $y_1=\alpha$, I et J se réduisent respectivement aux séries

$$\overline{\mathrm{I}}=x+\alpha_2'x^2+\alpha_3'x^3+\ldots,$$
$$\overline{\mathrm{J}}=x+\beta_2'x^2+\beta_3'x^3+\ldots.$$

On a évidemment

$$\overline{\mathrm{J}}=\overline{\mathrm{I}}(1+\alpha_1\overline{\mathrm{I}}+\alpha_2\overline{\mathrm{I}}^2+\alpha_3\overline{\mathrm{I}}^3+\ldots,$$

les coefficients de toutes ces séries étant des constantes.

Puisque I est une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(110)\qquad x\mathrm{V}(x,\,y_1)\frac{\partial f}{\partial x}-\mathrm{Z}(x,\,y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1}=0,$$

la fonction I $(1+\alpha_1\mathrm{I}+\alpha_2\mathrm{I}^2+\alpha_3\mathrm{I}^3+\ldots)$ sera aussi une solution de cette équation. Cette solution et la solution J de la même équation (108) se réduisent pour $y_1=\alpha$ à la même fonction de x, qui est la série $\overline{\mathrm{J}}$. La solution qui pour $y_1=\alpha$ se réduit à une fonction donnée de x est unique, puisque pour $|x|<\varepsilon$ et $y_1=\alpha$ on peut supposer que l'on n'a pas $\mathrm{Z}(x,\,y_1)=0$. Nous avons donc

$$\mathrm{J}=\mathrm{I}[1+\alpha_1\mathrm{I}+\alpha_2\mathrm{I}^2+\alpha_3\mathrm{I}^3+\ldots].$$

Nous en concluons que l'on a :

$$1+\mathrm{B}(x|y_1-a_1)=[1+\mathrm{A}(x|y_1-a_1)]\left[1+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\mathrm{I}^j\right].$$

Si nous posons

$$\log[1+\mathrm{B}(x|y_1-a_1)]=\overline{\mathrm{B}}(x,\,y_1),\qquad \log[1+\mathrm{A}(x|y_1-a_1)]=\overline{\mathrm{A}}(x,\,y_1),$$

$$\log\left[1+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\mathrm{I}_j\right]=\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j\mathrm{I}^j,$$

nous aurons

$$(111)\qquad \overline{\mathrm{B}}(x, y_1) = \overline{\mathrm{A}}(x, y_1) + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \mathrm{I}^j.$$

Nous voyons immédiatement que, si l'on a $\mu_1 = m' : m$, les nombres m' et m étant des entiers, dont le premier peut être négatif, le nombre j ne pourra prendre que des valeurs de la forme $j = km$, où k est un entier. En effet, le premier membre de (111) est une fonction uniforme de y, et il doit en être de même du second membre. Nous avons

$$\mathrm{I}^{km} = x^{km} y_1^{km'} \left(\mathrm{F}_{0,k} + \frac{x \mathrm{F}_{1,k}}{y_1} + \frac{x^2 \mathrm{F}_{2,k}}{y_1^2} + \frac{x^3 \mathrm{F}_{3,k}}{y_1^2} + \ldots \right),$$

$\mathrm{F}_{0,k}$, $\mathrm{F}_{1,k}$, $\mathrm{F}_{2,k}$, ... étant des fonctions de y_1 qui sont holomorphes pour $|y_1| < \rho_2$. Ces fonctions, sauf $\mathrm{F}_{0,k}$, peuvent être nulles pour $y_1 = 0$; $\mathrm{F}_{0,k}$ se réduit à $\alpha^{-km'}$ pour $y_1 = \alpha$. Nous avons donc

$$(112)\qquad \overline{\mathrm{B}}(x, y_1) = \overline{\mathrm{A}}(x, y_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\beta_{km} x^{km} y_1^{km'} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l \mathrm{F}_{l,k}}{y_1^l} \right].$$

Si nous prenons

$$\overline{\mathrm{A}}(x, y_1) = \sum_{i=1}^{\infty} x^i \overline{\mathrm{A}}_i(y_1), \qquad \overline{\mathrm{B}}(x, y_1) = \sum_{i=1}^{\infty} x^i \overline{\mathrm{B}}_i(y_1),$$

nous aurons l'expression de $\mathrm{B}_s(y_1)$ en égalant les coefficients de x^s dans les deux nombres de (112). Il suffit de considérer les valeurs de k et de l telles que l'on ait

$$(113)\qquad s = km + l$$

et de prendre

$$\overline{\mathrm{B}}_s(y_1) = \overline{\mathrm{A}}_s(y_1) + \sum \frac{\beta_{km} \mathrm{F}_{l,k}}{y_1^{l-km'}},$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières et positives de k et de l, qui vérifient l'égalité (113). L'exposant $l - km'$ peut s'écrire $s - k(m + m')$ d'après (113) ; cet exposant sera donc au plus égal égal à s, puisque, $1 + \mu_1$ étant positif, $m + m'$ est positif. On aura enfin

$$\overline{\mathrm{B}}_s(y_1) = \frac{\mathrm{C}_s(y_1)}{y_1^s};$$

$\mathrm{C}_s(y_1)$ est une fonction de y_1 qui est holomorphe pour $|y_1| \leqslant \rho_2$; cette fonction peut être nulle pour $y_1 = 0$, et elle se présente sous la forme d'une fraction rationnelle en y_1, puisque $\overline{\mathrm{B}}_s(y_1)$ est une fraction rationnelle. Nous avons ensuite

$$1 + \mathrm{B}(x, t) = e^{\overline{\mathrm{B}}(x, y_1)}, \qquad \mathrm{B}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i \mathrm{H}_i(t)}{(t + a_1)^i};$$

$H_i(t)$ est une fraction rationnelle en t qui peut être nulle pour $t = -a_1$, mais dont le dénominateur n'est pas nul pour $t = -a_1$.

Certains des développements que nous avons employés peuvent être divergents, car nous n'avons fait que supposer l'existence formelle des intégrales (103) et (104) sans faire aucune hypothèse sur la convergence des développements $A(x|t)$ et $B(x|t)$ qui y figurent. L'emploi de ces développement est cependant acceptable dans notre démonstration, car nous devons remarquer que ces développements n'interviennent que par leurs termes de rang fini, puisque les nombres s, k, l ne prennent que des valeurs finies (voir *J. E. P.*, p. 113).

[**23**] *Condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une intégrale* $R\overline{x, t}$ *régulière pour* $t = -a_1$, $t = -a_2$, ... $t = -a_{p'}$. — D'après ce que nous avons dit (§ 21), pour qu'il existe une intégrale $R\overline{x, t}$ régulière pour les valeurs indiquées de t, il faut qu'il existe une intégrale $L\overline{x, t}$ et que la condition (f) relative aux facteurs $t + a_1$, $t + a_2$, ... $t + a_{p'}$ soit vérifiée. Nous avons de plus employé, dans notre démonstration, une hypothèse qui n'est pas nécessaire en supposant que μ_1, μ_2, μ_3, ... $\mu_{p'}$ n'ont pas des valeurs exceptionnelles. Je me propose de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une intégrale $R\overline{x, t}$ régulière pour les valeurs indiquées de t.

Si une pareille intégrale existe, nous pouvons, en employant les notations de l'équation (98), écrire cette intégrale

$$(114) \qquad x(1 + xR_1 + x^2R_2 + \ldots)\prod_{j=1}^{q}(t + b_j + \chi_j)^{\lambda_j} = \text{const.};$$

R_1, R_2, ... sont des fractions rationnelles en t, qui ne peuvent admettre comme pôles que les valeurs $t = -a_{p'+1}$, $t = -a_{p'+2}$, ..., a_p. L'intégrale (114) pourra s'écrire

$$(115) \qquad x[1 + xF_1 + x^2F_2 + \ldots]\prod_{j=1}^{r_1'}(t + a_1 + \chi_j)^{\lambda_j}\prod_{i=2}^{p}(t + a_i)^{\mu_i} = \text{const.},$$

F_1, F_2, F_3, ... étant des fractions rationnelles en t, qui n'admettent pas $t = -a_1$ comme pôle. Nous avons donc une intégrale de la forme $R\overline{x, t}$ régulière pour $t = -a_1$. L'existence de diverses intégrales de la forme $R\overline{x, t}$, régulières chacune *respectivement* pour $t = -a_1$, $t = -a_2$, $t = -a_{p'}$ est donc une condition nécessaire pour l'existence d'une intégrale $R\overline{x, t}$ régulière simultanément pour $t = -a_1$, $t = -a_2$, ..., $t = -a_{p'}$. Ces conditions sont suffisantes, si les nombres μ_1, μ_2, ..., μ_p ne sont pas tous simultanément rationnels (positifs, ou négatifs ou nuls).

L'intégrale (115) peut s'écrire comme nous l'avons fait [équation (104)] :

$$(116) \qquad x[1 + xA_1 + x^2A_2 + \ldots]\prod_{j=1}^{q}(t + b_j + \chi_j)^{\lambda_j} = \text{const.},$$

A_1, A_2, A_3, ... étant des fractions en t régulières pour $t=-a_1$. De même l'intégrale $R\overline{x,t}$ analogue à (115) et régulière pour $t=-a_1$, l'indice i ayant une des valeurs 2, 3, ... p', peut s'écrire

$$(117) \qquad x[1+xB_1+x^2B_2+\ldots]\prod_{j=1}^{q}(t+b_j+\chi_j)^{\lambda_j}=\text{const.};$$

les fractions rationnelles B_1, B_2, B_3, ... n'admettront pas $t=-a_i$ pour pôle. En raisonnant comme nous avons raisonné sur l'équation (106), nous obtenons :

$$B_1=A_1+c\prod_{i=1}^{p}(t+a_i)^{\mu_i}.$$

Puisque A_1 et B_1 sont des fractions rationnelles, on aura $c=0$ si tous les nombres de μ_i ne sont pas tous entiers. En continuant à raisonner de même on voit que, quel que soit s, on a $B_s=A_s$ si les nombres μ_i ne sont pas tous rationnels. *Les intégrales* $R\overline{x,t}$ *telles que* (116) *et* (117), *qui sont régulières chacune pour une valeur* $t=-a_i$, *sont donc toutes identiques et il y a une intégrale* $R\overline{x,t}$ *régulière pour* $t=-a_1$, $t=-a_2$, ..., $t=-a_{p'}$.

Si tous les nombres μ_i sont rationnels, les conditions énoncées ne sont plus suffisantes pour l'existence d'une intégrale $R\overline{x,t}$ de la forme indiquée. Pour obtenir des conditions suffisantes, on peut dans ce cas ajouter aux conditions énoncées la condition suivante : les nombres $s\lambda_j$ relatifs aux valeurs de l'indice j, telles que b_j soit égal à l'un des nombres a_2, a_3, ..., $a_{p'}$, sont tous entiers positifs pour les valeurs de s, telles que tous les nombres $s\mu_i$ soient tous entiers. Pour établir cette propriété, il n'y aurait qu'à raisonner comme nous l'avons fait pour obtenir la relation (111); on montrerait que le premier membre de (116) s'exprime au moyen du premier membre des intégrales telles que (117).

Afin de mieux nous rendre compte de la façon dont les diverses hypothèses que nous avons envisagées interviennent et afin d'avoir une idée plus nette des conséquences qu'elles entraînent, examinons le cas simple où le point singulier $x=0$, $y=0$ de l'équation (1) n'a que deux directions distinctes de tangentes $y+a_1x=0$, $y+a_2x=0$. Pour ne pas retomber dans le cas bien connu où n est égal à 1, nous supposerons que l'une au moins de ces directions est une direction de tangente multiple. Nous avons :

$$yY_n(x,y)+xX_n(x,y)=(y+a_1x)^{r_1}(y+a_2x)^{r_2},$$

$$\frac{Y_n(x,y)}{yY_n(x,y)+xX_n(x,y)}=\frac{\mu_1}{y+a_1x}+\frac{\mu_2}{y+a_2x},$$

$$r_1+r_2=n+1, \qquad \mu_1+\mu_2=1.$$

Considérons les diverses hypothèses suivantes que nous envisagerons successivement ou simultanément, ainsi que cela sera indiqué :

1° L'équation (1) admet une intégrale $L\overline{x, t}$, c'est-à-dire une intégrale de la forme

$$x[1 + xL_1 + x^2L_2 + \ldots](t + a_1)^{\mu_1}(t + a_2)^{\mu_2} = \text{const.} \tag{118}$$

où L_1, L_2, ... sont des fractions rationnelles en t, qui ne peuvent admettre pour pôles que $t = -a_1$ et $t = -a_2$.

2° L'équation (1) admet une intégrale $R\overline{x, t}$ régulière pour $t = -a_1$, c'est-à-dire une intégrale de la forme

$$x[1 + xA_1 + x^2A_2 + \ldots](t + a_2)^{\mu_2}\prod_{i=1}^{q_1}(t + a_1 + \varphi_i)^{\lambda_i} = \text{const.} \tag{119}$$

où A_1, A_2, A_3, ... sont des fractions rationnelles en t dont le dénominateur est une puissance de $t + a_2$. On a nécessairement $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{q_1} = \mu_1$.

3° L'équation (1) admet une intégrale $R\overline{x, t}$ régulière pour $t = -a_2$:

$$x[1 + x\overline{A}_1 + x^2\overline{A}_2 + \ldots](t + a_1)^{\mu_1}\prod_{i=1}^{q_2}(t + a_2 + \overline{\varphi}_i)^{\overline{\lambda}_i}; \tag{120}$$

$\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, ... sont des fractions rationnelles en t, ayant pour dénominateur une puissance de $t + a_1$. On a $\overline{\lambda}_1 + \overline{\lambda}_2 + \ldots + \overline{\lambda}_{q_2} = \mu_2$.

4° L'équation (1) admet une intégrale de la forme (119), où nous savons seulement que A_1, A_2, A_3, ... sont des fonctions de t holomorphes pour $t = -a_1$. Nous ne savons pas si ce sont des fractions rationnelles.

5° L'équation (1) admet une intégrale de la forme (120), où nous savons seulement que $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ... sont des fonctions de t holomorphes pour $t = -a_2$.

6° L'équation (1) admet une intégrale $R\overline{x, t}$ régulière pour toutes les valeurs de t

$$x[1 + xR_1 + x^2R_2 + \ldots]\prod_{i=1}^{q_1}(t + a_1 + \varphi_i)^{\lambda_i}\prod_{i=1}^{q_2}(t + a_1 + \overline{\varphi}_i)^{\overline{\lambda}_i} = \text{const.} \tag{121}$$

où R_1, R_2, R_3 ... sont des polynomes en t. Nous savons que s'il en est ainsi l'équation (1) admet une intégrale $f\overline{x, y}$.

Si μ_1 n'a pas une valeur exceptionnelle, 1° et 4° entraînent 2°. De même, si μ_2 n'a pas une valeur exceptionnelle, 1° et 5° entraınent 3°. Si ni μ_1, ni μ_2 n'ont des valeurs exceptionnelles, 1°, 4° et 5° entraînent 6°. Quels que soient μ_1 et μ_2, 2° et 3° entraînent 1°. Si μ_1 et μ_2 ne sont pas rationnels [26], les hypothèses 2° et 3° entraînent 6°. Considérons le cas où μ_1 et par suite μ_2 sont rationnels. On a $\mu_1 = m_1 : m$ et $\mu_2 = m_2 : m$.

---

[26] Les expressions : μ_1 est rationnel et μ_1 n'a pas une valeur exceptionnelle, ne sont pas synonymes. Si r_1 est égal à 1, et si μ_1 est rationnel et positif, μ_1 n'a pas une valeur exceptionnelle.

L'un des entiers m_1 ou m_2 peut être négatif. Supposons vérifiées les hypothèses 2° et 3°. En raisonnant comme nous l'avons fait pour démontrer la relation (111), on prouve que si l'on désigne par I le premier membre de (119) et par J le premier membre de (120), on a

$$I = J\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s J^s\right),$$

et par suite

$$(122) \qquad 1 + xA_1 + x^2A_2 + \ldots = (1 + x\overline{A}_1 x^2\overline{A}_2 + \ldots)\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s J^s\right).$$

En écrivant J sous la forme du premier membre de la relation (118), nous voyons que, puisque le premier membre de (120) est une fonction uniforme de t, l'indice s dans le second membre ne doit prendre que des valeurs de la forme $s = km$, où k est un entier positif. L'égalité obtenue montre que l'intégrale (119), c'est-à-dire $I = \text{const.}$, ne sera pas, en général, régulière pour $t = -a_2$. Elle le sera cependant si tous les nombres $m\overline{\lambda}_i$ sont des entiers positifs. Il existe alors une intégrale $R\overline{x, t}$ régulière pour toutes les valeurs de t. Il en sera bien entendu de même si tous les nombres $m\lambda_i$ sont des entiers positifs. La condition 6° est encore alors conséquence de 2° et 3°.

[**24**] *Remarque sur les conditions nécessaires employées.* — Nous avons vu (§ 21) que si l'on pose $t + a_1 = y_1$ l'existence d'une intégrale $f\overline{x, y_1}$ est une condition nécessaire pour qu'il existe une intégrale $R\overline{x, t}$ régulière pour $t = -a_1$, ou d'une façon plus générale pour qu'il existe une intégrale $f\overline{x, y}$. Le nombre des solutions $y_1(x)$ holomorphes et nulles pour $x = 0$ peut être limité ou illimité, nous n'avons eu dans nos raisonnements aucune différence à faire entre les deux cas. En effet, l'intégrale $f\overline{x, y_1}$ [équation 102)] où figurent les facteurs $(y_1 + \psi_i)^{\lambda_i}$ fixe les facteurs $(t + a_1 + \psi_i)^{\lambda_i}$ qu'il faut figurer dans $R\overline{x, t}$ pour la mettre sous une forme régulière pour $t = -a_1$. Il est donc tout naturel que la difficulté que nous avons signalée (§ 18), dans le cas où il y a une infinité de solutions $y(x)$ holomorphes pour $x = 0$ et tangentes à $y + a_1 x = 0$, ne se présente pas ici. Nous devons cependant remarquer que nous n'avons guère fait que reculer la difficulté, car, dans le cas où il y a une infinité de solutions $y_1(x)$, holomorphes et nulles pour $x = 0$, nous n'avons aucun moyen de vérifier si l'équation différentielle en x et y admet ou non une intégrale $f\overline{x, y_1}$, puisque rien ne nous indique celles des solutions $y_1 + \psi_i = 0$ que nous devrons faire figurer dans $f\overline{x, y_1}$. Il est donc naturel de chercher à remplacer l'hypothèse de l'existence de l'intégrale $f\overline{x, y_1}$ par des hypothèses telles que nous puissions indiquer une méthode de calcul permettant de reconnaître si ces hypothèses sont

vérifiées ou non. A cet effet, nous remarquons (*R. C. M. P.*, p. 344) que s'il existe une intégrale $f\overline{x, y_1}$, il existe, en posant $y_1 = t, x$, une intégrale $L\overline{x, t_1}$:

$$x(1 + xH_1 + x^2H_2 + \ldots)\prod_{i=1}^{r}(t_1 + a_i')^{\mu_i'};$$

a_i' et μ_i' sont des constantes, H_1, H_2, ... sont des fractions rationnelles en t_1 dont les seuls pôles possibles sont les points $t_1 = -a_i'$. En cherchant les conditions (L) [voir § 20] pour que cette intégrale $R\overline{x, t_1}$ existe, nous avons des conditions nécessaires pour l'existence de $f\overline{x, y_1}$. Nous avons de plus indiqué (§ 11) des cas où il ne saurait exister une intégrale $f\overline{x, y_1}$. En exprimant que ces cas ne se présentent pas, nous aurons de nouvelles conditions nécessaires pour l'existence de $f\overline{x, y_1}$. Ces cas étant mis à part, nous avons étudié (§ 21 et *R. C. M. P.*, p. 348) des cas assez généraux où l'existence de l'intégrale $R\overline{x, t_1}$ entraîne l'existence de $f\overline{x, y_1}$. Si nous nous plaçons d'abord dans le cas où les r nombres a_i' sont distincts les uns des autres, nous avons démontré que l'existence des $R\overline{x, t_1}$ entraîne l'existence de $f\overline{x, y_1}$, si aucun des nombres

$$1 + \mu_1' + \mu_r' + \ldots + \mu_2', \qquad (1 + \mu_1' + \mu_2' + \ldots + \mu_r') : \mu_i', \qquad (i = 1, 2, \ldots r)$$

n'est rationnel et négatif. Or, justement, en cherchant les solutions $y_1(x)$ holomorphes et nulles pour $x = 0$, on voit sans peine que, s'il y a une infinité de pareilles solutions, l'un au moins des nombres considérés est rationnel et négatif. Donc, *si nous pouvons trouver des conditions nécessaires pour l'existence de $f\overline{x, y_1}$, nous ne savons pas démontrer que ces conditions sont suffisantes, s'il existe une infinité de solutions $y_1(x)$ holomorphes et nulles pour $x = 0$* : la difficulté signalée n'est pas levée.

Nous arrivons à une conclusion analogue en examinant le cas où le point singulier $x = 0$, $y_1 = 0$ de l'équation différentielle en x et y_1 présente des tangentes multiples $y_1 + a_i x = 0$. Nous savons, en raisonnant comme nous le ferons (§ 28), former des conditions nécessaires pour l'existence de $f\overline{x, y}$, nous ne pouvons affirmer que ces conditions sont suffisantes.

Nous pouvons dans tous les cas former des conditions nécessaires pour qu'il existe une intégrale $f\overline{x, y_1}$ ou une intégrale $R\overline{x, t}$ régulière pour $t = -a_1$ ($y + a_1 x = 0$ étant une tangente multiple), mais, ces conditions étant toutes vérifiées, nous ne pouvons affirmer qu'elles sont suffisantes pour que l'intégrale considérée existe. D'après ce que nous avons dit (§ 18), et d'après ce que nous venons de dire, on voit très bien la raison de cette conclusion. Dans la formation des conditions nécessaires, nous ne faisons intervenir que les tangentes $y + a_i x = 0$, $y_1 + a_i' x = 0$ aux points singuliers des diverses équations différentielles dont nous nous servons; les solutions $y(x)$, $y_1(x)$, holomorphes et nulles pour $x = 0$, ne jouent aucun rôle. Au contraire, pour démontrer que les conditions trouvées sont suffisantes, nous sommes obligés de faire figurer dans $R\overline{x, t}$ certaines intégrales $t + a_i + \chi_i = 0$. Rien ne nous indiquant, lorsqu'il y a une infinité de pareilles solutions, celles qu'il faut faire intervenir, il est naturel que notre raisonnement soit en défaut.

Par contre, si le nombre de ces solutions est fini, il semble assez naturel de chercher à se débarrasser de la restriction que nous avons introduit lorsque, pour démontrer qu'il existe une intégrale $R\overline{x, t}$ régulière pour $t = -a_1$, nous avons supposé que μ_1 n'était pas rationnel. D'une façon plus générale, il paraît naturel de chercher à démontrer que les conditions nécessaires pour l'existence d'une intégrale $R\overline{x, t}$, régulière pour $t = -a_1$, conditions que nous avons appris à former, sont suffisantes lorsqu'il n'y a qu'un nombre fini de solutions $y_1(x)$ holomorphes et nulles pour $x = 0$. Je ne crois pas cependant que cet énoncé soit exact, mais il me paraît inutile d'insister davantage sur cette question, car même en le supposant vrai, le théorème considéré ne présenterait d'intérêt qu'au point de vue de la simplicité de l'énoncé. En effet, dans le cas où il n'y a qu'un membre fini de solutions $y_1(x)$ holomorphes nulles pour $x = 0$, il n'y a pas de difficultés théoriques, mais seulement des complications de calcul pour chercher si $f\overline{x, y_1}$ existe et également pour chercher directement s'il existe une intégrale $R\overline{x, t}$ régulière pour $t = -a_1$. Nous avons indiqué (§ 13) les solutions qui doivent figurer nécessairement dans $f\overline{x, y_1}$, et par suite dans $R\overline{x, t}$, si l'on veut que l'intégrale $R\overline{x, t}$ soit régulière pour $t = -a_1$. Nous aurons, en envisageant successivement les diverses combinaisons des autres solutions $y_1(x)$, un nombre fini de formes possibles d'intégrales $R\overline{x, t}$ régulières pour $t = -a_1$. Nous chercherons à vérifier successivement si ces diverses formes d'intégrales existent.

V. — Conditions pour qu'un point singulier d'une équation (1) soit un point algébrique.

[**25**] *Recherche des conditions nécessaires dans le cas général.* — Nous ne considérerons, tout d'abord, que le cas où $yY_n(x, y) + xX_n(x, y)$ n'admet que des facteurs simples, et nous nous proposons de chercher les conditions que doit vérifier l'équation (1) pour que $x = 0$, $y = 0$ soit un point algébrique, c'est-à-dire pour que toutes les solutions $y(x)$ de l'équation (1) qui sont nulles pour $x = 0$ soient algébroïdes pour $x = 0$.

Aucun des facteurs de $yY_n(x, y) + xX_n(x, y)$ ne doit être facteur de $Y_n(x, y)$, car s'il y avait un facteur commun $y + a_1 x$ par exemple et si nous posons $y + a_1 x = xy_1$, nous obtenons une équation

$$(\mu_1 x + \ldots)dy_1 + (y_1 + \ldots)dx = 0$$

où on n'écrit que les termes de moindre degré. Le nombre μ_1 serait nul s'il y avait un facteur commun. Cette équation présenterait alors les mêmes propriétés que l'équation (12) (§ 5) : elle admet des solutions $y_1(x)$ qui sont nulles pour $x=0$, mais ne sont pas algébroïdes (*J. E. P.*, p. 78). Il faut donc que les nombres μ_i ne soient pas nuls. Nous retrouvons ainsi une condition déjà rencontrée (§ 18). Nous désignerons par (M_0) les conditions ainsi obtenues. Si nous posons

$$y=tx, \qquad \overline{Y}_i=Y_i(1, t), \qquad \overline{X}_i=X_i(1, t),$$

l'équation (1) devient

$$x[\overline{Y}_n+x\overline{Y}_{n+1}+\ldots]dt+[t\overline{Y}_n+\overline{X}_n+xt\overline{Y}_{n+1}+x X_{n+1}+\ldots]dx=0. \tag{123}$$

Nous avons :

$$\frac{\overline{Y}_n}{t\overline{Y}_n+\overline{X}_n}=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\mu_i}{t+a_i}.$$

Pour que $x=0$, $y=0$ soit un point algébrique, il faut que les différents nombres μ_i soient ou bien positifs, ou bien négatifs et rationnels. Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi pour l'un d'eux, μ_1 par exemple, posons $t+a_1=y_1$, nous obtenons une équation que l'on peut, pour x et y_1 voisins de 0, mettre sous la forme

$$\mu_1 x\,dy_1+(y_1+\ldots)dx=0. \tag{124}$$

Les termes non écrits dans le coefficient de dx contiennent en facteur ou bien x ou bien y^2. On sait que si μ_1 est soit un nombre complexe, soit un nombre négatif et irrationnel, cette équation admet une infinité de solutions $y_1(x)$ nulles, mais non algébroïdes pour $x=0$. Nous désignerons pour abréger par conditions (M) les conditions indiquées ici et que doivent vérifier les nombres μ_i, pour que $x=0$, $y=0$ soit un point algébrique.

Si certains des nombres μ_i sont des inverses d'entiers négatifs, les coefficients de l'équation (1) doivent vérifier certaines relations, si l'on veut que $x=0$, $y=0$, soit un point algébrique ([27]).

Si nous supposons $\mu_1=p^{-1}$, on sait, en effet (voir en particulier *A. U. G.*, p. 15, et *J. E. P.*, p. 52 et 58), que pour que l'équation n'admette pas de solutions $y_1(x)$ nulles et non algébroïdes pour $x=0$, il faut et il suffit qu'en cherchant à vérifier l'équation (124) par une série entière $y=f(x)$ nulle pour $x=0$, on puisse déterminer le coefficient du terme en x^p de $f(x)$. Les nouvelles conditions qui s'introduisent ainsi, lorsque certains des nombres μ_i sont des inverses d'entiers négatifs, seront appelées conditions (M'). Des calculs algébriques permettent toujours de reconnaître si les conditions (M) et (M') sont vérifiées ou ne le sont pas.

([27]) Il n'est pas nécessaire de faire la même restriction si un des nombres μ_i, μ_1, par exemple, est un entier négatif. Cela tient à ce que, dans l'équation (124), x est en facteur dans le coefficient de dy_1, et que, par suite, la solution $x=f(y_1)$ holomorphe et nulle pour $y_1=0$ et vérifiant l'équation (124) existe toujours, puisqu'elle se réduit à $x=0$.

Nous obtiendrons de nouvelles conditions en remarquant qu'il est nécessaire que l'équation (1) admette une intégrale $L\overline{x, t}$, c'est-à-dire de la forme

$$(125) \qquad x(1 + xL_1 + x^2L_2 + \ldots)\prod_{i=1}^{n+1}(t + a_i)^{\mu_i} = \text{const.},$$

L_1, L_2, ... étant des fractions rationnelles en t. Nous avons en effet montré (*R. C. M. P.*, p. 354) que, s'il n'en est pas ainsi, *il y a une infinité de solutions $y(x)$ pour lesquelles $y : x = t$ ne tend vers aucune limite finie ou infinie, tandis que x et y tendent vers* o : ces solutions ne peuvent être algébroïdes pour $x = 0$. On reconnaîtra facilement (voir § 20, conditions ordinaires d'existence de $L\overline{x, t}$) qu'il faut $n - 1$ conditions en général pour que L_1 soit bien une fraction rationnelle, et $n - 1$ conditions pour que L_i soit bien une fraction rationnelle. On a ainsi une suite indéfinie de conditions, ce n'est que dans des cas particuliers que ces conditions se réduiront à un nombre fini, ou que l'on pourra effectivement reconnaître que ces conditions en nombre infini sont vérifiés (cf. *B. D.*, p. 230). Nous avons ainsi des conditions que nous pouvons appeler conditions (L). Ces conditions peuvent et doivent même se réduire à un nombre fini de conditions qu'on doit pouvoir trouver algébriquement si $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ sont des polynomes. Mais si X et Y sont quelconques, ces conditions (L) seront en nombre infini et auront par cela même un caractère transcendant, bien qu'elles s'obtiennent successivement par des calculs algébriques.

Il semblerait de plus nécessaire, dans le cas où l'un des nombres μ_i, μ_1, par exemple, est un nombre rationnel positif, de dire qu'il est nécessaire d'exprimer que le point singulier $x = 0$, $y_1 = 0$ de l'équation (124) est un *centre* (*J. E. P.*, p. 22). En effet, si μ_1 est un nombre rationnel positif, le point $x = 0$, $y_1 = 0$ sera pour l'équation (124) un foyer, à moins que certaines relations en nombre infini ne se trouvent vérifiées. Or, dans le cas d'un foyer, il y a une infinité de solutions $y_1(x)$ nulles, mais non algébroïdes pour $x = 0$. Nous allons montrer que, si l'intégrale $L\overline{x, t}$, c'est-à-dire (125) existe, le point $x = 0$, $y_1 = 0$ est nécessairement pour l'équation (124) un *centre*. Il n'y aura donc pas à parler de nouvelles conditions, si quelques-uns des nombres μ_i sont positifs et rationnels.

Nous avons vu (§ 21) que, puisque μ_1 est positif, l'intégrale (125) de l'équation (1) peut se mettre sous la forme d'une intégrale $R\overline{x, t}$ régulière pour $t = -a_1$:

$$(126) \qquad x[1 + xG_1 + x^2G_2 + \ldots](t + a_1 + \chi_1)^{\mu_1}\prod_{i=2}^{n+1}(t + a_i)^{\mu_i} = \text{const.};$$

les fonctions G_1, G_2, ... sont des fractions rationnelles en t dont les seuls pôles possibles sont $-a_2$, $-a_3$, ..., $-a_{n+1}$. Or, si nous remplaçons t par $y_1 - a_1$ et si nous développons, dans le premier membre de (126), les divers termes [sauf $(y_1 + \chi_1)^{\mu_1}$]

suivant les puissances de x et y_1, la relation (126) prend la forme d'une intégrale $f\overline{x, y_1}$, c'est-à-dire

$$(127) \qquad [1 + H(x, y_1)]x(y_1 + \chi_1)^{\mu_1} = \text{const.},$$

$H(x, y)$ étant un développement suivant les puissances de x et y_1. *Cette forme d'intégrale montre que $x = 0$, $y_1 = 0$ est un centre,* sans que nous ayons à nous préoccuper si les développements employés sont convergents ou non : leur existence formelle suffit pour notre démonstration.

[**26**] *Cas où les conditions trouvées sont certainement suffisantes.* — Il me paraît très probable que les conditions que nous avons trouvées sont suffisantes pour que $x = 0$, $y = 0$ soit un point algébrique de (1), mais si nous cherchons à le démontrer nous rencontrerons des difficultés que nous ne pourrons surmonter dans le cas le plus général.

Tout d'abord, si un des nombres μ_i, par exemple μ_1, est irrationnel et positif, nous savons qu'il n'y a pas de démonstration rigoureuse permettant d'affirmer que l'équation (124) n'a pas de solutions $y_1(x)$ nulles pour $x = 0$, mais non algébroïdes pour $x = 0$. On ne voit pas en effet si dans l'intégrale (127) de l'équation (124) le développement $H(x, y_1)$ est convergent, lorsque x et y_1 sont assez petits. Nous *écarterons donc le cas où certains des exposants μ_i sont positifs et irrationnels* et nous serons alors nécessairement dans le cas où tous les nombres μ_i sont rationnels (positifs ou négatifs). Dans ce cas, nous pourrons démontrer que les conditions nécessaires trouvées sont suffisantes.

Les conditions (M) et (M′) montrent qu'il n'y a pas de solution non algébroïde pour $x = 0$ telle que $y : x$ tende vers une limite l lorsque x et y tendent vers 0. En effet, dans l'équation (123), x est en facteur dans le coefficient de dt, et par suite la limite l doit être un des nombres $-a_i$ racines de l'équation $t\overline{Y}_n + \overline{X}_n = 0$. En posant $y_1 = t - a_i$ toute solution telle que t tende vers $-a_i$ sera fournie par une solution $y_1(x)$ nulle pour $x = 0$ d'une équation telle que (124). Or, d'après les conditions (M) et (M′), les équations telles que (124) ne peuvent admettre de solutions $y_1(x)$ nulles pour $x = 0$ et non algébroïdes pour $x = 0$.

Les conditions (L) *sont les conditions nécessaires pour qu'il n'existe pas de solution $y(x)$ telle que $t = y : x$ ne tende vers aucune limite* lorsque x et y tendent vers zéro. Nous allons montrer que *ces conditions sont suffisantes,* mais pour cette démonstration nous ne pourrons plus nous contenter de l'existence formelle de l'intégrale $L\overline{x, t}$ ou (125), il nous faudra préciser les conditions de convergence du développement qui figure dans (125). C'est ce dont nous allons nous occuper.

Posons comme précédemment

$$y = tx, \qquad u = \prod_{i=1}^{n+1} (t + a_i)^{\mu_i},$$

et plaçons-nous dans les conditions suivantes, en désignant par ρ un nombre positif assez petit et par R un nombre positif assez grand pour que toutes les conditions que nous rencontrerons plus loin soient vérifiées.

1° Décrivons dans le plan de la variable complexe t des cercles de rayon ρ ayant chacun pour centre un des points $-a_i$. Le cercle ayant $-a_i$ pour centre sera désigné par (ρ_i). Décrivons, autour de l'origine comme centre, un cercle de rayon R que nous appellerons cercle (R). Nous supposons ρ et R pris de telle façon que ces cercles ne se coupent pas et nous designons par (D) le domaine du plan des t formé par les points intérieurs à (R) et extérieurs à tous les cercles (ρ_i). L'affixe de la variable t sera assujettie à rester à l'intérieur du domaine (D).

2° Considérons un chemin allant dans le plan de la variable t d'un point origine ($t=0$, par exemple, si comme on peut le faire on suppose que aucun des nombres a_i ne soit nul) à un point quelconque du domaine (D). Soit σ la longueur minimum qu'on peut donner à ce chemin en le déformant, sans sortir du domaine (D). Nous supposerons que σ soit inférieur à un nombre fixe l que l'on pourra prendre aussi grand que l'on veut.

J'ai démontré [28] que l'on obtient une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(128)\qquad x[\overline{Y}_n + x\overline{Y}_{n-1} + \ldots]\frac{\partial g}{\partial x} = [t\overline{Y}_n + \overline{X}_n + xt\overline{Y}_{n+1} + x\overline{X}_{n+1} + \ldots]\frac{\partial g}{\partial t}$$

en prenant

$$g(x, t) = xg_1(t) + x^2 g_2(t) + x^3 g_3(t) + \ldots,$$

$g(x, t)$ se réduit à x pour $t=0$, et ce développement est convergent si t vérifie les conditions 1° et 2°, tandis que l'on a $|x| < e$. Les nombres ρ, R et l peuvent être choisis arbitrairement, la valeur à donner à ε en résulte et tend vers o si ρ tend vers o, tandis que R et l croissent indéfiniment. Dans le cas le plus général g_1, g_2, g_3 sont des fonctions de t, qui ne sont définies que par des intégrales curvilignes à effectuer le long d'un chemin allant de $t=0$ à une valeur quelconque de t. Lorsque l'équation (1) admet une intégrale $L\overline{x, t}$ [équation (125)], g_1, g_2, ... peuvent s'exprimer en fonction rationnelle de t et de u. Désignons en effet par u_0 la valeur, pour $t=0$, d'une des déterminations de u arbitrairement choisie. L'expression L se réduit, pour $t=0$, à une certaine fonction $k(x)$:

$$k(x) = u_0 x + l_1 x^2 + l_2 x^3 + \ldots.$$

En exprimant x en fonction de k, l'on aura

$$u_0 x = k + \alpha_1 k^2 + \alpha_2 k^3 + \ldots.$$

---

(28) L'énoncé que je donne ici coïncide, à de légères différences de notations près, avec l'énoncé que j'ai donné *J. E. P.*, p. 111. Voir également *A. U. G.*, p. 43, et *R. C. M. P.*, p. 351.

Soit $I(x, t)$ le premier membre de (125), puisque $I(x, t)$ vérifie, comme $g(x, t)$, l'équation (128), il en résulte que

$$(129) \qquad I + \alpha_1 I^2 + \alpha_2 I^3 + \ldots$$

est une solution de l'équation (128), qui, pour $t = 0$, se réduit à $u_0 x$. Si nous développons cette expression (129) suivant les puissances de x, nous obtenons une solution de la forme

$$(130) \qquad ux[1 + xG_1(t, u) + x^2 G_2(t, u) + \ldots],$$

G_i étant un polynome de degré i par rapport à u, polynome dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de t. La solution de l'équation (128), qui pour $t = 0$ se réduit à $u_0 x$, étant unique, le développement (130) est identique à $g(x, t)$. Nous avons :

$$g_1(t) = \frac{u}{u_0}, \qquad g_i(t) = \frac{uG_i(u, t)}{u_0}, \qquad (i = 2, 3, \ldots).$$

Nous n'avons pas besoin, pour la validité de cette démonstration, de supposer la convergence du développement $k(x)$, convergence qui n'est pas du tout assurée (voir § 22, fin).

Dans le développement $g(x, t)$ ou (130), qui vérifie l'équation (128), la quantité entre crochets n'est pas une fonction uniforme de t à l'intérieur du domaine D. Nous allons en supposant, comme nous l'avons déjà fait, tous les nombres μ_i rationnels, en déduire un développement de même forme où la quantité entre crochets sera une fonction uniforme de t.

Soit $\mu_i = m_i : m$, m est le plus petit dénominateur commun des fractions μ_i et les entiers m_i peuvent être négatifs. Si, dans la quantité entre crochets de l'expression (130), nous remplaçons successivement u par les diverses déterminations en nombre fini que prend u pour une valeur de t, nous obtenons, au lieu de l'expression (130), de nouvelles expressions qui sont toutes des solutions de l'équation (128). La somme de (130) et des diverses expressions obtenues comme nous venons de l'indiquer sera également une solution de (128). Cette somme sera de la même forme que (130), mais dans la quantité entre crochets toutes les puissances de u qui ne sont pas des fonctions uniformes de t auront disparu, il ne restera par conséquent que des termes en u^m que l'on remplacera par leur expression en fonction de t, c'est-à-dire par une fonction rationnelle de t. Nous obtiendrons bien ainsi, pour l'équation (1), une intégrale de la forme $L\overline{x, t}$

$$(131) \qquad xu[1 + xA_1 + x^2 A_2 + \ldots] = C$$

où A_1, A_2, A_3, ... sont des fonctions rationnelles de t. Pour être certain de la convergence du premier membre de (131), il nous suffit d'être assuré de la convergence des diverses expressions dont nous avons fait la somme. Or, si nous faisons abstraction pour chacune de ces expressions d'un facteur constant provenant de la quantité u

qui dans (130) est en dehors des crochets, nous pouvons obtenir ces diverses expressions de la façon suivante. Nous considérons le développement $g(x, t)$, où $g_1, g_2, g_3 \ldots$ sont des intégrales curvilignes prises le long d'un chemin composé de la façon suivante : 1° On va par le plus court chemin possible, sans sortir de (D), du point $t = 0$ au cercle (ρ_i) le plus voisin, (ρ_1) par exemple; on décrit un certain nombre de fois, inférieur à m, ce cercle; on va ensuite, par le plus court chemin possible, au cercle (ρ_i) le plus voisin qu'on décrit un certain nombre de fois. On continue ainsi, jusqu'à ce qu'en décrivant un nombre convenable de fois un nombre convenable de cercles et revenant au point $t = 0$ par le plus court chemin possible, on ait obtenu une des déterminations de u. A chaque détermination de u correspondent un ou plusieurs circuits de l'espèce indiquée. Nous choisirons celui dont la longueur est minimum. Soit l_1 la longueur maximum des divers circuits que nous devons considérer pour obtenir les diverses déterminations de u.

2° On va par le plus court chemin, sans sortir de (D), de $t = 0$ au point relatif à une valeur de t. La longueur de ce chemin est au plus égale à l_2, le nombre l_2 étant au plus égal à $R + \pi(n + 1)\rho$.

Nous voyons que, si l'on a pris

$$l > l_1 + l_2,$$

les diverses expressions dont nous avons fait la somme pour obtenir le premier membre de (131) sont convergents si l'on a $|x| < \varepsilon$. *Le premier membre de* (131) *est donc convergent si t est situé à l'intérieur du domaine* (D) *et si l'on a* $|x| < \varepsilon$. Lorsque tous les exposants μ_i sont rationnels, il existe une infinité d'intégrales $L\overline{x, t}$ de l'équation (128), dès que cette équation admet une intégrale de cette forme.

Nous venons de démontrer que, parmi cette infinité d'intégrales, on peut en trouver une qui soit convergente, lorsque t est à l'intérieur de (D) et lorsque l'on a $|x| < \varepsilon$. En se reportant à la démonstration du théorème invoqué, on voit que le développement (131) est uniformément convergent, lorsque t varie dans (D).

Une solution quelconque de l'équation (1) vérifie la relation (131) si x et t remplissent les conditions indiquées pour la convergence. Si nous posons $x = zy$, l'équation en z et y, qui est analogue à l'équation (128), admettra une solution de la forme

$$(132) \qquad y[1 + yH_1(z) + y^2H_2(z) \ldots] \prod_{i=1}^{n+1} (1 + a_i z)^{\mu_i}$$

qui se déduit de (131) en remplaçant x par zy et t par z^{-1}.

Les fractions rationnelles $H_1, H_2, H_3, \ldots$ ne contiendront en dénominateur que des facteurs tels que $1 + a_i z$. Prenons des valeurs de z telles que l'on ait $|z| = R^{-1}$. Si y prend des valeurs telles que l'on ait

$$|x| = |zy| = |y| R^{-1} < \varepsilon,$$

le développement (131), et par suite le développement (132), sera uniformément convergent pour les valeurs considérées de y et de z. Comme les termes de (132) sont des fonctions holomorphes de z pour $|z| < R^{-1}$, on sait ([29]) que le développement (132) sera convergent et sera une fonction holomorphe de z, si l'on a

$$|z| \leqslant R^{-1}, \qquad |y| \leqslant \varepsilon R.$$

Il revient au même de dire que le développement (131) sera convergent si l'on a

$$|t| \geqslant R, \qquad |y| \leqslant \varepsilon R.$$

Le développement (131) sera donc convergent pour les valeurs de t appartenant au domaine (D′) formé par les points du plan (y compris $t = \infty$) qui sont extérieurs à tous les cercles (ρ_i), à condition que suivant que l'on a $|t| < R$ ou $|t| > R$ on ait $|x| < \varepsilon$ ou $|y| < \varepsilon R$. Ces conditions seront toujours vérifiées lorsque, considérant une solution $y(x)$ pour laquelle x et y tendent vers zéro et faisant tendre x vers zéro, on attribue à t, pour chaque valeur de x, la valeur $t(x)$ correspondante.

Nous allons encore élargir le domaine de convergence du premier membre de l'intégrale (131) en montrant qu'on peut la mettre sous la forme d'une intégrale $R\overline{x, t}$ régulière pour certaines des valeurs $t = -a_i$. Supposons que les exposants μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_p$ soient positifs. L'équation (123) admet une solution et une seule $t = -a_i + \chi_i$ qui est holomorphe et se réduit à $-a_i$ pour $x = 0$ si i a l'une des valeurs $1, 2, 3, \ldots, p$. Nous avons vu que l'intégrale (131) peut se mettre sous la forme d'une intégrale $R\overline{x, t}$ régulière pour $t = -a_1$, $t = -a_2$, ..., $t = -a_p$, c'est-à-dire

$$(133) \qquad x(1 + xB_1 + x^2B_2 + \ldots)\prod_{i=1}^{p}(t + a_i + \chi_i)^{\mu_i}\prod_{i=p+1}^{n+1}(t + a_i)^{\mu_i} = C.$$

en posant

$$(134) \qquad 1 + xB_1 + x^2B_2 + \ldots = (1 + xA_1 + x^2A_2 + \ldots)\prod_{i=1}^{p}\left(1 + \frac{\chi_i}{t + a_i}\right)^{-\mu_i},$$

où B_1, B_2, B_3 sont des fractions rationnelles en t holomorphes pour $t = -a_1$, $t = -a_2$, ..., $t = -a_p$. Si l'on prend $|t + a_i| > \rho$ et $|x| < \varepsilon$, le second membre de (134) peut se développer suivant les puissances de x et on obtient bien le premier membre de (134) sous la forme indiquée. Ce premier membre est donc une fonction holomorphe, si l'on a $|t + a_1| = \rho$ et $|x| < \varepsilon$. Comme les différents termes xB_1, x^2B_2, x^3B_3, ... sont des fonctions holomorphes, pour $|t + a_1| < \rho$ le premier membre de (134) sera une fonction holomorphe de t à l'intérieur du cercle (ρ_1) si l'on a $|x| < \varepsilon$; on montrera de même que le développement qui figure dans le premier membre

(29) Voir, par exemple, Picart, *Traité d'analyse*, t. III, 1re édit., p. 30, note 1.

de (133) est convergent pour $|x| < \varepsilon$ si t est à l'intérieur du domaine (D) ou à l'intérieur de l'un des cercles $(\rho_2), \ldots, (\rho_p)$. Si nous désignons par (Δ) le domaine formé dans le plan de la variable t par les points (y compris $t = \infty$) qui sont extérieurs aux divers cercles $(\rho_{p+1}), (\rho_{p+2}), \ldots, (\rho_{n+1})$, nous savons que la forme d'intégrale (133) sera valable, lorsque t se trouve dans le domaine (Δ) et lorsque l'on a $|x| < \varepsilon$ ou $|y| < \varepsilon R$, suivant que t se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle (R). Si donc nous considérons une solution $y(x)$ de l'équation (1) telle que x et y tendent simultanément vers zéro, la fonction $t(x) = y : x$ correspondant à cette solution vérifiera la relation (133) si t ne sort pas du domaine (Δ).

Montrons, à l'aide de cette relation (133), qu'il est impossible qu'il y ait une solution telle que, x et y tendant simultanément vers zéro, $t = y : x$ ne tende vers aucune limite. Si nous considérons, en effet, une solution $y(x)$ telle que y tende vers zéro avec x, deux cas seulement sont possibles.

1° *t restera constamment à partir d'une valeur de x suffisamment petite dans le domaine* (Δ);

2° *t prendra pour des valeurs de x de module aussi petit que l'on voudra des valeurs extérieures au domaine (Δ), c'est-à-dire intérieures à l'un des cercles* $(\rho_{p+1}), (\rho_{p+2}), \ldots, (\rho_{n+1})$.

Considérons le premier cas. Si l'on suppose que t ne tende vers aucune limite, t ne tendra pas vers l'infini et on peut supposer R assez grand pour que, si petit que soit x, la fonction $t(x)$ prenne des valeurs telles que l'on ait $|t| < R$. Pour ces valeurs de t, l'expression $1 + xB_1 + x^2B_2 + \ldots$ reste finie. Puisque nous considérons une solution telle que t ne tende vers aucune limite, cette solution ne se confondra avec aucune des solutions $y(x)$, pour lesquelles on a $t + a_i + \chi_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots p)$. Le premier membre de la relation (133) n'est donc pas nul; d'autre part, il tend vers 0 avec x, il est donc impossible que ce premier membre reste constant et que la solution considérée vérifie la relation (133), si l'on est dans le cas 1°. Nous voyons de plus que, dans ce cas 1°, il n'y a pas d'autres solutions que les solutions $y = -a_ix + x\chi_i$, où $i = 1, 2, 3, \ldots p$, pour lesquelles t tende vers une limite. Nous en concluons qu'il n'y a que ces p solutions $y = -a_ix + x\chi_i$ pour lesquelles se présente ce cas 1°. *Il n'y a pas dans ce cas 1° de solutions pour lesquelles t ne tend vers aucune limite.*

Montrons maintenant que si le cas 2° se présente, t tend nécessairement vers une des limites $-a_{p+1}, -a_{p+2}, \ldots -a_{n+1}$, lorsque x et y tendent vers 0. Posons

$$y + a_jx = vx, \qquad t + a_j = v,$$

j ayant l'une des valeurs $p+1, p+2, \ldots, n+1$. La fonction v vérifie une équation différentielle qu'on met immédiatement sous la forme

$$(135) \qquad \mu_j x dv + (v + \ldots)dx = 0,$$

équation dont l'intégrale générale se met toujours, en vertu des conditions (M'), sous la forme

$$(136) \qquad (v + \ldots) = K x^{-\mu_j}.$$

K est une constante arbitraire et la quantité entre parenthèse est une fonction holomorphe de x et de v, pour $|x| < \varepsilon'$ et $|v| < \rho$; si ρ et ε' sont assez petits, nous n'avons pas écrit les termes en x et v de degré supérieur au premier de cette fonction holomorphe. On montre facilement, en résolvant (136) par rapport à v, que la fonction $v(x)$ vérifiant la relation (136) tend vers o lorsque x tend vers o. Le raisonnement s'applique pour toutes les valeurs de j telles que μ_j soit négatif. Donc si on a une solution $y(x)$ telle que pour $x < \varepsilon'$, l'affixe de t prenne une valeur extérieure au domaine (Δ), cette solution est une des solutions algébroïdes fournies par une solution $v(x)$ nulle pour $x = 0$ d'une équation (135) et $t = y : x$ tend vers un des nombres $-a_j$, où $j = p + 1, p + 2, \ldots n + 1$.

Si les conditions (L) *sont vérifiées et si les exposants* μ_i *sont rationnels, les seules intégrales pour lesquelles* x *et* y *tendent simultanément vers* o *sont des intégrales algébroïdes pour* $x = 0$, *fournies au moyen du changement de variable* $y = -a_i x + vx$ *par les solutions* $v(x)$ *nulles pour* $x = 0$ *de* $n + 1$ *équations telles que* (135).

[**27**] *Cas où* $yY_n(x, y) + xX_n(x, y)$ *admet des facteurs multiples.* — Si $yY_n(x, y) + xX_n(x, y)$, au lieu de n'admettre que des facteurs simples, admet des facteurs multiples, il en résultera une certaine complication de raisonnements, dans la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que $x = 0$, $y = 0$ soit un point singulier algébrique de l'équation (1), mais il n'y aura aucune différence essentielle dans la méthode à suivre pour cette recherche. Nous considérerons, pour simplifier, le cas où il n'y a qu'un seul facteur multiple et il sera bien évident, après cette étude, que les considérations développées s'appliqueraient au cas de plusieurs facteurs multiples, à condition de considérer successivement chacun de ces facteurs.

Supposons que $yY_n(x, y) + xX_n(x, y)$ admette le facteur multiple $(y + a_1 x)^r$. Faisons les changements de variable

$$y = tx, \qquad t + a_1 = y_1,$$

l'équation (1) prend la forme

$$(137) \qquad (xP_1 + x^2 P_2 + \ldots) dy_1 + (Q_0 + xQ_1 + x^2 Q_2 + \ldots) dx = 0,$$

$P_1, P_2, \ldots, Q_0, Q_1, Q_2 \ldots$ étant des polynomes en y_1. Cherchons quelle doit être la forme de ces polynomes pour que $x = 0$, $y = 0$ soit un point singulier algébrique de l'équation (1). Afin d'obtenir des conditions plus simples, nous supposerons, ainsi qu'on peut toujours le faire, que, par un changement de variable $x = x_1^N$, on ait rendu holomorphes pour $x_1 = 0$, les solutions $y(x)$ qui étaient algébroïdes pour $x=0$ [30]. En supprimant l'indice de x_1, nous aurons à exprimer que toutes les solutions $y(x)$ de l'équation (1) qui sont nulles pour $x=0$ sont holomorphes pour $x=0$. Nous pourrons dire que, dans ce cas, $x=0$, $y=0$ est un *point singulier holomorphe* de l'équation (1). Le point $x=0$, $y_1=0$ devra également être un *point singulier holomorphe* de l'équation (137). Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire tout d'abord que P_1 contienne [31] en facteur y_1^{r-1}, puisque Q_0 contient en facteur y_1^r. En effet, s'il en était autrement, nous avons vu [§ 6, équation (20), cas $q<s+1$] que l'équation (137) admettrait une infinité de solutions $y_1(x)$ nulles, mais non algébroïdes pour $x=0$. Pour obtenir la forme des polynomes P_2, P_3, ..., Q_1, Q_2, ... rappelons d'abord le résultat suivant :

Soit l'équation

$$(Ay^p+\ldots)dy+y(By^p+\ldots)dx=0 \tag{138}$$

où A et B désignent des constantes dont l'une au moins n'est pas nulle et où les quantités entre parenthèses sont des fonctions de x et y holomorphes et nulles pour $x=0$, $y=0$; les termes non écrits dans ces parenthèses contiennent en facteur

---

(30) Cette hypothèse présente de grands avantages pour l'exposition des méthodes. Elle présente de grands inconvénients pour l'application pratique de ces méthodes. Elle nous conduira, en effet, presque toujours à des expressions $yY_n(x, y)+xX_n(x, y)$ qui se réduisent à une puissance de y : *nous serons presque toujours ainsi dans le cas compliqué d'un facteur multiple.* Le mieux serait, dans les applications, de s'inspirer des méthodes exposées et de traiter directement le cas où il y a des solutions $y(x)$ algébroïdes, mais non holomorphes pour $x=0$. Nous considérerions, par exemple, des intégrales $f\overline{x, y}$ de la forme

$$[1+H(x, y)]\prod_{i=1}^{q}(y+\varphi_i)^{\lambda_i}=G,$$

où φ_i pourrait être un développement procédant suivant les puissances de $x^{\frac{1}{s}}$. Nous devons remarquer, à ce propos, que les diverses solutions algébroïdes $y=\varphi(x)$ qui font partie d'un même cycle, et qui se déduisent les unes des autres en faisant tourner x autour de $x=0$, ne figurent pas nécessairement toutes dans $f\overline{x, y}$ parce que l'une d'elles y figure. Par exemple, l'équation

$$2x\,dy-y\,dx=0$$

admet pour intégrale générale

$$\left(y+x^{\frac{1}{2}}\right)\left(y+2x^{\frac{1}{2}}\right)\left(y+3x^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}=C,$$

et il serait facile de former des exemples moins simples présentant cette particularité.

(31) Rien ne s'oppose à ce que P_1 contienne en facteur une puissance de y, égale ou supérieure à r. En effet, si nous considérons l'équation dont l'intégrale générale est

$$x(y-x^2)(y+x^2)^2y^{-3}e^{x^2}=C,$$

toutes les solutions $y(x)$ nulles pour $x=0$ sont holomorphes pour $x=0$. En formant cette équation, on voit que l'on a $a_1=0$; en posant $y=y_1x$, on obtient l'équation

$$(-x^2y_1+x^3)dy_1+(y_1^3+xy_1^2-x^2y_1+2x^2y_1^3-2x^4y_1)x=0,$$

où le polynome P_1 de l'équation (137) est identiquement nul.

soit x, soit y_{p+1}. Nous supposons que ces deux parenthèses n'admettent aucun facteur commun holomorphe et nul pour $x=0$, $y=0$. Nous avons montré (*A. U. G.*, p. 15) que cette équation ou bien admet une infinité de solutions $y(x)$ nulles pour $x=0$, mais non algébroïdes pour $x=0$, ou bien admet en dehors de la solution $y=0$, p solutions $y(x)$ algébroïdes et nulles pour $x=0$. Donc, pourvu que p soit égal ou supérieur à 1, nous pouvons dire que l'équation (138) admet ou bien une infinité de solutions $y(x)$ nulles, mais non algébroïdes pour $x=0$, ou bien au moins une solution algébroïde et nulle pour $x=0$ et différente de $y=0$.

Nous allons nous servir de ce résultat pour démontrer que si $x=0$, $y_1=0$ est un *point singulier holomorphe* de l'équation (137), les polynomes P_i et Q_i contiennent en facteur y_1^{r-i} pour toutes les valeurs de i qui ne dépassent pas r. Posons

$$P_i = y_1^{s_i} p_i, \qquad Q_i = y_1^{r_i},$$

p_i et q_i étant deux polynomes en y_1 que nous ne supposerons nuls ni l'un ni l'autre pour $y_1=0$. Formons, pour les divers termes $x^i P_i$ de l'équation (137), les sommes $i+s_i$. Formons de même, pour les divers termes $x^i Q_i$, les sommes $i+r_i$. La somme relative au terme Q_0 est égale à r. Je dis que toutes les sommes $i+s_i$ et $i+r_i$ sont égales ou supérieures à r. Supposons, en effet, que certaines d'entre elles soient inférieures à r; désignons par $r-\alpha$ la plus petite valeur des sommes $i+s_i$ et considérons, parmi les termes $x^i P_i$ pour lesquels on a $i+s_i=r-\alpha$, le terme où l'indice i est le plus faible. Soit $x^{p'+1}P_{p'+1}$ ce terme. Désignons de même par $r-\alpha'$ la plus petite valeur que prennent les sommes $i+r_i$, et parmi les termes $x^i Q_i$ pour lesquels on a $i+r_i=r-\alpha'$, considérons le terme $x^{p''}Q_{p''}$ pour lequel l'indice i est le plus faible. Un des nombres α ou α' est au moins égal à 1 par hypothèse. Les deux entiers p' et p'' sont au moins égaux à 1, puisque les sommes $i+s_i$ et $i+r_i$ relatives aux termes xP_1 et Q_0 sont égales ou supérieures à r. Faisons dans l'équation (137) le changement de variable

$$x = uy_1.$$

Si l'on a $r-\alpha=r-\alpha'$, l'équation (137) prend la forme

$$(139)\qquad (au^{p'+1}+\ldots)dy_1+(bu^{p''}+\ldots)(udy_1+y_1\,du)=0.$$

a et b sont deux constantes, qui ne sont nulles ni l'une ni l'autre, et les termes non écrits contiennent en facteur ou bien y_1 ou bien $u^{p'+2}$ dans la première parenthèse et $u^{p''+1}$ dans la deuxième parenthèse. En désignant par p le plus petit des deux nombres p' et p'', l'équation (139) prend la forme

$$(140)\qquad y_1(\mathrm{A}u^p+\ldots)du+u(\mathrm{B}u^p+\ldots)dy_1=0.$$

Comme dans l'équation (138), p est au moins égal à 1 ; A et B sont des constantes dont l'une au moins n'est pas nulle; les termes non écrits contiennent en facteur soit y_1, soit u^{p+1}.

Si l'on a $r-\alpha > r-\alpha'$, c'est-à-dire $r-\alpha = r-\alpha'+\beta$, l'entier β étant positif, l'équation (137) prend la forme (140) avec

$$A = B, \qquad p = p''.$$

Si l'on a $r-\alpha < r-\alpha'$, c'est-à-dire $r-\alpha' = r-\alpha+\beta$ l'équation (137) prend la forme (140) avec

$$B = 0, \qquad p = p'.$$

D'après la propriété que nous avons rappelée de l'équation (138), l'équation (140) ou bien admet une infinité de solutions $u(y_1)$ nulles, mais non algébroïdes pour $x=0$, ou bien admet au moins une solution $u(y_1)$ algébroïde et nulle pour $y_1=0$, mais différente de $u=0$. Aucun de ces deux cas ne peut se présenter, si, comme nous le supposons, toutes les solutions $y_1(x)$, nulles pour $x=0$, sont holomorphes pour $x=0$. En effet, une solution $u(y_1)$ nulle pour $y_1=0$ (algébroïde ou non pour $x=0$) fournit, au moyen de la relation $x=uy_1$, une solution $y_1(x)$ nulle pour $x=0$, mais non holomorphe, puisque $y_1 : x$ ne tend pas vers une limite finie, lorsque x tend vers o. Il en résulte que, si $x=0$, $y=0$ est un point singulier holomorphe de l'équation (1), les nombres α et α' sont nuls tous les deux et *l'équation* (137) *prend la forme*

$$(141) \quad x[V_{r-1}(x, y_1)+V_r(x, y_1)+\ldots]\,dy_1+[Z_r(x, y_1)+Z_{r+1}(x, y_1)+\ldots]\,dx=0;$$

V_i et Z_i désignent des polynomes homogènes en x et y_1 de degré égal à l'indice. Nous avons dit que $Y_n(1, t)$ contient en facteur $(t+a_1)^{r-1}$, puisque $tY_n(1, t)+X_n(1, t)$ contient en facteur $(t+a_1)^r$, et l'on a

$$\frac{Y_n(1, t)}{tY_n(1, t)+X_n(1, t)}=\sum_{i=1}^{p}\frac{\mu_i}{t+a_i};$$

le nombre p est égal, dans le cas actuel, à $n+2-r$ ([32]). Il en résulte facilement qu'on peut poser :

$$V_{r-1}(x, y_1)=\mu_1 y_1^{r-1}+A_1 x y_1^{r-2}+\ldots+A_{r-1}x^{r-1},$$
$$Z_r(x, y_1)=y^r+B_1 x y_1^{r-1}+\ldots+B_r x^r.$$

[28] *Conditions pour que $x=0$, $y=0$ soit un point algébrique dans le cas où $yY_n(x, y)+xX_n(x, y)$ admet un facteur multiple.* — Si nous cherchons les conditions

---

([32]) Nous devons supposer que $Y_n(1, t)$ est bien de degré n. S'il n'en était pas ainsi, on mettrait en évidence, en posant $x=zy$, des solutions $y(x)$ algébroïdes ou non pour $x=0$, pour lesquelles z tendrait vers o lorsque x et y tendent vers o. Ceci ne peut se produire si toutes les solutions $y(x)$ nulles pour $x=0$ sont holomorphes pour x. Le raisonnement ne pourrait être en défaut que si l'équation différentielle en x et y admettait la solution $z=0$; dans ce cas, x serait en facteur dans $Y(x, y)$ [équation (1)]. Un changement de variable (§ 3) permet de supposer qu'il n'en est pas ainsi.

nécessaires pour que $x+0$, $y=0$ soit un point algébrique de l'équation (1), rien ne sera changé à ce que nous avons dit (§ 25) au sujet des conditions (M) et (M') qui expriment que les solutions $y(x)$ nulles pour $x=0$ sont algébroïdes, lorsqu'on ne considère que les solutions pour lesquelles $t=y:x$ tend vers une des limites $-a_2$, $-a_3$, $-a_p$ correspondant aux facteurs simples de $tY_n(1,t)+X_n(1,t)$. Il n'y a rien à changer non plus à ce que nous avons dit (§ 25) au sujet des conditions (L). Il n'en sera pas de même, si on considère les solutions pour lesquelles $y:x$ tend vers $-a_1$, lorsque x tend vers o. En faisant le changement de variable

$$y=-a_1x+xy_1,$$

les fonctions $y_1(x)$ correspondant à ces solutions vérifieront l'équation (137). Nous supposerons, comme nous l'avons dit (§ 27), qu'on ait rendu holomorphes, pour $x=0$, toutes les solutions qui étaient algébroïdes pour $x=0$. L'équation (137) devra être de la forme (141), et nous aurons un certain nombre de conditions que nous appellerons conditions (R), qui expriment qu'il en est bien ainsi. Nous raisonnerons sur cette équation (141) comme nous avons raisonné sur l'équation (1). Si nous supposons que $xy_1V_{r-1}(x,y_1)+xZ_r(x,y_1)$ n'admette que des facteurs simples, on aura, en désignant par a_i' des constantes convenables,

$$y_1V_{r-1}(x,y_1)+Z_r(x,y_1)=(1+\mu_1)\prod_{i=1}^{r}(y_1+a_i'x);$$

les nombres a_i' étant tous distincts les uns des autres. Aucun des facteurs $y_1+a_i'x$ ne doit être facteur de $V_{r-1}(x,y_1)$ [§ 25, condition (M_0)]. Nous obtenons ainsi des conditions (M_0'). Nous avons, en posant $y_1=t_1x$,

$$\frac{V_{r-1}(1,t_1)}{t_1V_{r-1}(1,t_1)+Z_r(1,t_1)}=\sum_{i=1}^{r}\frac{\mu_i'}{t_1+a_i'}$$

avec la relation

$$\sum_{i=1}^{r}\mu_i'=\frac{\mu_1}{1+\mu_1}. \tag{142}$$

Le point $x=0$, $y_1=0$ devant être un point singulier algébrique, les nombres μ_i' ne devront être ni imaginaires, ni négatifs et irrationnels [§ 25, conditions (M)]. Nous obtenons ainsi des conditions (M_1), analogues aux conditions (M). Nous ne devons pas oublier qu'il faut considérer, pour l'équation (141), les solutions pour lesquelles $y_1:x$ croît indéfiniment. En posant $x=uy_1$, on obtient l'équation

$$y_1(1+\ldots)du+u(1+\mu_1+\ldots)dy_1=0, \tag{143}$$

les termes non écrits étant nuls pour $u=0$, $y_1=0$. Le nombre $1+\mu_1$ ne devra être ni imaginaire, ni négatif et irrationnel. Il ne devra pas être non plus négatif et rationnel (cf. § 22), si l'on suppose que $x=0$, $y_1=0$ soit un point singulier holomorphe de l'équation (141). $1+\mu_1$ ne peut être nul que si $xy_1V_{r-1}(x, y_1)+xZ_r(x, y_1)$ est identiquement nul, cas que nous examinerons dans la suite. En effet, si l'on n'est pas dans ce cas et si $1+\mu_1$ est nul, l'équation (143), où *le coefficient de dy_1 ne contient pas y_1 en facteur*, aura une infinité de solutions $u(y_1)$ nulles pour $x=0$, mais non algébroïdes, ce qui ne peut avoir lieu si $x=y_1=0$ est un point algébrique de (141).

En dehors des conditions (M_1), analogues aux conditions (M), nous aurons en outre les conditions (M_1'), analogues aux conditions (M'), relatives au cas où certains des nombres μ_i' seraient des inverses d'entiers négatifs. Nous aurons ainsi un ensemble de conditions exprimant que les solutions $y(x)$, pour lesquelles $y_1:x=t_1$ tend vers une limite, sont algébroïdes ou holomorphes [33] pour $x=0$.

Pour que $x=0$, $y=0$ soit un point singulier algébrique de (1), il faut que les conditions (L), dont nous avons parlé (§ 25), soient vérifiées; il faut aussi que les conditions analogues (L_1) soient vérifiées pour l'équation (141). Celle-ci doit en effet, pour que $t_1=y_1:x$ tende toujours vers une limite, si x et y_1 tendent vers zéro, admettre une intégrale

$$x(1+x\overline{L}_1+x^2\overline{L}_2+\ldots)\sum_{i=1}^{r}(t_1+b_i)^{\mu'_i}=C \tag{144}$$

où $\overline{L}_1$, $\overline{L}_2$, ... sont des fractions rationnelles en t_1. Nous aurons ainsi, dans le cas où $y_iV_{r-2}(x, y_1)+Z_r(x, y_1)$ n'admet pas de facteurs multiples, un ensemble de conditions nécessaires pour que $x=0$, $y=0$ soit un point algébrique de l'équation (1).

Si $y_1V_{r-1}(x, y_1)+Z_r(x, y_1)$ admet un facteur multiple, nous raisonnerons sur ce facteur multiple comme nous avons raisonné sur le facteur $(y+a_1x)^r$. Nous formerons une équation en x et y_2 qui jouera par rapport à l'équation (141) le rôle que cette équation (141) jouait par rapport à l'équation (1). Nous continuons à raisonner ainsi et à former de nouvelles conditions nécessaires jusqu'à ce que nous arrivions à des équations pour lesquelles les quantités analogues à $yY_n(x, y)+xX_n(x, y)$ n'admettent que des facteurs simples. Nous sommes certains d'y arriver, d'après ce que nous savons (voir note 2) sur la recherche des solutions $y(x)$ algébroïdes et nulles pour $x=0$. En effet, les équations successives que nous formons sont celles que l'on est amené à former dans la recherche de ces solutions algébroïdes. *Nous obtenons ainsi, dans tous les cas, des conditions nécessaires pour que $x=0$, $y=0$ soit un point singulier algébrique.* Nous n'avons à dire, au sujet du caractère algébrique ou transcendant de ces conditions, rien que nous n'ayons déjà dit (§ 25).

---

(33) L'hypothèse complémentaire faite en disant que nous supposons que toutes les solutions $y(x)$ nulles et algébroïdes pour $x=0$ sont holomorphes pour $x=0$ n'est guère intervenue que pour préciser la forme de l'équation (141), sur laquelle nous avons raisonné. Les conditions (M_1), (M_1') s'obtiendraient sans peine, même si on ne faisait pas l'hypothèse en question, et les conditions (R) résulteraient de l'application de la méthode suivie (cf. note 30).

[29] *Les conditions nécessaires trouvées sont-elles suffisantes?* — Il paraît très probable que les conditions nécessaires. que nous venons d'apprendre à former, sont suffisantes pour que $x=0$, $y=0$ soit un point singulier algébrique; mais si nous voulons le démontrer, nous nous heurterons à certaines difficultés. Tout d'abord, nous devrons faire des restrictions analogues à celles que nous avons déjà été obligé de faire dans le cas plus simple où $yY_n(x, y)+xX_n(x, y)$ n'admet pas de facteur multiple : nous devrons supposer que les nombres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ sont rationnels. On ne pourrait, si la chose est possible, se débarrasser de ces restrictions qu'en faisant une étude complète des conditions de convergence du développement $1+xL_1+x^2L_2+\ldots$ qui figure dans l'intégrale (125) ou en établissant l'existence d'une intégrale $R\overline{x, t}$ régulière pour toutes les valeurs de t. C'est en raison de cette circonstance que nous avons cherché à établir dans quels cas cette intégrale $R\overline{x, t}$ existe.

Une fois faite, la restriction énoncée relative aux valeurs de $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ et des quantités analogues, d'autres difficultés se présenteront encore; ce seront non des difficultés de principes, mais des difficultés d'exposition provenant de la grande multiplicité des cas à examiner et des équations successives qui nous ont fourni les conditions nécessaires, équations qu'il faudra toutes faire intervenir pour démontrer que les conditions trouvées sont suffisantes. Pour diminuer ces difficultés d'exposition, au lieu de chercher à établir une démonstration générale que la complication des notations pourrait obscurcir, je trouve préférable de considérer (comme nous l'avons fait déjà pour établir les conditions nécessaires) un cas relativement simple, qui mettra cependant, me semble-t-il, suffisamment en évidence la marche à suivre pour établir dans les cas les plus compliqués que les conditions nécessaires trouvées sont suffisantes. Nous nous plaçons dans les conditions suivantes :

1° L'expression $yY_n(x, y)+xX_n(x, y)$ admet un seul facteur multiple $(y+a_1x)^r$ et elle admet en outre $n+2-r$, facteurs simples $y+a_2x,\ y+a_3x,\ \ldots,\ y+a_px$ avec $p=n+r-1$.

2° Si l'on pose

$$y=tx, \qquad t=-a_1+y_1,$$

l'équation (1) prend la forme (141) et l'expression $y_1V_{r-1}(x, y_1)+Z_r(x, y_1)$ n'admet que des facteurs simples $y_1+a_1'x,\ y_1+a_2'x,\ \ldots,\ y_1+a_r'x$.

3° Les nombres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$, ainsi que les nombres $\mu_1', \mu_2', \ldots, \mu_r'$ définis § 28 sont tous rationnels (34).

4° Les conditions (M), (M'), (L), (R), (M_1), (M_1'), (L_1), dont nous avons parlé, sont vérifiées.

---

(34) Cela revient à supposer qu'ils peuvent être positifs et irrationnels. Si $\mu_2, \mu_3, \ldots \mu_p$ sont rationnels, μ_1 l'est aussi. Si $\mu_1', \mu_2', \ldots, \mu_{r-1}'$ sont rationnels, μ_r' l'est aussi.

L'hypothèse 1° est uniquement destinée à simplifier les notations. Il sera bien évident que les raisonnements que nous allons faire s'appliqueraient quel que soit le nombre des facteurs multiples.

L'hypothèse 2°, ou plus exactement la deuxième partie de cette hypothèse (car la première partie de l'hypothèse est une condition nécessaire), est destinée à simplifier les raisonnements à faire. Nous nous plaçons dans un cas où nous n'aurons pas à faire intervenir une longue suite d'équations déduites les unes des autres de la même manière que l'équation (141) en x et y_1 se déduit de l'équation (1). Bien que ce soit là une hypothèse restrictive, il me semble qu'on n'aura, une fois ce cas simple exposé, aucun doute sur la possibilité d'appliquer aux cas les plus compliqués le raisonnement développé dans le cas simple examiné.

L'hypothèse 3°, qui restreint réellement le champ d'application de notre méthode, nous est imposée par la nécessité de ne faire intervenir les intégrales $L\overline{x, t}$, $L\overline{x, t_1}$ et (136) que dans des cas où la convergence des développements qui figurent dans ces intégrales est bien assurée. Nous supprimerions cette restriction 3° si nous avions une raison quelconque d'affirmer la convergence en question. Nous serons enfin amenés à faire dans le cours de la démonstration une restriction que nous énoncerons plus loin.

Nous allons montrer que, dans les conditions où nous nous plaçons, $x = 0$, $y = 0$ est un point singulier algébrique de l'équation (1). Nous supposerons que les nombres $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_q$ sont positifs, tandis que les nombres $\mu_{q+1}, \mu_{q+2}, \ldots, \mu_p$ sont négatifs. Nous supposerons que les nombres $\mu_1', \mu_2', \ldots, \mu_q'$ sont positifs, tandis que les nombres $\mu'_{q'+1}, \mu'_{q'+2}, \ldots, \mu_r'$ sont négatifs. Dans ce qui suit, ε et ρ seront des nombres assez petits et R sera un nombre assez grand pour que toutes les conditions que nous énumérerons soient vérifiées. Nous emploierons les notations suivantes :

1° (ρ_i) désigne un cercle de rayon ρ décrit dans le plan de la variable complexe t autour du point $-a_i$ comme centre.

2° (ρ_i') désigne un cercle de rayon ρ décrit dans le plan de la variable t_1 autour de $t_1 = -a_i'$ comme centre.

3° (R) et (R') désignent des cercles de rayon R ayant l'origine pour centre et décrits : le premier dans le plan de la variable t, le second dans le plan de la variable t_1.

4° (Δ) désigne le domaine formé, dans le plan de la variable complexe t, par les points qui sont extérieurs aux divers cercles (ρ_{q+1}), $\rho(_{q+2})$, $\ldots$, (ρ_p) et (ρ_1). Si du domaine (Δ) on retranche les points extérieurs au cercle (R), on a le domaine $(\overline{\Delta})$.

5° (Δ') désigne le domaine formé dans le plan de la variable t_1 par les points extérieurs aux cercles $(\rho'_{q'+1})$, $(\rho'_{q'+2})$, $\ldots$, (ρ_r'). Si du domaine (Δ') on retranche les points extérieurs au cercle (R'), on obtient le domaine $\overline{\Delta}'$.

En raisonnant comme nous l'avons fait (§ 21), nous démontrerons que, puisqu'il existe une intégrale $L\overline{x, t}$ [voir équation (125)], il existe une intégrale $R\overline{x, t}$ régulière pour $t = -a_2$, $t = -a_3$, $t = -a_q$:

$$(145) \qquad x(t+a_1)^{\mu_1}[1 + H(x|t)] \prod_{i=2}^{q} (t + a_i + \chi_i)^{\mu_i} \prod_{i=q+1}^{p} (t + a_i)^{\mu_i} = C;$$

$H(x|t)$ est un développement de la forme

$$H(x|t) = xH_1 + x^2H_2 + x^3H_3 + \dots,$$

H_1, H_2, H_3, ... étant des fractions rationnelles en t dont les dénominateurs ne contiennent pas d'autres facteurs que $t + a_{q+1}$, $t + a_{q+2}$, ..., $t + a_p$ et $t + a_1$. En raisonnant comme précédemment (§ 26), nous montrerons que $H(x, t)$ est uniformément convergent si l'on a $|x| < \varepsilon$ et si t appartient au domaine (Δ). Il faut que l'on ait de plus $|y| < \varepsilon R$ si t est extérieur au cercle (R). On peut dire encore que $H(x|t)$ est convergent si l'on a $|x| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon R$ et si t appartient à (Δ).

De la même façon, on démontrera que, puisqu'il existe une intégrale $L\overline{x, t_1}$ [égalité (144)], on a une intégrale $R\overline{x, t_1}$ régulière pour $t_1 = -a'_1$, $t_1 = -a'_2$, ..., $t_1 = -a'_{q'}$:

$$(146) \qquad x[1 + \overline{H}(x|t_1)] \prod_{i=1}^{q'} (t_1 + a'_i + \psi_i)^{\mu'_i} \prod_{i=q'+1}^{r} (t_1 + a'_i)^{\mu'_i} = C'$$

où sont employées des notations analogues à celles employées pour (145). Les coefficients du développement de $\overline{H}(x|t_1)$ suivant les puissances de x sont des fractions rationnelles en t_1, dont les seuls pôles possibles sont $t_1 = -a'_{q'+1}$, $t_1 = -a'_{q'+2}$, ..., $t_1 = -a'_r$. $\overline{H}(x, t_1)$ est convergent si l'on a $|x| < \varepsilon$ et si t_1 appartient au domaine $(\overline{\Delta})$, ou si t_1 est extérieur au cercle (R') et si l'on a $|y_1| < R\varepsilon$. Ceci équivaut à dire que $\overline{H}(x|t_1)$ est convergent si l'on a $|x| < \varepsilon$, $|y_1| < \varepsilon R$ et si t_1 appartient au domaine (Δ'). On sait que l'on a $y_1 = t + a_1 = t_1 x$.

Nous remarquerons également que, si l'on considère une solution $y(x)$ de l'équation (1), et si, pour une valeur de x telle que l'on ait $|x| < \varepsilon$, t prend une valeur intérieure à l'un des cercles (ρ_{q+1}), (ρ_{q+2}), ..., (ρ_p), t tendra nécessairement vers la valeur $-a_i$ correspondant au centre de ce cercle, et alors, en vertu des conditions (M), la solution $y(x)$ considérée sera algébroïde et nulle pour $x = 0$. En effet, nous pouvons supposer ε et ρ assez petits pour que le raisonnement que nous avons fait sur l'équation (135), à l'aide de l'intégrale (136), puisse s'appliquer. Pour la même raison, si t_1 prend une valeur intérieure à l'un des cercles $(\rho'_{q'+1})$, $(\rho'_{q'+2})$, ..., (ρ'_r), la variable t_1 tendra nécessairement vers la valeur $-a'_i$ correspondant au centre du cercle et, d'après les conditions (M'), la solution $y(x)$ correspondante sera algébroïde et nulle pour $x = 0$.

Ces préliminaires posés, nous allons montrer que, en faisant une restriction que nous énoncerons plus loin, si l'on considère une solution $y(x)$ pour laquelle y tend vers zéro avec x, la fonction t tendra nécessairement vers une limite. Supposons, en effet, que t ne tende vers aucune limite, en particulier ne tende ni vers $t=\infty$, ni vers aucune des valeurs $-a_i$, l'indice i prenant les valeurs 1, 2, 3, ..., p. On pourra supposer ρ assez petit et R assez grand pour que t prenne, pour des valeurs de x aussi petites que l'on voudra, des valeurs intérieures au cercle (R) et extérieures au cercle (ρ_i), l'indice i prenant les valeurs 1, 2, 3, ..., p. D'après ce que nous avons dit, t ne pourra pas, pour des valeurs de x telles que l'on ait $|x|<\varepsilon$, prendre des valeurs intérieures aux cercles (ρ_{q+1}), (ρ_{q+2}), ... (ρ_p), puisque, s'il en était ainsi, t tendrait vers une limite. Nous devons donc supposer que pour $|x|<\varepsilon$, la fonction t ne prend que des valeurs intérieures soit au domaine (Δ), soit au cercle (ρ_1) et que de plus, pour des valeurs de x aussi petites que l'on veut, t prend des valeurs intérieures au cercle (R) et extérieures au cercle (ρ_1), c'est-à-dire appartenant au domaine $(\overline{\Delta})$. Il en résulte que, ε étant pris assez petit, on est toujours, si l'on a $|x|<\varepsilon$, dans l'un ou l'autre des deux cas suivants :

1° t ne prend pas de valeurs intérieures au cercle (ρ_1);

2° t prend, pour certaines valeurs de x de module aussi petit que l'on veut, des valeurs intérieures au cercle (ρ_1).

Dans le premier cas, on peut répéter le raisonnement que nous avons fait (§ 26). La solution $y(x)$ ou $t(x)$ que nous considérons ne cesse pas de vérifier la relation (145). Pour les valeurs de t considérées, $H(x|t)$ reste fini et tend vers zéro, lorsque x tend vers zéro. Puisque t ne tend vers aucune limite, la solution que nous considérons n'est pas une des solutions $t=a_i-\chi_i$, $(i=2, 3, \ldots, q)$, par conséquent aucun des facteurs $(t+a_i+\chi_i)^{\mu_i}$ du premier membre de (145) n'est nul. Ce premier membre de (145) n'est donc pas nul; d'autre part, nous voyons qu'il tend vers zéro avec x. Ceci est impossible, puisque, d'après (145), ce premier membre doit rester constant. *Le cas 1° ne peut pas se présenter si t ne tend vers aucune limite.*

Dans le cas 2° où t prend, si petit que soit $|x|$, tantôt des valeurs intérieures au cercle (ρ_1), tantôt des valeurs extérieures, une difficulté se présente; elle provient du fait que la relation (145) peut cesser d'être vérifiée pour certaines valeurs de x. A chaque valeur de x correspond, pour la solution $y(x)$ que nous considérons, une valeur de t. Lorsque, x tendant vers zéro, t pénètre dans le cercle (ρ_1), il peut se faire que le premier membre de (145) cesse d'être convergent, quand on attribue à t et à x des valeurs correspondantes; mais x continuant à tendre vers zéro, t sortira du cercle (ρ_1) et le premier membre de (145) redeviendra convergent. Pour désigner brièvement cette circonstance qui, pour une solution donnée, rend inutilisable, pour certaines valeurs de x, l'intégrale (145), nous dirons que l'on *franchit une lacune* de l'intégrale (145). Il peut, dans le cas 2° que nous considérons, y avoir une infinité de lacunes.

Lorsque l'on considère une solution $y(x)$, et que x varie dans un intervalle où il n'y a pas de lacune, le premier membre de (145) conserve une valeur constante C; mais rien ne prouve que, dans deux intervalles consécutifs séparés par une lacune, les valeurs de la constante C soient les mêmes. Il peut se faire que cette valeur de C change. Si cette circonstance se produit une infinité de fois et si les valeurs successives de la constante tendent vers zéro, nous ne pourrons développer des raisonnements analogues à ceux que nous avons fait dans le cas 1°. Pour lever la difficulté que nous venons de signaler, nous serons obligés d'avoir recours à l'intégrale (146) et de faire une nouvelle restriction.

Nous pouvons en posant $y_1 = t + a_1$ mettre l'intégrale (145) sous la forme

$$(145') \qquad xy_1^{\mu_1}[1 + \mathrm{H}(x|y_1 - a_1)] \prod_{i=2}^{q} (a_i - a_1 + y_1 + \chi_i)^{\mu_i} \prod_{i=q+1}^{p} (a_i - a_1 + y_1)^{\mu_i} = \mathrm{C}.$$

On peut supposer ρ et ε' assez petits pour que, si l'on a

$$(147) \qquad \rho < |y_1| < 2\rho, \qquad |x| < \varepsilon',$$

$\mathrm{H}(x|y_1 - a_1)$ soit convergent et que ni les expressions $a_i - a_1 + y_1 + \mathrm{X}_i$ relatives aux valeurs $i = 2, 3, \ldots q$, ni les expressions $a_i - a_1 + y_1$ relatives aux valeurs $i = q+1$, $q+2, \ldots p$ ne soient nulles. Dans ces conditions, on peut développer suivant les puissances de y_1 et de x le produit des différents facteurs, $y_1^{\mu_1}$ excepté, qui figurent dans le premier membre de l'intégrale (145'); on choisira les déterminations que l'on considère pour les divers facteurs des deux produits Π. L'intégrale (145) prend alors la forme

$$(148) \qquad \mathrm{B}(x, y_1) \equiv xy_1^{\mu_1}\mathrm{A}(x, y_1) = \mathrm{C},$$

$\mathrm{A}(x, y_1)$ étant une fonction holomorphe de x et y_1 si les conditions (147) sont vérifiées. Nous remarquons que si α est tel que l'on ait $\rho < |\alpha| < 2\rho$ et si l'on choisit la détermination de $(y_1)^{\mu_1}$ que l'on considère, pour $y_1 = \alpha$, $\mathrm{B}(x, y_1)$ est une fonction bien déterminée pour $y_1 = \alpha$, et qui pour $y_1 = \alpha$ se réduit à une série entière en x

$$\mathrm{M} = \mathrm{M}_1 x + \mathrm{M}_2 x^2 + \mathrm{M}_3 x^3 + \ldots,$$

$\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3, \ldots$ étant des constantes et M_1 *n'étant pas nul.*

Considérons maintenant l'intégrale (146). Si nous posons $\mu_0' = 1 - \sum_{i=1}^{r} \mu_i'$, nous avons d'après (142) $\mu_0' = \dfrac{1}{1 + \mu_1}$. La quantité $1 + \mu_1$ étant positive (§ 28), il en resulte (§ 18) que, si l'on pose

$$\overline{\mathrm{H}}(x|t_1) = \sum_{s=1}^{\infty} x^s \overline{\mathrm{H}}_s,$$

$\overline{\mathrm{H}}_s$ sera, quel que soit s, une fraction rationnelle en t_1, qui pour $t_1 = \infty$ aura un pôle d'ordre au plus égal à s. On a

$$\overline{\mathrm{H}}_s = \frac{h_s(t_1)}{k_s(t_1)},$$

h_s et k_s étant deux polynomes en t_1, le second de degré s', le premier de degré $s + s'$; les racines du polynome $k_s(t_1)$ sont certains des nombres $-a'_{q'+1}$, $-a'_{q'+2}$, ... $-a'_r$, c'est-à-dire des nombres fixes quel que soit s. Pour chaque valeur de s on peut fixer une limite supérieure de s'; cette limite est particulièrement simple si l'on est dans le cas envisagé § 22. On a dans tous les cas :

$$x^s \overline{\mathrm{H}}_s \equiv \frac{x^{s+s'} h_s(t_1)}{x^{s'} k_s(t_1)}.$$

Si l'on remarque que l'on a $y_1 = t_1 x$, on voit que le numérateur et le dénominateur de $x^s\overline{\mathrm{H}}_s$ peuvent se mettre respectivement sous la forme de deux polynomes homogènes en x et y_1, le numérateur étant de degré $s + s'$, le dénominateur de degré s'. On a :

$$x^s\overline{\mathrm{H}}_s \equiv \frac{\mathrm{G}_s(x, y_1)}{\mathrm{K}_s(x, y_1)} \equiv y_1^s \mathrm{G}_s\left(\frac{x}{y_1}, 1\right)\left[\mathrm{K}_s\left(\frac{x}{y_1}, 1\right)\right]^{-1}.$$

On peut supposer ε' et ρ assez petits pour que, si les conditions (147) sont vérifiées, on puisse développer $x^s\overline{\mathrm{H}}_s$ en ordonnant suivant les puissances croissances de x; en effet, les racines de $\mathrm{K}_s(z, 1)$ sont des nombres fixes, dont aucun n'est nul et $\left|\frac{x}{y_1}\right|$ peut être supposé inférieur aux modules de tous ces nombres. Nous pourrons également, dans (146), mettre le produit

$$x \prod_{i=}^{q'} (t_1 + a'_i + \psi_i)^{\mu'_i} \prod_{i=q'+1}^{r} (t_1 + a'_i)^{\mu'_i}$$

sous la forme

$$x^{\frac{1}{1+\mu_1}} y_1^{\frac{\mu_1}{1+\mu_1}} \prod_{i=1}^{q'} \left(1 + \frac{a_i x + x\psi_i}{y_1}\right)^{\mu'_i} \prod_{i=q'+1}^{r} \left(1 + \frac{a'_i x}{y_1}\right)^{\mu'_i},$$

et nous pourrons, ρ et ε étant assez petits et les conditions (147) étant vérifiées, développer, suivant les puissances de x, le produit des divers facteurs (les deux premiers facteurs exceptés) qui figurent dans cette expression. En élevant ensuite les deux membres de (146) à la puissance $1 + \mu_1$, en remplaçant $[1 + \mathrm{H}(x|t_1)]^{1+\mu_1}$ par son développement ordonné suivant les puissances de x et y_1, et en remplaçant enfin le produit de deux développements par un seul développement obtenu par la règle de multiplication, la relation (146) prend la forme

$$(149) \qquad b(x, y_1) \equiv x y_1^{\mu_1} a(x, y_1) = c;$$

$a(x, y_1)$ est une fonction holomorphe de x et y_1 si les conditions (147) sont vérifiées. Nous avons choisi arbitrairement une fois pour toutes les déterminations que nous avons considérées pour les facteurs des produits Π; nous adopterons pour détermination de $(y_1)^{\mu_1}$, pour $y_1 = \alpha$, la détermination déjà choisie précédemment. Nous remarquons enfin que, ε' et ρ étant assez petits, aucun des facteurs de $a(x, y_1)$ dans (149) n'est nul pour $x = 0$, $y_1 = \alpha$. Il en résulte que $b(x, y_1)$ se réduit pour $y_1 = \alpha$ à une série entière en x

$$m \equiv m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \dots,$$

où m_1, m_2, m_3, ... sont des constantes et m_1 n'est pas nul.

On montre, en raisonnant comme nous l'avons fait (§ 22) pour établir une relation entre I et J, que pour $|x| < \varepsilon'$ et y_1 voisin de α on a la relation suivante, où pour abréger nous écrivons B au lieu de $B(x, y_1)$,

$$b(x, y_1) = f_0 B\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} f_j B^j\right] \equiv f_0 F(B); \tag{150}$$

f_0 est une constante qui n'est pas nulle, $f_1, f_2, f_3 \dots$ sont des constantes dont certaines peuvent être nulles. La série $F(B)$ est convergente si les conditions (147) sont vérifiées, à condition que ε' et ρ soient assez petits. Cette relation (150), qui est valable pour y_1 voisin de α, s'étend à toutes les valeurs de y_1 et de x vérifiant les relations (147) à condition de prendre pour $y_1^{\mu_1}$ la même détermination dans $B(x, y_1)$ et $b(x, y_1)$. Nous pouvons faire tourner la variable y_1, dans son plan, autour de $y_1 = 0$, la relation (150) subsistera, à condition de remplacer dans $B(x, y)$ et $b(x, y_1)$ la détermination $y_1^{\mu_1}$ primitivement choisie, par la détermination de $y_1^{\mu_1}$ suivie par continuité. Il en résulte facilement que, si l'on a $\mu_1 = \frac{\nu_1}{\nu}$ (ν_1 et ν étant des entiers premiers entre eux), les nombres j dans (150) ne peuvent prendre que des valeurs de la forme $j = i\nu$.

Une fois faite cette remarque sur la possibilité de ne fixer ni la détermination de $y_1^{\mu_1}$ dans le premier membre de (145), que nous désignerons par I, ni la détermination de la puissance $1 + \mu_1$ du premier membre de (146), que nous désignerons par J, nous continuerons à désigner par $B(x, y_1)$ et $b(x, y_1)$ les déterminations choisies pour I et J, les déterminations des divers facteurs, y compris $y_1^{\mu_1}$ étant bien fixées ainsi que nous l'avons fait.

Les deux formes $B(x, y_1)$ et $b(x, y_1)$ que nous obtenons pour les déterminations respectivement choisies de I et de J ne sont valables que si, en posant $t + a_1 = y_1$, on a les conditions (147), c'est-à-dire

$$|x| < \varepsilon', \qquad \rho < |t + a_2| < 2\rho.$$

Les deux formes d'intégrales (148) et (149) ne sont donc aussi valables que dans ces conditions. Si $|t + a_1|$ devient supérieur à 2ρ, on peut se servir de l'intégrale (145) où $I = C$, qui est déjà valable pour $|t + a_1| > \rho$. En effet, d'après ce que nous avons dit, si on considère une solution $y(x)$ telle que $y : x = t$ ne tende vers aucune limite, lorsque x tend vers zéro, t sera, pour $|t + a_1| > \rho$, intérieur au domaine (Δ) pour lequel l'intégrale (145) est valable. De même si t devient intérieur au cercle ρ_1, on pourra se servir de l'intégrale (146) ou de l'intégrale équivalente $J = \text{const.}$, qui est déjà valable pour $|t + a_1| < 2\rho$. En effet, d'après ce que nous avons dit, lorsque x et y tendant vers zéro, t ne tend vers aucune limite $t_1 = y_1 : x$ reste dans le domaine (Δ') où l'intégrale (146) est valable. Nous pouvons donc, en considérant une solution $y(x)$ et en attribuant à t et à t_1 les valeurs correspondant à une valeur variable de x, telle que l'on ait $|x| < \varepsilon$, suivre la détermination de J qui varie d'une façon continue avec x. Nous désignerons par $\overline{b}(x, y_1)$ cette détermination de J obtenue en partant pour $|y_1| > \rho$ de la détermination $b(x, y_1)$ de J. Cette détermination $b(x, y_1)$ sera bien définie, lorsqu'on suit une solution $y(x)$, pourvu que l'on ait $|x| < \varepsilon$, $|y_1| < 2\rho$.

Supposons que x se déplaçant *dans un sens déterminé* sur un chemin L tracé dans le plan des x, on suive une solution $y(x)$. Si on *franchit une lacune* de l'intégrale (145), en se déplaçant dans le sens fixé sur L on rencontre avant d'arriver à la lacune une dernière valeur de x, soit x' telle que la valeur correspondante de $t + a_1$ soit de module égal à ρ; on rencontre ensuite après la lacune une première valeur de x, soit x'', telle que l'on ait $|t + a_1| = \rho$. Nous aurons avantage à préciser le sens des mots *avant* et *après la lacune* en disant que pour les valeurs de x qui sur le chemin L précédent x' on est *avant la lacune*, pour les valeurs de x qui sur L suivent x'' on est *après la lacune*.

Suivons la solution $y(x)$ considérée en faisant tendre x vers o et voyons ce qui se passe lorsque l'on franchit une lacune de l'intégrale (145). Lorsque t pénètre dans le cercle (ρ_1), la détermination $b(x, y_1)$ ou, ce qui revient au même, la fonction $\overline{b}(x, y_1)$ [dont on prend la détermination $b(x, y_1)$] est égale à une constante c. Tant que t reste dans le cercle (ρ_1), la forme (146) d'intégrale est valable et la fonction $\overline{b}(x, y)$ reste constante. Lorsque t sort du cercle (ρ_1), on a $\overline{b}(x, y_1) = c$. Entre b et $\overline{b}$ on a la relation

$$\overline{b}(x, y_1) = \alpha b(x, y_1)$$

où α est une racine de l'équation

$$\alpha^P = 1,$$

P désignant le plus petit dénominateur commun aux divers exposants $(1 + \mu_1)\mu_1'$, $(1 + \mu_2)\mu_2'$, ... $(1 + \mu_1)\mu_2'$ qui figurent dans la puissance $1 + \mu_1$ du premier membre de (146). D'après la relation (142), nous voyons que P est un multiple de ν.

Avant d'avoir franchi la lacune de l'intégrale (145), nous avons

$$b(x, y_1) = c, \qquad B(x, y_1) = C.$$

Après avoir franchi la lacune, nous avons

$$b(x, y_1) = \frac{c}{\alpha}, \qquad B(x, y_1) = C_1,$$

C_1 pouvant être différent de C, d'après ce que nous avons dit. On a successivement

$$c = f_0 F(C), \qquad \frac{c}{\alpha} = f_0 F(C_1),$$
$$F(C) = \alpha F(C_1), \qquad [F(C)]^P = [F(C_1)]^P.$$

Cette relation, d'après ce que nous avons dit au sujet de P et au sujet de la forme de F, ne contient que des puissances entières de C^ν et de C_1^ν. Nous l'écrirons

(151) $$G(C^\nu) = G(C_1^\nu),$$

en posant

$$G(C^\nu) = C^P\left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} f_{i\nu} B^{i\nu}\right]^P.$$

Désignons, pour abréger, par $I(x, t)$ ou plus brièvement par I le premier membre de la relation (145) et au lieu de l'intégrale (145)

$$I \equiv x(t + a_1)^{\mu_1}[1 + H(x|t)] \prod_{i=2}^{q} (t + a_i + \chi_i)^{\mu_i} \prod_{i=q+1}^{p} (t + a_i)^{\mu_i} = C,$$

nous considérons l'intégrale

(152) $$G(I^\nu) = \Gamma,$$

Γ étant une constante. De même que (145), cette intégrale peut présenter des lacunes, lorsque x tend vers o et que l'on suit une solution. Demandons-nous si la valeur du premier membre de (152), qui reste constante en dehors des lacunes, change lorsqu'on franchit une lacune. Il est évident que cette valeur ne change pas si la détermination de I que nous considérons est égale à $B(x, y_1)$. En effet, le premier membre de (152) avait *avant la lacune* la valeur $G(C^\nu)$; *après la lacune* il a la valeur $G(C_1^\nu)$: ces deux valeurs sont égales.

Considérons maintenant les diverses déterminations que prend I pour des valeurs données de x et de t. Ces diverses déterminations proviennent : 1° des diverses déterminations du facteur $(t + a_1)^{\mu_1}$; 2° des diverses déterminations des facteurs $(t + a_i + \chi_i)^{\mu_i}$ et $(t + a_i)^{\mu_i}$ où i prend respectivement les valeurs de 2, 3, ..., q et $q + 1$, $q + 2$, ..., p. Désignons par N le plus petit commun dénominateur des fractions μ_2, μ_3, ..., μ_p. Comme on a $\mu_1 = 1 - \mu_2 - \mu_3 \ldots - \mu_p$, le nombre N est un multiple de ν, ou est égal à ν. Si β et γ sont respectivement des racines quelconques des équations

$$\beta^\nu = 1, \qquad \gamma^N = 1,$$

les diverses déterminations de I seront, dans le voisinage de $y_1 = 0$, de la forme

$$I = \beta\gamma B(x, y_1).$$

Si nous considérons d'abord les déterminations de I pour lesquelles on a $\gamma = 1$, la valeur du premier membre de (152) ne change pas quand on franchit une lacune. En effet, *avant la lacune*, on avait

$$I = \beta C, \qquad G(I^\nu) = G(C^\nu).$$

Après la lacune, on a

$$I = \beta C_1, \qquad G(I^\nu) = G(C_1^\nu).$$

Nous avons pris *après la lacune* la même détermination de I que nous avions *avant la lacune;* nous en avons le droit, car il n'y a aucune considération de continuité qui nous impose une dérermination de I plutôt qu'une autre, puisque I cesse d'exister dans la lacune. On aurait du reste pu prendre pour I *après la lacune* une quelconque des autres déterminations pour lesquelles l'on a $\gamma = 1$.

Je ne puis montrer, sans faire une restriction, que la valeur du premier membre de (152) garde la même valeur quand on considère une détermination de I pour laquelle γ n'est pas égal à 1. Avant la lacune, on a

$$I = \beta\gamma C, \qquad G(I^\nu) = G(\gamma^\nu C^\nu).$$

Après la lacune, on a

$$I = \beta\gamma C_1, \qquad G(I^\nu) = G(\gamma^\nu C_1^\nu).$$

Rien ne prouve que l'on aura

$$G(\gamma^\nu C) = G(\gamma^\nu C_1^\nu).$$

Il en sera cependant ainsi lorsque ν est égal à N. Nous aurons dans ce cas l'intégrale (152) *ou* Γ *gardera une valeur constante, lorsqu'on franchit une lacune,* quel que soit du reste le changement de détermination que l'on fasse subir à I en franchissant la lacune.

Si l'on suit une solution $y(x)$, dans le cas 2° que nous considérons, t prendra pour des valeurs de x aussi petites que l'on voudra des valeurs intérieures au domaine (Δ). Pour ces valeurs de x et de t, le premier membre I de (145) tend vers 0 avec x; il en sera de même du premier membre $G(I^\nu)$ de (152). Ce premier membre devant rester constant, nous arrivons à une contradiction. *Il est impossible dans le cas 2°, tout comme dans le cas 1°, que t ne tende vers aucune limite.*

Cette conclusion n'est démontrée que si ν est un multiple de N.

Nous pouvons arriver à la même conclusion par un raisonnement analogue en supposant que ν soit égal à P. En raisonnant comme nous l'avons fait pour établir la relation (150), nous établissons la relation

$$B(x, y_1) = b(x, y_1) \sum_{i=0}^{\infty} g_{i\nu}[b(x, y_1)]^{i\nu} \equiv f(b),$$

les nombres $g_{i\nu}$ sont des constantes, g_0 *n'est pas nul.* Montrons que, lorsqu'on franchit une lacune, $B(x, y_1)$ est multiplié par une des racines de l'équation $\alpha^\nu = 1$. Avant la lacune, nous avons, par définition :

$$\bar{b}(x, y_1) = b(x, y_1), \qquad b(x, y_1) = c.$$

Après la lacune, nous avons, d'après ce que nous avons déjà dit :

$$\bar{b}(x, y_1) = \alpha b(x, y_1), \quad \bar{b}(x, y_1) = c,$$

et par suite

$$b(x, y_1) = \frac{c}{\alpha},$$

$$B(x, y_1) = f[b(x, y_1)] = f\left(\frac{c}{\alpha}\right) = \frac{f(c)}{\alpha},$$

en tenant compte de ce que l'on a $\alpha^\nu = 1$. Si avant la lacune nous avions $B(x, y) = C$, après la lacune nous aurons

$$B(x, y_1) = \frac{C}{\alpha}.$$

Nous avons une détermination quelconque du premier membre I de (145), nous avons dans le domaine où $B(x, y_1)$ est défini

$$I = \beta\gamma B(x, y_1),$$

β et γ étant respectivement racines des deux équations ci-dessus indiquées. Avant la lacune, on aura

$$I = \beta\gamma C.$$

Après la lacune, on aura

$$I = \frac{\beta\gamma C}{\alpha}.$$

Nous voyons donc que, quelles que soient les déterminations choisies pour les divers facteurs du premier membre de (145), déterminations qu'on peut changer au moment où l'on franchit la lacune, la valeur du premier membre de (145) qui garde une valeur constante k, tant qu'on ne franchit pas de lacune, *prend une nouvelle valeur constante* αk (avec $\alpha^\nu = 1$), après qu'on a franchi la coupure. Les valeurs constantes successives du premier membre de (145) ont toutes même module, puisque $|\alpha| = 1$. On peut donc répéter le raisonnement que nous avons fait sur l'intégrale (152). Nous voyons qu'*il est impossible que t ne tende pas vers une limite lorsque x et y tendent vers* 0.

Les conditions nécessaires que nous avons trouvées (§ 28) *pour que $x = 0$, $y = 0$ soit un point algébrique suffisent donc pour démontrer que, lorsqu'on a une solution $y(x)$ nulle pour $x = 0$, t tend vers une limite, si nous supposons que l'on ait* *soit* $\nu = \mathrm{P}$, *soit* $\nu = \mathrm{N}$. Ces dernières hypothèses sont très souvent vérifiées. En effet, si nous posons

$$\mu_i = \frac{\nu_i}{\mathrm{N}}, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, p)$$

$$(1 + \mu_1)\mu'_i = \frac{\nu'_i}{\mathrm{P}}.$$

Nous avons, puisque $\mu_1 = \frac{\nu_1}{\nu}$:

$$(153) \qquad \begin{cases} \dfrac{\nu_1}{\nu} = 1 - \dfrac{\nu_2 + \nu_3 + \ldots + \nu_p}{\mathrm{N}}, \\[2ex] \dfrac{\nu_1}{\nu} = \dfrac{\nu'_1 + \nu'_2 + \ldots + \nu'_2}{\mathrm{P}}. \end{cases}$$

Par conséquent, sauf dans le cas où il y a réduction pour chacune des deux fractions qui sont dans les deux seconds membres des égalités (153), on aura $\nu = \mathrm{P}$ ou $\nu = \mathrm{N}$.

Avec les restrictions indiquées, nous avons démontré que lorsque x et y tendent vers o, *le quotient $y : x = t$ tend vers une limite.* Cette limite ne peut être qu'un des nombres $-a_1, -a_2, -a_3, \ldots, -a_p$. Si cette limite est différente de $-a_1$, nous savons, d'après les conditions (M) et (M′), que la solution correspondante $y(x)$ est algébroïde pour $x = 0$. Si cette limite est égale à $-a_1$, nous posons $t + a_1 = y_1$, nous avons une solution pour laquelle y_1 tend vers o avec x et les conditions (R), (M_1), (M_1') (L_1) suffisent pour montrer que la solution considérée $y(x)$ est algébroïde pour $x = 0$. Il n'y a qu'à raisonner comme l'avons fait pour l'équation (1).

Nous avons par conséquent démontré, en faisant les restrictions indiquées, que *les conditions nécessaires que nous avons trouvées pour exprimer que $x = 0$, $y = 0$ est un point singulier algébrique sont aussi suffisantes.*

[30] *Cas d'une équation à point dicritique.* — Nous avons démontré (*J. M.*) qu'en général un point dicritique est un point singulier algébrique. Soit l'équation

$$(154) \qquad [x\mathrm{A}_n(x, y) + \mathrm{Y}_{n+2}(x, y) + \ldots]dy + [-y\mathrm{A}_n(x, y) + \mathrm{X}_{n+2}(x, y) + \ldots]dx = 0$$

où A_n, X_{n+2}, Y_{n+2} sont des polynomes homogènes en x et y de degré égal à l'indice ; les termes non écrits sont de degré supérieur à $n + 2$. Cette équation admet $x = 0$, $y = 0$ comme point singulier dicritique. S'il n'y a pas de directions singulières. c'est-à-dire si $\mathrm{A}_n(x, y)$ et $y\mathrm{Y}_{n+2}(x, y) + x\mathrm{X}_{n+2}(x, y)$ n'ont aucun facteur commun, l'équation (150) admet $x = 0$, $y = 0$ comme point singulier algébrique, ainsi que cela résulte du Mémoire cité (*J. M.*). Si les deux expressions considérées admettent des facteurs communs, le point $x = 0$, $y = 0$ ne sera pas en général un point singulier algébrique.

Soit $y-ax$ un de ces facteurs communs. Faisons le changement de variable $y=tx$, nous obtenons l'équation

$$(155) \qquad [A_n(1, t)+\ldots]dt+[tY_{n+2}(1, t)+X_{n+2}(1, t)+\ldots]dx=0,$$

les termes non écrits étant nuls pour $x=0$. Si l'on pose $y_1=t-a$, on obtiendra une équation en x et y_1 pour laquelle $x=0$, $y_1=0$ sera un point singulier, en général non algébrique. Les solutions $y_1(x)$ nulles et non algébroïdes pour $x=0$ fourniront des solutions $y(x)$ de (1) nulles et non algébroïdes pour $x=0$. Si l'on veut que $x=0$, $y=0$ soit un point singulier algébrique, il faudra exprimer, comme nous avons appris à le faire, que l'équation en x et y_1 admet $x=0$, $y_1=0$ pour point singulier algébrique. En opérant d'une façon analogue pour les divers facteurs tels que $y-ax$, qui sont communs aux deux expressions considérées, nous aurons des conditions nécessaires pour que $x=0$, $y=0$ soit un point singulier algébrique. En posant $x=uy_1$ nous considérerions le cas où x serait un facteur commun à $A_n(x, y)$ et à $yY_{n+2}(x, y)+xX_{n+2}(x, y)$.

Nous désignerons sous le nom de conditions (D) les conditions obtenues. Ces conditions (D) sont les conditions *nécessaires* pour que les solutions $y(x)$ nulles pour $x=0$ et tangentes aux diverses directions singulières $y-ax=0$ soient algébroïdes pour $x=0$. Désignons d'autre part sous le nom de conditions (D') les conditions *suffisantes* pour que les solutions $y(x)$ nulles pour $x=0$ et tangentes aux diverses directions singulières $y-ax=0$ soient algébroïdes pour $x=0$. Il paraît très probable, ainsi que nous l'avons dit, que les conditions (D) et (D') coïncident, mais nous ne l'avons pas démontré dans le cas général. Nous allons faire voir que si *les conditions* (D') *sont vérifiées*, $x=0$, $y=0$ *est un point singulier algébrique de l'équation* (154). En effet, lorsque x tend vers zéro, t qui vérifie l'équation (155) tend nécessairement vers une limite d'après un théorème de M. Painlevé, puisque le coefficient de dt n'est pas identiquement nul pour $x=0$. Si cette limite n'annule pas à la fois $A_n(1, t)$ et $tY_{n+2}(1, t)+X_{n+2}(1, t)$, la solution $t(x)$ correspondante est algébroïde pour $x=0$. Si cette limite annule à la fois les deux expressions indiquées, les conditions (D) expriment que la solution $t(x)$ est algébroïde pour $x=0$. En posant $x=uy$, on considérerait le cas où x et y tendent vers zéro, tandis que $y:x$ croît indéfiniment. Les solutions $y(x)$ pour lesquelles il en est ainsi sont algébroïdes, pour $x=0$, d'après les conditions (D). *Le point* $x=y$, $y=0$ *est un point singulier algébrique de l'équation* (154).

Des considérations analogues s'appliqueraient si l'équation (141) que nous avons déduit de l'équation (1), en posant $y=-a_1x+xy_1$, admettait $x=0$, $y_1=0$ comme point dicritique. En général, si cette équation admet $x=0$, $y_1=0$ pour point dicritique, elle n'admettra pas de directions singulières, et $x=0$, $y_1=0$ sera un point singulier algébrique. S'il existe des *directions singulières*, nous exprimerons, comme nous l'avons indiqué plus haut, que les solutions $y_1(x)$ nulles pour $x=0$ et tangentes à chacune de ces directions singulières sont algébroïdes pour $x=0$. Nous obtiendrons ainsi, pour l'équation (141), les conditions (D) que nous avons appris à former. Ces conditions, qui sont *nécessaires* pour que $x=0$, $y_1=0$ soit un point singulier algébrique de l'équation (141), sont *nécessaires* pour que $x=0$, $y=0$ soit un point singulier algébrique de (141). Nous avons démontré, dans un grand nombre de cas, que les conditions (D') coïncident avec les conditions (D) et nous avons lieu de supposer qu'il en est toujours ainsi. Nous allons démontrer que les conditions (D') sont *suffisantes* pour que $x=0$, $y=0$ soit un point singulier algébrique de l'équation (1), si en même temps que les conditions (D), les conditions (M), (M'), (L) sont vérifiées pour l'équation (1) et si on suppose $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_p$ rationnels.

En effet, j'ai démontré (*J. M.*, p. 401) que si ε et ρ sont pris assez petits et si l'on a pour l'équation (141) une solution $y_1(x)$ telle que pour une valeur de x inférieure en module à ε on ait $|y|<\rho$, la fonction $y_1(x)$ tend vers 0 avec x. Nous sommes bien dans les conditions où le théorème invoqué s'applique : x est un facteur dans le coefficient de dy_1 et $x=0$ n'est pas une *direction singulière* de l'équation (141) à point dicritique, puisque, en vertu de la relation

$$y_1 V_{r-1}(x, y_1) + Z_r(x, y_1) \equiv 0,$$

qui exprime que $x=0$, $y_1=0$ est un point dicritique, on a $\mu_1=-1$, et $V_{r-1}(x, y_1)$ ne contient pas x en facteur. Nous pouvons dès lors, en employant les notations du paragraphe précédent, dire que si $t(x)$ pénètre dans le cercle (ρ_1), pour une valeur de x telle que l'on ait $|x<\varepsilon$, la fonction $t(x)$ tendra vers $-a_1$. Nous pouvons donc refaire le raisonnement fait (§ 26), le cercle (ρ_1) jouant dans ce raisonnement le même rôle que les cercles (ρ_{p+1}), (ρ_{p+2}), ... La fonction $t(x)$ tendra nécessairement vers une limite lorsque x tend vers 0, cette limite est un des nombres $a_1, -a_2, \ldots, -a_p$. D'autre part, dans les conditions où nous nous plaçons, toute solution $y(x)$ nulle pour $x=0$ et tendant vers une de ces limites est algébroïde pour $x=0$. *Toutes les solutions $y(x)$ nulles pour $x=0$ sont algébroïdes pour $x=0$.*

Comme précédemment (§ 29), nous nous contentons d'indiquer dans un cas relativement simple la marche du raisonnement à faire dans les cas plus compliqués pour trouver les conditions nécessaires pour que $x=0$, $y=0$ soit un point singulier algébrique de l'équation (1) et pour démontrer que ces conditions sont suffisantes. Le fait que $x=0$, $y=0$ est un point dicritique de (1), ou que $x=0$, $y_1=0$ est un point dicritique d'une équation telle que l'équation (141), oblige seulement à modifier un peu les raisonnements, sans introduire de nouvelles difficultés.

[**31**] *Cas où il existe une intégrale méromorphe.* — Je signalerai enfin le cas évident suivant. Si les conditions pour qu'il existe une intégrale $f\overline{x, y}$ sont vérifiées, et si de plus dans (3) les exposants λ sont tous rationnels, $x=0$, $y=0$ est un point algébrique (un cas douteux mentionné ci-dessous étant excepté). En effet, en élevant

à une puissance convenable les deux membres de l'intégrale $f\overline{x, y}$, cette intégrale pourra se mettre sous la forme

$$(156) \qquad P(x, y) = CQ(x, y).$$

C est une constante, $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des développements suivant les puissances de x et de y. Nous pouvons supposer que $P(x, y)$ n'a pas de terme constant. Nous laisserons de côté le cas où $Q(x, y)$ a un terme constant. Ce cas ne peut se présenter que si *tous* les exposants λ dans (3) sont positifs. L'intégrale (156) peut alors s'écrire

$$(157) \qquad R(x, y) = C;$$

$R(x, y)$ étant un développement suivant les puissances de x et y sans terme constant; mais nous ne savons pas si $R(x, y)$ est convergent pour x et y suffisamment petits et nous ne pouvons nous servir de cette intégrale (157) pour démontrer que $x=0$, $y=0$ est un point algébrique. L'exactitude de l'énoncé donné plus haut reste douteuse. S'il se trouve que $R(x, y)$ soit convergent pour x et y assez petit, il n'y a qu'un nombre fini de solutions $y(x)$ nulles pour $x=0$, elles sont algébroïdes pour $x=0$ puisqu'elles sont définies par $R(x, y)=0$.

Si $Q(x, y)$ n'a pas de terme constant, nous savons qu'on peut supposer $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ holomorphes pour $x=0$, $y=0$. Il est évident que toutes les solutions $y(x)$ nulles pour $x=0$ sont algébroïdes pour $x=0$ et qu'il y a une infinité de pareilles solutions. On peut généraliser ce que j'ai démontré (*J. M.*) pour les points dicritiques, en faisant voir que, si l'on a une solution $y(x)$ définie par des conditions initiales x_0, y_0 assez petites, on peut toujours faire tendre x vers zéro de telle façon que y tende aussi vers zéro.