G. VALIRON

Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 5 (1913), p. 117-257

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1913_3_5__117_0>

SUR LES

FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE NUL ET D'ORDRE FINI

ET EN PARTICULIER

LES FONCTIONS A CORRESPONDANCE RÉGULIÈRE

PAR M. G. VALIRON,

Professeur au Lycée de Besançon.

INTRODUCTION.

On sait quelles directions ont prises, à la suite des Mémoires classiques de MM. Hadamard [1] et Borel [2], les recherches sur les fonctions entières. Il s'agit, d'une part, de préciser les relations entre la croissance de la fonction, la croissance de la suite des modules des zéros et la décroissance des coefficients de la série de Taylor; d'autre part, de chercher de quelle façon se correspondent les zéros des fonctions $f(z)+a$, a étant une constante quelconque. Au premier point de vue se rattachent notamment les travaux de MM. Lindelöf et Boutroux relatifs aux fonctions d'ordre fini, de MM. Blumenthal et Denjoy pour les fonctions d'ordre infini. M. Lindelöf [3] a précisé notablement les résultats de M. Borel relatifs à la croissance

---

(1) HADAMARD, *Étude sur les fonctions entières et en particulier sur une fonction considérée par Riemann* (Journal de Mathématiques), 1893, p. 174 (Mémoire couronné par l'Académie des Sciences).

(2) BOREL, *Sur les zéros des fonctions entières* (Acta Mathematica, t. XX, p. 257). Voir également : *Leçons sur les fonctions entières; Leçons sur les séries à termes positifs* (chapitre v).

(3) LINDELÖF, *Mémoire sur les fonctions entières d'ordre fini* (Acta Societatis Scientiarum Fennicæ, t. XXXI, 1902) (les principaux résultats de ce Mémoire sont exposés dans les *Leçons sur les fonctions méromorphes* de M. Borel).

Sur la croissance des fonctions entières (Bulletin des Sciences mathématiques, 1903).

Sur les fonctions entières d'ordre entier (Annales de l'École Normale, 1905, p. 369).

régulière et élucidé certaines questions difficiles relatives aux fonctions d'ordre entier, M. Boutroux(1) donne à la relation entre la croissance de la fonction et la croissance des modules des zéros une forme particulièrement simple et définit des classes de fonctions, comprenant des fonctions à croissance irrégulière, dont le maximum du module pour $|z|=r$ est de la forme e^{hn}, h étant fini et n désignant le nombre des zéros dont le module est inférieur à r.

Pour leurs recherches sur les fonctions d'ordre infini, MM. Blumenthal et Denjoy(2) ont dû faire une étude détaillée du facteur primaire de Weierstrass; M. Blumenthal a obtenu à l'aide de ses fonctions types des résultats très généraux; ceux de M. Denjoy, plus particuliers, comportent une précision plus grande que les résultats de M. Lindelöf pour l'ordre fini.

Parmi les travaux que l'on peut rattacher à l'étude de la relation entre les zéros des fonctions $f(z)+a$, je citerai ceux de MM. Wiman(3), Littlewood(4), Sire(5), Denjoy(6) et Boutroux(7), j'aurai l'occasion de revenir sur certains d'entre eux dans cette Introduction.

J'ai divisé le présent travail en deux parties : dans la première, je me suis occupé plus particulièrement des fonctions d'ordre nul; dans la deuxième, exclusivement des fonctions d'ordre fini. Les seules propositions générales concernant les fonctions d'ordre nul ont été données par M. Littlewood (théorème sur le minimum, Mémoire cité ci dessus) et par moi-même dans quelques précédentes publications (*Mathematische Annalen*, t. LXX, p. 470; *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1911). Dans ses autres travaux sur les fonctions d'ordre nul, M. Littlewood considère des fonctions particulières (*functions of standart type, etc.*) pour lesquels il obtient des résultats très intéressants. M. Mattson, qui s'est également occupé de l'ordre nul (Thèse, Upsal, 1905), s'est appuyé sur une classification donnée par M. Maillet et n'a étudié, par suite, que certaines classes de fonctions. J'ai cherché à obtenir des résultats généraux aussi précis que possible et y suis parvenu en certains points.

---

(1) Boutroux, *Sur quelques propriétés des fonctions entières* (Thèse de la Faculté des Sciences de Paris, n° 1144, et Acta Mathematica, 1903).

(2) Voir Blumenthal, *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini*, Paris, Gauthier-Villars; Denjoy, *Sur les produits canoniques d'ordre infini* (Thèse de la Faculté des Sciences de Paris, n° 1351, et Journal de Mathématiques, 1910).

(3) Wiman, *Sur un théorème de M. Hadamard* (Arkiv för Matematik..., t. II, n° 14); *Sur le cas d'exception dans la théorie des fonctions entières* (Id., t. I).

(4) Littlewood, *On the asymptotic approximation to integral functions of zero order* (Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, vol. 5, p. 361; en particulier, p. 365).

(5) Sire, *Sur les fonctions entières de deux variables...* (Journal de Mathématiques, 1913, pp. 1-37).

(6) Denjoy, Note aux *Comptes rendus*, 8 juillet 1907.

(7) Boutroux, *Sur l'indétermination d'une fonction uniforme dans le voisinage d'une singularité transcendante* (Annales de l'École Normale, 1908, p. 317).

Dans le premier paragraphe (n^{os} 1 à 11), j'ai d'abord précisé la relation entre le maximum du module de la fonction $f(z)$ pour $|z| = r$, et le terme de la série de Taylor qui a le plus grand module, j'ai obtenu une relation assez serrée d'où j'ai déduit notamment que, pour les fonctions d'ordre fini ou nul, le rapport des logarithmes des modules de ces deux fonctions de r tend vers un lorsque r croît indéfiniment, proposition qui était pressentie depuis longtemps sans avoir, je crois, été démontrée. Cette même relation m'a donné, presque sans calculs, une limite inférieure du module du $n^{\text{ième}}$ zéro en fonction des coefficients de la série de Taylor sensiblement équivalente à celle que M. Hadamard avait obtenue par une savante analyse. J'indique ensuite (n^{os} 8 à 11) une limite supérieure du module maximum d'une fonction dont les zéros sont donnés, en utilisant un exposant de convergence qui est une généralisation, nécessaire pour la suite, de celui que j'avais considéré dans un Mémoire précédent.

Dans le second paragraphe (n^{os} 12 à 18), j'ai étudié la croissance d'une fonction d'ordre nul dans tout le plan; j'ai obtenu notamment le résultat suivant : pour toutes les fonctions entières dont le maximum du module $M(r)$ satisfait à la condition de croissance

$$M(r) < e^{h(\log r)^2},$$

h étant fini, ainsi que pour les fonctions croissant plus vite que le veut cette inégalité, mais satisfaisant à une condition de *régularité*, il existe entre les zéros des fonctions $f(z)$ et $f(z) + a$ une correspondance biunivoque telle que le rapport des zéros correspondant a pour limite *un*, lorsque le module de l'un d'eux croît indéfiniment; en particulier, le rapport des modules des $n^{\text{ièmes}}$ zéros tend vers un lorsque n croît indéfiniment. J'ai indiqué des cas où cette correspondance devient encore plus précise, et montré sur des exemples que, dans certains cas d'*irrégularité*, la correspondance n'a pas lieu.

Dans les troisième et quatrième paragraphes (n^{os} 19 à 35), j'ai étudié les fonctions que j'ai appelées fonctions à *correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière*, j'entends par là que la fonction $\log M(r)$ est asymptotiquement égale à une fonction particulièrement simple de r et du rang du terme maximum de la série de Taylor pour $|z| = r$; ou de r et du nombre des zéros dont le module est inférieur à r [1].

---

[1] En disant que j'étudie la correspondance *d'ordre zéro* entre $\log M(r)$ et le nombre $n(r)$ des zéros dont le module est inférieur à r, je veux dire que je considère le rapport

$$\frac{\log M(r)}{\varphi(n(r), r)}.$$

Si ce rapport reste compris entre deux nombres positifs finis ($\varphi(n(r), r)$ étant une fonction aussi

La fonction particulièrement simple dont il est question ici est d'ailleurs déterminée par la nature même du problème, de sorte que l'indétermination de la définition précédente n'est qu'apparente. J'ai été conduit, par la considération des fonctions à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière, à distinguer trois classes de fonctions d'ordre nul : la première classe, qui comprend les fonctions croissant très lentement, est séparée de la seconde classe, qui est contiguë aux fonctions d'ordre fini, par les fonctions de la troisième, qui apparaissent comme des fonctions exceptionnelles. Dans l'étude de la relation entre la croissance et les coefficients de la série de Taylor, j'ai fait usage des résultats du paragraphe I, ce qui m'a permis de trouver les réciproques d'une façon très simple, je signalerai encore le résultat suivant : pour toutes les fonctions pour lesquelles

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r)}{(\log r)^2} = 0,$$

le module du $n^{\text{ième}}$ zéro est de l'ordre de grandeur (ordre -1) du *rapport rectifié* du $(n-1)^{\text{ième}}$ coefficient de la série de Taylor au $n^{\text{ième}}$ coefficient.

Dans le cinquième paragraphe (n$^{\text{os}}$ 36 à 47), j'étudie les fonctions quelconques, je définis ensuite des fonctions à correspondance régulière d'ordre moins un (¹), la condition nécessaire et suffisante pour que la correspondance d'ordre -1 soit régulière est que l'on ait

$$\log M(r) = \log r\,[T(r)]^{1+\varepsilon(r)},$$

$T(x)$ étant une fonction type de M. Blumenthal.

Dans le dernier paragraphe (n$^{\text{os}}$ 48 à 51), j'ai donné quelques exemples très simples d'équations fonctionnelles dont la solution est une fonction entière ou méromorphe ou quasi-méromorphe d'ordre nul; mon but était moins d'appliquer les méthodes exposées ci-dessus, que de donner des exemples de fonctions d'ordre nul s'introduisant d'une façon naturelle.

La deuxième partie de ce Mémoire est consacrée à certaines questions concernant les fonctions d'ordre fini; ces questions sont assez diverses, mais la méthode

---

simple que possible), on dira que la correspondance d'ordre zéro est régulière; si le rapport tend vers un, on dira que la correspondance d'ordre zéro est parfaitement régulière. Si l'on considère un rapport de la forme

$$\frac{\log_q M(r)}{\psi(n(r), r)},$$

on dira que l'on étudie la *correspondance d'ordre* $-q+1$ entre $\log M(r)$ et $n(r)$.

(¹) Je dis simplement ici correspondance régulière d'ordre -1, pour correspondance d'ordre moins un parfaitement régulière, car je ne considérerai que ce seul cas.

employée est toujours la même; j'ai essayé d'appliquer aux fonctions d'ordre fini les calculs qui s'étaient présentés naturellement pour les fonctions d'ordre nul. Dans le premier paragraphe (n^{os} 52 à 57), j'ai cherché les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il y ait correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière entre $\log M(r)$ et le rang du terme maximum de la série de Taylor, et ai été conduit à la notion d'ordre précisé. J'ai pu alors démontrer dans toute sa généralité la forme précise du théorème de M. Wiman et donner une proposition analogue pour les fonctions d'ordre fini quelconque.

Dans le second paragraphe (n^{os} 58 à 61), j'ai cherché les conditions de correspondance régulière d'ordre zéro entre $\log M(r)$ et la fonction $n(r)$ définie ci-dessus (note de la page 119), et ai retrouvé très simplement un résultat obtenu par M. Denjoy par une méthode plus générale, mais plus compliquée, j'indique ensuite une limite supérieure exacte du maximum du module lorsque la fonction est définie par ses zéros.

Dans le troisième paragraphe (n^{os} 62 à 71), j'ai étudié des fonctions orientées (fonctions dont les arguments des zéros ont une limite), généralisations de celles considérées par MM. Lindelöf et Leau [1], j'ai indiqué rapidement les propriétés analogues à celles des fonctions étudiées par les auteurs précédents, et ai montré l'intérêt de ces fonctions au point de vue de la théorie générale. J'ai pu obtenir une expression asymptotique du nombre des zéros d'une fonction orientée donnée sur la demi-droite opposée à la direction des zéros. Ce résultat, qui résout en partie une question posée par M. Borel dans son Mémoire des *Acta* (p. 394), s'applique à la fonction de Riemann et donne le premier terme de la formule de M. von Mangoldt.

Dans le quatrième paragraphe (n^{os} 72 à 78), j'ai fait l'application systématique du théorème de M. Jensen à la fonction de Riemann et ai retrouvé par cette méthode le résultat de M. von Mangoldt, ainsi que quelques propositions qui s'y rattachent et que je crois nouvelles.

Dans un dernier paragraphe (n^{os} 79 à 83), j'ai essayé d'élucider certaines questions relatives à ce que M. Boutroux appelle les langues d'une fonction entière. J'ai montré sur quelques exemples la complexité de la question; on pourra rapprocher les résultats de ce paragraphe de ceux du numéro 18, et l'on verra que, même si l'on connaît les langues d'une fonction $f(z)$, on ne sait encore que peu de choses sur les zéros de $f(z)+a$. Au point de vue de la distribution des zéros, une valeur a, exceptionnelle au point de vue du numéro 18, est aussi remarquable qu'une valeur a donnant un point critique transcendant de la fonction inverse.

---

(1) Lindelöf, *Mémoire sur les fonctions entières*, loc. cit.; Leau, *Mémoire sur les fonctions entières orientées*... (Annales de l'École Normale, 1906).

Une partie des résultats exposés dans ce travail a fait l'objet de deux notes aux *Comptes rendus* (1er semestre 1913); je dois signaler que la première, relative aux fonctions d'ordre nul, renferme une petite erreur que les lecteurs du paragraphe III (1re partie) rectifieront facilement; dans une note qui termine la deuxième, j'avais indiqué que le théorème de M. Jensen ne pouvait donner le résultat de M. von Mangoldt; j'ai reconnu depuis que je m'étais trompé.

Je ne veux pas terminer cette Introduction sans exprimer ma bien vive reconnaissance à M. Borel, qui m'a engagé à poursuivre mes premiers travaux et auprès duquel j'ai toujours trouvé le plus bienveillant accueil; qu'il me soit permis aussi de remercier M. Picard pour l'intérêt qu'il a bien voulu témoigner à mes recherches.

PREMIÈRE PARTIE.

Fonctions entières d'ordre nul.

I. — Calcul approché de $\log M(r)$.

[1] J'indiquerai d'abord quelques notations que j'emploierai constamment dans ce travail : $f(z)$ étant une fonction entière de la variable $z = re^{i\varphi}$, j'appellerai $M(r)$ le maximum du module de $f(z)$ pour $|z| = r$; c_n désignera le coefficient de z^n dans le développement de Mac-Laurin de $f(z)$ et je poserai :

$$|c_n| = e^{-g_n} = e^{-n\gamma_n}.$$

Pour simplifier les formules, je supposerai $|c_0| = 1$. Si $f(z)$ a des zéros, je désignerai par $a_n = e^{i\varphi_n}r_n$ le $n^{\text{ième}}$ de ces zéros supposés rangés par ordre de modules non décroissants, un zéro multiple d'ordre p étant compté p fois.

Enfin en supposant que la variable réelle x croisse indéfiniment par valeurs positives, j'appellerai $\varepsilon(x)$ ou simplement ε toute quantité positive, définie pour $x > x_0$, et qui tend vers zéro; $\eta(x)$ ou η toute quantité réelle ou complexe qui tend vers zéro; et $h(x)$ ou h toute quantité positive qui reste finie (comprise entre deux nombres positifs), ou bornée.

[2] Ceci posé, nous chercherons d'abord à déduire de la valeur des nombres c_n une valeur approchée de $\log M(r)$. On sait que l'on a, quels que soient r et n, $M(r) > |c_n z^n|$, c'est-à-dire

$$\log M(r) > n \log r - g_n,$$

une limite inférieure de $\log M(r)$ est donc donnée par le maximum du second membre, nous désignerons ce maximum par $\mu(r)$, c'est le logarithme du module du terme (ou des termes) $c_n z^n$ qui a le plus grand module, terme que nous appellerons pour abréger *terme maximum*. Pour obtenir $\mu(r)$, on peut marquer dans un plan xoy les points $A_n(n, g_n)$ et mener par l'origine la droite D_r de coefficient angulaire $\log r$.

La valeur de n donnant le maximum correspond au point (ou aux points) A_n qui a relativement à D_r la plus petite ordonnée. La parallèle à D_r menée par ce point laisse tous les autres points A_n sur elle ou au-dessus. On définit donc en faisant croître r le polygone de Newton, considéré par M. Hadamard [1], ayant pour sommets certains points A_n et laissant les autres au-dessus de ses côtés ou sur eux. Soit Π ce polygone, nous désignerons par G_n l'ordonnée du point de Π qui a pour abcisse l'entier n, et nous poserons

$$e^{G_{n+1}-G_n}=\mathcal{R}_{n+1},$$

$\mathcal{R}_n$ croît, ou tout au moins ne décroît pas, lorsque n croît, et croît indéfiniment avec n, nous l'appellerons le *rapport rectifié de* $|c_{n-1}|$ à $|c_n|$. On a

$$\mu(r)=n\log r-\sum_{1}^{n}\log\mathcal{R}_i.$$

pour

$$\mathcal{R}_n\leqq r\leqq\mathcal{R}_{n+1}.$$

Désignons par $\mathfrak{N}(x)$ *le nombre des rapports rectifiés qui sont inférieurs ou égaux à* x, $\mathfrak{N}(x)$ *est encore le rang du terme maximum* (ou le rang de celui de ces termes dont le rang est le plus élevé); nous aurons

$$\mathfrak{N}(r)\left[\log r-\log\mathcal{R}_{\mathfrak{N}(r)}\right]=\int_{\mathcal{R}_{\mathfrak{N}(r)}}^{r}\frac{\mathfrak{N}(x)}{x}\,dx,$$

$$i\left[\log\mathcal{R}_{i+1}-\log\mathcal{R}_i\right]=\int_{\mathcal{R}_i}^{\mathcal{R}_{i+1}}\frac{\mathfrak{N}(x)}{x}\,dx,$$

d'où

$$\mu(r)=\int_{0}^{r}\frac{\mathfrak{N}(x)}{x}\,dx. \tag{1}$$

Pour obtenir une limite supérieure de $\log M(r)$, nous écrirons

$$|c_m|\,r^m=\frac{r^m}{e^{g_m}}<\frac{r^m}{e^{G_m}}=e^{\mu(r)}\,\frac{r^{m-\mathfrak{N}(r)}}{e^{G_m-G_{\mathfrak{N}(r)}}},$$

---

[1] Hadamard, *Étude sur les propriétés des fonctions entières*... (Journal de Mathématiques, t. IX, 4e série, 1893, p. 174); voir également la méthode exposée par M. Hadamard dans le *Bulletin de la Société mathématique*, 1896, p. 186, qui donne l'approximation de la formule (4) que nous obtiendrons plus loin.

d'où

$$|c_m| r^m < e^{\mu(r)} \left(\frac{r}{\mathfrak{R}_{n'}}\right)^{m-n'}, \qquad n' \geqq \mathfrak{N}(r);$$

et par suite :

$$\mathrm{M}(r) < e^{\mu(r)} \left[n' + \frac{1}{1 - \frac{r}{\mathfrak{R}_{n'}}} \right], \qquad \mathfrak{R}_{n'} > r.$$

Nous prenons

$$n' = \mathfrak{N}\left[r + \frac{r}{\mathfrak{N}(r)}\right] + 1,$$

alors

$$\mathfrak{R}_{n'} > r\left[1 + \frac{1}{\mathfrak{N}(r)}\right],$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{M}(r) < \left\{ 2\mathfrak{N}\left[r + \frac{r}{\mathfrak{N}(r)}\right] + 1 \right\} e^{\mu(r)}.$$

Nous aurons donc l'égalité

$$\log \mathrm{M}(r) = \mu(r) + \lambda \left\{ \log \mathfrak{N}\left(r + \frac{r}{\mathfrak{N}(r)}\right) + \log[2 + \varepsilon(r)] \right\}, \qquad 0 < \lambda < 1. \tag{2}$$

En particulier, lorsque l'on a

$$\mathfrak{N}\left(r + \frac{r}{\mathfrak{N}(r)}\right) < k\mathfrak{N}(r), \qquad k > 1; \tag{3}$$

l'égalité (2) est remplacée par l'égalité

$$\log \mathrm{M}(r) = \mu(r) + \lambda[\log \mathfrak{N}(r) + h], \qquad 0 < \lambda < 1. \tag{4}$$

Nous allons montrer que l'*inégalité* (3) *a lieu en général.* Posons

$$\log r = \mathrm{X}, \qquad \mathfrak{N}(r) = \mathrm{N}(\mathrm{X}),$$

l'inégalité (3) sera vérifiée si l'on a :

$$\mathrm{N}\left(\mathrm{X} + \frac{1}{\mathrm{N}(\mathrm{X})}\right) < k\mathrm{N}(\mathrm{X}). \tag{3'}$$

L'étude de cette inégalité se fait par la méthode employée par M. Borel pour des inégalités analogues (¹) : partons de $\mathrm{X} = \mathrm{X}_0$ et faisons croître X ; si pour $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1$

(¹) Voir le Mémoire de M. Borel, *Sur les zéros des fonctions entières* (Acta Mathematica, t. XX, 1896, p. 375), et le livre de M. Blumenthal, *Sur les fonctions entières d'ordre infini.*

(on peut avoir $X_1 = X_0$), l'inégalité (3') ne se trouve pas vérifiée, nous exclurons le segment X_1, $X'_1 = X_1 + \frac{1}{N(X_1 - 0)}$; puis nous partirons de X'_1 et recommencerons la même opération. (Les discontinuités de $N(X)$ n'introduisent pas de complications en ayant soin de prendre toujours dans (3) et (3') la valeur à droite dans le premier membre, à gauche dans le second.) La longueur du $i^{\text{ème}}$ segment marqué est inférieure à

$$s_i = \frac{1}{k^{i-1} N(X_0)},$$

et l'on a :

$$N(X'_i) > k^i N(X_0).$$

Comme la série $\sum_1^\infty s_i$ converge et a pour somme $\frac{k}{(k-1)N(X_0)}$, on voit que le nombre des segments exclus entre X_0 et $X > X_0 + \frac{k}{(k-1)N(X_0)}$ est fini, et que la longueur totale de ces segments est inférieure à $\frac{k}{(k-1)N(X_0)}$. A l'extérieur de ces segments (au sens strict), l'inégalité (3') a lieu. D'où le résultat :

L'inégalité (2) *peut être remplacée par l'inégalité* (4), *sauf peut-être pour des valeurs de r comprises dans une infinité dénombrable d'intervalles, à l'intérieur desquels la variation totale de* $\log r$ *est, pour* $r > r_0$, *égale à* $\frac{h}{\mathfrak{N}(r_0)}$.

C'est là le résultat que donnerait la méthode géométrique de M. Hadamard.

[**3**] Pour les fonctions d'ordre nul, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{g_n}{n \log n} = \infty,$$

donc *a fortiori* $\frac{\log n}{\log \mathcal{R}_n}$ tend vers zéro, et, par suite,

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log \mathfrak{N}(r)}{\log r} = 0,$$

l'égalité (2) donne donc :

$$\log M(r) = \mu(r) + \varepsilon(r) \log r.$$

De même pour les fonctions d'ordre fini,

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \mathfrak{N}(r)}{\log r} = k, \qquad k \text{ fini},$$

donc :

$$\log M(r) = \mu(r) + h(r) \log r.$$

Or, on sait que le rapport de $\log r$ à $\log M(r)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$, ce qui est d'ailleurs visible sur l'expression de $\mu(r)$, donc :

Pour les fonctions d'ordre fini ou d'ordre nul, $\log M(r)$ *est asymptotiquement égal au logarithme du module du terme maximum,* en ce sens que l'on a

$$\log M(r) = [1 + \varepsilon(r)]\,\mu(r), \tag{5}$$

ce que nous écrirons aussi

$$\log M(r) \sim \mu(r).$$

Pour les fonctions d'ordre infini on ne peut espérer obtenir un résultat aussi simple, car il est évident que l'on peut former des fonctions pour lesquelles, pour une infinité de valeurs indéfiniment croissantes de r, le quotient de $\mu(r)$ par $\log M(r)$ soit inférieure à un. Mais nous allons montrer que l'égalité (5) est encore vraie en général. Nous poserons encore

$$\log r = X, \qquad \mathfrak{N}(r) = N(X),$$

et nous chercherons par exemple les valeurs de X pour lesquelles on a

$$\mu(r) = \int_0^X N(x)\,dx > \left\{\log\left[N\left(X + \frac{1}{N(X)}\right)\right]\right\}^2,$$

pour de telles valeurs (5) a lieu et même on a :

$$\varepsilon(r) = \frac{h(r)}{\sqrt{\mu(r)}}.$$

Nous avons évidemment

$$\int_0^X N(x)\,dx > N\left(X - \frac{1}{[N(X)]^\alpha}\right)\frac{1}{N(X)^\alpha}, \qquad \alpha < 1\,;$$

de sorte que l'inégalité précédente sera vérifiée à partir d'une certaine valeur de X, si l'on a :

$$N\left(X - \frac{1}{N(X)^\alpha}\right) > \left[N\left(X + \frac{1}{N(X)^\alpha}\right)\right]^{\alpha+\alpha_1}, \qquad \alpha + \alpha_1 < 1.$$

Considérons alors l'inégalité

$$N\left(X + \frac{2}{N(X)^\alpha}\right) > [N(X)]^{\frac{1}{\alpha+\alpha_1}}. \tag{β}$$

(dans laquelle on remplace, s'il y a lieu, $N(X)$ par $N(X-0)$, et de même $N\left(X+\frac{2}{N(X)^\alpha}\right)$ par $N\left(X + \frac{2}{N(X-0)^\alpha} + 0\right)$). Faisant croître X depuis $X'_0 = X_0 - \frac{1}{N(X_0)^\alpha}$, nous nous arrêtons au premier point X_1 pour lequel (β) a lieu, et nous excluons le segment X_1, $X_1' = X_1 + \frac{2}{N(X_1)^\alpha}$, puis nous partons de X_1' pour recommencer la même opération. Entre X_0' et X le nombre des intervalles exclus est fini, inférieur à

$$\frac{\log_2 N(X) - \log_2 N(X_0')}{\log \frac{1}{\alpha + \alpha_1}},$$

et leur longueur inférieure à

$$\frac{2 + \varepsilon(X_0')}{\left(N(X_0')\right)^\alpha}.$$

Certains de ces intervalles peuvent se réunir pour en former un seul, si X'_i ne coïncide pas avec X_{i+1}, nous exclurons encore le segment

$$X'_i, \qquad X'_i + \frac{1}{N(X'_i)^\alpha}.$$

La longueur totale des intervalles, en nombre fini, exclus entre X_0 et X sera au plus égale à

$$\frac{3 + \varepsilon(X_0')}{\left(N(X_0')\right)^\alpha};$$

si X est extérieur à ces intervalles, le point $X - \frac{1}{N(X)^\alpha}$ sera extérieur aux premiers intervalles exclus, on aura donc

$$N(X') > \left[N\left(X' + \frac{2}{N(X')^\alpha}\right)\right]^{\alpha+\alpha_1}, \qquad X' = X - \frac{1}{N(X)^\alpha},$$

et *a fortiori*

$$N\left(X - \frac{1}{N(X)^\alpha}\right) > \left[N\left(X + \frac{1}{N(X)^\alpha}\right)\right]^{\alpha+\alpha_1};$$

d'où le résultat :

Pour les fonctions d'ordre infini, l'égalité (5) *a lieu, sauf peut-être dans une infinité dénombrable d'intervalles à l'intérieur desquels la variation totale de* $\log r$ *pour* $r > r_0$ *est* $\frac{h(r_0)}{[\mathfrak{N}(r_0)]^\alpha}$, $\alpha < 1$.

[**4**] Nous allons montrer que, inversement,
sauf peut-être dans une infinité dénombrable d'intervalles dans lesquels la variation totale de $\log r$ *est finie, on a l'égalité*

$$\mathfrak{N}(r) \sim \frac{d\,[\log M(r)]}{d\,(\log r)}. \tag{6}$$

Nous poserons encore

$$\log r = X, \qquad \mathfrak{N}(r) = N(X),$$
$$\log M(r) = V(X),$$

$V'(X)$ est une fonction continue et croissante de X d'après une proposition de M. Hadamard. L'égalité (2) nous donne :

$$(2') \quad \int_0^X N(x)\,dx + \lambda \log N(X') = \int_0^X V'(x)\,dx, \quad X' = X + \frac{1}{N(X)}, \quad 0 < \lambda < 1 + \varepsilon(X).$$

Les procédés employés au numéro 2 montrent que l'on peut former une suite de nombres X_n vérifiant les conditions :

$$X_{n+1} = X_n + \frac{\lambda_n}{\sqrt{N(X_n)}}, \qquad N\left(X_n + \frac{3}{\sqrt{N(X_n)}}\right) < N[(X_n)]^2, \qquad 3 < \lambda_n < 6 + \varepsilon.$$

Écrivons l'égalité précédente pour $X = X_n$ et $X = X'_n = X_n + \dfrac{1}{\sqrt{N(X_n)}}$, et retranchons, on aura

$$\int_{X_n}^{X'_n} N(x)\,dx + 2\lambda' \log N(X_n) = \int_{X_n}^{X'_n} V'(x)\,dx, \qquad -1 - \varepsilon < \lambda' < 1 + \varepsilon;$$

ce qui montre que, une fois au moins entre X_n et X'_n, on a

$$(7) \qquad N(x) + 2\lambda'' \sqrt{N(X_n)} \log[N(X_n)] = V'(x), \qquad -1 - \varepsilon < \lambda'' < 1 + \varepsilon,$$

ou tout au moins que $V'(x)$ est compris entre les deux nombres

$$N(x - 0) - (2 + \varepsilon) \sqrt{N(X_n)} \log[N(X_n)], \qquad N(x + 0) + (2 + \varepsilon) \sqrt{N(X_n)} \log[N(X_n)].$$

Dans ce dernier cas, en écrivant l'égalité (2′) pour $X = X'_n$ et $X = X''_n = X'_n + \dfrac{1}{\sqrt{N(X'_n)}}$, on constatera que dans cet intervalle on a une fois au moins l'égalité (7); de sorte que, dans tous les cas, on a

$$(7') \qquad N(x) + 2\lambda''' \sqrt{N(x)} \log[N(x)] = V'(x), \qquad |\lambda''| < 1 + \varepsilon,$$

une fois au moins entre X_n et X_{n+1}, c'est-à-dire pour une suite de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$; telles que

$$x_{n+1} < x_n + \frac{12 + \varepsilon}{\sqrt{N(x_{n+1})}}.$$

Ceci étant, prenons parmi les nombres x_n une suite de nombres x_{n_q}, tels que la série $\sum_q [N(x_{n_q})]^{-\frac{1}{4}}$ converge, et excluons entre x_{n_q} et $x_{n_{q+1}}$ les intervalles x_i, x_{i+1} pour lesquels

$$N(x_{i+1}) > N(x_i)\left(1 + \frac{1}{N(x_{n_q})^{\frac{1}{4}}}\right),$$

on voit que la longueur totale des intervalles exclus sera de l'ordre de la somme de la série

$$\sum_q \frac{1}{[N(x_{n_q})]^{\frac{1}{4}}},$$

donc finie. Dans les intervalles restants on a, les fonctions $V'(x)$ et $N(x)$ étant croissantes,

$$V'(x_i) < V'(x) < V'(x_{i+1}),$$
$$N(x_i) \leqq N(x) \leqq N(x_{i+1}),$$
$$N(x_{i+1}) \leqq N(x_i)\left[1 + \frac{1}{[N(x_{n_q})]^{\frac{1}{4}}}\right] = N(x_i)\,[1 + \varepsilon(x_i)];$$

donc, d'après l'égalité (7') qui se trouve vérifiée pour x_i et x_{i+1},

$$N(x) = [1 + \varepsilon(x)]\,V'(x),$$

ce qui démontre la proposition que nous avions en vue.

Il est clair que dans certains cas il n'y aura pas d'intervalles exceptionnels, c'est ce qui aura lieu par exemple si la fonction $V'(x)$ satisfait à la condition de croissance :

$$\lim_{x=\infty} \frac{V'(x')}{V'(x)} = 1, \qquad x' = x + \frac{1}{[V'(x)]^{\alpha}}, \qquad \alpha < 1.$$

On ne peut avoir ici de simplication pour les fonctions d'ordre fini ou d'ordre nul, car si l'égalité (6) est vérifiée quel que soit r, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mathfrak{M}(\mathcal{R}_n + 0) - \mathfrak{M}(\mathcal{R}_n - 0)}{\mathfrak{M}(\mathcal{R}_n - 0)} = 0,$$

condition qui peut ne pas être réalisée, quelque lente que soit la croissance de $\mathfrak{M}(x)$.

[**5**] L'égalité (2) permet de résoudre en partie la question suivante (¹) : à quelles conditions une fonction $\theta(r)$ doit-elle satisfaire, pour qu'il existe au moins une fonction entière dont le logarithme du module maximum lui soit asymptotiquement égal?

(¹) Cette question est posée par M. Borel dans ses *Leçons sur les fonctions entières*, note 3 p. 120.

Tout d'abord, d'après le théorème de M. Hadamard rappelé ci-dessus, il est nécessaire que l'on ait

$$\theta(r) \sim \int_0^r \frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \tag{8}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction continue et croissante non bornée. Cette condition est suffisante pour les fonctions d'ordre fini ou d'ordre nul, car on aura

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \theta(r)}{\log r} = k, \qquad k \text{ fini};$$

donc aussi

$$\overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log \varphi(x)}{\log x} = k,$$

et, par suite, en prenant

$$\mathfrak{N}(x) = \mathrm{E}\big(\psi(x)\big), \qquad \psi(x) \sim \varphi(x);$$

où $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ désigne la partie entière de X, on aura pour les fonctions correspondantes :

$$\log \mathrm{M}(r) \sim \int_0^r \frac{\mathfrak{N}(x)}{x}\,dx \sim \int_0^r \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \sim \theta(r).$$

Pour l'ordre infini, la condition (8) apparaît encore comme suffisante lorsque la fonction $\varphi(x)$ satisfait à la condition

$$\lim_{x=\infty} \frac{\{\log \varphi(x')\}^2}{\varphi(x)} = 0, \qquad x' = x\left[1 + \frac{2}{\varphi(x)}\right],$$

ou à des conditions analogues.

[6] L'égalité (2) et le théorème de M. Jensen nous donneront une relation entre les nombres r_n et G_n. Je rappellerai d'abord l'énoncé bien connu du théorème de M. Jensen pour le cas particulier des fonctions entières : *on a l'égalité*

$$n \log r - \log(r_1 r_2 \dots r_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi - \log|f(0)|, \tag{9}$$

$$r_n \leqq r \leqq r_{n+1},$$

c'est là ce que j'appellerai *l'égalité de M. Jensen*, le premier membre peut se mettre sous forme d'intégrale, par un procédé analogue à celui employé dans le calcul de $\mu(r)$. *si $n(x)$ désigne le nombre des zéros dont le module est inférieur ou égal à x, on a :*

$$n \log r - \log(r_1 r_2 \dots r_n) = \int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx; \tag{10}$$

l'égalité que l'on obtient alors dans (9) est celle que l'on trouverait directement par l'intégration d'une égalité de Cauchy [1]. La formule ainsi obtenue nous servira constamment dans la suite. D'autre part, l'égalité (9) donne (pour $|f(0)| = 1$) l'inégalité

$$\frac{r^n}{r_1 r_2 \dots r_n} < M(r) \tag{11}$$

valable quels que soient r et n, nous l'appellerons *inégalité de M. Jensen.*

Cela rappelé, l'égalité (2) et l'inégalité (11) nous donnent

$$\frac{r^n}{r_1 r_2 \dots r_n} < \left[2\mathfrak{N}\left(r + \frac{r}{\mathfrak{N}(r)}\right) + 1 \right] \frac{r^n}{e^{G_n}}, \qquad n = \mathfrak{N}(r),$$

d'où, en faisant $r = \mathcal{R}_n$:

$$r_1 r_2 \dots r_n > \frac{e^{G_n}}{2n_1 + 1}, \qquad n_1 = \mathfrak{N}\left(\mathcal{R}_n + \frac{\mathcal{R}_n}{\mathfrak{N}(\mathcal{R}_n)}\right).$$

D'après les remarques faites au numéro 2, n_1 est en général égal à hn, de sorte que la formule précédente, obtenue très simplement, rendra sensiblement les mêmes services que la formule déduite de l'égalité (32) du grand Mémoire de M. Hadamard.

[7] On peut, en faisant certaines hypothèses simples sur la croissance des rapports rectifiés $\mathcal{R}_n$, obtenir quelques résultats intéressants. M. Hadamard [2] a observé que si l'on a pour une valeur de n

$$\frac{\mathcal{R}_{n+1}}{\mathcal{R}_n} \geqq k^2, \qquad k > 1;$$

on aura pour $r = k\mathcal{R}_n$:

$$f(z) = c_n z^n \left[1 + \alpha(z) \frac{2}{k-1} \right], \qquad |\alpha(z)| < 1;$$

donc, si $k^2 > 9$, la fonction a n zéros dans le cercle de rayon $k\mathcal{R}_n$.

Par suite, *pour les fonctions vérifiant l'une des conditions équivalentes,*

$$\log M(r) \leqq \frac{(\log r)^2}{h}, \qquad |c_n| \leqq \frac{1}{e^{\frac{h}{2} n^2}}, \qquad h > \log 9,$$

il existe une infinité de cercles, de rayons indéfiniment croissants, qui renferment un nombre de zéros égal au rang du terme maximum.

---

(1) Il suffira de modifier convenablement la fin de la démonstration exposée dans les *Leçons sur les fonctions méromorphes* de M. Borel, p. 106.

(2) *Comptes rendus*, 1902, 2e semestre, p. 1309. M. Hadamard tire de la propriété considérée une règle d'exclusion du cas d'exception de M. Picard pour les fonctions d'ordre infini.

Si nous supposons que, à partir d'un certain rang, les coefficients c_n sont différents de zéro, et que l'on ait, à partir de ce rang,

$$\left|\frac{c_n^2}{c_{n-1}\,c_{n+1}}\right| \geqq k^2, \qquad k > 1;$$

on a, pour $r = k\mathfrak{R}_n = k\left|\frac{c_{n-1}}{c_n}\right|$:

$$f(z) = c_n z^n [1 + \mathrm{H}(k)\alpha(z)], \qquad \mathrm{H}(k) = 2\sum_1^\infty k^{-n^2}, \qquad |\alpha(z)| < 1;$$

donc si $\mathrm{H}(k) < 1$, *c'est-à-dire* $k > 2,1913\ldots$, *les zéros de* $f(z)$ *sont séparés par les cercles de rayon* $k\mathfrak{R}_n$, et l'on a :

$$\log \mathrm{M}(r) = \int_0^r \frac{\mathfrak{N}(x)}{x}\,dx + h(r), \qquad |n(x) - \mathfrak{N}(x)| \leqq 1.$$

Enfin, *si l'une des suites de termes généraux*

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \qquad \left|\frac{c_n\,c_{n+2}}{c_{n+1}^2}\right|$$

a pour limite zéro, on a la relation :

$$\lim_{n=\infty} \frac{(-1)^n}{a_1\,a_2\ldots a_n}\,\frac{c_0}{c_n} = 1, \qquad c_0 \neq 0.$$

Tout d'abord, si la deuxième suite a pour limite zéro, on a

$$a_n = -\frac{c_{n-1}}{c_n}(1 + \varepsilon_n),$$

donc la première suite a pour limite zéro. Dès lors, pour $r = r_n\sqrt{\frac{r_{n+1}}{r_n}}$ on aura

$$\mathrm{M}(r) = [1 + \varepsilon(r)]\,\frac{|c_0|\,r^n}{r_1\,r_2\ldots r_n},$$

d'où, quel que soit m,

$$|c_m| < \frac{(1 + \varepsilon_m)\,|c_0|}{r_1\,r_2\ldots r_m},$$

et, d'autre part,

$$|c_n|\,r^n > [1 + \varepsilon(r)]\,\frac{r^n\,|c_0|}{r_1\,r_2\ldots r_n} - \sum_0^{n-1} |c_m r^m| - \sum_{n+1}^\infty |c_m r^m|,$$

ce qui donnera

$$|c_n| > \frac{(1 - \varepsilon_n)\,|c_0|}{r_1\,r_2\ldots r_n},$$

et conduira au résultat annoncé.

Incidemment, on voit que, si les coefficients c_n sont réels et que

$$\left|\frac{c_n^2}{c_{n-1}c_{n+1}}\right| > 4,800\ldots, \qquad \text{pour} \qquad n > n_0,$$

le nombre des zéros imaginaires est limité. Les deux derniers cas considérés mettent aussi en évidence des relations remarquables entre les nombres $\mathfrak{R}_n$ et r_n d'une part, entre les fonctions $n(x)$ et $\mathfrak{N}(x)$ d'autre part. Il est difficile de voir ce que devient la première relation dans des cas plus généraux; pour la deuxième, le théorème de M. Jensen montre que, pour que l'on ait

$$\lim_{x=\infty} \frac{n(x)}{\mathfrak{N}(x)} = 1,$$

il est nécessaire que l'on ait

$$\log M(r) \sim \int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx; \tag{12}$$

cette condition ne peut être réalisée, d'une façon un peu générale, que pour des fonctions d'ordre nul, et n'est d'ailleurs pas suffisante, comme on le verra facilement plus loin.

[8] Nous chercherons maintenant, en supposant que la fonction est d'ordre nul, une relation entre les fonctions $M(r)$ et $n(r)$. Le théorème de M. Jensen nous donne déjà :

$$\log M(r) > \int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx.$$

D'autre part, en supposant toujours $|f(0)| = 1$, nous avons :

$$M(r) \leqq \prod_1^\infty \left(1 + \frac{r}{r_i}\right) < \frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n}\, e^{\frac{1}{r}\sum\limits_1^n r_i + r\sum\limits_{n+1}^\infty \frac{1}{r_i}}, \qquad n = n(r).$$

Or, on a :

$$\sum_{n+1}^\infty \frac{1}{r_i} = \sum_{n+1}^\infty \left(\frac{i+1}{r_i} - \frac{i}{r_i}\right) = -\frac{n}{r} + n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{n+1}}\right) + \sum_{n+1}^\infty i\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_{i+1}}\right)$$
$$= -\frac{n}{r} + \int_r^\infty n(x)\frac{dx}{x^2}.$$

De même,

$$\sum_1^n r_i = nr - \int_0^r n(x)\,dx,$$

d'où

$$\log M(r) < \int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx + r\int_r^\infty \frac{n(x)}{x^2}\,dx - \frac{1}{r}\int_0^r n(x)\,dx,$$

et, par suite,

$$(13) \qquad \log M(r) = \int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx + \lambda(r) r \int_r^\infty \frac{n(x)}{x^2}\,dx, \qquad 0 < \lambda(r) < 1.$$

Nous désignerons par $\mu_1(r)$ le premier des deux termes du second membre de l'égalité (13), la fonction $\mu_1(r)$ est toute semblable à la fonction $\mu(r)$ considérée précédemment. Nous allons chercher une limite supérieure du deuxième terme de l'égalité (13).

Marquons dans le système de coordonnées ox, oy les points A_n de coordonnées $x_n = \log r_n$, $y_n = \log n$, et traçons les segments oA_n et les parallèles à ox menées par les points A_n à droite de ces points (sens de $x > 0$). Comme $\frac{\log n}{\log r_n} = \frac{y_n}{x_n}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, il existe une ligne polygonale limitant les points du plan, d'abcisse positive, qui sont situés au-dessus de toutes les demi-droites et de tous les segments menés par les points A_n. Cette ligne a pour sommets une infinité de points A_n et elle est formée de portions de segments oA_n et de segments parallèles à ox. Si $y = Y(x)$ est l'équation de cette ligne, on a

$$(14) \qquad n(x) \leqq e^{Y(\log x)},$$

l'égalité ayant lieu dans une infinité d'intervalles ayant pour origines une infinité de points r_n, j'appellerai les valeurs correspondantes de n *indices principaux*, et la fonction $\rho(x) = \frac{Y(\log x)}{\log x}$ *exposant simple de la suite des zéros* (¹). Il est évident que les fonctions les plus simples sont celles pour lesquelles tous les nombres n sont indices principaux ($n > n_0$), les fonctions correspondantes sont celles que M. Littlewood appelle *functions of standart type.*

Soit N_i le $i^{\text{ème}}$ indice principal. Au point A_{N_i} associons un point B_i de ox, d'abscisse positive, et tel que la droite $B_iA_{N_i}$ ait un coefficient angulaire inférieur ou égal à $1-\alpha$, $\alpha > 0$. Marquons les demi-droites D_{N_i} parallèles à ox et de même sens, ayant pour origine les points A_{N_i} et les segments $A_{N_i}B_i$. Certains points A_n peu-

(¹) C'est cette fonction $\rho(x)$ que j'appelais *exposant minimum* dans mon Mémoire des *Mathematische Annalen*, t. LXX, p. 474.

vent alors se trouver au-dessus de ces segments et demi-droites. Soit $A_{n'}$ l'un d'eux, avec $x_{N_i} < x_{n'} < x_{N_{i+1}}$; nous marquons la demi-droite $D_{n'}$ passant par $A_{n'}$ parallèle à ox et de même sens, et la parallèle, menée par $A_{n'}$, au segment $B_{i+1}A_{N_{i+1}}$ jusqu'au point où elle coupe ox. La ligne polygonale limitant la portion du plan $(x > o)$ dont les points sont au-dessus de tous ces segments et demi-droites, aura pour sommets convexes vers le haut les points A_{N_i} et certains $A_{n'}$. La fonction $Z(x)$ définie par cette ligne sera inférieure ou égale à $Y(x)$ pour toute valeur de x, et l'on aura encore

$$n(x) \leqq e^{Z(\log x)}, \tag{14'}$$

l'égalité ayant lieu pour une infinité d'intervalles correspondant à des valeurs de n que j'appellerai encore *indices principaux*. La fonction

$$\rho(x) = \frac{Z(\log x)}{\log x}$$

sera *un exposant rectiligne*, l'exposant simple est le plus grand d'entre eux.

D'une façon générale, soit $Z(x)$ une fonction croissante, dérivable sauf peut-être aux points x_n et en des points intermédiaires en nombre fini, où elle a une dérivée à gauche et à droite; nous supposons que la courbe $y = Z(x)$ passe par une infinité de points A_n et laisse les autres au-dessous, et que l'on a :

$$Z'(x \pm o) < 1 - \alpha, \qquad \alpha > o.$$

Dans ces conditions, on dira que la fonction $\rho(x) = \dfrac{Z(\log x)}{\log x}$ est *un exposant*. Il est clair qu'il existe toujours un exposant rectiligne inférieur ou égal pour toute valeur de x à un exposant donné, de sorte que tout exposant vérifie l'inégalité (14'). En particulier, il existe des exposants non croissants; pour ces exposants, $Z'(x)$ tend vers zéro avec $\dfrac{1}{x}$, l'exposant simple est le plus petit d'entre eux.

[9] Ceci posé, pour un exposant non croissant $\rho(x)$, nous avons

$$n(x') \leqq x'^{\rho(x')} \leqq x'^{\rho(x)}, \qquad x' \geqq x,$$

d'où

$$\int_r^\infty n(x)\frac{dx}{x^2} < \int_r^\infty x^{\rho(r)-2}\,dx = \frac{r^{\rho(r)-1}}{1-\rho(r)},$$

et, par suite, l'égalité (13) donne :

$$\log M(r) = \mu_1(r) + h(r)r^{\rho(r)}, \qquad o < h(r) < 1 + \varepsilon(r). \tag{15}$$

Prenons maintenant un exposant rectiligne, on a, si x est supérieur à r compris entre r_{N_i} et $r_{N_{i+1}}$,

$$Z(\log x) < Z(\log r) + (\log x - \log r) \times (1 - \alpha_{i+1}),$$

$1 - \alpha_{i+1}$ étant le coefficient angulaire du segment $A_{N_{i+1}} B_{i+1}$; par suite,

$$\int_r^\infty n(x) \frac{dx}{x^2} < \int_r^\infty e^{Z(\log x)} \frac{dx}{x^2} < e^{Z(\log r)} \frac{1}{r\alpha_{i+1}}.$$

On aura donc, si $\rho(x)$ est un exposant rectiligne correspondant à un nombre α, l'égalité

$$\log M(r) = \mu_1(r) + h(r) \frac{r^{\rho(r)}}{\alpha}, \qquad 0 < h(r) < 1. \tag{15'}$$

Cette égalité est encore valable pour un exposant quelconque dont la dérivée Z' reste inférieure à $1 - \alpha$.

Quelle est la valeur de ces égalités? Supposons d'abord que $\frac{n}{\log r_n}$ reste fini, on aura dès lors, pour un exposant rectiligne quelconque $x^{\rho(x)} < k \log x$, k étant fini, ce qui donne l'égalité

$$\log M(r) \sim \mu_1(r). \tag{12}$$

Cette égalité (12) montre d'ailleurs que $\frac{\log M(r)}{(\log r)^2}$ reste fini, et réciproquement si $\frac{\log M(r)}{(\log r)^2}$ est borné, l'application de l'inégalité de M. Jensen qui donne

$$n < \frac{\log M(r)}{\log r - \log r_n}, \qquad r > r_n,$$

montre que $\frac{n}{\log r_n}$ reste fini; on a donc le résultat suivant : *pour toutes les fonctions pour lesquelles l'une des conditions équivalentes*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{n}{\log r_n} = h, \qquad \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{(\log r)^2} = h'; \tag{16}$$

(h et h' finis) *est réalisée*, on a :

$$\log M(r) \sim \int_0^r \frac{n(x)}{x} dx. \tag{12}$$

Les conditions (16) sont caractéristiques en ce sens que, lorsqu'elles ne sont pas vérifiées, l'égalité (12) ne peut avoir lieu que sous certaines conditions de régularité. En effet, supposons les zéros alignés ($\varphi_n = 0$), on a

$$M(r) > \frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n} \prod_{n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{r}{r_i}\right),$$

imaginons que, pour une infinité de valeurs n' de n, $r_{n'+1}$ soit un zéro d'ordre

$$\alpha \int_0^{r_{n'+1}} n(x) \frac{dx}{x}, \qquad \alpha \text{ positif},$$

on aura pour $r = r_{n'+1}$:

$$\log M(r) > (1 + \log 2 \times \alpha) \int_0^r n(x) \frac{dx}{x},$$

l'égalité (12) n'a pas lieu. De plus, $\dfrac{n}{\log r_n}$ n'est pas borné, mais peut rester inférieur à $\varphi(r_n)$, $\varphi(x)$ étant une fonction croissant aussi lentement que l'on veut.

[**10**] Pour les fonctions croissant plus vite que celles satisfaisant à la condition (16), nous montrerons que, *dans une infinité d'intervalles aussi éloignés que l'on veut, on a :*

$$\log M(r) = [1 + \varepsilon(r)] \int_0^r \frac{n(x)}{x} dx. \tag{12}$$

Considérons en effet un exposant dont la dérivée $Z'(x)$ tend vers zéro avec $\dfrac{1}{x}$, soit N_i le $i^{\text{ème}}$ indice principal; on a

$$\int_0^{kr_{N_i}} \frac{n(x)}{x} dx > n(r_{N_i}) \log k,$$

$$(r_{N_i} k)^{\rho(r_{N_i} k)} < n(r_{N_i}) k^{\varepsilon'},$$

ε' étant la borne supérieure de $Z'(x)$ pour $x > r_{N_i}$; en prenant alors $\log k = \dfrac{\mu}{\varepsilon'}$, μ étant fini, on aura

$$\log M(r) = \left[1 + \lambda(r) \frac{\varepsilon' e^{\mu}}{\mu(1 + \varepsilon')}\right] \int_0^r \frac{n(x)}{x} dx, \qquad 0 < \lambda(r) < 1,$$

$$r = r_{N_i} e^{\frac{\mu}{\varepsilon'}},$$

ce qui démontre notre proposition. Il résulte encore de ce calcul que, lorsque $Z'(x)$ tend vers zéro, nous avons :

$$\lim_{r=\infty} \frac{r^{\rho(r)}}{\int_0^r \frac{x^{\rho(x)}}{x}\,dx} = 0, \qquad \rho(x) = \frac{Z(\log x)}{\log x};$$

or, pour toute valeur de r, le quotient $r^{\rho(r)} : \int_0^r \frac{x^{\rho(x)}}{x}\,dx$ est, ou bien décroissant, ou bien inférieur à $Z'(\log r)$, on a donc

$$\lim_{r=\infty} \left[r^{\rho(r)} : \int_0^r \frac{x^{\rho(x)}}{x}\,dx \right] = 0,$$

et, par suite, *si $\rho(x)$ est un exposant dont la dérivée $Z'(x)$ tend vers zéro, on a*

$$(17) \qquad \log M(r) < [1 + \varepsilon(r)] \int_0^r \frac{x^{\rho(x)}}{x}\,dx = [1 + \varepsilon(r)] \int_0^{\log r} e^{Z(x)}\,dx,$$

inégalité qui se change en égalité (avec $\eta(r)$ au lieu de $\varepsilon(r)$) lorsque, pour $n > n_0$, on a :

$$n > (1 - \varepsilon_n) e^{Z(\log r_n)}.$$

On voit également que, s'il existe un exposant pour lequel $Z'(x)$ tend vers zéro, et tel que pour $n > n_0$, l'expression

$$\log Z(\log r_n) - \log n$$

reste bornée, on a l'égalité (12).

[**11**] Nous allons montrer qu'*il existe une infinité de valeurs de r donnant à $n(x)$ des valeurs croissantes et pour lesquelles*

$$n(r) = \big(1 + \varepsilon(r)\big)\mathfrak{N}(r).$$

En effet, soit $\rho(x)$ un exposant dont la dérivée Z' tend vers zéro, l'inégalité (17) donne d'abord

$$\int_0^r \frac{\mathfrak{N}(x)}{x}\,dx < \log M(r) < [1 + \varepsilon(r)] \log r \,.\, r^{\rho(r)},$$

d'où l'on tire facilement

$$\mathfrak{N}(x) < (x^{\rho(x)})^k;$$

la comparaison des égalités (2) et (15) donne alors :

$$\int_0^r \frac{\mathfrak{N}(x)}{x}\,dx = \int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx + h_1(r) r^{\rho(r)}, \qquad |h_1(r)| < h(r).$$

Soit N_i le $i^{\text{ème}}$ indice principal, ε'_i la borne supérieure de $Z'(x)$ pour $x > r_{N_i}$, ε''_i un nombre tendant vers zéro et qui sera déterminé plus loin, dans l'intervalle

$$r_{N_i}, \qquad r_{N_i} e^{\frac{\varepsilon''_i}{\varepsilon'_i}},$$

$n(x)$ restera compris entre N_i et $N_i e^{\varepsilon''_i}$. Soient alors trois nombres de cet intervalle r'_1, r'_2, r'_3, tels que

$$\frac{r'_3}{r'_2} = \frac{r'_2}{r'_1} = e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon'_i}}},$$

ce qui exige que $\varepsilon''_i > 2\sqrt{\varepsilon'_i}$; écrivons l'égalité précédente pour r'_1 et r'_2 et retranchons, il vient

$$\int_{r'_1}^{r'_2} \frac{\mathfrak{N}(x)}{x} dx = [\log r'_2 - \log r'_1] N_i [1 + h_1(i)\sqrt{\varepsilon'_i}\, e^{\varepsilon''_i}], \qquad h_1(i) < h(i);$$

d'où

$$\mathfrak{N}(r'_2 - 0) > N_i(1 - h(i)\sqrt{\varepsilon'_i}\, e^{\varepsilon''_i});$$

on aura de même, avec r'_2 et r'_3 :

$$\mathfrak{N}(r'_2 + 0) < N_i(1 + h(i)\sqrt{\varepsilon'_i}\, e^{\varepsilon''_i});$$

donc, dans tout l'intervalle

$$r_{N_i} e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon'_i}}}, \qquad r_{N_i} e^{\frac{\varepsilon''_i}{\varepsilon'_i}} e^{-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon'_i}}},$$

on aura :

$$\left| \frac{\mathfrak{N}(x)}{n(x)} - 1 \right| = h(x)\sqrt{\varepsilon'_i}\, e^{\varepsilon''_i}.$$

La propriété énoncée est donc établie. On voit de plus que, dans le numéro précédent, on peut prendre $\mu = \varepsilon''_i$ en supposant que $\frac{\varepsilon'_i}{\varepsilon''_i}$ tende vers zéro, ce qui est réalisable en prenant $\varepsilon''_i = h\sqrt{\varepsilon'_i}$, $h > 1$; il existe donc une infinité de valeurs de r pour lesquelles $n(r)$ croît, et donnant simultanément les égalités

$$\log M(r) \sim \int_0^r \frac{n(x)}{x} dx, \qquad n(r) \sim \mathfrak{N}(r).$$

En particulier, si $n(x) \sim e^{Z(\log x)}$, ces égalités ont lieu quel que soit r.

II. — Étude de $|f(z)|$ dans certaines régions.

[**12**] Nous allons définir, en excluant le voisinage des zéros, un domaine D_β dans lequel nous calculerons une valeur approchée de $\log|f(z)|$, $f(z)$ étant d'ordre nul. Nous désignerons par $\beta(x)$ un nombre positif tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$ et dont la valeur sera précisée plus loin, c'est au moyen de ce nombre que nous définirons D_β. Nous allons déterminer la portion du domaine D_β comprise entre les cercles de rayons R et $R[1+\beta(R)]$; posons

$$R_1 = R[1-\beta(R)], \qquad R_2 = R[1+2\beta(R)],$$

et soit n_R le nombre des zéros compris entre les cercles de rayons R_1 et R_2. Si $n_R = 0$, nous conservons toute la couronne. Supposons $n_R \neq 0$, nous tracerons les cercles ayant pour rayons

$$R_1 + [R_2 - R_1]\frac{i}{E\left[\frac{n_R}{\beta(R)}\right]}, \qquad i = 1, 2, \ldots, E\left(\frac{n_R}{\beta(R)}\right) - 1;$$

et nous marquons certaines des couronnes formées de la façon suivante (procédé de M. Boutroux)(¹) : si une couronne contient q zéros, elle est marquée ainsi que les q précédentes et les q suivantes; si ces $2q+1$ couronnes contiennent $q+q_1$ zéros, nous marquons encore les q_1 couronnes précédentes et suivantes, etc. Le nombre des couronnes marquées est au plus $3n_R$, il y a donc au moins $\left[\frac{1}{3}E\left(\frac{1}{\beta(R)}\right) - 3\right]n_R$ couronnes qui ne sont pas marqués entre R et $R[1+\beta(R)]$.

D'autre part, sur le cercle de rayon R (R est supposé très grand), nous plaçons les sommets d'un polygone régulier tel que chaque côté soit le plus proche possible de $(R_2 - R_1)\frac{1}{E\left(\frac{n_R}{\beta(R)}\right)}$, et nous traçons les rayons passant par les sommets et compris entre les cercles R_1 et R_2, nous formons des trapèzes curvilignes que j'appellerai simplement trapèzes. Nous marquons certains de ces trapèzes par le procédé employé pour les couronnes, il restera au moins

$$\left[E\left(\frac{2\pi}{3\beta(R)}\right)\cdot E\left(\frac{1}{\beta(R)}\right) - 3\right]n_R$$

trapèzes non marqués.

(¹) P. Boutroux, Thèse, p. 103.

Ceci fait, nous excluons les parties de la couronne R, $R[1+\beta(R)]$ qui sont à la fois dans un trapèze et une couronne marqués. Le domaine restant est d'un seul tenant et comprend des couronnes, le rapport de son aire à l'aire totale est

$$1-\frac{9}{2\pi}h[\beta(R)]^3,$$

h étant inférieur à $1+\varepsilon$. De plus, si l'on pose $R'=R[1+\beta(R)]$ et qu'on effectue les mêmes opérations dans la couronne R', $R'[1+\beta(R')]$, on obtient un nouveau domaine d'un seul tenant formant avec le précédent un domaine d'un seul tenant. Donc, en effectuant ces opérations à partir d'un nombre R_0 de proche en proche, et en supposant par exemple $\beta(x)>\frac{1}{x}$, nous obtiendrons un domaine d'un seul tenant s'étendant jusqu'à l'infini, les régions exclues comprennent ou non des zéros, leurs dimensions sont $h(r)r[\beta(r)]^2$, r étant le module de l'un de leurs points. J'appellerai D'_β ce domaine, et D_β le domaine obtenu en adjoignant à D'_β celles des régions exclues qui ne contiennent pas de zéros.

[**13**] Supposons d'abord que z soit dans D'_β ou sur son contour, et que, par exemple,

$$R\leqq r\leqq R[1+\beta(R)],$$

R étant l'un des nombres qui servent à la construction de D'_β. Soient encore R_1 et R_2 les nombres adjoints à R et

$$r_m\leqq R_2\leqq r_{m+1}, \qquad r_{m'}<R_1\leqq r_{m'+1}$$

nous avons ($|f(0)|=1$) :

$$|f(z)|>\prod_1^{m'}\left(\frac{r}{r_i}-1\right)\prod_{m+1}^{\infty}\left(1-\frac{r}{r_i}\right)\prod_{m'+1}^{m}\left|1-\frac{z}{a_i}\right|=P_1\times P_2\times P_3.$$

On a

$$P_1=\prod_1^{m'}\left(\frac{r}{r_i}-1\right)=\frac{r^{m'}}{r_1r_2\dots r_{m'}}\prod_1^{m'}\left(1-\frac{r_i}{r}\right),$$

et comme

$$\frac{r_i}{r}<1-\beta(R), \qquad i\leqq m',$$

on obtient :

$$P_1>\frac{r^{m'}}{r_1r_2\dots r_{m'}}e^{-m'\log\frac{1}{\beta(R)}}.$$

De même pour P_2, en écrivant β pour $\beta(R)$,

$$\frac{r}{r_i} < \frac{1+\beta}{1+2\beta}, \qquad i > m,$$

d'où

$$1 - \frac{r}{r_i} \geqq \left(1 + \frac{r}{r_i}\right)^{-h} > e^{-h\frac{r}{r_i}}, \qquad h < \frac{2}{\beta} + 3.$$

On aura ainsi

$$\log P_2 > -hr \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{r_i},$$

soit alors $\rho(x)$ un exposant pour lequel $Z'(x)$ reste inférieur à $1-\alpha$, on a

$$\sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{r_i} < \sum_{n(r)+1}^{\infty} \frac{1}{r_i} < \frac{r^{\rho(r)}}{\alpha r} - \frac{n(r)}{r},$$

et, par conséquent,

$$\log P_2 > -h\left[\frac{r^{\rho(r)}}{\alpha} - n(r)\right], \qquad h < \frac{2}{\beta(R)} + 3.$$

Enfin, en posant $n(r) = n$, il vient

$$P_3 > \frac{r^{n-m'}}{r_{m'+1}\ldots r_n} \times \prod_{m'+1}^{n} \frac{|z-a_i|}{r} \times \prod_{n+1}^{m} \frac{|z-a_i|}{r_i} > \frac{r^{n-m'}}{r_{m'+1}\ldots r_n} \frac{\prod\limits_{m'+1}^{m} |z-a_i|}{R^{m-m'}(1+2\beta)^{m-n}};$$

si le point z se trouve dans une couronne non marquée, on a

$$|z-a_i| > \frac{3\beta . R}{E\left(\frac{n_R}{\beta}\right)}(i-n), \qquad i \geqq n+1;$$

$$|z-a_i| > \frac{3\beta R}{E\left(\frac{n_R}{\beta}\right)}(n+1-i), \qquad i \leqq n;$$

si z est dans une couronne marquée, il se trouve dans un trapèze non marqué, en ordonnant alors les zéros situés entre R_1 et R_2 suivant la distance du trapèze où ils se trouvent au trapèze contenant z, on aura des inégalités analogues, mais où le dénominateur sera multiplié par $1+\varepsilon$ rapport de l'arc de mesure $9\beta^2$ à la corde qui le soutend, ε est donc égal à $h(R)[\beta(R)]^6$. On aura donc

$$\prod_{m'+1}^{m} |z-a_i| > \left[\frac{3\beta^2 R}{(1+\varepsilon)n_R}\right]^{n_R} \left[1.2\ldots E\left(\frac{n_R}{2}\right)\right]^2 > R^{n_R} e^{-n_R\left[2\log\frac{1}{\beta(R)}+h(R)\right]},$$

d'où

$$P_3 > \frac{r^{n-m'}}{r_{m'+1}\ldots r_n} e^{-n_R\left[2\log\frac{1}{\beta(R)}+h(R)\right]}.$$

Comme nous avons

$$n_R < m < r^{\rho(r)}\left(\frac{R_2}{r}\right)^{\alpha} < r^{\rho(r)}[1+2\beta(R)]^{\alpha},$$

les inégalités obtenues pour P_1, P_2, P_3 nous donnent

$$\log|f(z)| > \mu_1(r) - \frac{2+\varepsilon(R)}{\alpha\beta(R)} r^{\rho(r)};$$

donc, d'après l'égalité (15'), on a dans tout le domaine D'_β :

$$(18') \qquad \log|f(z)| = \mu_1(r) + \lambda(z) r^{\rho(r)}, \qquad -\frac{2+\varepsilon}{\alpha\beta(R)} < \lambda(z) < \frac{1}{\alpha}.$$

Pour obtenir une égalité analogue dans D_β, il suffit de remarquer que sur le contour d'un trapèze appartenant à D_β sans appartenir à D'_β, on a l'égalité (18'), et que, sur ce contour, $\mu_1(r)$ varie au plus de $h(r).m.\beta(R)$ et $r^{\rho(r)}$ de $r^{\rho(r)}h(r)\beta(R)$, on aura donc, d'après les propriétés des fonctions harmoniques, *l'égalité*

$$(18) \qquad \log|f(z)| = \mu_1(r) + \lambda(z) r^{\rho(r)}, \qquad -\frac{2+\varepsilon(R)}{\alpha\beta(R)} < \lambda(z) < \frac{1}{\alpha} + h(r)\beta(R),$$

valable dans tout le domaine D_β.

[**14**] Avant d'indiquer les applications de l'égalité (18), je signalerai quelques cas où le calcul se précise. La considération des exposants rectilignes fait apparaître comme particulièrement simple le cas où l'on a, pour $n > n_0$,

$$\frac{\log(n+1)-\log n}{\log r_{n+1}-\log r_n} \leqq 1-\alpha, \qquad \alpha > 0;$$

ou, ce qui revient au même,

$$n[\log r_{n+1} - \log r_n] \geqq 1+k, \qquad k > 0.$$

Nous prendrons la condition sous la première forme qui est plus commode et nous supposerons l'inégalité vérifiée à partir de $n=1$, ce qui est légitime à condition de multiplier, s'il y a lieu, la fonction entière par une fraction rationnelle tendant vers *un* lorsque z croît indéfiniment. Nous appellerons α_n le plus grand nombre qui est tel que la droite de coefficient angulaire $1-\alpha_n$ menée par le point A_n (défini au n° 8), laisse les points A_i d'indice i supérieur à n au-dessous ou sur elle, ceux d'indice i inférieur à n au-dessous. On aura

$$\sum_{p+1}^{\infty} \frac{1}{r_i^q} = \int_{r_p}^{\infty} n(x)\frac{q}{x^{q+1}}\,dx - \frac{p}{r_p^q} < \int_{r_p}^{\infty} pq\,\frac{x^{-q-\alpha_p}}{r_p^{1-\alpha_p}}\,dx - \frac{p}{r_p^q} = \frac{p(1-\alpha_p)}{q+\alpha_p-1}\,\frac{1}{r_p^q},$$

et de même :

$$\sum_{1}^{p-1} r_i^q < \frac{p(1-\alpha\ )}{q+1-\alpha_p}\, r_p^q.$$

Par suite,

$$\prod_{1}^{n-1}\left(1-\frac{\alpha_i}{z}\right) < e^{\frac{1}{r}\sum\limits_{1}^{n-1} r_i} < e^{n\frac{1-\alpha_n}{2-\alpha_n}}, \qquad n=n(r),$$

$$\prod_{1}^{n-1}\left(1-\frac{a_i}{z}\right) > \prod_{1}^{n-1}\left(1-\frac{r_i}{r}\right) > e^{-\sum\limits_{q=1}^{q=\infty}\left(\frac{1}{qr^q}\sum\limits_{i=1}^{i=n-1} r_i^q\right)};$$

or, d'après ce qui précède,

$$\sum_{q=1}^{q=\infty}\left[\frac{1}{qr^q}\sum_{i=1}^{i=n-1} r_i^q\right] < n(1-\alpha_n)\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{q(q+1-\alpha_n)} < \frac{\pi^2}{6}\,n(1-\alpha_n);$$

de sorte que l'on a :

$$\left|\prod_{1}^{n-1}\left(1-\frac{a_i}{z}\right)\right| = e^{h_1 n(1-\alpha_n)}, \qquad -\frac{\pi^2}{6} < h_1 < \frac{1}{2-\alpha_n}.$$

On trouvera de même :

$$\prod_{n+2}^{\infty}\left|1-\frac{z}{a_i}\right| = e^{h_2(n+1)\frac{1-\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}}}, \qquad -\frac{\pi^2}{6} < h_2 < 1;$$

d'où l'on tirera :

$$\log|f(z)| = \mu_1(r) + k(n+1)(1-\gamma_n)\frac{1+\gamma_n}{\gamma_n} + \log\left|\left(1-\frac{z}{a_{n-1}}\right)\left(1-\frac{a_n}{z}\right)\right|,$$

$$-\frac{\pi^2}{6} < k < 1, \qquad \gamma_n \leqq \alpha_n, \qquad \gamma_n \leqq \alpha_{n-1}, \qquad n=n(r).$$

On pourrait tirer de cette égalité diverses conséquences, nous chercherons seulement à déterminer un domaine aussi vaste que possible où $|f(z)|$ croisse indéfiniment avec r. Entourons chaque zéro a_n d'un cercle C_n de rayon r_n^{-K}, K étant un nombre positif fixe, ces cercles sont, à partir d'un certain indice, extérieurs les uns aux autres. A leur extérieur, on a :

$$\frac{1-\varepsilon}{r^{K+1}} < \left|1-\frac{z}{a_{n+1}}\right|\left|1-\frac{a_n}{z}\right| < 2, \qquad n=n(r);$$

donc

$$\log|f(z)| = [1+\varepsilon(r,\varphi)]\mu_1(r) + k(n+1)\frac{1-\gamma_n^2}{\gamma_n}.$$

On a de plus l'inégalité

$$\mu_1(r) = \int_0^r n(x)\frac{dx}{x} > n\frac{1}{1-\gamma_n};$$

de sorte que, si l'on désigne par ω la racine de l'équation

$$\frac{\pi^2}{6}x^3 - \frac{\pi^2}{3}x^2 - x + 1 = 0,$$

qui est comprise entre 0 et 1 (on a $\omega = 0,46\ldots$), *pour toutes les fonctions dont les zéros vérifient la condition*

$$n\left\{\log r_{n+1} - \log r_n\right\} \geqq \frac{1}{\omega_1}, \qquad \omega_1 < \omega, \qquad n > n_0,$$

il existe un nombre R_0 *tel que, dans le domaine extérieur aux cercles* C_n *et au cercle de rayon* R_0, *le rapport*

$$\frac{\log|f(z)|}{\mu_1(r)}$$

reste compris entre deux nombres positifs fixes. Ce résultat s'applique même à des fonctions d'ordre fini dont l'ordre est inférieur à ω. Il résulte de là que l'intégrale

$$\int_\Gamma \log\left[1-\frac{x}{f(z)}\right]dz$$

prise le long d'un contour Γ extérieur aux cercles C_n et à un cercle $|z| = R_1$ est nulle. Par suite, *si l'on désigne par* $a_n(x)$ *le* $n^{\text{ième}}$ *zéro de la fonction* $f(z)-x$, ($a_n(0) = a_n$), *on aura, quel que soit* x, *pourvu que* $|x| < A$:

$$|a_n(x) - a_n| < \frac{1}{|a_n|^K} \qquad n > n_0(A).$$

Il résulte de là que les diverses déterminations de la fonction inverse $\varphi(x)$ de $f(z)$ sont également continues et le sont uniformément pour $|x| < A$. On verra de même que le $n^{\text{ième}}$ zéro de $f(z) + g(z)$, où $g(z)$ est un polynôme ou même une fonction entière croissant assez lentement, se trouve pour $n > n_0(g)$ dans le cercle C_n. Enfin, si l'on considère la fonction $f(z) + g\left(\frac{1}{z}\right)$, $g(u)$ étant une fonction entière, si l'on met cette fonction sous la forme $f_1(z) g_1\left(\frac{1}{z}\right)$, f_1 et g_1 étant des fonctions entières, le $n^{\text{ième}}$ zéro de $f_1(z)$ sera encore à partir d'une certaine valeur de n à l'intérieur du cercle C_n. Réciproquement, si ce sont les zéros de $f_1(z)$ qui satisfont à la condition indiquée ci-dessus, ceux de $f(z)$ seront dans les cercles C_n correspondants.

Par exemple, si l'on considère la fonction

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2} z^n, \qquad |q| < 1;$$

on a, comme il est bien connu et d'ailleurs bien visible :

$$zq\varphi(zq^2) = \varphi(z) - 1, \qquad S_1(z) = \varphi(z) + \varphi\left(\frac{1}{z}\right) - 1,$$

$$S_1(z) = zq S_1(zq^2), \qquad S_1(z) = A \prod_{n=0}^{n=\infty} (1 + zq^{2n+1}) \times \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 + \frac{q^{2n+1}}{z}\right);$$

et, par suite, le $n^{\text{ième}}$ zéro de $\varphi(z)$ a pour valeur approchée, à partir d'une certaine valeur de n :

$$-\left(\frac{1}{q}\right)^{2n+1} + \theta_n |q|^{(2n+1)K}, \qquad |\theta_n| < 1, \qquad K > 0.$$

[**15**] Voici d'autres conditions, moins restrictives au point de vue de la régularité et qui donnent un résultat sensiblement équivalent. Soit $n_{kk'}$ le nombre des zéros compris entre les cercles de rayons $\frac{r}{k}$ et $k'r$, on aura à l'extérieur d'un cercle de rayon R_0 et à l'extérieur des cercles C_n de rayons r_n^{-K} et centres a_n, l'égalité :

$$\log|f(z)| = \mu_1(r) + \lambda \frac{r^{\rho(r)}}{\alpha} + \nu n_{kk'} \log r,$$

$$-\left\{\alpha \log \frac{k}{k-1} + \frac{k'}{k'-1}\right\} < \lambda < 1, \qquad -(K + 1 + \varepsilon) < \nu < 0\ (^1).$$

---

(1) $\rho(x)$ est un exposant, pour lequel $Z'(x) < 1 - \alpha$; l'égalité s'obtient par un calcul immédiat.

Par suite, si l'on a simultanément,

$$\lim_{r=\infty}\left[\frac{k'}{2(k'-1)}+\log\frac{k}{k-1}\right]\frac{r^{\rho(r)}}{\mu_1(r)}=0\,;\qquad \frac{n_{kk'}\log r}{\mu_1(r)}\leqq\frac{1+h}{1+K},\qquad h>0,$$

le quotient

$$\frac{\log|f(z)|}{\mu_1(r)}$$

restera, dans le domaine considéré, entre deux limites positives fixes. Les cercles C_n peuvent se couper, mais les régions d'exclusion formées par l'ensemble de plusieurs de ces cercles ont des dimensions de l'ordre de $r_n^{-K+\varepsilon}$; de sorte que : *à chaque zéro a_n de $f(z)$ correspond un zéro de $f(z)+P(z)$, $P(z)$ étant un polynôme quelconque, et la distance de ces deux zéros tend vers zéro comme $r_n^{-K+\varepsilon}$.* Cette correspondance s'obtient par continuité. En d'autres termes, si l'on fait varier continûment les p premiers coefficients d'une fonction $f(z)$ satisfaisant aux conditions précédentes, de telle façon que ces coefficients restent en module inférieurs à un nombre A, les zéros de modules supérieurs à $R_0(A)$ décrivent des contours qui restent à l'intérieur des cercles C'_n de centres a_n et rayons $r_n^{-K_1}$. Si ces p coefficients sont des fonctions continues d'une variable x, les déterminations $z(x)$ de la fonction définie par $f(z)=0$ sont des fonctions également continues de x.

[**16**] Revenons à l'égalité (18). Pour les fonctions satisfaisant à la condition (16), on a en prenant par exemple pour $\rho(x)$ l'exposant simple

$$r^{\rho(r)}=\varepsilon_1(r)\,\mu_1(r)\,;$$

nous construirons le domaine D_β en prenant $\beta(x)=\sqrt{\varepsilon_1(x)}$, et nous aurons dans tout ce domaine D_β :

$$\log|f(z)|=[1+\eta(z)]\,\mu_1(r).$$

On a, par suite, les résultats suivants :

1° *Dans tout le domaine D_β où $\beta(x)$ est convenablement choisi, on a :*

$$\log|f(z)|=[1+\eta(z)]\log M(r)=[1+\eta(z)]\,\mu_1(r).$$

2° *Le rapport des modules des $n^{\text{ièmes}}$ zéros des fonctions $f(z)$ et $f(z)+P(z)$ où $P(z)$ est un polynôme, tend uniformément vers un lorsque n croît indéfiniment, tant que les coefficients de $P(z)$ restent en module inférieurs à un nombre A.*

3° *On peut établir entre les zéros des deux fonctions précédentes une correspondance biunivoque telle que la distance de deux zéros correspondants soit inférieure à $\left(\beta(r_n)\right)^2 r_n h(r_n)$, r_n étant l'un d'eux.*

Ces deux derniers résultats subsistent en prenant au lieu de $P(z)$ une fonction entière pour laquelle la fonction $n(x)$ ou $\mathfrak{N}(x)$ soit à la fonction $n(x)$ correspondant à $f(z)$ dans un rapport tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$. En particulier, si l'on considère la fonction inverse de $f(z)$ définie par l'égalité

$$f(z) = x,$$

on voit qu'à un nombre ε on peut faire correspondre ε', tel que les conditions

$$|x| < A, \qquad |x' - x| < \varepsilon'$$

entraînent

$$|z_i(x) - z_j(x')| < \varepsilon, \qquad |z_i(x)| \leqq 1,$$
$$|z_i(x) - z_j(x')| < \varepsilon |z_i(x)|, \qquad |z_i(x)| > 1,$$

$z_j(x')$ étant l'une quelconque des déterminations de $z(X)$ obtenues à partir de $z_i(x)$ lorsque X varie continûment de x à x' en vérifiant la condition $|X - x| < \varepsilon'$. J'exprimerai ce fait en disant que les déterminations z_i ont la *même continuité relative*, cette même continuité relative a lieu uniformément pour $|x| < A$.

[**17**] Pour une fonction ne vérifiant pas la condition (16), il pourra encore arriver dans des cas très généraux que l'on ait

$$(19) \qquad \lim_{r=\infty} \frac{r^{\varphi(r)}}{\mu_1(r)} = 0;$$

c'est ce qui a lieu si l'on a :

$$n = h_n e^{Z(\log r_n)}, \qquad h_n > k > 0, \quad \lim_{x=\infty} Z'(x) = 0.$$

Dans ces conditions, tous les résultats du numéro 16 sont encore valables. La condition (19) est une condition de régularité qui peut n'être pas vérifiée dès que la condition (16) ne l'est pas. Dans l'hypothèse où la condition (19) n'est pas vérifiée, l'égalité (18) nous donnera un théorème de M. Littlewood. Prenons pour $\rho(x)$ un exposant dont la dérivée $Z'(x)$ tend vers zéro et en nous reportant aux notations des numéros 10, 11, posons

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon'_i}{\mu}}, \qquad r_{N_i} \leqq x < r_{N_{i+1}},$$

μ étant un nombre positif fixe, alors dans toute la partie du domaine D_ρ comprise entre les cercles de rayons

$$r_{N_i} e^{h(\sqrt{\varepsilon'_i})^{-1}} \qquad \text{et} \qquad r_{N_i} e^{\frac{\mu}{\varepsilon'_i}},$$

l'égalité (18) donnera

$$\log |f(z)| = [1 + \eta(z)] \mu_1(r) = [1 + \eta(z)] \log M(r).$$

Ainsi, *pour les fonctions ne satisfaisant pas à la condition* (19), *il existe au moins une infinité de couronnes dont les rayons moyens croissent indéfiniment et dans lesquelles on a l'égalité*

$$\log |f(z)| = [1 + \eta(z)] \log M(r) \text{ (}^1\text{)}.$$

Nous verrons plus loin comment on peut donner à cette proposition une forme analogue à celle du théorème de M. Wiman pour les fonctions d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$. Actuellement, nous indiquerons une forme plus précise du théorème pour les fonctions vérifiant la condition (16). Tout d'abord, *si la fonction satisfait à l'une des conditions équivalentes :*

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r)}{(\log r)^2} = 0, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\log \left|\frac{1}{c_n}\right|}{n^2} = \infty, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{n}{\log r_n} = 0;$$

on aura, pour une infinité de valeurs de n,

$$\mathfrak{R}_{n+1} > k\mathfrak{R}_n,$$

quelque grand que soit le nombre k; par suite, d'après la proposition de M. Hadamard signalée au numéro 7, *on aura sur une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants :*

$$\log |f(z)| = \mu(r) + \eta(z) = \log M(r) + \eta(z) = \mu_1(r) + \eta(z),$$

la dernière partie de ces égalités ayant lieu d'après le théorème de M. Jensen (²). La condition imposée à la fonction est caractéristique au même point de vue que la condition (16). Nous montrerons maintenant que, *si le nombre*

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{(\log r)^2}, \qquad \text{ou} \quad \lim_{n=\infty} \frac{\log \left|\frac{1}{c_n}\right|}{n^2}, \qquad \text{ou} \quad \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{n}{\log r_n}$$

est fini, on aura sur une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants :

$$\log |f(z)| = \log M(r) + h(z) = \mu(r) + h_1(z),$$

$h(z)$ et $h_1(z)$ restant finis.

(¹) J.-E. Littlewood, *On the asymptotic approximation to integral functions of zero order* (Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, vol. 5, p. 361 et suivantes).

(²) Cette forme plus précise du théorème de M. Littlewood est démontrée directement, mais sous des conditions plus restrictives, par M. Mattson, *Rendiconti di Palermo*, t. XXXIII, 1912, et par moi, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1913.

Il suffit de démontrer la première partie de l'égalité en supposant les zéros alignés, par exemple pour $\varphi_n = \pi$; et tout revient à montrer que, pour une infinité de valeurs illimitées de r, on a :

$$f(-r) > f(r)\frac{1}{h(r)}.$$

Nous allons montrer, en appliquant le théorème général de MM. Lindelöf et Phragmèn (1), que l'égalité contraire

$$f(-r) < kf(r), \qquad r > r_0,$$

conduit, en prenant k assez petit, à une conclusion absurde.

Soit

$$f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n,$$

les c_n sont positifs ou nuls et l'on a : $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\log \frac{1}{c_n}}{n^2} = h_1$, h_1 étant positif et fini, on verra plus loin qu'on peut alors trouver une fonction $\varphi(x)$ croissante et telle que l'on ait :

$$\varphi(x+1) + \varphi(x-1) - 2\varphi(x) = 2h_1(1+\eta),$$
$$c_n \leqq e^{-\varphi(n)}, \qquad n > n_0;$$

l'égalité remplaçant l'inégalité pour une infinité de valeurs de n. Considérons la fonction

$$g(z) = [g_1(z)]^2, \qquad g_1(z) = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{e^{\frac{\varphi(n+1)-\varphi(n)}{2}}}\right);$$

d'après la propriété de la fonction $\varphi(x)$, le rapport de deux zéros consécutifs de $g_1(z)$ a pour limite e^{h_1}, on voit dès lors facilement que lorsque la partie réelle de z est positive ou nulle,

$$g_1(z) = h(r)\frac{r^n}{e^{\frac{\varphi(n)}{2}}}, \qquad n = n(r), \qquad \frac{1}{A} < h(r) < A.$$

Posons

$$G(z) = g(\sqrt{z}), \qquad z = re^{i\varphi}, \qquad -\pi \leqq \varphi \leqq \pi;$$

(1) *Sur une extension d'un principe de l'Analyse* (Acta Mathematica, t. XXXI, 1907).

$G(z)$ est monogène dans l'angle $-\pi \leqq \varphi \leqq \pi$, et l'on a

$$|G(z)| = h(r)\frac{r^n}{e^{\varphi(n)}}, \qquad \frac{1}{A^2} < h(r) < A^2,$$

n étant déterminé par les inégalités

$$e^{\varphi(n)-\varphi(n-1)} < r < e^{\varphi(n+1)-\varphi(n)},$$

qui sont celles déterminant le terme maximum de la série

$$\sum_0^\infty \frac{r^n}{e^{\varphi(n)}};$$

on aura donc :

$$f(r) < \sum_0^\infty \frac{r^n}{e^{\varphi(n)}} = h(r)G(r), \qquad h(r) < B, \qquad r > r_0;$$

et pour une infinité de valeurs de r :

$$f(r) > \frac{1}{A^2}G(r).$$

Nous allons montrer qu'on ne peut avoir

$$f(-r) < C\,G(r), \qquad r > r_1, \qquad (C < B),$$

C étant convenablement choisi, ce qui établira notre proposition. Considérons la fonction

$$F(z) = \frac{f(z)}{G(z)\left[\sqrt{(B^2 - C^2)\frac{r_1}{z}} + C\right]};$$

le radical ayant sa valeur arithmétique pour $\varphi = 0$, cette fonction est monogène dans le domaine

$$-\pi \leqq \varphi \leqq \pi, \qquad r \geqq r_1;$$

et sur toute la frontière du domaine située à distance finie, on a

$$|F(z)| < 1, \qquad \text{tandis que} \qquad F(re^{i\varphi}) = h(r),$$

donc, d'après le théorème de Phragmèn-Lindelöf, cette inégalité aura lieu dans tout le domaine. Dès lors, nous aurons

$$f(r) < G(r)[C + \varepsilon(r)],$$

ce qui conduit à une absurdité si l'on a pris $C < \frac{1}{A^2}$. Notre proposition est donc établie.

[**18**] La condition (19) a été imposée par notre méthode de calcul, il importe donc de montrer qu'il existe effectivement des fonctions pour lesquelles les conclusions du numéro 16 ne sont pas valables. Nous montrerons sur un exemple, qu'*il existe des fonctions $f(z)$ pour lesquelles $|f(z)|$ reste fini dans des aires couvrant une portion finie du plan* $|z| < R_i$ (pour une infinité de valeurs indéfiniment croissantes de R_i) *et pour lesquelles le rapport des modules des zéros $n^{\text{ièmes}}$ de deux fonctions $f(z) + a$ peut ne pas tendre vers un.*

Soit la fonction

$$F(z) = \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{e^{u_p}}\right)^{(u_p)^4}, \qquad u_p = 2^{2^p};$$

prenons :

$$z = e^{u_n} h e^{i\theta}, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \qquad e^{-u_n(1-\alpha)} < h < 3, \qquad \alpha < 1.$$

Nous aurons

$$F(z) = (1 - he^{i\theta})^{u_{n+2}} e^{u_n^3(1+\varepsilon_2)} (he^{i\theta})^{u_{n+1}(1+\varepsilon_1)} e^{\varepsilon z)},$$

ε_1 et ε_2 ne dépendant que de n. Marquons sur ox les zéros de $F(z)$, (A_p, e^{u_p}); d'après le théorème de M. Littlewood, entre A_p et A_{p+1} passe un cercle C_p dont le centre est l'origine et sur lequel $|f(z)|$ est de l'ordre de $M(r)$; les fonctions $F(z) + a$, $(|a| < B)$ ont toutes le même nombre de zéros entre C_p et $C_{p+1}\big(p > P(B)\big)$. D'autre part, la valeur de $F(z)$ montre qu'à l'intérieur du cercle Γ_p de centre A_p et rayon

$$R_p = e^{u_p} e^{-2^{-2^p(1-\varepsilon_p)}}$$

$|F(z)|$ est égal à

$$e^{-u_p^{3+\eta(z)}},$$

les zéros de $F(z) + a$ sont extérieurs à ces cercles Γ_p pour $p > P(B)$. On verrait de même qu'ils sont intérieurs aux cercles Γ'_p de centres A_p et rayons

$$R'_p = e^{u_p} e^{-2^{-2^p(1+\varepsilon_p)}}.$$

Dès lors, si l'on désigne par $r(n, a)$ le module du $n^{\text{ième}}$ zéro de $F(z) + a$, on voit, en prenant a réel et positif, que pour certains n, on a

$$\frac{r(n, 0)}{r(n, a)} = e^{n^{\frac{1-\varepsilon}{2}}},$$

et pour d'autres :

$$\frac{r(n, 0)}{r(n, a)} = \frac{1 + \varepsilon}{2}.$$

Les diverses affirmations de l'énoncé sont bien vérifiées par la fonction $F(z)$, et, de plus, on a :

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{r(n, 0)}{r(n, a)} = +\infty;$$

on verrait d'ailleurs en poussant plus loin les calculs que, pour a et b non nuls,

$$\lim_{n=\infty} \frac{r(n, a)}{r(n, b)} = 1,$$

la différence des arguments tendant d'ailleurs vers zéro. La valeur $a = 0$ constitue donc pour les fonctions $f(z) + a$ *une valeur exceptionnelle :* pour les valeurs de x dont le module est compris entre deux nombres positifs, les déterminations de la fonction $z(x)$ définie par l'égalité $f(z) = x$ ont uniformément la même continuité relative, mais cela n'a pas lieu lorsque x tend vers zéro.

Le fait que les zéros de $F(z)$ sont des zéros multiples dont l'ordre de multiplicité croît indéfiniment n'intervient qu'indirectement, on peut remplacer les zéros e^{u_p} par $(u_p)^4$ zéros simples situés dans un cercle de centre A_p et rayon fini sans changer les résultats. Mais dans ce cas encore, si a'_n désigne le $n^{\text{ième}}$ zéro de $F'(z)$, la suite des nombres $F(a'_n)$ admet pour point limite *zéro,* et x tournant autour de l'origine, on peut échanger une détermination $z_i(x)$ de module suffisamment grand, avec d'autres, telles que $|z_i(x) - z_j(x)|$ soit de l'ordre de $|z_i(x)|$; et le nombre des déterminations qui s'échangent croît indéfiniment avec le module de $z_i(x)$. On pourrait convenir de dire que x_0 est *valeur exceptionnelle* si les déterminations de la fonction $z(x)$ définie par l'égalité $f(z) - x = 0$ n'ont pas la *même continuité relative* pour $x = x_0$, et que x_0 est *valeur ordinaire* dans le cas contraire. Mais il importerait de voir si, en général une valeur x_0 est ordinaire, et la question que l'on semble devoir se poser est la suivante : *peut-on assurer que, tout point x_0 qui n'est pas point limite de points critiques algébriques, est un point ordinaire?* Il est d'ailleurs clair qu'un point limite de points critiques algébriques peut être point ordinaire, c'est ce qui a lieu lorsque la condition (19) est vérifiée. A défaut de la solution de la question précédente, j'indiquerai quelques faits.

Si x_0 est valeur exceptionnelle, il existe une infinité de régions fermées Γ_i entourant certains des zéros de $f(z) = x_0$, l'une au moins des dimensions de Γ_i étant de l'ordre de sa distance à l'origine (le quotient de la dimension par la distance étant fini), dans lesquelles $f(z)$ tend vers x_0, et dans chaque région Γ_i se trouve une région γ_i dans laquelle $|f'(z)|$ est au plus de l'ordre de $\frac{1}{|z|}$. L'étude des valeurs exceptionnelles est ainsi liée à l'étude des régions où $f(z)$ tend vers certaines limites. La façon dont $f(z)$ tend vers sa limite ne semble pas intervenir; $F(z)$ étant toujours la fonction considérée ci-dessus, la fonction

$$G(z) = \frac{F(z) - 1}{z}$$

tend encore vers zéro dans les cercles Γ_i, mais à la façon de $\frac{1}{z}$, et $x = 0$ est encore un point exceptionnel. Pour cette fonction $G(z)$, les propositions 2 et 3 du numéro 16 sont valables, il semble bien cependant que la définition des valeurs exceptionnelles doit être celle que j'ai indiquée (¹).

On pourrait évidemment se poser les mêmes questions relativement à l'égale continuité, mais les choses se compliqueraient encore. L'exemple de la fonction

$$F_1(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{e^{2^p}}\right)^{2^p},$$

qui satisfait aux conditions (16), montre qu'un point $(x = 0)$ peut être tel que la continuité relative soit la même, sans qu'il y ait égale continuité. La considération de cette même fonction montre également que l'on peut avoir l'égalité (12) sans que le rapport $\frac{n(r)}{\mathfrak{N}(r)}$ tende vers un (²).

III. — Les fonctions à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière.

[**19**] L'égalité (5) d'une part, l'égalité (15), qui dans un grand nombre de cas est remplacée par (12), d'autre part, permettent de rechercher d'une façon naturelle les fonctions pour lesquelles $\log M(r)$ s'exprime simplement en fonction de $n(r)$ ou $\mathfrak{N}(r)$. Afin d'introduire le moins de classes que possible, nous chercherons à exprimer $\log M(r)$ en fonction de r et $n(r)$ ou r et $\mathfrak{N}(r)$. Nous chercherons tout d'abord des fonctions $\varphi(x, y)$ auxquelles on puisse faire correspondre des fonctions $f(z)$ donnant lieu à l'égalité

$$\log M(r) \sim \varphi(n(r), r) \sim \varphi(\mathfrak{N}(r), r). \tag{20}$$

En égalant les membres extrêmes, on sera ramené à l'équation asymptotique

$$\mu(r) \sim \varphi(\mathfrak{N}(r), r); \tag{20'}$$

mais en égalant les premier et second membres, on obtient seulement

$$\mu_1(r) + \lambda \frac{r^{\varphi(r)}}{\alpha} \sim \varphi(n(r), r), \tag{20'''}$$

(¹) Ce fait est à rapprocher du suivant : la fonction d'ordre 1, $\frac{\sin z}{z}$ satisfait aux propositions du numéro 16 (2° et 3°), bien que $x = 0$ soit point essentiel de la fonction inverse.

(²) J'ai fait l'étude de cette fonction $F_1(z)$ dans les *Nouvelles Annales*, t. XI, 1911.

$\rho(x)$ étant un exposant. Nous allons montrer que si $\varphi(x, y)$ satisfait à certaines conditions, l'égalité ($20'''$) peut s'écrire :

$$\mu_1(r) \sim \varphi(n(r), r). \tag{20''}$$

Nous nous appuierons sur la proposition suivante : *Lorsque* $\varphi(x, y)$ *satisfait aux conditions* (A), *l'égalité*

$$\log M(r) = h(r)\varphi(n(r), r), \qquad 0 < D < h(r) < E; \tag{21}$$

entraîne l'égalité

$$\log M(r) \sim \mu_1(r). \tag{12}$$

Les conditions (A) *sont les suivantes :*

1° Lorsque x et y croissent indéfiniment de façon à ce que $\dfrac{\log x}{\log y}$ tende vers zéro, on a :

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x, y)}{x} = \infty;$$

2° Il existe un nombre positif C tel que, quels que soient le nombre k supérieur ou égal à *un*, et les nombres positifs ρ et ρ_1, on ait pour $x > x_0(\rho, \rho_1, k)$:

$$\frac{\varphi(k^{\rho_1}x^\rho, kx)}{\varphi(x^\rho, x)} > (k^{\rho_1})^\gamma, \qquad \gamma > C.$$

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction vérifiant ces conditions et soit $n(x)$ le nombre des zéros d'une fonction $f(z)$ donnant lieu à l'égalité (21), on a, d'après l'égalité ($15'$),

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x}dx + h(r)\frac{r^{\rho(r)}}{\alpha} = \mu\varphi(n(r), r), \qquad \begin{cases} 0 < h(r) < 1, \\ D < \mu < E; \end{cases}$$

nous prendrons pour $\rho(x)$ un exposant rectiligne, et nous montrerons que le rapport

$$r^{\rho(r)} : \varphi(n(r), r)$$

tend vers zéro, ce qui démontrera la proposition. D'après la première condition (A), il suffit de montrer que $\dfrac{r^{\rho(r)}}{n(r)}$ reste fini. Soit N_i le $i^{\text{ème}}$ indice principal; posons

$$R_i = r_{N_i}, \qquad R_{i+1} = r_{N_{i+1}};$$

il existe entre R_i et R_{i+1} un nombre R'_i (on peut avoir $R'_i = R_{i+1}$) tel que dans l'intervalle $R_iR'_i$ la fonction $Z(\log x)$ est constante, et est linéaire dans l'intervalle R'_iR_{i+1}. Dans les intervalles $R_iR'_i$, on a donc

$$r^{\rho(r)} = n(r),$$

et notre proposition est démontrée; on a ainsi

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx = (\mu - \varepsilon)\varphi(n(r), r), \qquad R_i \leqq r \leqq R'_i;$$

d'où l'on tire :

$$\int_{R'_i}^{R_{i+1}} \frac{n(x)}{x}\,dx = \mu_1\varphi[N_{i+1}, R_{i+1}] - \mu_2\varphi(N_i, R'_i), \qquad \begin{cases} \mu_1 > D - \varepsilon, \\ \mu_2 < E + \varepsilon. \end{cases}$$

Mais nous avons

$$n(x) < e^{Z(\log x)} = N_{i+1}\left(\frac{x}{R_{i+1}}\right)^{1-\alpha_{i+1}}, \qquad R'_i \leqq x \leqq R_{i+1};$$

et par conséquent :

$$\mu_1\varphi(N_{i+1}, R_{i+1}) - \mu_2\varphi(N_i, R'_i) < N_{i+1}\frac{1 - \left(\dfrac{R'_i}{R_{i+1}}\right)^{1-\alpha_{i+1}}}{1-\alpha_{i+1}} < \frac{N_{i+1}}{1-\alpha_{i+1}}.$$

Posons

$$R_{i+1} = kR'_i,$$

on aura

$$N_{i+1} = N_i k^{1-\alpha_{i+1}};$$

d'après la deuxième condition (A), l'inégalité précédente s'écrit :

$$\mu_1\varphi(N_{i+1}, R_{i+1}) \times \left[1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\left(k^{1-\alpha}\right)^{-\gamma}\right] < \frac{N_{i+1}}{1-\alpha_{i+1}}, \qquad \alpha_{i+1} < \alpha + \varepsilon < 1;$$

ce qui exige que k reste fini, quelque grand que soit i; on a donc encore dans les intervalles $R'_i R_{i+1}$ l'inégalité

$$r^{\varphi(r)} < k^{1-\alpha_{i+1}} n(r) < h(r)n(r),$$

ce qui achève notre démonstration.

[20] Ceci posé, nous considérerons d'abord le problème relatif aux conditions que doivent vérifier $n(r)$ ou $\log M(r)$ pour que l'égalité (20) ait lieu : les conditions imposées à $\mathfrak{N}(r)$ seront les mêmes que pour $n(r)$, mais il sera nécessaire d'en tirer des conclusions pour les nombres γ_n, ce que nous ferons plus loin. Si $n(x)$ croît lentement, $\mu_1(r)$ est sensiblement égal à $n(r) \times \log r$, nous prendrons donc d'abord

$$\varphi(x, y) = x \log y,$$

fonction qui vérifie les conditions (A). Nous cherchons s'il existe des fonctions pour lesquelles on a

$$\log M(r) \sim \mu_1(r) \sim n(r) \log r;$$

$n(x)$ doit vérifier l'équation

$$(a_1) \qquad \mu_1(r) = \int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx = [1 - \varepsilon(r)]\, n(r) \log r$$

qui peut s'écrire en appelant $\mu_1'(r)$ la dérivée ou la dérivée à droite ou à gauche de $\mu_1(r)$:

$$n(x) \log x = x\mu_1'(x) \log x = [1 + \varepsilon(x)]\, \mu_1(x).$$

Nous tirons de là :

$$(b_1) \qquad \frac{\mu_1(x')}{\mu_1(x)} < \left(\frac{\log x'}{\log x}\right)^{1+\varepsilon}, \qquad x' > x;$$

et, par suite,

$$(c_1) \qquad \frac{n(x')}{n(x)}\, \frac{1 + \varepsilon(x)}{1 + \varepsilon(x')} < \left(\frac{\log x'}{\log x}\right)^{\varepsilon}, \qquad x' > x;$$

ces conditions étant vérifiées quelque petit que soit le nombre positif ε, à partir d'une valeur $x_0(\varepsilon)$ de x, et $\varepsilon(x)$ étant dans l'égalité (c_1) une fonction bien déterminée de x, tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$. Nous tirons de là les propositions suivantes :

1° *La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait*

$$\log M(r) \sim n(r) \log r,$$

est que, quelque petit que soit le nombre positif ε, *on ait à partir d'une valeur* $n_0(\varepsilon)$ *de* n :

$$\frac{n'}{n} < (1 + \varepsilon)\left(\frac{\log r_{n'}}{\log r_n}\right)^{\varepsilon}, \qquad n' > n.$$

2° *La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait*

$$n \sim \frac{\log M(r_n)}{\log r_n},$$

est que, quel que soit le nombre positif ε, *on ait pour* $r < r_0(\varepsilon)$:

$$\frac{\log M(r')}{\log M(r)} < \left(\frac{\log r'}{\log r}\right)^{1+\varepsilon} (1 + \varepsilon).$$

Que ces conditions soient nécessaires, c'est ce qui résulte des inégalités (b_1) et (c_1) qui sont même beaucoup plus restrictives en apparence [1]. Montrons qu'elles sont suffisantes. Tout d'abord, si l'on a

$$\frac{n'}{n} < (1 + \varepsilon)\left(\frac{\log r_{n'}}{\log r_n}\right)^{\varepsilon},$$

[1] Il est clair que les conditions nécessaires écrites ici, étant suffisantes, sont équivalentes aux conditions tirées de (b_1) et (c_1), mais elles sont d'une application plus commode.

la condition (16) est vérifiée de sorte que l'égalité (12) a lieu. Or, de l'inégalité précédente nous tirons

$$n(x) > n(r)(1-\varepsilon_0)\left(\frac{\log x}{\log r}\right)^{\varepsilon_0} - 1, \qquad r_0 < x < r,$$

d'où

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x}dx > n(r)(1-\varepsilon_0)\int_{r_0}^r \left(\frac{\log x}{\log r}\right)^{\varepsilon_0}\frac{dx}{x} - \log r$$

$$> n(r)\frac{1-\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}(\log r - \log r_0) - \log r,$$

ε_0 étant arbitrairement petit, cette inégalité démontre la première proposition. Considérons maintenant la deuxième proposition, la condition imposée à $\log M(r)$ montre que la condition (16) est vérifiée, par suite,

$$\log M(r) = [1+\varepsilon(r)]\int_0^r \frac{n(x)\,dx}{x} < [1+\varepsilon(r)]\,n(r)\log r,$$

d'où

$$n(r) > [1-\varepsilon(r)]\frac{\log M(r)}{\log r}.$$

D'autre part, l'inégalité de M. Jensen donne :

$$n(r) < \frac{\log M(x)}{\log x - \log r} = \frac{1}{k-1}\,\frac{\log M(x)}{\log x}, \qquad x = r^k, \qquad k > 1;$$

ε étant donné, nous prenons $r > r_0(\varepsilon)$, nous avons

$$\frac{\log M(x)}{\log x} < \frac{\log M(r)}{\log r} \times (1+\varepsilon)k^{1+\varepsilon},$$

et, par suite, en prenant $k = e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}$, nous obtenons

$$n(r) < (1 + h(r)\varepsilon)\frac{\log M(r)}{\log r},$$

ce qui achève de démontrer la deuxième partie de la proposition.

[**21**] Nous poserons d'une façon générale

$$l_p^q = \overline{\lim_{n=\infty}}\,\frac{\log_q n}{\log_p r_n}, \qquad L_p^q = \overline{\lim_{r=\infty}}\,\frac{\log_q M(r)}{\log_p r},$$

p et q étant des entiers supérieurs ou égaux à un. Pour les fonctions que nous venons de considérer, on a :

$$l_2^1 = 0, \qquad L_2^2 = 1;$$

d'une façon générale, les inégalités (11) et (17) montrent que l'une de ces égalités entraîne l'autre. Nous appellerons *fonctions de la première classe et de première catégorie les fonctions pour lesquelles ces égalités ont lieu.* Les fonctions que nous avons considérées dans le numéro 20 sont les fonctions de la première classe pour lesquelles la relation asymptotique entre $\log M(r)$ et $n(r)$ et r revêt la forme la plus simple, comme nous le verrons plus loin, nous les appellerons *fonctions de la première classe et première catégorie à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière.*

[22] En prenant $\varphi(x, y) = \lambda x \log y$, λ étant fixe, et nécessairement inférieur à un, on pourra faire les calculs, à peu de choses près, comme ci-dessus, et on trouvera des fonctions pour lesquelles :

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log n(r)}{\log_2 r} = \frac{1}{\lambda} - 1 .$$

Nous appellerons *fonctions de la première classe et de seconde catégorie celles pour lesquelles l_2^1 est positif et fini, et L_2^2 fini et supérieur à un,* conditions qu'on reconnaîtra être équivalentes au moyen des inégalités (11) et (17); on a même $L_2^2 = l_2^1 + 1$. Les fonctions satisfaisant à la condition écrite ci-dessus sont de la seconde catégorie, nous obtiendrons des fonctions plus générales en prenant

$$\varphi(x, y) = \frac{x \log y}{1 + \dfrac{\log x}{\log_2 y}} = \frac{x \log y \log_2 y}{\log [x \log y]},$$

fonction qui satisfait visiblement aux conditions (A). Nous aurons à considérer l'équation

$$(a_1) \qquad \mu_1(r) \sim \log M(r) \sim \frac{n(r) \log r \log_2 r}{\log [n(r) \log r]},$$

qui nous donnera :

$$\mu_1(x) = [1 + \eta(x)] \frac{\mu_1'(x) . x \log x \log_2 x}{\log [\mu_1'(x) x \log x]}, \qquad x \mu_1'(x) = n(x).$$

Comme $n(x)$ doit croître indéfiniment avec x, nous aurons, en prenant les logarithmes

$$\log \mu_1(x) = [1 + \eta(x)] \log [\mu_1'(x) . x . \log x],$$

de sorte que l'équation différentielle asymptotique précédente est équivalente à l'équation

$$(b_1) \qquad \mu_1(x) . \log \mu_1(x) = [1 + \eta(x)] \mu_1'(x) . x \log x . \log_2 x .$$

[**23**] En posant

$$\log x = X, \qquad \mu_1(x) = U(X),$$

l'équation (b_2) devient :

$$\text{(B)} \qquad U(X)\log U(X) \sim U'(X) X \log X.$$

Cette équation (B) caractérise les fonctions U(X) ayant une dérivée par sections que l'on obtient asymptotiquement en multipliant U(X) par le facteur $\dfrac{\log U(X)}{X \log X}$, c'est-à-dire qui se calcule, à un facteur $1 + \eta(X)$ près, comme si U(X) était une fonction *rationnelle* X^k. Par suite, dans un intervalle assez petit, U(X) croît comme une fonction X^k. Nous dirons que les fonctions *dérivables* vérifiant la condition (B) sont à *dérivabilité rationnelle*. Si l'on pose

$$U(X) = X^{\theta(X)},$$

la condition nécessaire et suffisante pour que U(X) soit à dérivabilité rationnelle est que $\theta'(X)$ existe et vérifie la condition

$$\lim_{X=\infty} \frac{\theta'(X) X \log X}{\theta(X)} = 0.$$

Si $\theta(X)$ a seulement une dérivée par sections (extrémités comprises), la condition précédente entraîne encore la condition (B). La fonction inverse d'une fonction vérifiant la condition (B) la vérifie également. En intégrant l'équation (B), on voit que : U(X) *vérifiant la condition* (B), *à tout nombre positif arbitrairement petit* ε *correspond un nombre* $X_0(\varepsilon)$ *à partir duquel on a :*

$$\text{(C)} \qquad \left(\frac{\log X'}{\log X}\right)^{1-\varepsilon} < \frac{\log U(X')}{\log U(X)} < \left(\frac{\log X'}{\log X}\right)^{1+\varepsilon}, \qquad X' > X > X_0(\varepsilon).$$

Ces inégalités montrent que l'ordre (ordre parenthèse de M. Borel) de $\log U(X)$ en $\log X$ est égal à *un*, l'ordre de U(X) est donc $\omega(1)\dfrac{1}{\omega}$.

Toute fonction U(X) vérifiant les conditions (C) est continue, mais pas nécessairement dérivable, même par sections ; si elle l'est, elle vérifie (B).

Il est inutile de dire que nous ne considérons ici que des fonctions non bornées, les conditions (C) entraînent alors la croissance, nous dirons qu'une fonction U(X) vérifiant les conditions (C) est *à croissance rationnelle* (bien qu'elle puisse croître plus vite que les fonctions X^k). Si U(X) est une telle fonction, l'expression

$$\frac{U(X)\log U(X)}{X \log X}$$

joue, asymptotiquement, le rôle de dérivée, en ce sens que, *les nombres dérivés de* U(X) *sont asymptotiquement égaux à cette expression.* Car on a

$$U(X+h)-U(X)=U(X)^{\left(\frac{\log(X+h)}{\log X}\right)^{1+\eta(X,h)}}-U(X), \qquad \lim_{X=\infty}\eta(X,h)=0;$$

or,

$$\left(\frac{\log(X+h)}{\log X}\right)^{1+\eta(X,h)}=\left[1+\frac{h}{X\log X}(1+\eta_1)\right]^{1+\eta(X,h)}=1+\frac{h}{X\log X}(1+\eta_2),$$

$$\lim_{X=\infty}\eta_2=0$$

Comme on a

$$\lim_{X=\infty}\frac{\log U(X)}{X}=0,$$

on obtient

$$U(X+h)-U(X)=U(X)\left[e^{\frac{h\log U}{X\log X}(1+\eta_2)}-1\right]=h\frac{U(X)\log U(X)}{X\log X}(1+\eta_3),$$

ce qui démontre la propriété.

Il résulte par exemple de là que

$$U(X)\sim\int_{X_0}^{X}\frac{U(x)\log U(x)}{x\log x}dx=U_1(X),$$

c'est-à-dire qu'à toute fonction U(X) à croissance rationnelle, on peut adjoindre une fonction à dérivabilité rationnelle $U_1(X)$ qui lui est asymptotiquement égale.

[**24**] Avant d'appliquer ces considérations à la résolution de l'égalité (a_2), je ferai quelques calculs qui nous serviront dans la suite à montrer que les conditions nécessaires que nous obtenons sont suffisantes.

Je dirai qu'*une fonction croissante* Y(X) *satisfait aux conditions* D lorsque : elle est définie pour $X>X_0$, et admet une dérivée première Y'(X) qui tend vers zéro avec $\frac{1}{X}$, et il existe une fonction $\psi(X)$ dérivable satisfaisant aux conditions :

$$\lim_{X=\infty}\frac{XY'(X)}{\psi(X)}=1; \qquad \psi(X)\geqq 1, \qquad X>X_0; \qquad \lim_{X=\infty}\frac{X\psi'(X)}{(\psi(X))^2}=0.$$

Ceci posé, on a la proposition suivante : *l'égalité*

(22) $$n(r)\sim\frac{e^{Y(X)}}{X}, \qquad X=\log r,$$

Y(X) *satisfaisant aux conditions* D, *entraîne l'égalité*

(23) $$\log M(r)\sim\frac{e^{Y(X)}}{XY'(X)}.$$

Nous avons, en effet,

$$r\int_r^\infty \frac{n(x)}{x^2}dx \sim e^{\mathrm{X}}\int_{\mathrm{X}}^\infty \frac{e^{\mathrm{Y}(x)-x}}{x}dx = e^{\mathrm{X}}\int_{\mathrm{X}}^\infty \left(\mathrm{Y}'(x)-1-\frac{1}{x}\right)^{-1} d\left(\frac{e^{\mathrm{Y}(x)-x}}{x}\right) \sim \frac{e^{\mathrm{Y}(\mathrm{X})}}{\mathrm{X}}$$

et

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x}dx \sim \int_{\mathrm{X}_0}^{\mathrm{X}} \frac{e^{\mathrm{Y}(x)}}{x}dx = \int_{\mathrm{X}_0}^{\mathrm{X}} \left[\frac{x\mathrm{Y}'(x)}{\psi(x)} - \frac{x\psi'(x)}{(\psi(x))^2}\right]^{-1} d\left(\frac{e^{\mathrm{Y}(x)}}{\psi(x)}\right)$$

$$= [1+\eta(\mathrm{X}_0)]\frac{e^{\mathrm{Y}(\mathrm{X})}}{\psi(\mathrm{X})} \sim \frac{e^{\mathrm{Y}(\mathrm{X})}}{\mathrm{X}\mathrm{Y}'(\mathrm{X})};$$

l'égalité (13) entraîne dès lors l'égalité (23). En particulier, si l'on a

$$(22') \qquad n(r) \sim e^{\mathrm{Y}(\mathrm{X})},$$

$\mathrm{Y}(\mathrm{X})$ vérifiant toujours les conditions (D), on aura :

$$(23') \qquad \log \mathrm{M}(r) \sim \frac{e^{\mathrm{Y}(\mathrm{X})}}{\mathrm{Y}'(\mathrm{X})}.$$

Il faut remarquer que, malgré leur simplicité, ces égalités n'ont aucun intérêt au point de vue de l'étude de la relation liant $\log \mathrm{M}(r)$ à $n(r)$, puisqu'elles contiennent la dérivée $\mathrm{Y}'(\mathrm{X})$ dont l'expression en fonction de X et $\mathrm{Y}(\mathrm{X})$ peut être compliquée. Considérons par exemple la suite de nombres

$$x_1 = e, \qquad x_2 = e^e, \qquad \ldots, \qquad x_n = e^{x_{n-1}}, \qquad \ldots,$$

et la fonction $\varphi(x)$ définie par les égalités suivantes :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\log x}; \qquad x_n(\log x_n)^2 \leqq x \leqq x_{n+1}, \qquad n \geqq 1;$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\log x} + \frac{\log x - \log x_n}{\log_3 x_n}; \qquad x_n \leqq x \leqq x_n \log x_n, \quad n \geqq 2;$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\log x} + 2\frac{\log_2 x_n}{\log_3 x_n} - \frac{\log x - \log x_n}{\log_3 x_n}; \quad x_n \log x_n \leqq x \leqq x_n(\log x_n)^2, \ n \geqq 2;$$

prenons ensuite

$$\mathrm{Z}(\mathrm{X}) = \int_e^{\mathrm{X}} \frac{\varphi(x)}{x}dx, \qquad \mathrm{X} \geqq e.$$

et

$$n(r) \sim \frac{e^{\mathrm{Y}(\mathrm{X})}}{\mathrm{X}} = e^{\mathrm{Z}(\mathrm{X})},$$

$\mathrm{Y}(\mathrm{X})$ satisfait aux conditions (D) (on prendra pour $\psi(\mathrm{X})-1$ une fonction obtenue en rendant $\varphi(X)$ dérivable). Les fonctions dont le nombre des zéros est $n(x)$ sont de première classe et nous aurons

$$\log M(r) \sim \frac{n(r)\log r}{1+\varphi(\log r)};$$

$\varphi(x)$ n'étant pas borné, nous avons une relation très irrégulière. Les égalités (23) et (23′) ne nous serviront que comme intermédiaires.

[25] L'établissement de la proposition inverse : *la fonction* $Y(X)$ *satisfaisant aux conditions* (D), *l'égalité*

$$(24) \qquad \log M(r) \sim e^{Y(\log r)}$$

entraine

$$(25) \qquad n(r) \sim Y'(\log r)e^{Y(\log r)} \sim \frac{d}{d\log r}\log M(r),$$

est moins immédiat. Nous démontrerons d'abord la proposition suivante, dans laquelle nous appelons conditions (E) les conditions (D) lorsqu'on fait abstraction de la condition $\lim\limits_{X=\infty} Y'(X)=0$:

$Y(X)$ *satisfaisant aux conditions* (E), *si l'on a*

$$(26) \qquad \log M(r) < e^{Y(\log r)},$$

on aura l'inégalité

$$(27) \qquad n(r)<(1+\varepsilon)e^{Y(\log r)}Y'(\log r).H(\log r), \qquad H(X)=\left[1+\frac{1}{\psi(X)-1}\right]^{\psi(X)-1},$$

$\psi(x)$ *étant la fonction qui figure dans les conditions* (E).

Nous partirons de l'inégalité de M. Jensen :

$$n(r)<\frac{e^{Y(X_1)}}{X_1-\log r};$$

nous désignerons par $m_1(e^X)$ et $m_2(e^X)$ respectivement les bornes supérieures pour $x \geqq X$ des expressions $\left|x\frac{\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}\right|$ et $\left|\frac{xY'(x)}{\psi(x)}-1\right|$, et par $m(e^X)$ le plus grand de ces nombres. Supposons d'abord que l'on ait

$$\psi(\log r) \geqq 1+\big(m(r)\big)^{\frac{1}{3}},$$

le second membre de l'inégalité de M. Jensen serait minimum pour

$$X_1\left[1-\frac{1}{X_1Y'(X_1)}\right]=\log r;$$

si X_1 vérifie cette égalité, les conditions (E) nous donnent

$$\frac{1}{\psi(X_1)}=\frac{1}{\psi(\log r)}+\frac{\theta[m(r)]^{\frac{2}{3}}}{\psi(X_1)}, \qquad |\theta|<1+\varepsilon(r),$$

de sorte que

$$X_1=\log r\left[1-\frac{1+\theta_1[m(r)]^{\frac{2}{3}}}{\psi \log r}\right]^{-1}, \qquad |\theta_1|<1+\varepsilon(r).$$

C'est cette valeur de X_1 que nous prendrons, nous aurons

$$Y(X_1)=Y(\log r)-\log\left[1-\frac{1+\theta_1 m^{\frac{2}{3}}}{\psi(\log r)}\right]\times \xi Y'(\xi),$$

ξ étant compris entre $\log r$ et X_1, ce qui nous donne encore :

$$\xi Y'(\xi)=[1+\theta_2 m(r)]\psi(\xi)=\left[1+\theta_3[m(r)]^{\frac{2}{3}}\right]\psi(\log r).$$

En portant les valeurs de X_1 et $Y(X_1)$ dans l'inégalité de M. Jensen, il vient :

$$n(r)<[1+\varepsilon(r)]Y'(X)e^{Y(X)}H_1(r), \qquad X=\log r,$$

$$H_1(r)=\left[1-\frac{1+\theta_1 m^{\frac{2}{3}}}{\psi(\log r)}\right]^{1-\psi(\log r)[1+\theta_3 m^{\frac{2}{3}}]},$$

dans $H_1(r)$ on peut remplacer θ_3 par θ_4, ce qui revient à multiplier $H_1(r)$ par $1+\varepsilon(r)$, et on est ramené à une expression de la forme $\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)^{1-\alpha}$ dont les propriétés bien connues montrent que

$$H_1(r)=[1+\varepsilon(r)]\left[1-\frac{1}{\psi(\log r)}\right]^{1-\psi(\log r)}=[1+\varepsilon(r)]H(\log r).$$

L'inégalité (27) est donc établie dans cette première hypothèse. Si l'on a

$$\psi(\log r)\leqq 1+[m(r)]^{\frac{1}{3}},$$

nous prenons

$$X_1=\frac{\log r}{[m(r)]^{\frac{1}{3}}},$$

d'où

$$n(r)<\frac{(m(r))^{\frac{1}{3}}}{1-[m(r)]^{\frac{1}{3}}}\frac{e^{Y(X_1)}}{\log r}, \qquad e^{Y(X_1)}=e^{Y(\log r)}[m(r)]^{-\frac{\xi Y'(\xi)}{3}},$$

ξ étant compris entre $\log r$ et X_1. Nous avons ici

$$\frac{1}{\psi(\xi)}=\frac{1}{\psi(\log r)}+(\xi-\log r)\frac{\theta m_1(r)}{\log r}=\frac{1}{\psi(\log r)}+\theta_1[m(r)]^{\frac{2}{3}},$$

et $\psi(\xi)$ étant supérieur ou égal à *un* :

$$\xi Y'(\xi) = \psi(\xi)[1 + \theta_2 m(r)] = 1 + \theta_3 \left(m(r)\right)^{\frac{1}{3}} \qquad |\theta_3| < 1 + \varepsilon(r);$$

nous obtiendrons donc

$$n(r) < \frac{e^{Y(\log r)}}{\log r}\left[1 + h(r)[m(r)]^{\frac{1}{3}} \log \frac{1}{m(r)}\right],$$

ce qui, eu égard à la valeur de $\psi(\log r)$ est encore l'inégalité (27) qui se trouve complètement établie. La fonction H(X) prend des valeurs entre 1 et e, elle tend vers *un* lorsque $XY'(X)$ tend vers *un*, et vers e lorsque $XY'(X)$ croît indéfiniment.

[**26**] Nous tirons, en particulier de l'inégalité (27), l'inégalité

$$n(r) < (1 + \varepsilon) e Y'(\log r) e^{Y(\log r)}, \tag{27'}$$

qui est une conséquence de l'égalité (24); nous pouvons l'écrire

$$n(r) < (1 + \varepsilon) \frac{e^{Y_1(X)}}{X}, \qquad X = \log r,$$

$$Y_1(X) = Y(X) - \log[\psi(X)] + 1,$$

$Y_1(X)$ satisfait aux conditions (D) ou (E) en même temps que Y(X) (avec la même valeur de $\psi(X)$); en particulier, si Y(X) satisfait à (D), le calcul du numéro 24 nous donnera :

$$\log M(r) \sim \int_0^r \frac{n(x)}{x} dx. \tag{12}$$

Il résulte de là que, eu égard au théorème de M. Hadamard utilisé au numéro 5, l'égalité (25) sera établie si nous démontrons la proposition suivante : *la fonction* Y(X) *vérifiant les conditions* (E), *l'égalité asymptotique*

$$\int_0^X V(x)\, dx \sim e^{Y(X)},$$

où $V(x)$ *est une fonction croissante, pouvant avoir des discontinuités brusques, est dérivable.*

Nous avons

$$\int_0^X V(x)\, dx = [1 + \eta(X)]\, e^{Y(X)},$$

nous appellerons $\beta_1(X)$ la borne supérieure de $|\eta(x)|$ pour $x > X$, et $\beta(X)$ le plus grand des nombres $\beta_1(X)$ et $m(e^X)$ ($m(e^X)$ est la fonction définie au numéro 25). Nous avons pour $X' > X$:

$$\int_X^{X'} V(x)\,dx = \int_X^{X'} [1 + \eta(X')]\,Y'(x)e^{Y(x)}\,dx + [\eta(X') - \eta(X)]\,e^{Y(X)}$$

$$= \int_X^{X'} [1 + \eta(X')] \left\{ 1 + \frac{\eta(X') - \eta(X)}{1 + \eta(X')} \frac{e^{Y(X)}}{e^{Y(x)}} \frac{1}{(X' - X)\,Y'(x)} \right\} Y'(x)e^{Y(x)}\,dx;$$

nous prendrons

$$X' = X + \frac{\sqrt{\beta(X)}}{Y'(X)},$$

le second des facteurs de notre dernière intégrale sera égal à

$$1 + \frac{2\sqrt{\beta(X)}}{1 - \sqrt{\beta(X)}} \frac{Y'(X)}{Y'(x)} \theta_1(x), \qquad 0 < |\theta_1(x)| < 1.$$

Or, en utilisant les propriétés de $\psi(X)$, nous trouvons

$$Y'(x) = Y'(X)[1 + \theta_2\sqrt{\beta(X)}] \qquad 0 < |\theta_2| < 1,$$

nous obtenons donc :

$$\int_X^{X'} V(x)\,dx = \int_X^{X'} [1 + 2\theta(x)\sqrt{\beta(X)}]\,Y'(x)e^{Y(x)}\,dx, \qquad 0 < |\theta(x)| < 1 + \varepsilon(X).$$

Il résulte de cette égalité que l'on aura :

$$V(X + 0) < [1 + 2[1 + \varepsilon(X)]\sqrt{\beta(X)}]\,Y'(x_1)e^{Y(x_1)},$$
$$V(X - 0) > [1 - 2[1 + \varepsilon(X'')]\sqrt{\beta(X)''}]\,Y'(x_2)e^{Y(x_2)},$$
$$X < x_1 < X', \qquad X'' < x_2 < X, \qquad X = X'' + \frac{\sqrt{\beta(X'')}}{Y'(X'')};$$

or, nous avons

$$\frac{Y'(x_1)}{Y'(x_2)} = 1 + h(X)\sqrt{\beta(X'')}, \qquad |h(X)| < 2 + \varepsilon(X);$$
$$e^{Y(x_1) - Y(x_2)} = 1 + h(X)\sqrt{\beta(X'')}, \qquad |h(X)| < 2 + \varepsilon(X);$$

d'où

$$V(X \pm 0) = [1 + h_1(X)\sqrt{\beta(X'')}]\,Y'(X)e^{Y(X)}, \qquad |h_1(X)| < 6 + \varepsilon(X);$$

cette égalité aura encore lieu pour X', et pour x compris entre X et X', c'est-à-dire finalement pour toute valeur de x, nous aurons

$$V(x) = [1 + h_1(x)\sqrt{\beta(X'')}]\,Y'(x)e^{Y(x)}, \qquad |h_1(x)| < 10 + \varepsilon(x),$$

notre proposition est donc démontrée. Incidemment, nous avons montré que $Y'(x)e^{Y(X)}$ est une fonction, sinon croissante, du moins asymptotiquement égale à une fonction croissante.

[27] Revenons au problème du numéro 22. L'équation (b_2) montre que $\mu_1(r) = U(X)$ est une fonction à croissance rationnelle, et nous avons :

$$\log M(r) \sim U(X), \qquad X = \log r;$$

on en déduit, d'après le numéro 24,

$$\log M(r) \sim U_1(X),$$

$U_1(X)$ étant à dérivabilité rationnelle. Supposons que la condition précédente se trouve vérifiée, si l'on pose

$$U_1(X) = e^{Y(X)},$$

$Y(X)$ satisfait aux conditions (D), car

$$Y'(X) = \frac{U_1'}{U_1} \sim \frac{\log U_1}{X \log X},$$

ce qui montre que $Y'(X)$ tend vers zéro et qu'on peut prendre

$$\psi(X) = \frac{\log U_1}{\log X}, \qquad \left(\frac{X\psi'(X)}{(\psi(X))^2} = \frac{\eta(X)}{\log U_1}\right)$$

quantité qui reste supérieure à un, puisque $\frac{U_1}{X}$ n'est pas borné. L'égalité (25) qui est applicable nous donne

$$n(r) \sim \frac{d}{dX} \log M(r) \sim \frac{\log M(r) \,.\, \log_2 M(r)}{\log r \,.\, \log_2 r}.$$

ce qui nous permet d'énoncer le résultat suivant :

Pour que l'on ait

$$n(r) \sim \frac{\log M(r) \,.\, \log_2 M(r)}{\log r \,.\, \log_2 r},$$

il est nécessaire que $\log M(r)$ *soit une fonction à dérivabilité rationnelle de* $X = \log r$ *et suffisant que*

$$\log M(r) \sim U(X), \qquad X = \log r,$$

$U(X)$ *étant à croissance rationnelle.*

Relativement à $n(r)$, nous trouvons donc comme condition nécessaire

$$n(r) \sim \frac{U(X) \log U(X)}{X \log X}, \qquad X = \log r,$$

$U(X)$ étant à dérivabilité rationnelle, mais alors il en est de même de $\frac{U \log U}{X}$. Supposons alors que l'on ait

$$n(r) \sim \frac{W(X)}{X}, \qquad X = \log r,$$

$W(X)$ étant à croissance rationnelle, comme précédemment nous en tirons

$$n(r) \sim \frac{W_1(X)}{X} = \frac{e^{Y(X)}}{X},$$

$W_1(X)$ étant à dérivabilité rationnelle et, par suite, $Y(X)$ vérifiant les conditions D, il suit de là que nous aurons

$$\log M(r) \sim \frac{e^{Y(X)}}{XY'(X)} \sim \frac{n(r)\log r \log_2 r}{\log[n(r)\log r]}.$$

La condition imposée à $n(r)$ s'exprime, au moyen des conditions (C), de la façon suivante : à tout nombre positif ε arbitrairement petit correspond un nombre $n_0(\varepsilon)$, tel que

$$(28') \qquad \left(\frac{\log_2 r_{n'}}{\log_2 r_n}\right)^{1-\varepsilon} < \frac{\log[(1+\eta_{n'})n'\log r_{n'}]}{\log[(1+\eta_n)n\log r_n]} < \left(\frac{\log_2 r_{n'}}{\log_2 r_n}\right)^{1+\varepsilon}, \qquad n' > n > n_0(\varepsilon),$$

η_n étant le $n^{\text{ième}}$ terme d'une suite de nombres tendant vers zéro. Ces conditions (28′) entraînent l'existence d'une fonction $\eta(x)$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$ et telle que

$$n(x)\log x[1+\eta(x)]$$

soit à croissance rationnelle (en $\log x$), il suffira par exemple de prendre

$$n(x)\log x[1+\eta(x)] = n(\log x)^\alpha \beta, \qquad r_n \leqq x \leqq r_{n+1},$$

avec

$$(\log r_{n+1})^{\alpha-1}\beta = (1+\eta_{n+1})\frac{n+1}{n},$$
$$(\log r_n)^{\alpha-1}\beta = 1+\eta_n.$$

Les conditions (28′) montrent qu'il est nécessaire que l'on ait :

$$(28) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\log(n'\log r_{n'})}{\log[(1+\varepsilon)n\log r_n]} < \left(\dfrac{\log_2 r_{n'}}{\log_2 r_n}\right)^{1+\varepsilon} \\[2ex] \dfrac{\log(n'(1+\varepsilon)\log r_{n'})}{\log[n\log r_n]} > \left(\dfrac{\log_2 r_{n'}}{\log_2 r_n}\right)^{1-\varepsilon} \end{array}\right\} \qquad n' > n > n_0(\varepsilon).$$

Ces conditions sont suffisantes, car la première fournit pour $n(x)$ une limite supérieure fonction de $\log x$, $\log r$, $n(r)$ $(r < x)$ qui est la même que celle que donnerait la condition (28′), on a également les mêmes limites pour $n(x)$ $(x < r)$. Les inégalités (28) sont donc équivalentes à (28′), ce qu'on pourra voir directement en calculant une suite de nombres η_n à partir des inégalités (28). Ces inégalités (28) seront plus commodes pour une vérification pratique; mais, au point de vue théorique, la première forme trouvée pour $n(r)$ est la plus simple. Nous aurons le résultat suivant : *la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait*

$$\log M(r) \sim \frac{n(r)\log r \log_2 r}{\log [n(r)\log r]},$$

est que $n(r)\times \log r$ *soit asymptotiquement égal à une fonction de* $X = \log r$ *à dérivabilité rationnelle, ou ce qui est équivalent, que les conditions* (28) *soient vérifiées* (¹).

Les fonctions dont nous venons de nous occuper peuvent être de la première classe et première catégorie, et alors $\dfrac{\log_2 r}{\log [n(r)\log r]}$ tend vers un et nous n'obtenons rien de nouveau; elles peuvent être de la seconde catégorie (l_2^1 et L_2^2 finis), nous les appellerons alors *fonctions de la première classe et seconde catégorie à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière;* enfin, il peut arriver que l_2^1 et L_2^2 soient infinis, mais l_3^2 et L_3^3 seront égaux à *un* d'après les conditions (C). Nous dirons que *les fonctions pour lesquelles on a*

$$L_2^2 = \infty, \qquad L_3^3 = 1; \qquad l_2^1 = \infty, \qquad l_3^2 = 1$$

sont de la première classe et de troisième catégorie. Celles qui vérifient les conditions trouvées ci-dessus seront dites à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière.

[28] On voit comment on obtiendra de nouvelles valeurs possibles de $\varphi(x, y)$: on remplacera l'expression de $\varphi(x, y)$ précédemment considérée par son produit par une constante λ et on calculera λ en fonction de x et y. Nous sommes conduits à la définition suivante : *si l'on appelle fonctions de la première classe et de* $(p+2)^{\text{ième}}$ *catégorie* ($p \geqq 2$) *celles pour lesquelles on a*

$$l_{p+1}^{p} > 1, \qquad l_{p+2}^{p+1} = 1,$$

(¹) La condition nécessaire et suffisante trouvée plus haut pour $\log M(r)$ peut prendre une forme analogue aux conditions (28) :

$$\frac{\log_2 M(r')}{\log_2 M(r) + \varepsilon} < \left(\frac{\log_2 r'}{\log_2 r}\right)^{1+\varepsilon}, \qquad \frac{\log_2 M(r') + \varepsilon}{\log_2 M(r)} > \left(\frac{\log_2 r'}{\log_2 r}\right)^{1-\varepsilon};$$

ces conditions entraînent en effet

$$V(X') - V(X) = [1 + \eta_1(X)](X' - X)\frac{V(X)\log V(X)}{X \log X} + \eta_4(X)V(X), \qquad \lim_{X=\infty} \frac{X' - X}{X} = 0,$$

$$X = \log r, \qquad V(X) = \log M(r);$$

ce qui permettra la *dérivation* de l'égalité (12); mais la forme que j'ai donnée à la condition suffisante me semble assez souple pour toutes les applications.

ou, ce qui est équivalent,

$$L_{p+1}^{p+1} > 1, \qquad L_{p+2}^{p+2} = 1,$$

les fonctions à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière de la première classe et $(p+2)^{\text{ième}}$ *catégorie seront celles pour lesquelles on a*

$$\log M(r) \sim \frac{n(r)\mathfrak{L}_{p+1} r}{\mathfrak{L}_p[n(r)\log r]}, \qquad n(r) \sim \frac{\mathfrak{L}_{p+1} M(r)}{\mathfrak{L}_{p+1} r},$$

où $\mathfrak{L}_p x$ *désigne le produit*

$$\log x \log_2 x \ldots \log_p x.$$

La fonction

$$\varphi(x, y) = \frac{x\mathfrak{L}_{p+1} y}{\mathfrak{L}_p[x \log y]} = \frac{x \log y}{\log(x \log y)} \frac{\log_2 y}{\log_2(x \log y)} \cdots \frac{\log_p y}{\log_p(x \log y)} \log_{p+1} y$$

satisfait visiblement à la deuxième condition A; pour la première, on voit que si $x \geqq \log y$, les fractions $\dfrac{\log_q y}{\log_q(x \log y)}$ restant supérieures à *un*, on a

$$\varphi(x, y) > x \log_{p+1} y;$$

et si $x \leqq \log y$, on aura

$$\varphi(x, y) > \frac{[1 - \varepsilon(x)]x \log y}{2};$$

la condition est donc vérifiée. La résolution de l'égalité

$$\log M(r) \sim \frac{n(r)\mathfrak{L}_{p+1} r}{\mathfrak{L}_p[n(r)\log r]}$$

est donc ramenée à

$$(a_{p+1}) \qquad \mu_1(r) \sim \frac{n(r)\mathfrak{L}_{p+1} r}{\mathfrak{L}_p[n(r)\log r]}, \qquad \mu_1'(r) = \frac{n(r)}{r},$$

c'est-à-dire à

$$(b_{p+1}) \qquad \mu_1(x)\log\mu_1(x) \ldots \log_p \mu_1(x) \sim \mu_1'(x).x \log x \ldots \log_{p+1} x.$$

En posant

$$\mu_1(x) = e_{p-1}[V(X_p)], \qquad \log_p x = X_p,$$

on retombe sur l'équation (B); donc $V(X_p)$ est une fonction à croissance rationnelle et l'on a

$$\log M(r) \sim e_{p-1}[V(X_p)], \qquad X_p = \log_p r.$$

Réciproquement, si cette condition est vérifiée, nous pouvons écrire

$$e_{p-1}[\mathrm{V}(\mathrm{X}_p)] \sim \int_{\mathrm{X}_p^0}^{\mathrm{X}_p} \mathfrak{L}_{p-1}\left\{e_p\left(\mathrm{V}(x)\right)\right\} \frac{dx}{x \log x} = e_{p-1}[\mathrm{V}_1(\mathrm{X}_p)],$$

$\mathrm{V}_1(\mathrm{X}_p)$ étant à dérivabilité rationnelle, nous poserons

$$\mathrm{Y}(\mathrm{X}) = e_{p-2}[\mathrm{V}_1(\mathrm{X}_p)], \qquad \mathrm{X} = \log r;$$

on aura

$$\mathrm{X}\mathrm{Y}'(\mathrm{X}) \sim \frac{\mathfrak{L}_p\left[e_{p-1}\left(\mathrm{V}_1(\mathrm{X}_p)\right)\right]}{\mathfrak{L}_p \mathrm{X}} = \psi(\mathrm{X}).$$

$\mathrm{Y}'(\mathrm{X})$ tend donc vers zéro avec $\frac{1}{\mathrm{X}}$, $\psi(\mathrm{X})$ reste supérieur à un et

$$\lim_{\mathrm{X}=\infty} \frac{\mathrm{X}\psi'(\mathrm{X})}{\left(\psi(\mathrm{X})\right)^2} = 0.$$

Les conditions (D) sont vérifiées et par suite

$$n(r) \sim \frac{e^{\mathrm{Y}(\mathrm{X})}}{\mathrm{X}\mathrm{Y}'} \sim \frac{\mathfrak{L}_{p+1}\mathrm{M}(r)}{\mathfrak{L}_{p+1} r} \sim \frac{d}{d\mathrm{X}} \log \mathrm{M}(r).$$

On aura donc la proposition : *pour qu'une fonction de première classe et* $(p+2)^{\text{ième}}$ *catégorie soit à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière, il est nécessaire que* $\log_p \mathrm{M}(r)$ *soit une fonction à dérivabilité rationnelle de* $\mathrm{X}_p = \log_p r$ *et il est suffisant que l'on ait*

$$\log \mathrm{M}(r) \sim e_{p-1}[\mathrm{V}(\log_p r)],$$

$\mathrm{V}(\mathrm{X})$ *étant à croissance rationnelle.*

On aura de même les conditions relatives à $n(r)$ en remarquant que

$$n(r) \log r \sim \frac{\mathfrak{L}_{p+1}[e_p \mathrm{V}(\mathrm{X}_p)]}{\mathfrak{L}_p[e_{p-1}(\mathrm{X}_p)]} = e_{p-1}[\mathrm{W}(\mathrm{X}_p)],$$

$\mathrm{W}(\mathrm{X}_p)$ étant une fonction à dérivabilité rationnelle. On pourrait, comme dans le cas de $p=1$, donner à la condition une forme plus commode, mais j'énoncerai seulement le résultat : *la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait l'égalité*

$$\log \mathrm{M}(r) \sim \frac{n(r)\mathfrak{L}_{p+1} r}{\mathfrak{L}_p[n(r) \log r]},$$

est que $n(x)$ *vérifie la condition*

$$\log r \,.\, n(r) \sim e_{p-1}[\mathrm{W}(\log_p r)],$$

$\mathrm{W}(x)$ *étant à dérivabilité rationnelle.*

[29] Avant de considérer le cas où tous les nombres l^q_{q+1}, L^q_q sont infinis, je ferai quelques observations sur les fonctions de la première classe. J'ai déjà dit que l'on a simultanément :

$$l^1_2 = 0; \quad L^2_2 = 1, \qquad \text{pour la première catégorie;}$$
$$l^1_2 > 0; \quad L^2_2 = 1 + l^2_2, \qquad \text{pour la seconde catégorie;}$$
$$l^1_2 = \infty, \quad l^2_3 = 1; \quad L^2_2 = \infty, \quad L^3_3 = 1, \qquad \text{pour la troisième catégorie;}$$

on verra de même que pour la $(p+2)^{\text{ième}}$ catégorie, $(p \geqq 2)$, on a

$$l^p_{p+1} = L^{p+1}_{p+1} > 1, \qquad (l^{p+1}_{p+2} = L^{p+2}_{p+2} = 1).$$

Les fonctions de la seconde catégorie se distinguent de celles de la troisième (bien que l'expression de $\log M(r)$ soit la même dans le cas de la correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière) en ce que le rapport de l^1_2 à L^2_2 n'est pas égal à un; c'est ce qui m'a conduit à séparer ces deux sortes de fonctions; on trouvera plus loin, dans l'étude de la relation entre $\log M(r)$ et les coefficients c_n, d'autres raisons qui justifient de nouveau cette distinction.

On remarquera également que la suite de nos catégories est bien continue, toute fonction croissant moins vite qu'une fonction de $q^{\text{ième}}$ catégorie (en ce sens que le rapport du logarithme du module de la première à celui de la seconde reste inférieur à *un* à partir d'une certaine valeur de r) fait partie de l'une des q premières catégories. Enfin, étant donnée une fonction quelconque de $q^{\text{ième}}$ catégorie, il existe des fonctions de catégorie $q+1$ croissant plus vite qu'elle, celles obtenues, par exemple, en prenant $L^q_q = a > 1$.

Pour obtenir des fonctions pour lesquelles la correspondance d'ordre zéro soit simple et telles que tous les nombres l^q_{q+1} soient infinis, nous partirons des fonctions les plus proches de celles d'ordre fini. Lorsque l'on a $n(x) = (1+\varepsilon)x^k$, k étant un nombre fini, on trouve $\mu_1(r) = (1+\varepsilon)\dfrac{n(r)}{k}$; nous prenons donc

$$\varphi(x, y) = \frac{x \log y}{\log x},$$

fonction qui satisfait aux conditions (A). La résolution de l'équation

$$\log M(r) \sim \frac{n(r) \log r}{\log [n(r)]}$$

se ramène par suite (pour les fonctions d'ordre nul) à celle de l'équation

$$(a''_1) \qquad \mu_1(r) \sim \frac{n(r) \log r}{\log [n(r)]};$$

nous allons montrer que, au point de vue actuel, l'équation (a''_1) est équivalente à

$$(a'_1) \qquad \mu_1(r) \sim \frac{n(r)\log r}{\log[n(r)\log r]},$$

dont la résolution se ramènera à celle de (B). Il s'agit de montrer que toute solution $n(r)$ croissante de (a''_1) l'est de (a'_1) et réciproquement, ce qui revient à montrer que de telles solutions vérifient la condition

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log n(x)}{\log_2 x} = \infty,$$

ou encore que, quel que soit le nombre K positif, il existe une valeur de r à partir de laquelle $\mu_1(r)$ reste supérieur à $(\log r)^K$, ce qui aura lieu si $\mu_1(r) : (\log r)^{K+1}$ est une fonction croissante; or, la dérivée de cette fonction a le signe de

$$n(r)\log r - (K+1)\mu_1(r)$$

qui est positif, que $n(r)$ soit solution de (a'_1) ou de (a''_1).

Ceci étant, l'équation (a'_1) s'écrit

$$\mu_1(r) \sim \frac{\mu'_1(r) r \log r}{\log[\mu'_1(r) r \log r]};$$

c'est l'équation (B), de sorte que $\log M(r)$ doit être asymptotiquement égal à une fonction de r à croissance rationnelle. Réciproquement, si l'on a

$$\log M(r) \sim V(r),$$

$V(r)$ étant à croissance rationnelle, on prendra

$$V_1(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{V(x)\log V(x)}{x \log x}\,dx, \qquad Y(\log r) = \log V_1(r);$$

on aura

$$XY'(X) \sim \log V_1(r), \qquad X = \log r;$$

les conditions (D) sont vérifiées et, par suite,

$$n(r) \sim \frac{e^{Y(X)}}{Y'(X)} \sim \frac{\log M(r)\,.\,\log_2 M(r)}{\log r} \sim \frac{d}{d\log r}\log M(r);$$

d'où le résultat :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'ordre nul vérifie l'égalité

$$n(r) \sim \frac{\log M(r)\,.\,\log_2 M(r)}{\log r}$$

est que $\log M(r)$ *soit une fonction de* r *à dérivabilité rationnelle*, ce qui a lieu lorsque $\log M(r)$ est asymptotiquement égal à une fonction de r à croissance rationnelle.

Pour la fonction $n(r)$, nous avons la condition nécessaire

$$n(r) \sim \frac{V(r)\log V(r)}{\log r} = V_1(r),$$

$V_1(r)$ étant à dérivabilité rationnelle, et on verra facilement qu'il suffit que $V_1(r)$ soit à croissance rationnelle. Ainsi, en résolvant par rapport à r_n on aura le résultat :

La condition nécessaire pour que l'on ait, pour une fonction d'ordre nul

$$\log M(r) \sim \frac{n(r)\log r}{\log n(r)}$$

est que

$$r_n = W\big(n(1+\eta_n)\big),$$

$W(x)$ *étant à dérivabilité rationnelle, et il suffit que cette égalité ait lieu,* $W(x)$ *étant à croissance rationnelle.*

Pour les fonctions considérées ici, on a : $l_2^2 = 1$, $L_2^3 = 1$ (et $l_1^1 = 0$, $L_1^2 = 0$); nous appellerons *fonctions de seconde classe et de première catégorie les fonctions pour lesquelles ces conditions sont réalisées;* celles de ces fonctions satisfaisant à l'égalité

$$\log M(r) \sim \frac{n(r)\log r}{\log[n(r)]}, \qquad \left[n(r) \sim \frac{\log M(r) \,.\, \log_2 M(r)}{\log r}\right]$$

sont les fonctions à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière de la seconde classe et première catégorie.

[**30**] On obtiendra, comme il a été expliqué plus haut, de nouvelles valeurs de $\varphi(x, y)$ en opérant de proche en proche; d'une façon générale, nous serons conduits à considérer les valeurs

$$\varphi(x, y) = \frac{x\mathfrak{L}_p y}{\mathfrak{L}_p[x \log y]} \qquad \text{ou} \qquad \varphi(xy) = \frac{x\mathfrak{L}_p y}{\mathfrak{L}_p x},$$

qui vérifient toutes deux les conditions (A). Les équations correspondantes

$$\mu_1(r) \sim \frac{n(r)\mathfrak{L}_p r}{\mathfrak{L}_p[n(r)\log r]}, \qquad \mu_1(r) \sim \frac{n(r)\mathfrak{L}_p r}{\mathfrak{L}_p n(r)}$$

sont équivalentes, tout au moins lorsqu'on suppose l_2^1 infini, ce qui est bien le cas ici. Comme on l'a vu plus haut, il suffit de montrer que quel que soit K on peut trouver une valeur de r, r_0 à partir de laquelle

$$n(r) > (\log r)^K;$$

or, eu égard aux relations entre $\mu_1(r)$ et r, tout revient à montrer que

$$(\alpha) \qquad \mu_1(r) > (\log r)^K, \qquad r > r_0,$$

et nous pouvons supposer, d'après l'hypothèse faite, que l'inégalité a lieu pour $r = r_0$; or, la dérivée de la fonction

$$\frac{\mu_1(r)}{(\log r)^K}$$

a le signe de

$$n(r) \log r - K \mu_1(r),$$

donc est positive tant que l'inégalité (α) est vérifiée, ce qui montre que (α) est vérifiée pour $r > r_0$ (1). Nous emploierons la première égalité pour exprimer les propositions relatives à $n(r)$ et la deuxième pour celles relatives à $\log M(r)$.

Nous aurons ainsi :

Pour que l'on ait l'égalité

$$n(r) \sim \frac{\mathfrak{L}_{p-1} M(r)}{\mathfrak{L}_p r},$$

il faut que $\log_p M(r)$ *soit une fonction à dérivabilité rationnelle de* $X_{p-1} = \log_{p-1} r$, *et il suffit que* $\log M(r)$ *soit asymptotiquement égal à* $e_{p-1}[V(\log_{p-1} r)]$, $V(x)$ *étant à croissance rationnelle ;*

Pour que l'on ait

$$\log M(r) \sim \frac{n(r) \mathfrak{L}_p r}{\mathfrak{L}_p n(r)},$$

la condition $l_2^1 = \infty$ *étant vérifiée, il faut et il suffit que* $n(r)$ *soit asymptotiquement égal à* $e_{p-1}[V(\log_{p-1} r)]$, $V(x)$ *étant à dérivabilité (ou à croissance) rationnelle,* ce qui revient à dire que

$$r_n = e_{p-1}\left[W\left(\log_{p-1}[n(1+\eta_n)]\right)\right],$$

$W(x)$ étant à croissance rationnelle.

Nous appellerons *fonctions de la seconde classe et* $p^{\text{ième}}$ *catégorie, celles pour lesquelles*

$$L_p^{p-1} < 1, \qquad L_{p-1}^{p-2} = 1, \qquad l_p^p < 1, \qquad l_{p-1}^{p-1} = 1, \qquad p \geqq 2,$$

---

(1) Plus strictement la première égalité entre $\mu_1(r)$ et $n(r)$ entraîne toujours la seconde, la seconde entraîne la première, sauf si

$$\mathfrak{L}_p n(r) \sim \mathfrak{L}_{p-1} \log r,$$

c'est-à-dire

$$\log n \sim \log_2 r (\log_{p-1} r)^{-1},$$

ce qui donne une fonction de première classe à correspondance parfaitement régulière.

et nous appellerons fonctions à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière de cette classe et catégorie les fonctions pour lesquelles

$$\log M(r) \sim \frac{n(r)\mathfrak{L}_p r}{\mathfrak{L}_p n(r)}, \qquad n(r) \sim \frac{\mathfrak{L}_{p+1} M(r)}{\mathfrak{L}_p r},$$

égalités qui sont alors équivalentes sans restrictions; pour ces fonctions, on a :

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log_{p+2} M(r)}{\log_{p+1} r} = 1.$$

On voit qu'en dehors de ces fonctions il existe des fonctions de seconde classe et $p^{\text{ième}}$ catégorie à correspondance simple, ce sont celles pour lesquelles on a les égalités

$$\log M(r) \sim \frac{n(r)\,\mathfrak{L}_{p+q} r}{\mathfrak{L}_{p+q} n(r)}, \qquad n(r) \sim \frac{\mathfrak{L}_{p+q+1} M(r)}{\mathfrak{L}_{p+q} r};$$

les fonctions dont la correspondance d'ordre zéro est parfaitement régulière sont les plus simples d'entre elles.

[**31**] On observera ici encore que les diverses catégories de la seconde classe sont contiguës, et qu'étant donnée une fonction de $q^{\text{ième}}$ catégorie il existe des fonctions de $(q-1)^{\text{ième}}$ catégorie qui croissent plus vite qu'elle et des fonctions de $(q+1)^{\text{ième}}$ catégorie croissant moins vite.

Il reste à considérer les fonctions pour lesquelles, quel que soit q, on a

$$l_q^q = 0, \qquad l_{q+1}^q = \infty \qquad (L_q^{q+1} = 0, \qquad L_q^q = \infty);$$

il existe effectivement de telles fonctions, par exemple celles obtenues en prenant

$$r_n = e_p(a), \qquad e_p(b) \leqq n < e_{p+1}(b), \qquad a < b < e^a.$$

Nous appellerons ces fonctions *fonctions de la troisième classe.* Étant donnée une telle fonction, il existe des fonctions de première classe et de catégorie aussi élevée que l'on veut qui croissent moins vite, et des fonctions de seconde classe, de catégorie aussi élevée que l'on veut, qui croissent plus vite. On peut donc dire que la troisième classe est intermédiaire entre les deux premières. Pour les fonctions de cette troisième classe il ne peut exister de relation asymptotique entre $\log M(r)$ et une fonction $\varphi(n(r), r)$ formée comme ci-dessus avec un nombre fini de termes; au point de vue de la correspondance d'ordre zéro, les fonctions de la troisième classe apparaissent donc comme exceptionnelles; à ce même point de vue, on voit que les fonctions de la seconde classe sembleraient devoir se rattacher aux fonctions d'ordre fini.

Pour toutes les fonctions vérifiant l'égalité (22) [ou (24)], il existe un exposant $\rho(x)$ tel que

$$x^{\rho(x)} \sim \frac{e^{Y(X)}}{X};$$

par suite, l'égalité (19) et ses conséquences se trouvent vérifiées par toutes les fonctions dont la correspondance d'ordre zéro est parfaitement régulière. En particulier pour celles de ces fonctions qui appartiennent aux deux premières catégories de la première classe, les conditions du n° 15 sont vérifiées et même de telle façon que les égalités écrites pour $\log M(r)$ sont valables pour $\log |f(z)|$ dans tout le domaine considéré au n° 15.

IV. — Fonctions a correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière. Développement de Taylor. — Cas particuliers.

[**32**] L'inégalité

$$\frac{r^n}{e^{G_n}} = \frac{r^n}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \ldots \mathcal{R}_n} < M(r), \qquad n = \mathfrak{N}(r),$$

tout à fait analogue à la première inégalité que l'on déduit du théorème de M. Jensen donne comme elle

$$\frac{r^n}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \ldots \mathcal{R}_n} < M(r),$$

inégalité valable quels que soient r et n; on déduira donc de l'inégalité (26) une inégalité obtenue en remplaçant dans (27) $n(r)$ par $\mathfrak{N}(r)$, ce qui nous permettra d'énoncer le résultat suivant : *si* $Y(X)$ *est une fonction satisfaisant aux conditions* (E), *l'égalité*

$$\log M(r) \sim e^{Y(X)}, \qquad X = \log r \tag{24}$$

entraîne

$$\mathfrak{N}(r) \sim Y'(X) e^{Y(X)} \sim \frac{d}{dX} \log M(r), \tag{29}$$

proposition valable même pour l'ordre infini, grâce à la remarque précédente.

Inversement, de l'égalité (29) on déduit l'égalité (24). L'égalité (29) exprime donc la condition nécessaire et suffisante pour que (24) ait lieu. Quelles conclusions peut-on déduire pour les coefficients c_n? On voit que si l'on change n en $n(1+\varepsilon)$, quelque petit que soit ε, il existe d'après (29) une valeur n_0 à partir de laquelle $\mathfrak{R}_{n(1+\varepsilon)}$ est supérieur à $\mathfrak{R}_n$, *c'est-à-dire que l'égalité*

$$|c_n| = e^{-G_n}$$

a lieu pour une suite de valeurs $n_0, n_1, \ldots, n_p, \ldots,$ *telles que* $\frac{n_{p-1}}{n_p}$ *tend vers un.*

Quant à la valeur de G_n, elle est fournie par l'égalité

$$G_n = \sum_1^n X_i, \qquad X_i = \log \mathfrak{R}_i;$$

Les formules d'approximation de G_n s'obtiennent au moyen de l'égalité (29); on peut remarquer immédiatement que, puisque

$$\frac{G_n}{n} < X_n$$

et que $Y'(X)e^{Y(X)}$ est croissante ou asymptotiquement égale à une fonction croissante, on aura, quelque petit que soit ε,

$$(30') \qquad n > Y'(X_n)e^{Y(X_n)}(1-\varepsilon) > (1-2\varepsilon)Y'\left(\frac{G_n}{n}\right)e^{Y\left(\frac{G_n}{n}\right)}, \qquad n > n_0(\varepsilon);$$

tandis que l'inégalité (27) nous donne, en remplaçant $n(r)$ par n et r par $\frac{G_n}{n}$, ce qui est légitime d'après la première inégalité écrite ci-dessus :

$$(30) \qquad n < (1+\varepsilon)Y'\left(\frac{G_n}{n}\right)e^{Y\left(\frac{G_n}{n}\right)}\,\text{H}\left(\frac{G_n}{n}\right), \qquad n > n_0(\varepsilon).$$

Ceci dit, nous allons calculer G_n; il existe une fonction $\beta(X)$ tendant vers zéro et telle que, pour $x > X$, on ait simultanément

$$\left|\frac{xY'(x)}{\psi(x)} - 1\right| < \beta(X), \qquad \left|\frac{\mathfrak{M}(e^x)}{Y'(x)e^{Y(x)}} - 1\right| < \beta(X), \qquad \left|\frac{\int_0^x \mathfrak{M}(e^x)\,dx}{e^{Y(x)}} - 1\right| < \beta(X);$$

or, nous avons

$$\frac{G_n}{n} = X_n\left[1 - \frac{1+\eta_n}{\psi(X_n)}\right], \qquad |\eta_n| < \beta(X_n);$$

supposons que

$$\psi\left(\frac{G_n}{n}\right) \geqq 1 + \left[\beta\left(\frac{G_n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{3}},$$

nous trouverons comme au numéro 25 :

$$\psi(X_n) = \psi\left(\frac{G_n}{n}\right)\left[1 + h_1\left[\beta\left(\frac{G_n}{n}\right)\right]^{\frac{2}{3}}\right], \qquad |h_1| < h(n);$$

$$\left.\begin{aligned} e^{Y(X_n)} &= e^{Y\left(\frac{G_n}{n}\right)}\left[1 - \frac{1+\eta_n}{\psi\left(\frac{G_n}{n}\right)}\right]^{-\psi\left(\frac{G_n}{n}\right)[1+\eta'_n]} \\ Y'(X_n) &= Y'\left(\frac{G_n}{n}\right)\left[1 - \frac{1+\eta_n}{\psi\left(\frac{G_n}{n}\right)}\right](1+\eta''_n) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &|\eta_n| < \beta\left(\frac{G_n}{n}\right), \\ &|\eta'_n|,\ |\eta''_n| < \left[\beta\left(\frac{G_n}{n}\right)\right]^{\frac{2}{3}}, \end{aligned}$$

et par suite

$$(31) \qquad n \sim Y'(X_n)e^{Y(X_n)} \sim Y'\left(\frac{G_n}{n}\right)e^{Y\left(\frac{G_n}{n}\right)} H\left(\frac{G_n}{n}\right).$$

Dans le cas où l'on aura

$$\psi\left(\frac{G_n}{n}\right) \leqq 1 + \left[\beta\left(\frac{G_n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{3}},$$

les inégalités (30′) et (30) montrent que l'égalité (31) est encore vérifiée [1]. Nous arrivons donc au résultat :

Lorsque l'égalité (24) *a lieu, la fonction* $Y(X)$ *satisfaisant aux conditions* E, *à un nombre* ε *positif et arbitrairement petit, on peut faire correspondre un nombre* $n_0(\varepsilon)$, *tel que l'on ait*

$$(32) \qquad \left\{\begin{aligned} &n < (1+\varepsilon)\,Y'(\gamma_n)e^{Y(\gamma_n)}H(\gamma_n), &\qquad H(\gamma_n) &= \left[1 + \frac{1}{\psi(\gamma_n) - 1}\right]^{\psi(\gamma_n)-1}, \\ &n > (1-\varepsilon)\,Y'(\gamma_n)e^{Y(\gamma_n)}H(\gamma_n), &\qquad \gamma_n &= \frac{1}{n}\log\left|\frac{1}{c_n}\right|; \end{aligned}\right.$$

la première inégalité ayant lieu pour $n > n_0(\varepsilon)$, *la deuxième pour une infinité de valeurs de* n, *le rapport de deux valeurs consécutives ayant pour limite un lorsque* n *croît indéfiniment.*

---

[1] Les égalités (31) donnent une propriété intéressante des fonctions inverses des fonctions $n(x)$ qui, sous sa forme la plus simple, s'énonce ainsi : *soit* $\varphi(x)$ *une fonction croissante, telle que* $\dfrac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{x\varphi'(x)}{x\varphi'(x)+1}\right]$ *tende vers zéro avec* $\dfrac{1}{x}$, *si l'on pose*

$$\varphi(N) + \varphi(N+1) + \ldots + \varphi(n) = n\varphi\left(\frac{n}{h}\right),$$

N *étant fixe, le rapport* $h : \left[1 + \dfrac{1}{n\varphi'(n)}\right]^{n\varphi'(n)}$ *tend vers un lorsque* n *croît indéfiniment.* En particulier, si $x\varphi'(x)$ croît indéfiniment, h tend vers e. Comparer la thèse de M. Denjoy, page 101.

La méthode employée ci-dessus pour obtenir les conditions (32) montre le part que l'on peut tirer de la considération du polygone de Newton introduit par M. Hadamard. Les formules (32) comprennent toutes celles obtenues par M. Lindelöf avec la même approximation, et même dans ces cas simples le passage de $\frac{G_n}{n}$ à $\mathfrak{R}_n$ se fait sans effort; on retrouve l'égalité (29) à partir des égalités (32), ce qui montre que les conditions sont suffisantes. Avant de montrer que ce résultat est vrai en général, je montrerai sur un exemple comment la méthode employée donne des résultats plus précis lorsque $\log M(r)$ est connu d'une façon plus exacte. Soit

$$\log M(r) = \frac{2}{3}(\log r)^{\frac{3}{2}} - \frac{\log r}{2} + \lambda(r)(\log r)^{\frac{1}{2}}, \qquad |\lambda(r)| < h(r)\,(^1);$$

l'égalité (29) donne d'abord

$$\mathfrak{N}(r) = [1 + \eta(r)](\log r)^{\frac{1}{2}},$$

en portant dans l'égalité (2) on aura

$$\mu(r) = \int_0^r \frac{\mathfrak{N}(x)}{x}\,dx = \frac{2}{3}(\log r)^{\frac{3}{2}} - \frac{\log r}{2} + \lambda(r)(\log r)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\mathfrak{N}(r) = (\log r)^{\frac{1}{2}} + \lambda(r)(\log r)^{\frac{1}{4}}, \qquad |\lambda(r)| < h(r),$$

et par suite

$$\frac{G_n}{n} = \frac{n^2}{3} + \lambda(n)n;$$

on aura donc

$$\begin{cases} |c_n| \leqq e^{-\frac{n^3}{3} + \lambda(n)n^2}, & n > n_0; \\ |c_n| \geqq e^{-\frac{n^3}{3} + \lambda(n)n^2}, & n = n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots; \qquad n_{p+1} - n_p = h(n_p)\sqrt{n_p}. \end{cases}$$

On voit en même temps que :

$$r_n = e^{n^2 + \lambda(n)n^{\frac{3}{2}}}.$$

---

(1) Il existe des fonctions pour lesquelles cette égalité a lieu; voir mon article *sur la croissance des fonctions entières d'ordre nul* (Nouvelles Annales de Mathématiques), 1913.

Soit encore

$$\log M(r) = \frac{1}{2}[(\log r)^2 - \log r] + h(r);$$

on trouvera

$$\mathcal{R}_n = e^n n^{\lambda(n)},$$

mais dans ces conditions on constatera que l'on aura

$$\log M(r) = \mu(r) + h(r) \log_2 \mathfrak{N}(r),$$

et un nouveau calcul nous donne

$$\mathcal{R}_n = e^n (\log n)^{\lambda(n)},$$

nous pouvons continuer ces approximations successives et obtenons

$$\mathcal{R}_n = e^n h(n), \qquad G_n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \pm h(n),$$

les conclusions relatives à $|c_n|$ s'en tirent immédiatement.

[**33**] Pour montrer que les conditions (32) sont suffisantes, il suffira de s'appuyer sur la proposition suivante : *si* Y(X) *satisfait aux conditions* (E) *et que la fonction* $\big(1 + \eta(X)\big) \dfrac{e^{Y(X)}}{X}$ *soit croissante, et si l'on a*

$$\gamma_n n < (1 + \varepsilon) e^{Y(\gamma_n)}, \qquad n > n_0(\varepsilon); \tag{33}$$

$$\gamma_n n > (1 - \varepsilon_n) e^{Y(\gamma_n)}, \qquad n = n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots; \qquad \lim_{p=\infty} \frac{n_{p+1}}{n} = 1, \tag{34}$$

on aura :

$$\log M(r) \sim \frac{e^{Y(X)}}{XY'(X)} \left[1 + \frac{1}{\psi(X) - 1}\right]^{1-\psi(X)}, \qquad X = \log r. \tag{35}$$

La démonstration se fera de la façon suivante : tout d'abord, de l'inégalité (33) et du théorème sur l'ordre de $\log M(r)$ (égalité (5)), on déduit par un calcul analogue à celui du numéro 25 :

$$\log M(r) < [1 + \varepsilon(r)] \frac{e^{Y(X)}}{XY'(X)} \left[1 + \frac{1}{\psi(X) - 1}\right]^{1-\psi(X)}, \qquad X = \log r; \tag{36}$$

par un calcul tout semblable, l'égalité (34) étant vérifiée pour $n = n_p$, on a

$$\log M(r) > (1 - \varepsilon'_p) \frac{e^{Y(X)}}{XY'(X)} \left[1 + \frac{1}{\psi(X) - 1}\right]^{1-\psi(X)}, \tag{37}$$

pour

$$X = X_p = \frac{\gamma_{n_p}}{1 - \frac{1}{\gamma_{n_p} Y'(\gamma_{n_p})}}, \qquad \text{si} \qquad \psi(\gamma_{n_p}) \geqq 1 + \varepsilon''_p;$$

$$X = X_p = \frac{\gamma_{n_p}}{\varepsilon''_p}, \qquad \text{si} \qquad \psi(\gamma_{n_p}) \leqq 1 + \varepsilon''_p.$$

Pour déduire l'égalité (35) des conditions simultanées (33), (34), nous nous appuierons sur la croissance de

$$\frac{\log M(r)}{X};$$

si l'on désigne par $F(X)$ le deuxième membre de l'égalité (35), $\frac{F(X)}{X}$ est aussi une fonction croissante ou asymptotiquement égale à une fonction croissante, donc les inégalités (36) et (37) montrent que

$$\log M(r) = [1 + \eta(X)]\lambda(X) F(X),$$

$\lambda(X)$ étant égal à un pour $X = X_p$ et étant compris entre les nombres $\frac{1}{\mu_p}$ et μ_p pour X compris entre X_p et X_{p+1} :

$$\mu_p = \frac{F(X_{p+1})}{F(X_p)} \frac{X_p}{X_{p+1}} = (1 + \eta_p) \frac{n_{p+1}}{n_p} \frac{\psi(\gamma_{n_p})}{\psi(\gamma_{n_{p+1}})},$$

nous sommes ramenés à montrer que le rapport $\psi(\gamma_{n_{p+1}}) : \psi(\gamma_{n_p})$ tend vers un lorsque $\lim\limits_{p=\infty} \frac{n_{p+1}}{n_p} = 1$. C'est ce qui est évident lorsque $\psi(X)$ a une limite finie; dans le cas général, l'hypothèse faite sur le rapport $\frac{n_{p+1}}{n_p}$ entraîne l'existence d'un nombre ξ_p, tel que

$$\lim_{p=\infty} [Y'(\xi_p)\xi_p - 1][\log \gamma_{n_{p-1}} - \log \gamma_{n_p}] = 1, \qquad X_p < \xi_p < X_{p-1};$$

d'où il suit, d'après les propriétés de $\psi(X)$, la proposition en vue.

[**34**] L'application de ces résultats aux fonctions d'ordre nul est immédiate et nous donnera la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction donnée par sa série de Taylor soit à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière. J'énoncerai par exemple simultanément le résultat relatif aux deux premières catégories de la première classe sous la forme suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour que la série

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} c_n z^n, \qquad \frac{1}{n} \log \left| \frac{1}{c_n} \right| = \gamma_n$$

définisse une fonction de première classe et de première ou seconde catégorie à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière est qu'il existe une fonction $\theta(X)$ *bornée supérieurement, vérifiant les conditions*

$$\lim_{X=\infty} \theta'(X) X \log X = 0, \qquad X^{\theta(X)}\big(1 + \gamma_1(X)\big) \text{ croissante,}$$

et que l'on ait :

$$n < (1 + \varepsilon)\gamma_n^{\theta(\gamma_n)}, \qquad n > n_0(\varepsilon),$$

$$n > (1 - \varepsilon_n)\gamma_n^{\theta(\gamma_n)}, \qquad n = n_1, \ldots, n_p, \ldots, \qquad \lim_{p=\infty} \frac{n_{p+1}}{n_p} = 1.$$

On aura alors

$$\log M(r) \sim \frac{(\log r)^{\theta(\log r)+1}}{1 + \theta(\log r)} \left[1 + \frac{1}{\theta(\log r)} \right]^{-\theta(\log r)},$$

$$n(r) \sim \mathfrak{N}(r) \sim (\log r)^{\theta(\log r)} \left[1 + \frac{1}{\theta(\log r)} \right]^{-\theta(\log r)}.$$

Dans le cas de la première catégorie $\theta(X)$ tend vers zéro et les formules se simplifient. Lorsque $\theta(X)$ a une borne inférieure positive, $X^{\theta(X)}$ est à dérivabilité rationnelle et l'on peut résoudre les inégalités de conditions par rapport à γ_n ; on voit de plus que l'on aura alors :

$$\log r_n = (1 + \gamma_{1n}) \log \mathcal{R}_n. \tag{38}$$

Nous allons montrer que cette relation a lieu en général. Nous avons vu (n° 6) que

$$r_1 r_2 \ldots r_n > \frac{e^{G_n}}{2n_1 + 1} = \frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \ldots \mathcal{R}_n}{2n_1 + 1}, \qquad n_1 = \mathfrak{N}\left(\mathcal{R}_n + \frac{1}{\mathfrak{N}(\mathcal{R}_n)}\right);$$

d'autre part, d'après une remarque faite au début de ce paragraphe et d'après l'égalité (15), nous avons

$$r_1 r_2 \ldots r_n < \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \ldots \mathcal{R}_n e^{(1+\varepsilon) r_n{}^{\rho(r_n)}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{\delta_n} < \frac{r_n}{\mathcal{R}_n} < \delta_n, \qquad \delta_n = e^{(1+\varepsilon) r_n{}^{\rho(r_n)}} \times (2\mathfrak{N}(\mathcal{R}_n + 1) + 1) < e^{(1+\varepsilon) r_n{}^{\rho(r_n)} + \mathcal{R}_n{}^{\rho(\mathcal{R}_n)}};$$

ce qui montre que *la relation* (38) *a lieu pour toutes les fonctions vérifiant la condition*

$$(16') \qquad \lim_{r=\infty} \frac{\log M(r)}{(\log r)^2} = 0 \qquad \left[\lim_{n=\infty} \frac{n}{\log r_n} = 0, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{n^2}{\log \frac{1}{|c_n|}} = 0\right]$$

qui limite la croissance[1]. Considérons maintenant les fonctions à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière; pour ces fonctions, on a

$$n \sim Y'(\log r_n) e^{Y(\log r_n)} \sim Y'(\log \mathcal{R}_n) e^{Y(\log \mathcal{R}_n)} \sim r_n^{\rho(r_n)},$$

$Y(X)$ satisfaisant aux conditions (D) et à des conditions supplémentaires dont nous tirons pour l'objet actuel la conséquence suivante : Si n est supérieur à $(\log r_n)^k$, $\psi(\log r_n)$ est supérieur à $1 + k(1-\varepsilon)$; dès lors, si $n < \log r_n)^k$, $k < 1$, l'égalité (38) a lieu d'après ce qui précède; si $n > (\log r_n)^k$, on a

$$Y'(\lambda \log r_n) e^{Y(\lambda \log r_n)} = Y'(\log r_n) e^{Y(\log r_n)} \cdot \frac{\lambda^{\frac{\psi(\log r_n)(1+\eta_n)}{1+\varepsilon_n \theta(\lambda-1)\psi(\log r_n)} - 1}}{1 + \theta\varepsilon_n(\lambda - 1)\psi(\log r_n)}, \qquad |\theta| < 1;$$

donc, en prenant $\lambda = 1 + \frac{\nu}{\psi(\log r_n)}$, le troisième facteur du deuxième membre sera égal à $1 + h_n \nu$, et par suite les égalités asymptotiques précédentes exigent que l'on ait

$$\log \mathcal{R}_n = \log r_n \left(1 + \frac{\eta_n}{\psi(\log r_n)}\right),$$

ce qui, joint à la proposition obtenue dans le cas $n < (\log r_n)^k$, nous donne le résultat : *pour les fonctions à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière, on a l'égalité*

$$\log \mathcal{R}_n = \log r_n \left[1 + \frac{\eta_n}{\psi(\log r_n)}\right],$$

qui est plus précise que (38) dès que $\psi(\log r_n)$ croît indéfiniment.

[**35**] On peut obtenir pour certaines fonctions de la première classe et de première catégorie une correspondance simple plus serrée que la correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière. On a évidemment

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \left[\frac{\log M(r)}{\log r} - n(r)\right] = 0, \qquad \overline{\lim_{r=\infty}} \left[\frac{\log M(r)}{\log r} - \mathfrak{N}(r)\right] = 0;$$

---

(1) Il y aurait lieu de chercher si les conditions (16') ne peuvent pas être remplacées par les conditions (16), et la relation (38) par une autre plus resserrée.

on peut chercher dans quelles conditions la limite inférieure de ces mêmes expressions, pour $r=\infty$, sera finie. On aura par exemple

$$\frac{\log M(r)}{\log r} - n(r) > -A,$$

d'où l'on tire

$$\mu_1(r) > [r\mu_1'(r) - A - \varepsilon(r)] \log r, \qquad n(r) = r\mu_1'(r);$$

cette inégalité s'intègre par la condition que la fonction

$$(A+\varepsilon)\log_2 x - \frac{\mu_1(x)}{\log x}$$

soit croissante, quelque petit que soit $\varepsilon > 0$, pour $x > x_0(\varepsilon)$, on voit qu'il en résulte que $\dfrac{\log M(r)}{\log r \log_2 r}$ reste fini et que, par suite,

$$\mu_1(r) = \log M(r) - h(r)\log_2 r.$$

Nous avons dès lors la proposition :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait

$$n = \frac{\log M(r_n)}{\log r_n} + h'_n, \qquad \underline{\lim}_{n=\infty} h'_n = 0, \qquad \overline{\lim}_{n=\infty} h'_n = A$$

est qu'à tout nombre positif ε *on puisse faire correspondre un nombre* $r_0(\varepsilon)$ *tel que l'on ait :*

$$\frac{\log M(r')}{\log r'} - \frac{\log M(r)}{\log r} < (A+\varepsilon)(\log_2 r' - \log_2 r) + B\frac{\log_2 r}{\log r}, \quad r' > r > r_0(\varepsilon), \quad \text{B fini.}$$

La condition est bien nécessaire d'après ce qui précède; si elle est vérifiée, on a

$$n(r)[\log r' - \log r] < \log M(r') - \log M(r) + h(r')\log_2 r'$$
$$< \frac{\log M(r)}{\log r}[\log r' - \log r] + (A+\varepsilon)\log r'[\log_2 r' - \log_2 r] + h(r')\log_2 r';$$

en prenant

$$\log r' = \log r + (\log_2 r)^2,$$

on voit que l'on obtient l'inégalité cherchée. La relation écrite entre n et r_n est valable entre n et $\mathfrak{R}_n$ sous les mêmes conditions; il est évident que A doit être au moins égal à *un*, ce qui met en évidence le fait que, pour les fonctions à croissance très lente, $\log M(r)$ ne peut pas être une fonction à croissance simple, par exemple *il n'existe pas de fonctions pour lesquelles*

$$\log M(r) = B(r) + \lambda(r)\log_2 r, \qquad |\lambda(r)| < h(r),$$

$B(x)$ étant une fonction dont on sait noter identiquement l'ordre d'après les méthodes de M. Borel, ou une somme de telles fonctions, vérifiant la condition

$$B(r) < k \log r \log_2 r, \qquad k < 1.$$

Les résultats que l'on peut obtenir au sujet de $n(r)$ sont beaucoup moins précis, ce qui résulte de ce que $n(r)$ s'obtient par une dérivation; on pourrait évidemment, en introduisant une suite de quantités indéterminées, obtenir une condition nécessaire et suffisante sous la forme suivante : il doit exister une suite de nombres h_n compris entre 1 et $A + \varepsilon_n$, et tels que l'on ait

$$\frac{\log r_{n+1}}{\log r_n} = \frac{h_n}{h_{n+1} - 1},$$

mais une telle condition n'offre guère d'intérêt. Cette condition (qui s'obtient immédiatement par la considération de l'égalité

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x} dx = [n(r) - h(r)] \log r)$$

nous donne une condition nécessaire simple; *soit p un entier supérieur à $A + \varepsilon$, il existe un nombre k supérieur à un, tel que pour* $n > n_0$:

$$\log r_{n+p} > k \log r_n;$$

cette condition entraîne seulement l'inégalité

$$\log M(r) > \left(n(r) - \frac{pk}{k-1}\right) \log r,$$

c'est-à-dire le fait que la différence $\dfrac{\log M(r)}{\log r} - n(r)$ est bornée inférieurement. On peut traduire le résultat obtenu pour $\log M(r)$ sous une forme analogue à celle obtenue ici, on a

$$\frac{\log M(r')}{\log r'} < \frac{\log M(r)}{\log r} + (A + \varepsilon) \frac{(\log_2 r)^2}{\log r}, \qquad \log r' \leqq \log r + (\log_2 r)^2,$$

condition qui, d'après nos calculs, est équivalente à la première.

V. — Étude des fonctions quelconques. — Correspondance régulière d'ordre zéro et d'ordre moins un.

[36] Nous allons employer les fonctions à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière comme fonctions de comparaison pour l'étude des autres fonctions d'ordre nul. Supposons en premier lieu la fonction donnée par ses zéros (ou plutôt leurs modules) et plaçons-nous d'abord dans le cas de fonctions des deux premières catégories de la première classe. Nous cherchons une fonction $V(X)$ à croissance rationnelle et telle que

$$\frac{V(X)}{X} \text{ croisse}, \qquad n \leqq \frac{V(\log r_n)}{\log r_n},$$

l'égalité ayant lieu pour une infinité de valeurs de n. Soit $V(X) = X^{\theta(X)}$, on a :

$$\lim_{X=\infty} \theta'(X) . X \log X = 0.$$

Marquons dans le plan xoy les points A_n de coordonnées x_n, y_n :

$$x_n = \log_2 r_n, \; y_n = 1 + \frac{\log n}{x_n};$$

nous allons tracer une courbe $y(x)$ passant par une infinité de points A_n, laissant les autres au-dessous d'elle, ayant en chaque point une dérivée, sauf en certains points où elle en a une à droite et à gauche, et telle que

$$\text{(F)} \qquad \lim_{x=\infty} xy'(x) = 0, \qquad y(x) - 1 + xy'(x) \geqq 0;$$

cette fonction $y(x)$ trouvée, nous pourrons prendre $V(X) = X^{y(\log X)}$.

Si y_n tend vers un (première catégorie), nous faisons passer par chaque point A_n la courbe C_n définie par les équations

$$\begin{cases} y_n(x) = 1 + \dfrac{\log n}{x}, & x \geqq x_n; \\ y_n(x) = y_n - \omega(x_n) + \omega(x), & x \leqq x_n; \end{cases}$$

$\omega(x)$ étant une fonction monotone, indéfiniment croissante, et vérifiant la première condition F, par exemple $\omega(x) = \log_2 x$. Les points du plan $(x > 0)$ situés au-dessus de toutes les courbes C_n sont au-dessus d'une courbe formée d'une infinité d'arcs de courbes C_n, de part et d'autre d'une infinité de points A_n; si $y(x)$ est l'ordonnée de cette courbe, $y(x)$ vérifie les conditions F, puisque ces conditions sont réalisées sur les courbes C_n tant que $y_n(x) \geqq 1$.

Lorsque la limite supérieure de y_n pour n infini est supérieure à *un* (seconde catégorie), nous traçons à partir des points A_n les courbes C_n :

$$\begin{cases} y_n(x) = y_n + \omega(x_n) - \omega(x), & x \geqq x_n; \\ y_n(x) = y_n - \omega(x_n) + \omega(x), & x \leqq x_n; \end{cases}$$

et nous adjoignons la courbe C :

$$y = 1 + \chi(x);$$

$\omega(x)$ est monotone, indéfiniment croissante, vérifie la première condition F ; $\chi(x)$ est monotone, décroissante, tend vers zéro ; $1 + \chi(x)$ vérifie les conditions F, et l'on a : $\chi(x) - x\omega'(x) \geqq 0$ $\left(\text{par exemple} \quad \omega(x) = \log_2 x, \quad \chi(x) = \frac{1}{\log x}\right)$. Les points du plan ($x > 0$) situés au-dessus de toutes les courbes C_n et de C sont au-dessus d'une courbe $y(x)$ qui fournit encore la fonction cherchée. On peut varier beaucoup cette construction, et, par exemple, faire en sorte que $\frac{V(X)}{X}$ soit de la forme $X^{(1+l_2^1)[1+\eta(X)]}$, c'est-à-dire soit à croissance régulière.

Pour les autres catégories de la première classe on emploiera un procédé analogue : si $p+2$ est la catégorie et si l_{p+1}^p est fini, on procède comme pour la seconde catégorie à partir des points $A_n\left[x_n = \log_{p+1} r_n,\ y_n = \frac{\log_p(n \log r_n)}{x_n}\right]$; on aura alors

$$n \log r_n \leqq e_{p-1}[W(X_p)], \qquad X_p = \log_p r_n,$$

$W(X)$ est à croissance rationnelle, $\frac{W(X)}{X}$ ne décroît pas, donc $\frac{e_{-1}[W(X)]}{e_{p-1}(X)}$ croît.

Lorsque l_{p+1}^p est infini, on a $l_{p+2}^{p+1} = 1$, on applique alors aux points A_n

$$x_n = \log_{p+2} r_n, \qquad y_n = \frac{\log_{p+1}(n \log r_n)}{x_n}$$

le procédé employé pour la première catégorie, mais ici les branches de droite des courbes C_n ne se superposent pas nécessairement dans l'ordre de leurs indices. On aura encore

$$n \log r_n \leqq e_p[W(X_{p+1})], \qquad X_{p+1} = \log_{p+1} r_n,$$

$W(X)$ étant à dérivabilité rationnelle, $\frac{e_p[W(X)]}{e_p(X)}$ croissant, et $\lim_{X=\infty} \frac{\log W(X)}{\log X} = 1$, de sorte que dans les formules $\frac{\log W}{\log X}$, c'est-à-dire $\frac{\log_{p+1}(n \log r_n)}{\log_{p+2} r_n}$ peut être remplacé par *un*.

Pour les fonctions de la seconde classe et $p^{\text{ième}}$ catégorie, on aura à faire passer par une infinité de points $A_n \left(x_n = \log_p r_n, \quad y_n = \frac{\log_p n}{x_n} \right)$ une courbe $y(x)$ laissant les autres points au-dessous d'elle, et telle que l'on ait :

$$\text{(F')} \qquad \lim_{x=\infty} \frac{xy'(x)}{y(x)} = 0.$$

Si $l_p^p > 0$, on associe aux points A_n les courbes C_n définies comme ci-dessus et on trace la courbe C,

$$y = \chi(x);$$

$\omega(x)$ est encore monotone, indéfiniment croissante, et telle que $\frac{x\omega'(x)}{\chi(x)}$ tende vers zéro avec $\frac{1}{x}$; $\chi(x)$ décroît, tend vers zéro et vérifie la condition (F')

$$\left(\text{par exemple :} \quad \chi(x) = \frac{1}{\log x}, \qquad \omega(x) = \log_3 x\right).$$

Si $l_p^p = 0$, nous prendrons pour courbes C_n :

$$\begin{cases} y_n(x) = \dfrac{1}{x^{h_n}}, & x \geqq x_n, \\ y_n(x) = y_n, & x \leqq x_n, \end{cases}$$

h_n est positif et tend vers zéro, ce qui permet la construction de $y(x)$.

En résumé, on voit que : *pour toute fonction des deux premières classes, on peut trouver un exposant* $\rho(x)$ (dont la dérivée $Z'(X)$ tend vers zéro), *tel que les fonctions pour lesquelles* $n(x) = x^{\rho(x)}$ *sont de la même classe et catégorie et à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière.* Si nous désignons par $\varphi(x, y)$ l'expression

$x \log y$, pour les fonctions de première classe, première catégorie;

$\frac{x \log y \log_2 y}{\log [x \log y]}$, pour les fonctions de première classe, seconde catégorie;

$\frac{x \mathfrak{L}_{p-1} y}{\mathfrak{L}_p (x \log y)}$, pour la première classe, $(p+2)^{\text{ième}}$ catégorie;

$\frac{x \mathfrak{L}_p y}{\mathfrak{L}_p x}$, pour la quatrième classe, $p^{\text{ième}}$ catégorie.

On voit que l'on aura, $\log M(r)$ étant le maximum du module de la fonction considérée :

$$\log M(r) < [1 + \varepsilon(r)] \varphi(r^{\rho(r)}, r).$$

D'autre part, l'application du théorème de M. Jensen montre que, pour une infinité de valeurs de r, on aura [comme pour le passage de (34) à (37)] :

$$\log M(r) > [1 - \varepsilon(r)] \frac{\varphi(r^{\varphi(r)}, r)}{H(\log r)};$$

$H(\log r)$ a pour limite *un* pour la première classe et première catégorie, e pour la seconde classe; pour la première classe et catégorie $p > 2$ sa limite supérieure est e, et elle est égale à $\left(1 + \frac{1}{l_2^1}\right)^{l_2^1}$ pour la seconde catégorie de la première classe.

[**37**] La limite supérieure trouvée pour $\log M(r)$ ne peut être précisée; la limite inférieure trouvée sur certains cercles est entièrement satisfaisante pour la première catégorie de la première classe; elle l'est moins pour les autres classes et catégories, mais ne peut être améliorée lorsqu'on ne fait aucune hypothèse sur la densité des valeurs de n donnant l'égalité $n = r_n^{\varepsilon(r_n)}$. Cela résulte de la proposition suivante, démontrée dans un cas particulier par M. Lindelöf (1) : si $V(x)$ est une fonction croissante dérivable, telle que la fonction $W(x)$ définie par l'égalité

$$\text{Maxim. de } V(x)[\log r - \log x] = h(r) \log r\, W(r), \qquad h(r) > k > 0,$$

soit également croissante, l'application du théorème de M. Jensen aux fonctions pour lesquelles

$$(\alpha) \qquad n \leqq (1 + \eta_n) V(r_n)$$

donne le résultat le plus précis que l'on puisse obtenir en général, en ce sens qu'il existe des fonctions pour lesquelles on a l'inégalité (α), l'égalité ayant lieu pour une infinité de valeurs de n, et telles que :

$$\log M(r) < (1 + \varepsilon) h(r) \log r \,.\, W(r), \qquad r > r_0.$$

En effet, si l'on forme une suite de nombres r_i vérifiant les conditions

$$(1 + \eta_i) V(r_i) = n_i, \quad n_i \text{ entier}; \qquad \lim_{i=\infty} \frac{r_{n_{i+1}}}{r_{n_i}} = \infty; \qquad \lim_{i=\infty} \frac{n_{i+1}}{n_i} = \infty,$$

la fonction entière

$$f(z) = \prod_1^\infty \left\{ 1 + \left(\frac{z}{r_{n_i}}\right)^{n_i - n_{i-1}} \right\}$$

satisfait visiblement à l'inégalité précédente.

---

(1) *Mémoire sur la théorie des fonctions entières*, p. 63.

[**38**] Le mode de croissance des fonctions $n(x) = x^{\rho(x)}$ correspondant à des fonctions à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière montre que, si l'égalité

$$\log M(r) \geqq \frac{\varphi(r^{\rho(r)}, r)}{H(\log r)}[1 - \varepsilon(r)]$$

a lieu pour une valeur de r, elle a lieu dans tout l'intervalle r, rk, k étant fini, par suite dans la portion d'un domaine D_δ comprise entre les cercles de rayons r et kr on aura :

$$\log|f(z)| \geqq \frac{\varphi(r^{\rho(r)}, r)}{H(\log r)}[1 - \varepsilon(r)].$$

C'est une forme précise du *théorème de M. Wiman* que j'avais démontré dans les *Mathematische Annalen*. On peut donner une forme moins précise, mais plus frappante, en introduisant le nombre des zéros $n(r)$. Sur les cercles où l'inégalité précédente a lieu on a (n° 33) :

$$n(r) < r^{\rho(r)} < [1 + \varepsilon(r)]\, n(r) \left[1 + \frac{1}{\psi(\log r) - 1}\right]^{\psi(\log r) - 1},$$

d'où

$$r^{\rho(r)} = n(r) h(r), \qquad 1 \leqq h(r) < H(\log r).$$

Par exemple pour les fonctions de seconde classe et de $p^{\text{ième}}$ catégorie, on a sur une infinité de cercles :

$$\frac{1}{e[1 + \varepsilon(r)]} \frac{n(r)\mathfrak{L}_p r}{\mathfrak{L}_p n(r)} < \log|f(z)| < \big(1 + \varepsilon(r)\big) e \, \frac{n(r)\mathfrak{L}_p r}{\mathfrak{L}_p n(r)}.$$

Les formules ainsi obtenues mettent en évidence que les fonctions à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière sont bien celles pour lesquelles la relation entre $\log M(r)$ et une fonction de $n(r)$ et r est la plus simple.

En considérant les fonctions de la troisième classe comme cas limite de fonctions de la seconde classe par exemple, on obtient le résultat général suivant : *Pour toute fonction d'ordre nul on peut trouver des exposants* $\rho(x) = \dfrac{Z(X)}{X}$ *pour lesquels la fonction* $Z(X) + \log X$ *satisfait aux conditions* (D), *et l'on a :*

$$\frac{1}{\overline{\lim\limits_{X=\infty}} \left(1 + \frac{1}{XZ'}\right)^{XZ'}} \leqq \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\dfrac{\log M(r)}{Xe^{Z(X)}}}{1 + XZ'(X)} \leqq 1.$$

[**39**] Lorsque la fonction $f(z)$ est donnée par sa série de Taylor, tout ce que nous avons dit s'appliquera à la fonction $\mathfrak{M}(x)$, mais les résultats que l'on obtiendrait ainsi ne seraient pas assez précis eu égard à ce que, ici, la fonction connue

directement est γ_n ou G_n et non pas $\mathfrak{R}_n$. Il faudra donc comparer $e\left(\frac{G_n}{n}\right)$, qui est croissant, à une fonction analogue définissant une fonction à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière, en désignant cette fonction par $x^{\rho_1(x)}$, $\rho_1(x)$ étant l'exposant formé comme ci-dessus pour la fonction dont le $n^{\text{ième}}$ zéro aurait pour logarithme du module $\frac{G_n}{n}$, on aura

$$\log n \leqq \frac{G_n}{n}\rho_1\left(e^{\frac{G_n}{n}}\right),$$

et par suite, d'après les calculs du n° 33 :

$$\overline{\lim_{r=\infty}}\,\frac{\log M(r)}{\dfrac{\varphi(r^{\rho_1(r)}, r)}{H(\log r)}} = 1. \tag{39}$$

L'égalité (39) donne le théorème de M. Wiman sous sa forme la plus précise : Sur une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants on a :

$$\log|f(z)| = \big(1 + \eta(z)\big)\frac{\varphi(r^{\rho_1(r)}, r)}{H(\log r)}.$$

[**40**] On peut, pour certaines catégories de fonctions, majorer $n(x)$ ou $\mathfrak{N}(x)$ d'une façon plus précise. C'est ce qu'on a à faire pour le calcul de la fonction $\varphi(x)$ du numéro 17; on a

$$\underline{\lim_{n=\infty}}\,\frac{G_n}{n^2} = h_1,$$

et on doit avoir

$$G_n \geqq \varphi(n), \qquad \lim_{n=\infty}[\varphi(n+1) + \varphi(n-1) - 2\varphi(x)] = 2h_1;$$

la condition imposée à $\varphi(x)$ est vérifiée si $\varphi''(x)$ existe et tend vers $2h_1$ lorsque x croît indéfiniment. La détermination de $\varphi(x)$ se fera, à partir de $\varphi''(x)$, par le procédé indiqué par M. Denjoy dans sa thèse (pp. 48 à 56) (1). La série $\sum_0^\infty r^n e^{-\varphi(n)}$ admet dans ces conditions une expression asymptotique simple; on a :

$$\sum_0^\infty r^n e^{-\varphi(n)} = [1 + \varepsilon(r)]\,S_1(e^{2xh_1}, e^{-h_1})\,e^{-h_1x^2}e^{x\varphi'(x)-\varphi(x)},$$

$$\varphi'(x) = \log r, \qquad S_1(z, q) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} z^n.$$

(1) En particulier p. 53; le nombre a qui figure dans les équations des courbes c et γ doit être remplacé par $2a$.

[**41**] L'égalité (39) montre qu'étant donnée l'expression $\log M(r)$ correspondant à une fonction d'ordre nul quelconque, il existe une fonction à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière, des mêmes classe et catégorie dont le logarithme du maximum du module $\log \overline{M(r)}$ vérifie la condition

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{\log \overline{M(r)}} = 1\,;$$

on en déduira par l'application de l'inégalité (27) une limite supérieure de $n(r)$, tandis que les résultats du numéro 36 donneront une limite inférieure de $n(r)$ sur certains cercles. On obtiendra de même les résultats relatifs aux coefficients c_n. Quant à la détermination de $\overline{M(r)}$ en fonction de $M(r)$, elle se fera comme la majoration de $n(r)$.

[**42**] $\varphi(x, y)$ *étant la fonction considérée au numéro 36, nous appellerons fonctions à correspondance régulière d'ordre zéro celles pour lesquelles le rapport*

$$\frac{\log M(r)}{\varphi(n(r), r)} \qquad \left[\text{ou } \frac{\log M(r)}{\varphi(\mathfrak{N}(r), r)}\right]$$

reste compris entre des limites finies (positives). Pour de telles fonctions, $\varphi(x, y)$ vérifiant les conditions (A), on a :

$$\log M(r) \sim \int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx.$$

Cherchons d'abord les conditions imposées à $\log M(r)$. Nous ferons le calcul pour une fonction de la première classe. Nous aurons

$$\log M(r) \sim \mu_1(r) = h(r)\,.\,\frac{n(r)\mathfrak{L}_{p+1} r}{\mathfrak{L}_p[n(r)\log r]}, \qquad A < h(r) < B$$

($p = 0$ pour la première catégorie, etc.). En posant

$$\log_p r = X_p, \qquad \mu_1(r) = e_{p-1}[V(X_p)], \qquad [e_{-1}(y) = \log y]$$

on voit que l'on a

$$V(X_p)\,.\log V(X_p) = h(X_p)\,.\,V'(X_p)\,.\,X_p \log X_p, \qquad A - \varepsilon < h(X_p) < B + \varepsilon,$$

c'est-à-dire que $V(x)$ satisfait aux conditions

$$\left(\frac{\log x'}{\log x}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{B}} < \frac{\log V(x')}{\log V(x)} < \left(\frac{\log x'}{\log x}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{A}}, \qquad x' > x > x_0(\varepsilon).$$

que j'appellerai *conditions de M. Boutroux*[1]. On en déduira (comme pour les fonctions à croissance rationnelle) une propriété des nombres dérivés. On a dès lors le résultat :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{n}{\frac{\mathfrak{L}_{p+1}M(r_n)}{\mathfrak{L}_{p+1}r_n}} = \frac{1}{A}, \qquad \underline{\lim_{n=\infty}} \frac{n}{\frac{\mathfrak{L}_{p+1}M(r_n)}{\mathfrak{L}_{p+1}r_n}} = \frac{1}{B}, \qquad (A \leqq 1),$$

est que $\log M(r)$ *soit asymptotiquement égal à* $e_{p-1}[V(\log_p r)]$, $V(x)$ *vérifiant les conditions de M. Boutroux écrites ci-dessus.*

Il reste à montrer que la condition est suffisante. Nous allons commencer par montrer que cette condition entraîne l'égalité (12). D'une façon générale, si l'on a

$$\log M(r) < (1+\varepsilon) e_{p-1}[V(\log_p r)],$$

le théorème de M. Jensen nous donne :

$$n < (1+\varepsilon) \frac{e_{p-1}[V(\log r)]\mathfrak{L}_p[e_{p-1}(V_n)]}{k\mathfrak{L}_{p+1}r_n},$$

$$\log r - \log r_n = k \log r_n \cdot \alpha_n, \qquad \alpha_n = \frac{\log_2 r_n \ldots \log_{p+1} r_n}{e_{p-2}(V_n) \ldots \log V_n}, \qquad V_n = V(\log_p r_n).$$

On tire de là (en supposant $\frac{\log(1+k\alpha_n)}{\log_2 r_n} \leqq h < 1$),

$$e_{p-1}[V(\log_p r)] < e_{p-1}(V_n)(1+k\alpha_n)^{\frac{1+\varepsilon}{A\alpha_n}}$$

et par conséquent :

$$(40) \qquad n < (1+\varepsilon)\frac{H_1(r_n)}{A} \frac{\mathfrak{L}_{p+1}\left[e_p\{V(\log_p r_n)\}\right]}{\mathfrak{L}_{p+1}r_n}, \qquad H_1(r_n) = \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{\alpha_n A} - 1}\right)^{\frac{1}{A\alpha_n}-1}.$$

---

[1] On voit en effet que lorsque $\frac{\log V(x)}{\log x}$ reste borné, il existe des nombres A_1 et B_1 tels que

$$\frac{V(x)}{x^{\frac{1}{B_1}}}, \qquad \frac{x^{\frac{1}{A_1}}}{V(x)}$$

sont des fonctions croissantes, ce sont les conditions utilisées par M. Boutroux dans sa thèse.

$H_1(r_n)$ est égal à un pour la première catégorie, inférieur ou égal à e pour les catégories de rang supérieur à 2, et au nombre obtenu en remplaçant α_n par $\frac{1}{L_2^2}$ pour la seconde. Nous déduirons de l'inégalité (40) que

$$r\int_r^\infty n(x)\frac{dx}{x^2} < h(r)\frac{\mathfrak{L}_{p-1}[e_p\{V(\log_p r)\}]}{\mathfrak{L}_{p+1} r};$$

nous aurons donc

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x}dx = [1+\eta_1(r)]e_{p-1}[V(\log_p r)];$$

si η_{1_r} est la borne supérieure de $|\eta_1(x)|$ pour $x \geqq r$, on a

$$e_{p-1}[V(\log_p r')] > e_{p-1}[V(\log_p r)]\left[1+\frac{\sqrt{\eta_{1_r}}}{B}h\right], \qquad r' = r^{1+\sqrt{\eta_{1_r}}\alpha_r},$$

$$\alpha_r = \frac{\log_2 r \ldots \log_{p+1} r}{e_{p-2}(V)\ldots\log V},$$

d'où :

$$\int_r^{r'} \frac{n(x)}{x}dx = \big(1+\eta_1(r)\big)\big[e_{p-1}\big(V(\log_p r')\big) - e_{p-1}\big(V(\log_p r)\big)\big].$$

Or, la propriété des nombres dérivés de la fonction $V(x)$ nous montre encore que le crochet du second membre de l'égalité précédente peut s'écrire sous la forme

$$\int_r^{r'} \frac{\mathfrak{L}_{p+1}\{e_p\big(V(\log_p x)\big)\}}{\mathfrak{L}_{p+1}x}\,\frac{dx}{\lambda(x)x},$$

$\lambda(x)$ étant continu et compris entre $A(1-\varepsilon)$ et $B(1+\varepsilon)$; donc, nous aurons, d'après le raisonnement fait plusieurs fois ci-dessus,

$$n(r) = \frac{1}{\lambda(r)}\,\frac{\mathfrak{L}_{p+1}\big[e_p\big(V(\log_p r)\big)\big]}{\mathfrak{L}_{p+1} r}, \qquad A(1-\varepsilon) < \lambda(r) < B(1+\varepsilon),$$

ce qui démontre la proposition énoncée. On aura un résultat analogue pour la seconde classe.

[**43**] Les conditions que l'on peut obtenir pour $n(r)$ seront moins satisfaisantes. En procédant comme pour les fonctions à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière, nous trouvons qu'il est nécessaire que l'on ait

$$n\log r_n = h_n e_{p-1}[V(\log_p r_n)], \qquad \frac{1-\varepsilon_n}{B} < h_n < \frac{1+\varepsilon_n}{A},$$

$V(x)$ satisfaisant aux conditions de M. Boutroux; mais cette égalité n'entraîne plus

$$\log M(r) = h(r)\,\frac{n(r)\mathfrak{L}_{p+1}r}{\mathfrak{L}_p[n(r)\log r]}, \qquad A-\varepsilon < h(r) < B+\varepsilon,$$

mais seulement cette égalité avec

$$\frac{A}{B}h_{n(r)}(1-\varepsilon) < h(r) < \frac{B}{A}h_{n(r)}(1+\varepsilon).$$

Nous aurons donc seulement le résultat :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit à correspondance régulière d'ordre zéro, en ce sens que le rapport (première classe)

$$\log M(r) : \frac{n(r)\mathfrak{L}_{p+1}r}{\mathfrak{L}_p[n(r)\log r]}$$

reste supérieur à un nombre positif, est que l'on ait

$$n\log r_n = h(n)e_{p-1}[V(\log_p r_n)], \qquad C_1' < h(n) < B_1',$$

$V(x)$ *satisfaisant aux conditions de M. Boutroux :*

$$\left(\frac{\log x'}{\log x}\right)^{\frac{1}{B_1}} < \frac{\log V(x')}{\log V(x)} < \left(\frac{\log x'}{\log x}\right)^{\frac{1}{A_1}}, \qquad x' > x > x_0; \quad A_1 < 1.$$

On peut mettre la condition sous la forme, plus simple pour une vérification pratique :

$$\left[\frac{\log_p(n'\log r_{n'}A_2)}{\log_p(n\log r_n B_2)}\right]^{A_2} < \frac{\log_{p+1}r_{n'}}{\log_{p+1}r_n} < \left[\frac{\log_p(n'\log r_{n'}B_2)}{\log_p(n\log r_n . A_2)}\right]^{B_2}.$$

Je ferai une remarque sur la forme donnée en dernier lieu à la condition. Considérons la double inégalité

$$An(r)\log r < \int_0^r \frac{n(x)}{x}dx < Bn(r)\log r, \qquad B \leqq 1,$$

en posant

$$\log r = X, \qquad n(r) = N(X);$$

la méthode précédente nous donne

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{X'}{X}\right)^{\frac{1}{B}-1} < \frac{N(X')\lambda(X')}{N(X)\lambda(X)} < \left(\frac{X'}{X}\right)^{\frac{1}{A}-1}, \qquad X' > X, \quad A < \lambda(x) < B,$$

d'où l'on tire

$$(\beta) \qquad \frac{A}{B}\left(\frac{X'}{X}\right)^{\frac{1}{B}-1} < \frac{N(X')}{N(X)} < \frac{B}{A}\left(\frac{X'}{X}\right)^{\frac{1}{A}-1},$$

condition moins précise que la précédente. Si $B = 1$, cette dernière condition ne peut être remplacée par une autre de la même forme et plus avantageuse, mais si $B < 1$ et si l'on pose

$$\int_0^X N(x)\,dx = h(X) X N(X),$$

on aura

$$x h(x) \leqq x - X[1 - h(X)], \qquad x > X,$$

d'où

$$\int_X^{X'} \frac{dx}{h(x)\,.\,x} \geqq \int_X^{X\frac{1-h(X)}{1-B}} \frac{dx}{x - X[1 - h(X)]} + \int_{X\frac{1-h(X)}{1-B}}^{X'} \frac{dx}{Bx}, \qquad X' > X\,\frac{1 - h(X)}{1 - B},$$

et par conséquent

$$\frac{N(X')}{N(X)} \geqq \left[\frac{X'}{X}\,\frac{1 - B}{1 - h(X)}\right]^{\frac{1}{B}-1} \frac{B}{h(X')};$$

cette inégalité, qui ne nous donnerait rien de plus que (α), améliore la première partie de (β); on aura

$$\frac{N(X')}{N(X)} > \left(\frac{X'}{X}\,\frac{1 - B}{1 - A}\right)^{\frac{1}{B}-1};$$

mais, même dans ces conditions, (β) donnera un résultat moins précis que (α).

[**44**] Lorsque les conditions du numéro 43 sont vérifiées, on a

$$\log M(r) = h(r)\, e_{p-1}[V_1(\log_p r)], \tag{41}$$

$V_1(X)$ satisfaisant aux conditions de M. Boutroux et $h(r)$ restant fini, positif; or, la fonction étant à correspondance régulière d'ordre zéro, les conditions du numéro 42 doivent se trouver réalisées; on voit même que la fonction $\log_p M(r)$ considérée comme fonction de $\log_p r$ doit satisfaire à des conditions de M. Boutroux, ce qui impose des conditions à la fonction inconnue $h(r)$. On se rendra compte, au moyen du calcul fait au numéro 42, que l'égalité (41) *donnée a priori* entraîne bien la correspondance régulière, de sorte qu'une égalité de la forme (41) impose à $h(r)$ des conditions telles que $\log_p M(r)$ vérifie des conditions de M. Boutroux.

[**45**] On peut évidemment, pour étudier une fonction quelconque, la comparer à une fonction à correspondance régulière d'ordre zéro : la majoration de $n(r)$, par exemple, se fera par la méthode de M. Boutroux (Thèse, p. 15). Il est clair que l'on obtiendra ainsi des résultats meilleurs, pour les fonctions voisines des fonctions à correspondance régulière d'ordre zéro, que par la comparaison aux fonctions à correspondance parfaitement régulière; mais pour les fonctions dont la distribution des zéros est *très irrégulière* comparativement à celle des fonctions à correspondance régulière d'ordre zéro, les résultats obtenus par les deux méthodes donneront une approximation à peu près semblable. Il est d'ailleurs évident que si l'on a, par exemple,

$$\frac{1}{A} < \frac{\log M(r)}{\log \overline{M(r)}} < 1 + \varepsilon,$$

$\overline{M(r)}$ étant le maximum du module d'une fonction à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière, l'étude de la relation entre $n(r)$ et r se fera d'une façon plus précise que dans le cas général des fonctions à correspondance régulière [1].

Supposons, par exemple, que l'on ait

$$\log M(r) = h(r)(\log r)^k, \qquad A < h(r) < B, \qquad k > 1;$$

nous aurons

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx = h_1(r)(\log r)^k, \qquad A - \varepsilon < h_1(r) < B;$$

d'où

$$\begin{cases} n(r) < (1+\varepsilon)kB\omega^{k-1}(\log r)^{k-1}, \\ n(r) > (1-\varepsilon)kB\omega'^{k-1}(\log r)^{k-1}, \end{cases}$$

où ω est la plus grande et ω' la plus petite racine de l'équation

$$(k-1)x^k - kx^{k-1} + \frac{A}{B} = 0.$$

Il semble difficile de reconnaître si ces conditions nécessaires sont suffisantes, sauf le cas où $\lim A = B$, où l'on retombe sur le cas de la correspondance d'ordre

---

(1) Il ne me semble pas inutile d'insister sur ce fait bien évident, que la classe des fonctions à correspondance régulière d'ordre zéro est beaucoup plus générale que la classe des fonctions considérées ici : c'est cette propriété qui fait leur intérêt. C'est à ce point de vue, semble-t-il, que l'on doit se placer dans ce genre de questions, par exemple dans la comparaison des résultats de M. Denjoy et de M. Blumenthal (Voir Blumenthal, *Principes de la théorie des fonctions d'ordre infini*, pp. 83, 88). Il est clair que les méthodes de M. Blumenthal doivent s'appliquer *directement* dans des cas beaucoup plus généraux que celles de M. Denjoy; il reste à savoir si les fonctions $e^{Y(x)^{1+\varepsilon}}$ sont aussi ou moins générales que les fonctions $r^{\rho(r)}$.

zéro parfaitement régulière. Le calcul fait ci-dessus dans un cas particulier, pour simplifier, a d'ailleurs une portée tout à fait générale.

Enfin, on voit que, pour une fonction à correspondance régulière d'ordre zéro, on a

$$n(r) = h(r)e^{Y(X)}, \qquad X = \log r,$$

$Y'(X)$ tendant vers zéro, il existe donc un exposant $\rho(x)$ dont la dérivée $Z'(X)$ tend vers zéro et tel que

$$n(r) > k\, r^{\rho(r)}, \qquad k > 0;$$

d'où il suit que la condition (19) est vérifiée ainsi que ses conséquences.

[**46**] On peut évidemment essayer de poursuivre cette étude de la correspondance entre $\log M(r)$ et $n(r)$ ou $\mathfrak{N}(r)$. Nous dirons que *la correspondance entre* $\log M(r)$ *et* $\mathfrak{N}(r)$ *est régulière d'ordre moins un* lorsqu'on a

$$\mathfrak{N}(r)^{1-\varepsilon} \log r < \log M(r) < (1+\varepsilon)\mathfrak{N}(r) \log r, \qquad r > r_0(\varepsilon),$$

quelque petit que soit ε. Nous nous bornons à des fonctions d'ordre fini ou nul, de sorte que la deuxième partie de l'inégalité est vérifiée; la première partie impose à $\log M(r)$ la condition

$$\log M(r) \sim U(X), \qquad X = \log r;$$

la fonction

$$\frac{1}{X^{\varepsilon}} - \frac{1}{U(X)^{\varepsilon}}$$

étant décroissante, quelque petit que soit ε, pour $X > X_0(\varepsilon)$. On verra facilement que c'est là une condition suffisante, d'où il résultera, comme plus haut, que la fonction

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{(\log r)^{\varepsilon}} - \frac{1}{[\log M(r)]^{\varepsilon}}$$

elle-même est décroissante pour $\log r > \log \big(r_0(\varepsilon)\big)$. Mais on peut donner à cette condition une forme beaucoup plus large; posons

$$\log M(r) = X[V(X)]^{1+\eta}, \qquad X = \log r;$$

on voit que $V(X)$ devra vérifier la condition

$$\frac{1}{X^{\varepsilon}}\left[1 - \frac{1}{[V(X)]^{\varepsilon(1+\varepsilon)}}\right] > \frac{1}{X'^{\varepsilon}}\left[1 - \frac{1}{[V(X')]^{\varepsilon(1-\varepsilon)}}\right], \qquad X' > X > X_0(\varepsilon).$$

Cette condition est suffisante, car on aura

$$\mathfrak{M}(r) < \frac{X'}{X' - X}[V(X')]^{1+\eta(X')};$$

or,

$$[V(X')]^{\varepsilon(1-\varepsilon)} < \frac{[V(X)]^{\varepsilon(1+\varepsilon)}}{\left(\frac{X'}{X}\right)^{\varepsilon} + \left[1 - \left(\frac{X'}{X}\right)^{\varepsilon}\right][V(X)]^{\varepsilon(1+\varepsilon)}};$$

donc en prenant, par exemple,

$$\log\frac{X'}{X} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{V(X)^{\varepsilon(1+\varepsilon)}},$$

on aura bien

$$\mathfrak{M}(r) < V(X)^{1+\varepsilon_1} = \left(\frac{\log M(r)}{\log r}\right)^{1+\varepsilon_2}.$$

Ce calcul montre, de plus, que l'hypothèse

$$(\beta) \qquad V(X') \leqq [V(X)]^{1+\alpha}, \qquad X' = X\left[1 + \frac{1}{V(X)^{\alpha}}\right], \qquad X > X_0(\alpha),$$

où α est arbitrairement petit, eût entraîné la conclusion; or, la condition (α) nous donne

$$\log M(r) = XV_1(X),$$

$$(\gamma) \qquad V_1(X') \leqq V_1(X).e, \qquad X' = X\left[1 + \frac{1}{V_1(X)^{\alpha}}\right], \qquad X > X_0(\alpha),$$

ce qui montre que la condition (β) est bien nécessaire; en revenant à la variable r, la condition (β) s'écrit

$$T(r) = V(X),$$

$$T(r') \leqq [T(r)]^{1+\alpha}, \qquad r' = r^{1+\frac{1}{T(r)^{\alpha}}}, \qquad r > r_0(\alpha);$$

$T(x)$ est donc une fonction type de M. Blumenthal, adjointe à l'infiniment petit α (α est défini en fonction de r par $r = r_0(\alpha)$). D'où le résultat :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'ordre nul ou d'ordre fini soit à correspondance régulière d'ordre moins un, c'est-à-dire pour que les inégalités écrites plus haut aient lieu, est que

$$\log M(r) = \log r\,[T(r)]^{1+\eta(r)},$$

ou que

$$\begin{cases} n \leqq \left[T\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}\right)\right]^{1+\varepsilon}, & n > n_0(\varepsilon), \\ n_p \geqq \left[T\left(\frac{1}{\sqrt[n_p]{|c_{n_p}|}}\right)\right]^{1-\varepsilon_p}, & \lim\limits_{p=\infty} \frac{\log n_{p-1}}{\log n_p} = 1, \end{cases}$$

$T(x)$ *étant une fonction type de M. Blumenthal et les égalité et inégalités écrites étant réciproques.* Pour l'ordre infini, ce sont encore des conditions suffisantes.

La classe des fonctions ainsi obtenues est plus générale que la classe des fonctions pour lesquelles

$$\log M(r) = \log r \,.\, e^{Y(\log r)(1+\eta)},$$

la fonction $Y(X)$ satisfaisant à la condition que $Xe^{Y(X)}$ est asymptotiquement égal au maximum du module d'une fonction d'ordre nul à correspondance régulière d'ordre zéro; car dans ces conditions, et pour la première classe,

$$e^{Y(kX)} < e^{Y(X)} k^{\varepsilon Y(X)}, \qquad k \text{ fini};$$

condition qui n'est pas réalisée nécessairement par les fonctions $T(e^X)$. On aura un résultat analogue pour la seconde classe.

[**47**] La correspondance régulière d'ordre moins un entre $\log M(r)$ et $n(r)$ ne peut plus s'étudier aussi facilement, sauf lorsque les conditions (16) sont vérifiées, cas dans lequel les résultats précédents s'appliqueront après le changement de $\mathfrak{M}(r)$ en $n(r)$ et $\sqrt[n]{|c_n|}$ en $\dfrac{1}{r_n}$. Dans le cas général, le second terme figurant dans les égalités (13) et (15) peut être aussi important que le premier, et par suite les arguments des zéros interviennent. Mais, même en élargissant la définition et en disant, par exemple, qu'il y aura correspondance régulière d'ordre moins un entre $n(r)$ et $\log M(r)$ lorsque, *quels que soient les arguments des zéros*, on a

$$n(r)^{1-\varepsilon} \log r < \log M(r) < h(r) n(r) \log r,$$

la question se résout mal. On voit, en effet, que l'on devra avoir

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x} dx < h_1 n(r) \log r, \qquad r\int_0^r \frac{n(x)}{x^2} dx < h_2 n(r) \log r;$$

la première inégalité ne donne rien; la seconde donne bien une double inégalité :

$$\frac{n(r)}{r} < \int_0^r \frac{n(x)}{x^2} dx < h_2 \frac{n(r)}{r} \log r,$$

mais la limite supérieure est trop éloignée de la limite inférieure pour que l'on puisse obtenir un résultat simple, et si l'on ne fait pas l'hypothèse $h_2 < 1$ les conditions obtenues pour $n(x)$ non seulement ne sont pas suffisantes, mais n'entraînent même pas la convergence de l'intégrale.

VI. — Quelques exemples.

[**48**] Je considérerai d'abord des fonctions définies par des équations fonctionnelles se rattachant à celles étudiées par H. Poincaré dans son mémoire *Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes* (J. de Math., 1890, p. 313). Je me bornerai à des équations de la forme

$$f(az) = \mathrm{R}[f(z), z], \qquad |a| > 1,$$

$\mathrm{R}(x, y)$ étant une fraction rationnelle en x et y. Je chercherai des solutions holomorphes et différentes de zéro pour $z = 0$. On voit que la fonction

$$\varphi_2(z) = f(z) - f(0)$$

doit satisfaire au système de Poincaré

$$\begin{cases} \varphi_1(az) = a\varphi_1(z), \\ \varphi_2(az) = \mathrm{R}[\varphi_2(z) + f(0), \varphi_1(z)] - f(0), \end{cases}$$

dont le déterminant est

$$\mathrm{F}(s) = (a - s)\left[\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}[f(0), 0] - s\right];$$

par suite, si l'on a

$$c_0 = \mathrm{R}(c_0, 0), \qquad \frac{\mathrm{L}\left(\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}(c_0, 0)\right)}{\mathrm{L}a} \neq i, \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

il existe une solution méromorphe de l'équation considérée prenant la valeur c_0 pour $z = 0$. Si $\mathrm{R}(x, y)$ est un polynome, la solution est entière; c'est ce cas que je considérerai le premier. On a

$$(42) \qquad f(az) = \mathrm{P}_0(z)[f(z)]^p + \ldots + \mathrm{P}_p(z),$$

les $\mathrm{P}_i(z)$ sont des polynomes et il y a en général p solutions entières. Soit

$$\mathrm{P}_0(z) = b_0 z^q + \ldots, \qquad |b_0| = \mathrm{B}, \qquad |a| = \mathrm{A};$$

si $\mathrm{M}(r)$ est le maximum du module d'une solution, nous avons

$$\mathrm{M}(ar) = (\mathrm{B} + \eta) r^q [\mathrm{M}(r)]^p.$$

Supposons d'abord $p > 1$. On a

$$M(A^n r_0) = [(B+\eta) r_0^q]^{\frac{p^n - 1}{p-1}} [M(r_0)]^p A^{q \cdot \frac{p^n - p}{(p-1)^2}}$$

$$= \left[M(r_0) [(B+\eta) r_0^q]^{\frac{1-\frac{1}{p^n}}{p-1}} A^{q \cdot \frac{1-\frac{1}{p^{n-1}}}{(p-1)^2}} \right]^{p^n},$$

et par suite

$$M(r) = [K r_0 M(r_0)]^{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{Lp}{LA}}(1+\varepsilon)}, \qquad R < r_0 < AR, \qquad r_0 = \frac{r}{A^n}, \qquad n \text{ entier.}$$

On a donc une fonction d'ordre fini, d'ordre $\frac{Lp}{LA}$, très régulière; on a

$$\log M(r) = [1 + \varepsilon(r)] h(\log r) r^{\frac{Lp}{LA}},$$

$h(x)$ étant une fonction périodique, de période $\log A$, dont les variations dépendent des coefficients des polynomes $P_i(z)$.

Soit maintenant $p = 1$. On a encore

$$M(Ar) = (B + \eta) r^q M(r) = B r^q M(r) \left(1 + \frac{h(r)}{r}\right),$$

d'où

$$M(A^n r_0) = h(n) (B r_0^q)^n M(r_0) A^{q \frac{n(n-1)}{2}} = h(r) M(r_0) \left(\frac{B}{\sqrt{A}}\right)^{\frac{Lr - Lr_0}{LA}} e^{q \frac{(Lr)^2 - (Lr_0)^2}{2LA}},$$

$$r_0 = \frac{r}{A^n}, \qquad R < r_0 < AR;$$

ou encore enfin

$$M(r) = h(r) e^{H(\log r)} e^{\frac{q}{2 \log A} (\log r)^2 + \frac{\log B}{\log A} \log r - \frac{\log r}{2}},$$

$H(x)$ étant périodique et de période $\log A$. On voit que l'on a une fonction de première classe et seconde catégorie, satisfaisant aux conditions (16) et à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière. On pourra, pour obtenir les coefficients de la série de Taylor et les modules des zéros, faire un calcul analogue à celui du numéro 32. Mais on peut aussi remarquer qu'il existe des cercles sur lesquels $|f(z)|$ reste supérieur à $[M(r)]^{1-\varepsilon}$, il en résulte qu'il existe une suite de nombres $r_0, r_1, \ldots, r_i, \ldots$; $r_i = r_{i-1} A$, tels que

$$f(az) = [1 + \eta(z)] P_0(z) f(z), \qquad |z| = r_i;$$

$f(z)$ a donc q zéros entre les cercles de rayons r_i et r_{i+1}. A l'extérieur des cercles décrits des zéros a_n comme centres avec un rayon $|a_n|^{-1}$ l'égalité précédente a encore lieu, ce qui montre que α_0 étant un des q zéros compris entre R et AR, l'un des q zéros compris entre les cercles RA^n et RA^{n-1} sera $\alpha_0 A^n \left(1 + \frac{\lambda}{R}\right)$; les zéros tendent à se disposer sur q spirales logarithmiques. En particulier, si $q = 1$ et si les coefficients de $P_0(z)$ et de $P_1(z)$ sont réels ainsi que a, tous les zéros sont réels à partir d'un certain rang.

[**49**] Considérons maintenant l'équation plus générale

$$f(a^p z) = P_0(z) f(a^{p-1} z) + \ldots + P_{p-1}(z) f(z) + P_p(z), \tag{43}$$

qui est elle-même un cas particulier de l'équation

$$f(a^p z) = R[f(a^{p-1} z), \ldots, f(z), z],$$

$R(x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1})$ étant une fraction rationnelle. Les conditions qui expriment que le développement en série d'une solution est possible sont des conditions suffisantes pour que cette solution existe, car la résolution de l'équation se ramène à la résolution d'un système d'équations de Poincaré. Pour l'équation (43), on aura les conditions

$$f(0) = c_0; \qquad c_0[P_0(0) + P_1(0) + \ldots + P_{p-1}(0) - 1] + P_p(0) = 0;$$

$$a^{ip} - \sum_{j=0}^{j=p-1} P_j(0) a^{(p-j-1)i} \neq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots;$$

il y aura en général une solution entière. Dans le cas particulier où le degré de $P_0(z)$ surpasse celui des autres polynomes $P_i(z)$ ($i = 1, 2, \ldots, p-1$), l'expression trouvée ci-dessus pour $M(r)$ est encore valable, ainsi que les résultats relatifs à la disposition des zéros. Mais dans les cas généraux les valeurs particulières des coefficients et les degrés des polynomes $P_i(z)$ interviennent; on a bien encore

$$M(r) < e^{K(\log r)^2},$$

mais il semble difficile de trouver une limite inférieure pour $M(r)$.

[**50**] Je considérerai encore l'équation

$$P_1(z) f(az) + P_2(z) f(z) + P_3(z) = 0,$$

qui admet une solution méromorphe sous certaines conditions; si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont les zéros de $P_1(z)$ et si l'on pose

$$\psi(z, a) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a^n}\right),$$

on aura comme solution de l'équation écrite

$$\varphi(z)=\frac{g(z)}{\prod_1^p \psi\left(\frac{z}{\alpha_i}, a\right)}=\frac{g(z)}{\chi(z)},$$

$g(z)$ étant une fonction entière vérifiant l'équation

$$P_1(o)g(az)+P_2(z)g(z)+P_3(z)\cdot\chi(z)=o,$$

ce qui montre que $g(z)$ est une fonction d'ordre nul pour laquelle

$$M(r)<e^{K(\log r)^2};$$

en décomposant $\varphi(z)$ en éléments simples, on aura

$$\varphi(z)=\sum_{i=n}^{i=p}\left\{\sum_{n=n_i}^{n=\infty}\frac{A^i_n}{z-\alpha_i a^n}\left(\frac{z}{\alpha_i a^n}\right)^{\lambda_n}\right\}+f_1(z), \qquad A^i_n=\frac{g(\alpha_i a^n)}{\chi'(\alpha_i a^n)}.$$

Or, nous trouvons

$$A^i_{n+1}=-A^i_{n+1}a\frac{P_2(\alpha_i a^n)}{P_1(\alpha_i a^n)}=-aA^i_{n+1}C(\alpha_i a^n)^q,$$

q étant l'excès du degré de P sur celui de P_1; on en tirera bien simplement, en supposant le degré de $P_2(z)$ au moins égal à *un*, que $g(z)$ est une fonction à correspondance régulière d'ordre zéro pour laquelle

$$\log M(r)=h(r)(\log r)^2.$$

On voit, de plus, que lorsque q est négatif ou nul, on aura sur une infinité de cercles de rayons R, AR, ..., A^nR, ... :

$$f(z)-f_1(z)=\frac{K(1+\eta)(z)}{z},$$

d'où il suit que f_1 est un polynome.

[**51**] J'indiquerai encore rapidement quelques fonctions de première classe satisfaisant à des relations fonctionnelles simples. La fonction

$$F(z, a)=\prod_{n=0}^{n=\infty}\left(1-\frac{z}{a^{2^n}}\right), \qquad |a|>1$$

vérifie l'équation

$$\varphi(z^2)=\left(1-\frac{z^2}{a}\right)\varphi(z)\varphi(-z),$$

dont la résolution générale est alors ramenée à celle de l'équation

(44) $$\varphi(z^2)=\varphi(z)\varphi(-z).$$

La seule solution méromorphe de (44) est évidemment

$$\chi(z) = (-z)^p \prod_{q=-k'}^{q=k} (1 - z^{2q-1})^{m_q},$$

où p, q, m_q sont des entiers. Mais on peut chercher les solutions uniformes de (44) n'admettant pas le cercle $z = 1$ comme ligne singulière. Si a est un pôle (ou zéro) d'une telle solution, a^{2^n} sera aussi pôle, ainsi que l'un des $2^{n'}$ points $a^{2^{-n'}}$; il sera donc nécessaire de choisir les points $a^{2^{-n'}}$ de façon à ce que leur seul point limite soit le point $z = 1$. Le cas $|a| = 1$ nous redonne $\chi(z)$; si $|a| \neq 1$, nous supposerons a choisi (parmi les points $a^{2^{-n'}}$) de telle façon que chaque point $a^{2^{-n'}}$ ait pour argument le quotient par $2^{n'}$ de l'argument de a qui est compris entre o et 2π. Dès lors la fonction quasi-entière

$$G(z, a) = F(z, a) \,.\, \prod_1^\infty \left(\frac{z - a^{2^{-n'}}}{z - 1}\right)$$

jouera dans le cas $|a| > 1$ le rôle de fonction élémentaire, la fonction

$$\frac{aG(z, a)}{bG(z, b)}, \qquad |a| > 1, \quad |b| > 1,$$

vérifiant (44). Pour $|a| < 1$, on prendra

$$G_1(z, a) = F\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{a}\right) \prod_1^\infty \left(\frac{1 - z a^{-2^{-n'}}}{1 - z}\right).$$

Les fonctions vérifiant (44) ayant entre les cercles $z = R$, $z = R^2$ $(R \neq 1)$ autant de zéros que de pôles, on voit quelle sera la forme générale des solutions de (44) admettant pour points essentiels, soit les points $1, \infty$, soit 1 et 0, soit $0, 1, \infty$. La fonction $G(z, a)$ se comporte pour les grandes valeurs de z comme la fonction $F(z, a)$; pour $z = 1 + \frac{1}{u}$ et pour u très grand, elle est *asymptote* à la fonction $\psi\big((a-1)z, 2\big)$ $(|a| < 2)$, $\psi(z, b)$ étant la fonction considérée au numéro 50.

La fonction

$$H(z, a, b) = z \frac{d}{dz}\left[\log \frac{G(z, a)}{G(z, b)}\right]$$

vérifie l'équation

$$(45) \qquad 2\varphi(z^2) = \varphi(z) + \varphi(-z),$$

mais les solutions uniformes de cette équation, ayant pour seuls points essentiels 1 et ∞, sont plus générales qu'une somme de fonctions $H(z, a, b)$; si $\varphi(z)$ est une telle solution de (45) ayant pour pôles entre $z = \mathrm{K}$ et $z = \mathrm{K}^2$ ($\mathrm{K} > 1$) les points a_i (pôles simples) avec résidus A_i, la somme $\sum_i \frac{\mathrm{A}_i}{a_i}$ est nulle; donc si l'on pose

$$\mathrm{K}(z, a) = z\frac{\mathrm{G}'(z, a)}{\mathrm{G}(z, a)},$$

la fonction

$$\theta(z) = \varphi(z) - \sum_i \frac{\mathrm{A}_i}{a_i} \mathrm{K}(z, a_i)$$

vérifie (45) et n'a plus de pôles (sauf peut-être $|z| = 1$ et $z = \infty$), elle est finie pour $z = \infty$ d'après (45); on aura

$$\theta(z) = k + \sum_{q=k'}^{q=k} \frac{\mathrm{B}_q}{z^{2q+1} - 1}.$$

Si l'on met $\varphi(z)$ sous la forme du quotient de deux fonctions quasi-entières, le dénominateur sera connu et le numérateur sera une fonction régulière dans le voisinage de ses points essentiels; on aura donc pour z très grand

$$\log \mathrm{M}(r) = h(r) \log r \log_2 r,$$

et pour $z = 1 + \frac{1}{u}$, $|u| = \mathrm{U}$:

$$\log \mathrm{M}(\mathrm{U}) = k(\mathrm{U}) (\log \mathrm{U})^2.$$

On généralisera aisément les résultats, en partant de la fonction

$$\mathrm{F}(z, s, t, a) = \prod_{n=0}^{n=\infty} \left(1 - \frac{z}{a\left(\frac{s}{t}\right)^n}\right), \qquad |a| > 1, \qquad s > t.$$

DEUXIÈME PARTIE.

Sur quelques propriétés des fonctions d'ordre fini.

I. — Développement de Taylor. — Théorème de M. Wiman.

[**52**] Les différentes définitions de la correspondance régulière d'ordre zéro entre $\mathfrak{N}(r)$ et $\log M(r)$ s'étendent immédiatement au cas de l'ordre fini. Pour que l'on ait l'égalité

$$\log M(r) \sim \mathfrak{N}(r) \frac{\log r}{\log \mathfrak{N}(r)},$$

c'est-à-dire pour que la correspondance d'ordre zéro soit parfaitement régulière, il faut que $\log M(r)$ soit une fonction de r à croissance rationnelle, et il suffit que $\log M(r)$ soit asymptotiquement égale à une fonction à dérivabilité rationnelle. Cette condition n'implique d'ailleurs pas que l'ordre est fini, puisque l'on a seulement

$$\log M(r) = e^{(\log r)^{1+\eta(r)}},$$

et si l'ordre est fini, $\log M(r)$ peut, pour certaines valeurs de r, être comparable au logarithme du maximum du module d'une fonction d'ordre nul de seconde classe et première catégorie; c'est ce qui aura lieu, par exemple, si l'on a :

$$\log M(r) \sim r^{1+\sin(\log_p r) + \frac{1}{\log_2 r}}, \qquad p \geqq 4.$$

Supposons les conditions de la correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière réalisées, on a

$$(46) \qquad \log M(r) \sim r^{\rho(r)}, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{\rho'(x) \,.\, x \log x}{\rho(x)} = 0, \qquad \overline{\lim_{x=\infty}}\, \rho(x) = h;$$

nous avons

$$\mathfrak{N}(r) \sim \rho(r) \,.\, r^{\rho(r)},$$

d'où :

$$\frac{n}{e} \sim \rho\left(e^{\frac{G_n}{n}}\right) e^{\frac{G_n}{n} \rho\left(e^{\frac{G_n}{n}}\right)}.$$

Or, si l'on considère l'égalité

$$y = \rho(x) x^{\rho(x)},$$

on en peut tirer

$$x = [y\,\omega(y)]^{\omega(y)}, \qquad \omega(y) = \frac{1}{\rho(x)},$$

et $\omega(x)$ vérifie la condition :

$$\lim_{x=\infty} \frac{x\,\omega'(x)\,.\,\log x}{\omega(x)} = 0.$$

Nous avons ainsi le résultat que *l'égalité* (46) *entraine pour les coefficients* c_n *les conditions :*

$$\left\{\begin{aligned} &\sqrt[n]{|c_n|} < \left[\frac{n'\,\omega(n')}{e}\right]^{-\omega(n')}, && n' = n(1+\varepsilon_n); \\ &\sqrt[n_p]{|c_{n_p}|} > \left[\frac{n'_p\,\omega(n'_p)}{e}\right]^{-\omega(n'_p)}, && n'_p = n_p(1-\varepsilon_p), \qquad \lim_{p=\infty} \frac{n_{p+1}}{n_p} = 1. \end{aligned}\right.$$

Réciproquement, les conditions

$$\left\{\begin{aligned} &\sqrt[n]{|c_n|} < n'^{-\omega_1(n')}, && n' = n(1+\varepsilon_n); \\ &\sqrt[n_p]{|c_{n_p}|} > n'_p{}^{-\omega_1(n'_p)}, && n'_p = n_p(1-\varepsilon_p), \qquad \lim_{p=\infty} \frac{n_{p+1}}{n_p} = 1, \end{aligned}\right.$$

où la fonction $\omega_1(x)$ *est continue, dérivable (à droite ou à gauche), et vérifie les conditions*

$$\varliminf_{x=\infty} \omega_1(x) > 0, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{\omega_1'(x)\,.\,x \log x}{\omega_1(x)} = 0$$

entrainent la correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière et donnent :

$$\log M(r) \sim \frac{r^{\rho_1(r)}}{e\,\rho_1(r)}, \qquad y = x^{\omega_1(x)}, \qquad \omega_1(x) = \frac{1}{\rho_1(y)}.$$

Nous aurons ainsi très simplement des fonctions à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière et à croissance irrégulière; par exemple, si l'on a

$$\sqrt[n]{|c_n|} = (1+\eta_n)\, n^{\dfrac{-1}{\frac{\rho}{2}[1+\sin(\log_4 n)] + \frac{1}{\log_2 n}}},$$

on a

$$\log M(r) = r^{\frac{\rho}{2}\left[1+\sin(\log_4 r) + \frac{1}{\log_2 r}\right][1+\eta(r)]};$$

la fonction est d'ordre ρ, et pour certaines valeurs de r on a :

$$\log M(r) < r^{\frac{h}{\log_2 r}}.$$

Dans le cas particulier où $\rho(x)$ reste supérieur à un nombre positif fixe, les formules écrites ci-dessus se simplifient par suite du fait que l'on aura

$$\left[\frac{n'\omega(n')}{e}\right]^{-\omega(n')} = (1+\varepsilon'_n)\left[\frac{n\,\omega(n)}{e}\right]^{-\omega(n)},$$

on a un résultat analogue en supposant $\omega_1(x)$ borné supérieurement. Enfin, si $\rho(x)$ $\big($ou $\omega_1(x)\big)$ a une limite $\rho\left(\frac{1}{\rho}\text{ pour }\omega_1(x)\right)$, on peut remplacer $\rho(x)$ et $\rho_1(x)$ par ρ et $\omega(x)$ et $\omega_1(x)$ par $\frac{1}{\rho}$ dans les formules, sauf dans les exposants.

Pour qu'il y ait correspondance régulière d'ordre zéro entre $\log M(r)$ et $\mathfrak{N}(r)$, on doit avoir

$$\log M(r) = h(r)\mathfrak{N}(r)\frac{\log r}{\log \mathfrak{N}(r)},$$

si l'on ajoute en plus l'hypothèse que $\dfrac{\log_2 M(r)}{\log_2 r}$ reste supérieur à un nombre positif fixe pour $r > r_0$, l'équation précédente se réduit à

$$\log M(r) = h(r)\,\mathfrak{N}(r),$$

et par suite, $M(r)$ est une fonction de e^r satisfaisant à des conditions de M. Boutroux ; il existe deux nombres A et B $(A > B > 0)$ tels que :

$$\left(\frac{r'}{r}\right)^{B} < \frac{\log M(r')}{\log M(r)} < \left(\frac{r'}{r}\right)^{A}, \qquad r' > r > r_0.$$

Réciproquement, il suffit que

$$\frac{1}{C}\left(\frac{r'}{r}\right)^{B} < \frac{\log M(r')}{\log M(r)} < C\left(\frac{r'}{r}\right)^{A}$$

pour que la correspondance précédente ait lieu ; on en déduit

$$\begin{cases} \sqrt[n]{|c_n|} < C_1 n^{-\theta(n)}, & n > n_0; \\ \sqrt[n_p]{|c_{n_p}|} > \dfrac{1}{C_1} n_p^{-\theta(n_p)}, & \dfrac{n_{p+1}}{n_p} < D, \end{cases}$$

$\theta(x)$ étant une fonction telle que :

$$x^{\theta - A}\text{ décroît}, \qquad x^{\theta(x) - B}\text{ croît}, \qquad B > 0.$$

Ces inégalités entraînent la correspondance régulière d'ordre zéro et donnent

$$\log M(r) = h(r)V(r); \qquad y = x^{\theta(x)}. \qquad x = V(y):$$

fonction dont les irrégularités peuvent être moins lentes que celles des fonctions à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière.

[**53**] La comparaison d'une fonction d'ordre fini quelconque donnée par sa série de Taylor à une fonction à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière se fait par le procédé indiqué au numéro 39 pour les fonctions d'ordre nul. Il existe des fonctions $\rho_1(x)$ pour lesquelles on a

$$n \leqq e^{\gamma_n \rho_1(e^{\gamma_n})}, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{\rho_1'(x)\,.\,x \log x}{\rho_1(x)} = 0,$$

l'égalité ayant lieu pour une infinité de valeurs de n. Au numéro 39 la détermination pratique de telles fonctions repose sur l'emploi de la suite G_n, mais on peut procéder directement à partir de $|c_n|$ ou γ_n; c'est ce que je ferai ici en me bornant, pour simplifier, à la recherche de fonctions $\rho_1(x)$ restant pour $x > x_0$ supérieures ou égales à un nombre positif. Tout revient alors à trouver une fonction $\omega(x)$ bornée supérieurement et telle que

$$\sqrt[n]{|c_n|} \leqq n^{-\omega(n)}, \qquad \lim_{x=\infty} \omega'(x) x \log x, \qquad \varliminf_{x=\infty} \omega(x) = \frac{1}{\rho},$$

ρ étant l'ordre. Si l'on pose

$$\sigma_n = \frac{\log \gamma_n}{\log n},$$

on a à construire une courbe passant par une infinité de points $A_n(x_n = n,\ y_n = \sigma_n)$, laissant les autres points au-dessus d'elle, ayant une ordonnée aussi grande que possible $\left(\text{mais inférieure à un nombre fixe supérieur à } \frac{1}{\rho}\right)$ et dont l'ordonnée $y(x)$ vérifie la condition : $\lim\limits_{x=\infty} y'(x),\ x \log x = 0$.

On voit qu'il suffit de considérer les courbes C_n définies par les équations

$$\begin{cases} y_n(x) = y_n + \theta(x_n) - \theta(x), & x \leqq x_n, \\ y_n(x) = y_n + \theta(x) - \theta(x_n), & x \geqq x_n, \end{cases}$$

$\theta(x)$ étant une fonction monotone, indéfiniment croissante, pour laquelle on a

$$\lim_{x=\infty} \theta'(x)\,.\,x \log x = 0,$$

par exemple $\theta(x) = \log_3 x$. La courbe Γ dont l'ordonnée est en chaque point x le plus petit des nombres $y_n(x)$ sera la courbe cherchée si son ordonnée reste finie, sinon on prendra la courbe formée par des arcs de Γ dont l'ordonnée est inférieure à $A\left(A > \frac{1}{\rho}\right)$ et par des segments de la droite $y = A$.

Il est bien évident que l'on pourrait faire en sorte que $\omega(x)$ ait pour limite ρ, mais on aura une meilleure limitation de $\log M(r)$ en ne s'astreignant pas à cette condition. Ceci posé, si l'on désigne par $x^{\rho_1(x)}$ la fonction inverse de $x^{\omega(x)}$, on a d'après les inégalités du numéro 33 :

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{\dfrac{r^{\rho_1(r)}}{e\rho_1(r)}} = 1.$$

Ce résultat montre que, *pour toute fonction d'ordre fini ρ, on peut trouver des fonctions $\rho(x)$ satisfaisant aux conditions*

$$\overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\rho(x)}{\rho} = 1, \qquad \underline{\lim_{x=\infty}}\, \rho(x) = h > 0, \qquad \lim_{x=\infty} x\rho'(x) \log x = 0$$

($\rho'(x)$ désignant la dérivée ou la dérivée à droite ou à gauche pour certaines valeurs de x) *et telles que*

(47) $$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{r^{\rho(r)}} = 1,$$

malgré l'indétermination qui règne sur la définition de la fonction $\rho(x)$, je dirai qu'une telle fonction est un *ordre précisé*. En particulier, il existe des ordres précisés ayant pour limite (pour $x = \infty$) l'ordre ρ. On voit que les fonctions à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière pour lesquelles $\rho(x)$ reste supérieur à un nombre positif pour $x > x_0$ sont des *fonctions régulières relativement à l'ordre précisé*. Un calcul immédiat, ou les formules obtenues plus haut, montre que *pour une fonction d'ordre précisé $\rho(x)$ on a*

$$\sqrt[n]{|c_n|} \leqq (1 + \eta_n) \left[\frac{n\,\omega(n)}{e}\right]^{-\omega(n)}$$

l'égalité ayant lieu pour une infinité de valeurs de n, et $\omega(x)$ étant défini par les égalités

$$\omega(x) = \frac{1}{\rho(y)}, \qquad y^{\rho(y)}\rho(y) = x.$$

[**54**] J'appliquerai la notion d'ordre précisé à la démonstration du théorème de M. Wiman sous sa forme la plus précise, forme qui a été obtenue par M. Lindelöf dans le cas particulier où l'on a :

$$\rho(r) = \rho + \alpha_2 \frac{\log_2 r}{\log r} + \ldots + \alpha_n \frac{\log_n r}{\log r}\ (^1);$$

j'indiquerai plus loin comment la démonstration de M. Lindelöf peut être complétée, mais je vais d'abord établir la proposition par la méthode même de M. Wiman (²).

(¹) Voir Lindelöf, *Sur un théorème de M. Hadamard*... (Rendiconti di Palermo, t. XXV, 1908); la forme du résultat a été prévue par M. Littlewood, *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 6 (2e série), p. 189.

(²) Voir Wiman, *Sur une extension d'un théorème de M. Hadamard* (Arkiv för Matematik, ...; B. 2, no 14.

Le théorème en vue est le suivant : *pour toute fonction d'ordre fini ρ inférieur à $\frac{1}{2}$ il existe une infinité de cercles, de rayons indéfiniment croissants, sur lesquels on a*

$$\log |f(z)| > [\cos \pi\rho - \varepsilon(r)]\, r^{\rho(r)},$$

$\rho(r)$ etant un ordre précisé.

Il suffit de démontrer la proportion lorsque les zéros sont en ligne droite, par exemple ont tous leur argument égal à π. Soit alors

$$g(z) = \Sigma c_n z^n, \qquad (c_n > 0)$$

une telle fonction, nous avons, pour une infinité de valeurs de r,

$$g(r) > e^{[1-\varepsilon(r)]\, r^{\rho(r)}},$$

d'où, pour une infinité de valeurs de n,

$$\sqrt[n]{c_n} > (1 - \varepsilon_n) \left[\frac{n\,\omega(n)}{e}\right]^{-\omega(n)}.$$

Nous considérons la fonction auxiliaire

$$\Phi(x) = \int_0^\infty g(xu^{\frac{1}{k}}) e^{-u} du = \int_0^\infty g(xu^{\frac{1}{k}} e^{i\frac{\varphi}{k}}) e^{-ue^{i\varphi}} e^{i\varphi} du, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad k > \rho;$$

la convergence et l'égalité des deux intégrales résultant du fait que k est supérieur à ρ, et, par suite, $g(xu^{\frac{1}{k}})$ une fonction de u d'ordre inférieur à *un*. $\Phi(x)$ est une fonction entière, et l'on a :

$$\Phi(x) = \int_0^\infty g(xu^{\frac{1}{k}}) e^{-u} du = \sum_0^\infty c_n \Gamma\left(\frac{n}{k} + 1\right) x^n;$$

donc, si l'on pose

$$\Phi(x) = \Sigma d_n x^n,$$

on a pour une infinité de valeurs de n :

$$\sqrt[n]{d_n} > (1 - \varepsilon_n) \left[\frac{n\,\omega(n)}{e}\right]^{-\omega(n)} \left[\Gamma\left(\frac{n}{k} + 1\right)\right]^{\frac{1}{n}}.$$

$\Phi(x)$ a ses coefficients réels, et par suite est maximum (pour $|x| = c^{te}$) lorsque x est réel et positif, ce que nous supposerons désormais. Prenons $k < \frac{1}{2}$, ce qui est évidemment possible, et $\varphi = k\pi$, l'égalité de définition de $\Phi(x)$ nous donnera :

$$\Phi(x) = \int_0^\infty g(-xu^{\frac{1}{k}}) e^{-ue^{ik\pi}} e^{ik\pi} du < \int_0^\infty |g(-xu^{\frac{1}{k}})|\, e^{-u\cos(k\pi)} du.$$

Cette inégalité va nous montrer que l'hypothèse

$$|g(-r)| \leqq e^{\lambda r^{\rho(r)}}, \qquad r > r_0$$

ne peut avoir lieu pour une valeur de λ inférieure à $\cos \pi\rho$, ce qui démontrera notre théorème. Notre hypothèse nous donne

$$|g(-r)| < \Sigma D_n r^n,$$

avec

$$\sqrt[n]{D_n} = (1 + \eta_n)\left(\frac{n\,\omega(n)}{e\lambda}\right)^{-\omega(n)}, \qquad n > n_0,$$

et nous aurons :

$$\Phi(x) < \int_0^\infty (\Sigma D_n x^n u^{\frac{n}{k}}) e^{-u\cos(k\pi)}\,du = \Sigma D_n \left(\int_0^\infty u^{\frac{n}{k}} e^{-u\cos k\pi}\,du\right) x^n$$

$$= \Sigma D_n \Gamma\left(\frac{n}{k} + 1\right)(\cos k\pi)^{-\frac{n}{k}-1} x^n.$$

$\Phi(x)$ est donc majorée par une fonction qui est bien visiblement à correspondance d'ordre zéro parfaitement régulière, on en déduit pour les coefficients de $\Phi(x)$ les inégalités

$$\sqrt[n]{d_n} < (1 + \varepsilon_n)\sqrt[n]{D_n}\left[\Gamma\left(\frac{n}{k} + 1\right)\right]^{\frac{1}{n}}(\cos k\pi)^{-\frac{1}{k}}$$

$$= (1 + \varepsilon_n)\left(\frac{n\,\omega(n)}{e}\right)^{-\omega(n)}\cdot\left[\Gamma\left(\frac{n}{k} + 1\right)\right]^{\frac{1}{n}}(\cos k\pi)^{-\frac{1}{k}}\lambda^{\omega(n)},$$

inégalités qui ne peuvent être compatibles avec celles déjà obtenues que si, pour une infinité de n, on a

$$1 < \lambda^{\omega(n)}(\cos k\pi)^{-\frac{1}{k}}(1 + \varepsilon_n)$$

ou

$$\lambda > (1 - \varepsilon_n)(\cos k\pi)^{\frac{1}{k\omega(n)}} > (1 - \varepsilon_n)\cos(k\pi), \qquad n > n_0(k).$$

Comme k peut être choisi aussi voisin de ρ que l'on veut, à la condition que le nombre n_0 précédent soit assez grand, on voit que la proposition en vue est établie.

On peut remarquer que pour toutes les fonctions $f(z)$ dont les zéros ont les mêmes modules, la fonction $g(z)$ sera la même, de sorte que le théorème de M. Wiman sera vérifié, pour ces fonctions, simultanément sur une infinité de cercles.

[**55**] Nous allons étendre la proposition aux fonctions d'ordre inférieur à un : *pour toute fonction d'ordre ρ inférieur à un et d'ordre précisé $\rho(x)$, il existe une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants, sur lesquels on a :*

$$\log |f(z)| > [\cos \pi\rho - \varepsilon(r)]\, r^{\rho(r)}.$$

Ici encore, puisque le minimum du module pour $|z| = r$ est diminué, et l'ordre précisé augmenté lorsque, sans changer les modules, on rend les arguments tous égaux, il suffit de démontrer la proposition dans ce cas particulier. Soit donc

$$g(z) = \Sigma c_n z^n$$

une fonction dont tous les zéros ont pour argument π, et dont l'ordre précisé est $\rho(r)$, on a

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log g(r)}{r^{\rho(r)}} = 1,$$

et une démonstration analogue à celle du numéro 54 montrera que, pour une infinité de valeurs indéfiniment croissantes de r, on a :

$$|g(\pm ir)| > e^{\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\rho\right) - \varepsilon(r)\right] r^{\rho(r)}}.$$

Ceci étant le produit,

$$g(z)\, g(-z)$$

est une fonction entière en z^2 d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$, le maximum du module a lieu pour $z = \pm ir$ et le minimum pour $z = \pm r$; ce maximum vérifie pour une infinité de valeurs de ir l'inégalité

$$\log \mathrm{M}(r) > 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\rho\right)[1 - \varepsilon(r)]\, r^{\rho(r)};$$

donc l'ordre étant $\frac{\rho}{2}$, on aura, d'après le théorème de M. Wiman,

$$\log\left(g(r) \times |g(-r)|\right) > 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\rho\right)[1 - \varepsilon(r)]\, r^{\rho(r)},$$

inégalité valable pour une infinité de valeurs indéfiniment croissantes de r et qui nous donne, eu égard à la limitation supérieure de $g(r)$,

$$\log |g(-r)| > \left(2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\rho\right) - 1\right)[1 - \varepsilon(r)]\, r^{\rho(r)},$$

inégalité qui démontre la proposition en vue.

[56] Le théorème de M. Jensen montre que, sur les cercles où le théorème de M. Wiman a lieu, on a

$$\frac{r_n}{r_1 r_2 \dots r_n} < \mathrm{M}(r) < \left(\frac{r_n}{r_1 r_2 \dots r_n}\right)^{\frac{1+\varepsilon(r)}{\cos(\pi\rho)}}, \qquad n = n(r);$$

la démonstration du numéro 54 semble d'ailleurs indiquer que, dans le troisième membre, $\frac{1}{\cos \pi\rho}$ doit être remplacé par $\frac{\pi\rho}{\sin \pi\rho}$, mais la méthode employée ne peut donner une démonstration exacte. Il résultera des formules que l'on établira plus loin que, pour les valeurs de ρ supérieures à la racine de l'équation

$$\operatorname{tg} \pi x = \pi e x,$$

qui est comprise entre o et $\frac{1}{2}$, et jusqu'à $\rho < 1$, on peut remplacer $\frac{1}{\cos(\pi\rho)}$ par la valeur $\frac{\pi\rho e}{\sin(\pi\rho)}$; mais sans qu'il soit certain que, sur les cercles correspondants, on a le théorème de M. Wiman.

[57] Soit maintenant $f(z)$ une fonction d'ordre ρ, soit h le plus petit entier supérieur à 2ρ, on voit que la fonction $\mathrm{G}(u)$ définie par l'égalité

$$\mathrm{G}(z^h) = f(z) f(z\omega) \dots f(z\omega^{h-1}), \qquad \omega^h = 1,$$

est d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$. Il existe donc une suite de cercles

$$\mathrm{R}_1^h, \mathrm{R}_2^h, \dots, \mathrm{R}_s^h, \dots \left(\lim_{s=\infty} \mathrm{R}_s^h = \infty\right)$$

sur lesquels le théorème de M. Wiman s'applique à toutes les fonctions ayant les mêmes modules de zéros que $\mathrm{G}(u)$. Soit toujours r_n le module du $n^{\text{ième}}$ zéro de $f(z)$, r_n^h sera le module du $n^{\text{ième}}$ zéro de $\mathrm{G}(u)$; considérons la fonction

$$e^{\mathrm{H}(u)} = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{u}{r_n^h}\right),$$

nous aurons

$$\log |\mathrm{G}(z^h)| = h(\mathrm{R}_s)\mathrm{H}(+\mathrm{R}_s^h), \qquad |z| = \mathrm{R}_s,$$

et, par suite, sur le cercle $|z| = \mathrm{R}_s$ existe un ensemble d'arcs ayant une longueur totale au moins égale à $\frac{2\pi}{h}$ et sur lesquels on a :

$$\log |f(z)| = h(\mathrm{R}_s)\mathrm{H}(+\mathrm{R}_s^h), \qquad |z| = \mathrm{R}_s.$$

Or, d'après le numéro 56, nous avons :

$$\mathrm{H}(\mathrm{R}_s^h) = \mu_1(\mathrm{R}_s) h(\mathrm{R}_s), \qquad \mu_1(r) = \int_0^r \frac{n(x)}{x} dx = n \log r - \log(r_1 r_2 \dots r_n).$$

Ainsi, nous avons le résultat suivant, généralisation du théorème de M. Wiman.

Pour toute fonction d'ordre fini ρ, il existe une infinité de cercles de rayons R_s ($\lim_{s=\infty} R_s = \infty$), *tels que sur chacun d'eux on a l'inégalité*

$$\log|f(z)| > h\mu_1(R_s), \qquad |z| = R_s, \qquad h > 0$$

sur des arcs dont la longueur totale est au moins $\frac{2\pi}{h}$, *h étant le plus petit entier supérieur à* 2ρ.

Dans le cas de l'ordre non entier, on peut montrer que

$$\mu_1(R_s) = h(R_s)\log M(R_s).$$

Nous avons en effet, comme il est bien connu, p étant le genre,

$$\mu_1(R_s) < \log M(R_s) < A_1 \sum_{n=1}^{n=n(R_s)} \frac{R_s^p}{r_n^p} + A_2 \sum_{n=n(R_s)+1}^{n=\infty} \frac{R_s^{p+1}}{r_n^{p+1}},$$

et tout revient à montrer que les deux Σ sont inférieurs à $h(R_s)\mu_1(R_s)$ ou encore à $h(R_s)H(R_s^h)$. Or, nous avons

$$H(R_s) > \mu_1(R_s) + B_1 \sum_{n=1}^{n=n(R_s)} \left(\frac{R_s}{r_n}\right)^{h\tau_1} + B_2 \sum_{n=n(R_s)+1}^{n=\infty} \left(\frac{R_s}{r_n}\right)^{h\tau_2},$$

B_1 et B_2 étant positifs et fixes, τ_1 et τ_2 pris arbitrairement entre 0 et 1. En prenant

$$\tau_1 = \frac{p}{h}, \qquad \tau_2 = \frac{p+1}{h}$$

on voit que la propriété est établie (dans le cas $p = 0$, on a une modification insignifiante).

Il semble bien probable que le nombre h doit pouvoir être remplacé par $2\rho + \varepsilon$.

II. — Fonctions d'ordre non entier données par leurs zéros. Correspondance régulière d'ordre zéro.

[58] Nous supposerons essentiellement dans ce paragraphe que l'ordre n'est pas entier. Si p est le genre, on a

$$f(z) = e^{P(z)} \prod_1^\infty E\left(\frac{z}{a_n}, p\right),$$

où $P(z)$ est un polynôme de degré p au plus et où l'on pose :

$$E(x, p) = (1 - x)e^{x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^p}{p}}.$$

L'étude de la fonction $E(x, p)$ a été faite d'une façon très complète par M. Denjoy (Thèse, chap. I), ce sont ses résultats que nous emploierons. Nous désignerons par $e^{m_p(u)}$ le maximum de la fonction $|E(x, p)|$ pour $|x| = u$. On a tout d'abord

$$m_p(u) < A_\tau u^\tau, \qquad p \leqq \tau \leqq p + 1$$

pour $p \geqq 1$, et le nombre A_τ est plus petit que *un* pour $p > 1$, nous supposerons que cette condition est réalisée, en faisant, s'il y a lieu, le changement de z en z^2 ou z^3. On a également :

$$m_p(u) > B_p u^p, \qquad u > 1;$$
$$m_p(u) > B_{p+1} u^{p+1}, \qquad u < 1;$$

B_p et B_{p+1} sont des nombres positifs dépendant de p. Nous avons donc, en désignant par h_i tout nombre positif et fini :

$$\log M(r) < h_1 r^p + h_2 \sum_1^n \frac{r^p}{r_i^p} + h_3 \sum_{n+1}^\infty \frac{r^{p+1}}{r_i^{p+1}}, \qquad r_n \leqq r < r_{n+1};$$

tandis que nous savons qu'il existe des fonctions dont le module du $n^{\text{ième}}$ zéro est r_n et telles que, pour $|z| = r$:

$$\log M(r) > h_4 \sum_1^n \left(\frac{r}{r_i}\right)^p + h_5 \sum_{n+1}^\infty \left(\frac{r}{r_i}\right)^{p+1}.$$

Ceci étant, *nous dirons qu'il y a correspondance régulière d'ordre zéro entre* $\log M(r)$ *et* $n(r)$, *lorsque pour toutes les fonctions entières dont les zéros ont les mêmes modules que ceux de la fonction considérée, on a :*

$$\log M(r) = h(r)\, n(r). \tag{48}$$

D'après ce qui précède, pour que l'égalité précédente ait lieu, quels que soient les arguments des zéros, il est nécessaire que l'on ait, pour $r > r_0$,

$$r^p < D_3 n(r);$$

$$r^p \sum_{n_0}^n \frac{1}{r_i^p} < D_1 n(r), \qquad n = n(r); \tag{49}$$

$$r^{p+1} \sum_{n+1}^\infty \frac{1}{r_i^{p+1}} < D_2 n(r), \qquad n = n(r). \tag{50}$$

Nous considérons les inégalités (49) et (50), qui ont été résolues par M. Denjoy par l'application d'une théorie générale[1]; mais nous les résoudrons bien facilement, puisque chacune d'elles est en réalité une double inégalité ou se ramène à une double inégalité. Les recherches de ce genre déjà faites plus haut nous avertissent que nous ne pouvons espérer obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour que les inégalités (49) et (50) soient vérifiées avec une valeur déterminée de D_1 et D_2; mais ces nombres étant complètement inconnus dans le problème actuel, une solution aussi exacte nous serait inutile.

Considérons d'abord l'inégalité (49); si nous désignons par $r(x)$ une fonction qui, pour x compris entre n et $n+1$ est égale à r_n, l'inégalité (49) donne

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\left(r(x)\right)^p} < [D_1 + \varepsilon(x)] \frac{x}{\left(r(x)\right)^p},$$

et réciproquement cette inégalité entraîne non pas (49), mais l'inégalité obtenue en remplaçant dans (49) D_1 par $D_1 + \varepsilon$. Comme notre fonction $r(x)$ doit être croissante, l'inégalité précédente nous donne

$$(1-\varepsilon)xU'(x) < U(x) < (D_1+\varepsilon)xU'(x), \qquad U'(x) = \frac{1}{\left(r(x)\right)^p},$$

inégalité différentielle de la forme qui a été considérée si souvent ci-dessus. On a immédiatement

$$\left(\frac{x'}{x}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{D_1}} < \frac{U(x')}{U(x)} < \left(\frac{x'}{x}\right)^{1+\varepsilon},$$

et enfin :

$$(49') \qquad \frac{n'}{n} > K_1\left(\frac{r_{n'}}{r_n}\right)^{E_1}, \qquad n' > n;$$

$$K_1 = D_1^{-\frac{D_1}{D_1-1}}, \qquad E_1 = p\frac{D_1}{D_1-1} - \varepsilon.$$

Cette inégalité (49′) entraîne d'ailleurs le fait que le rapport

$$\frac{r^p \sum_{n_0}^{n} \frac{1}{r_i^p}}{n(r)}$$

---

(1) Voir A. Denjoy, *Sur l'intégration de certaines inéquations fonctionnelles* (Comptes rendus, 13 avril 1909). M. Denjoy trouve des conditions nécessaires et *suffisantes* pour que ses inéquations soient vérifiées, mais en donnant au mot solution une signification toute particulière; il a exposé sa méthode, dans le cas particulier considéré ici, dans un cours professé au Collège de France (2e semestre 1913).

reste fini. Pour traiter l'inégalité (50), nous la mettrons sous une forme qui mette en évidence une double inégalité ; nous emploierons, comme au numéro 14, l'identité

$$r^{p+1}\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{r_i^{p+1}} = -n(r) + (p+1)r^{p+1}\int_r^{\infty} n(x)\frac{dx}{x^{p+2}},$$

qui est valable, puisque par hypothèse l'ordre ρ est inférieur à $p+1$. L'inégalité (50) s'écrit alors

$$\frac{n(r)}{(p+1)r^{p+1}} < \int_r^{\infty} n(x)\frac{dx}{x^{p+2}} < \frac{D_2+1}{p+1}\frac{n(r)}{r^{p+1}},$$

d'où

$$-\frac{U'(x)x}{p+1} < U(x) < -\frac{D_2+1}{p+1}U'(x).x, \qquad U'(x) = \frac{n(x)}{x^{p+2}},$$

ce qui donnera

$$\frac{n'h(n')}{nh(n)} < \left(\frac{r_{n'}}{r_n}\right)^{(p+1)\frac{D_2}{D_2+1}}, \qquad \frac{1}{p+1} < h(n) < \frac{D_2+1}{p+1}, \qquad n' > n,$$

et enfin

$$(50') \qquad \frac{n'}{n} < (1+D_2)\left(\frac{r_{n'}}{r_n}\right)^{(p+1)\frac{D_2}{D_2+1}}, \qquad n' > n > n_0.$$

Cette condition nécessaire est suffisante pour qu'on ait une inégalité de la forme (50) où D_2 sera remplacé par un nombre plus grand. Pour que les conditions (49') et (50') soient compatibles, il faut que

$$E_1 < (p+1)\frac{D_2}{D_2+1},$$

et nous aurons comme condition nécessaire qu'il existe des nombres α et β positifs $(\alpha+\beta<1)$ et des nombres A et B finis tels que l'on ait :

$$(51) \qquad \frac{1}{B}\left(\frac{r_{n'}}{r_n}\right)^{p+\beta} < \frac{n'}{n} < A\left(\frac{r_{n'}}{r_n}\right)^{p+1-\alpha},$$

Ces conditions entraînent bien visiblement

$$\log M(r) < h(r)n(r);$$

nous avons vu d'autre part qu'elles entraînent

$$\mu_1(r) = \int_0^r \frac{n(x)}{x}dx > h(r)n(r),$$

et, par suite, elles sont suffisantes pour que l'égalité (48) ait lieu. Donc, *pour que la correspondance entre* $\log M(r)$ *et* $n(r)$ *soit régulière d'ordre zéro, c'est-à-dire pour que l'égalité* (48) *ait lieu, il faut et il suffit que les conditions* (51) *soient réalisées.*

Lorsque les conditions de la correspondance régulière d'ordre zéro sont réalisées, on voit que l'on a

$$(52) \qquad \frac{1}{B_1}\left(\frac{r'}{r}\right)^{p+\beta} < \frac{\log M(r')}{\log M(r)} < A_1\left(\frac{r'}{r}\right)^{p+1-\alpha}, \qquad r' > r;$$

réciproquement ces inégalités entraînent la correspondance régulière d'ordre zéro, comme on le verra par l'application du théorème de M. Jensen et par la méthode de M. Borel (voir la thèse de M. Boutroux). Les conditions (51) et (52) sont plus larges que celles que j'ai appelées conditions de M. Boutroux. On sait que lorsque les conditions (51) et (52) sont réalisées il existe des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$, tels que

$$\left(\frac{r_{n'}}{r_n}\right)^{\alpha_1} < \frac{h(n')n'}{h(n)n} < \left(\frac{r_{n'}}{r_n}\right)^{\alpha_2}, \qquad \frac{1}{\alpha_4} < h(n) < \alpha_3, \qquad n' > n;$$
$$\left(\frac{r'}{r}\right)^{\alpha_5} < \frac{\log M(r')}{\log M(r)} < \left(\frac{r'}{r}\right)^{\alpha_6}, \qquad r' > r;$$

il serait intéressant de savoir si α_1 et α_5 sont nécessairement supérieurs à p et α_2 et α_6 inférieurs à $p+1$; c'est dans le cas seulement où la question se résoudra par la négative que l'on pourra assurer que les fonctions à correspondance régulière d'ordre zéro sont plus générales que les fonctions auxquelles la méthode de M. Boutroux s'applique indirectement pour donner l'approximation de l'égalité (48).

On voit immédiatement que lorsque la correspondance d'ordre zéro entre $\log M(r)$ et $n(r)$ est régulière, il en est de même de la correspondance entre $\log M(r)$ et $\mathfrak{N}(r)$, on en déduira les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les nombres c_n pour que l'on ait l'égalité (48); ces conditions réalisées, on aura :

$$r_n = h_n e^{\frac{G_n}{n}} = h_n \mathfrak{R}_n.$$

[**59**] Nous chercherons maintenant à obtenir pour $\log M(r)$ une limite supérieure aussi précise que possible, en ce sens qu'elle soit atteinte lorsque les modules des zéros satisfont à certaines conditions de régularité[1], et lorsque les arguments des

---

[1] J'entends par conditions de régularité des conditions qui, non seulement ne limitent pas la croissance, mais qui permettent la comparaison (à $1+\varepsilon$ près) d'une fonction $n(x)$ quelconque à une fonction $\overline{n(x)}$ régulière, en ce sens que

$$\overline{\lim_{x=\infty}} \frac{n(x)}{\overline{n(x)}} = 1;$$

les conditions de M. Lindelöf ne sont pas des conditions de régularité.

zéros sont convenablement choisis (pour chaque valeur de r). Il n'est plus possible de déterminer d'une façon rigoureuse ce que doivent être les conditions de régularité; comme le calcul que nous avons à faire comporte l'approximation d'intégrales de la forme

$$\int_r^\infty n(x)\frac{dx}{x^{p+i-1}}, \qquad \int_0^r n(x)\frac{dx}{x^{p+2-i}}, \qquad i = 1, 2, \ldots;$$

nous prendrons des conditions permettant le calcul asymptotique de ces intégrales. Nous appellerons *exposant de convergence précisé de la suite des zéros* toute fonction $\rho(x)$ satisfaisant aux conditions

$$\overline{\lim_{x=\infty}}\, \rho(x) = \rho, \qquad \rho(x) > p + \alpha, \qquad \alpha > 0,$$
$$\lim \rho'(x) . x \log x = 0,$$

et telle que

$$n \leqq r_n^{\rho(r_n)}, \qquad n > n_0,$$

l'égalité ayant lieu pour une infinité de valeurs de n. Si l'on désigne par $y^{\omega(y)}$ la fonction inverse de $x^{\rho(x)}$, on aura :

$$r_n \geqq n^{\omega(n)}, \qquad n > n_0; \qquad \frac{1}{p+1-\alpha} < \omega(n) < \frac{1}{p+\alpha}; \qquad \lim_{x=\infty} \omega'(x) x \log x = 0.$$

Ceci posé, nous avons

$$\log M(r) \leqq \sum_1^\infty m_p\left(\frac{r}{R_i}\right) + Ar^\rho, \qquad R_n = n^{\omega(n)},$$

puisque la fonction $E(x, p)$ étant analytique, on a :

$$m_p\left(\frac{r}{r_n}\right) \leqq m_p\left(\frac{r}{R_n}\right).$$

L'inégalité écrite pour $\log M(r)$ est remplacée par une égalité si, pour la valeur de r considérée, les arguments des zéros rendent précisément toutes les quantités $\left|E\left(\frac{z}{a_n}, p\right)\right|$ maxima. Nous ferons le calcul du second membre de notre inégalité en supposant $p \geqq 1$, pour $p = 0$ la majoration de $M(r)$ résultera des calculs du paragraphe III. D'après M. Denjoy, on a :

$$u \leqq 1 + \frac{1}{p}, \qquad m_p(u) = \int_0^u v^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}\, dv, \qquad v = \frac{\sin(p+1)\theta}{\sin p\theta}, \qquad 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{p+1};$$

$$u \geqq 1 + \frac{1}{p}, \qquad m_p(u) = u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p} + L(u-1) = -\int_A^u \frac{u^p}{1-u}\, du.$$

Définissons le nombre n par les inégalités

$$R_n \leqq \frac{r}{1+\frac{1}{p}} < R_{n+1};$$

nous aurons

$$\sum_1^\infty m_p\left(\frac{r}{R_i}\right) = \sum_1^n m_p^1\left(\frac{r}{R_i}\right) + \sum_{n+1}^\infty m_p^2\left(\frac{r}{R_i}\right);$$

$$m_p^2(u) = m_p(u), \quad u \leqq 1 + \frac{1}{p}; \qquad m_p^1(u) = m_p(u), \quad u \geqq 1 + \frac{1}{p}.$$

Soit $k(p)$ un nombre fixe, qui sera choisi plus loin, et qui ne dépend que de p, et posons :

$$R_{n'} \leqq \frac{r}{k(p)} < R_{n'+1}, \qquad R_{n''} \leqq rk(p) < R_{n''+1};$$

On peut choisir r assez grand pour que dans tout l'intervalle $R_{n'}$, $R_{n''}$ on ait

$$R_i = [1 + \varepsilon(r)]\, i^{\frac{1}{\rho(r)}}, \qquad n' \leqq i \leqq n'';$$

c'est ce qui résulte immédiatement des propriétés de la fonction $\rho(x)$. L'inégalité

$$m_p(u) < A_\tau u^\tau, \qquad p \leqq \tau \leqq p + 1, \qquad A_\tau < B,$$

montre que les quatre sommes

$$\sum_1^{n'} m_p^1\left(\frac{r}{R_i}\right), \qquad \sum_1^{n'} m_p^1\left(\frac{r}{i^{\frac{1}{\rho(r)}}}\right),$$

$$\sum_{n''+1}^\infty m_p^2\left(\frac{r}{R_i}\right), \qquad \sum_{n''+1}^\infty m_p^2\left(\frac{r}{i^{\frac{1}{\rho(r)}}}\right),$$

sont inférieures à l'expression

$$\frac{B_1}{\alpha} \frac{p}{\big(k(p)\big)^\alpha} r^{\rho(r)},$$

B_1 étant un nombre fixe (< 2), quel que soit p. Enfin, les égalités définissant $m_p(u)$ donnent

$$m_p\big(u(1+\varepsilon)\big) = (1 + hp\varepsilon)\, m_p(u),$$

de sorte que, quels que soient p et $k(p)$, on a, pour $r > r_0\big(p, k(p)\big)$,

$$\sum_1^\infty m_p\left(\frac{r}{\mathrm{R}_i}\right) = (1+\eta(r))\left\{\sum_1^m m_p^1\left(\frac{r}{i^{\frac{1}{\rho(r)}}}\right) + \sum_{m+1}^\infty m_p^2\left(\frac{r}{i^{\frac{1}{\rho(r)}}}\right)\right\} + h_1(r)\frac{\mathrm{B}_1}{\alpha}\frac{p}{\big(k(p)\big)^\alpha} r^{\rho(r)},$$

avec

$$m^{\frac{1}{\rho(r)}} \leqq \frac{r}{1+\frac{1}{p}} < (m+1)^{\frac{1}{\rho(r)}}, \qquad |h_1(r)| < 2.$$

Dans chacun des deux Σ, chaque terme est avec $r^{\rho(r)}$ dans un rapport qui tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$; donc :

$$\sum_1^m m_p^1\left(\frac{r}{i^{\frac{1}{\rho(r)}}}\right) = \int_{n_0}^{\left(\frac{r}{1+\frac{1}{p}}\right)^{\rho(r)}} m_p^1\left(\frac{r}{x^{\frac{1}{\rho(r)}}}\right) dx + \varepsilon(r) r^{\rho(r)}$$

$$= r^{\rho(r)}\left\{\int_0^{\frac{p}{p+1}} \rho_1 t^{\rho_1 - 1}\, m_p^1\left(\frac{1}{t}\right) dt + \varepsilon(r)\right\}, \qquad \rho_1 = \rho(r).$$

De même

$$\sum_{m+1}^\infty m_p^2\left(\frac{r}{i^{\frac{1}{\rho(r)}}}\right) = r^{\rho(r)}\left\{\int_0^{\frac{p+1}{p}} \rho_1 t^{-(\rho_1+1)}\, m_p^2(t)\, dt + \varepsilon(r)\right\};$$

et comme on peut prendre $k(p)$ de façon que $\frac{p}{\alpha k(p)^\alpha}$ soit aussi petit que nous le voulons, nous aurons $\left(\sum_1^\infty m_p\left(\frac{r}{\mathrm{R}_i}\right)\right.$ étant évidemment supérieur à $\left. h r^{\rho(r)},\ h > 0\right)$

$$\log \mathrm{M}(r) < [1+\varepsilon(r)](\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2) r^{\rho(r)},$$

avec

$$\mathrm{K}_1 = \int_0^{\frac{p}{p+1}} \rho_1 t^{\rho_1-1}\, m_p^1\left(\frac{1}{t}\right) dt, \qquad \mathrm{K}_2 = \int_0^{\frac{p+1}{p}} \frac{\rho_1}{t^{\rho_1+1}} m_p^2(t)\, dt, \qquad \rho_1 = \rho(r).$$

[60] Le calcul de $K_1 + K_2$ se ramène au calcul d'une seule intégrale. En intégrant par parties, on a

$$K_1 = \left(\frac{p}{p+1}\right)^{\rho_1} m_p^1\left(\frac{p+1}{p}\right) + \int_0^{\frac{p}{p+1}} \frac{t^{\rho_1-p-1}}{1-t}\,dt,$$

$$K_2 = -\left(\frac{p}{p+1}\right)^{\rho_1} m_p^2\left(\frac{p+1}{p}\right) + \int_0^{\frac{p+1}{p}} t^{p-\rho_1}\frac{\sin p\theta}{\sin\theta}\,dt, \quad \frac{\sin(p+1)\theta}{\sin p\theta} = t, \quad 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{p+1};$$

et comme $m_p^2\left(\frac{p+1}{p}\right) = m_p^1\left(\frac{p+1}{p}\right)$, on aura

$$K_1 + K_2 = I_1(p, \rho(r)) + I_2(p, \rho(r)),$$

$I_1(p, \rho_1)$ étant l'intégrale qui figure dans K_1 et qui peut être considérée comme connue, par exemple, en développant en série

$$I_1(p, \rho_1) = \left(\frac{p}{p+1}\right)^{\rho_1 - p} \frac{1}{\rho_1 - p} F\left(1, \rho_1 - p, \rho_1 - p + 1, \frac{p}{p+1}\right),$$

$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ étant la fonction hypergéométrique, et $I_2(p, \rho_1)$ étant l'intégrale qui figure dans K_2. D'où le résultat :

Si $\rho(x)$ est un exposant précisé de la suite des zéros, on a l'inégalité

$$\log M(r) < [1 + \varepsilon(r)]\left[I_1(p, \rho(r)) + I_2(p, \rho(r))\right] r^{\rho(r)}, \tag{53}$$

le premier membre de l'inégalité (53) pouvant atteindre la valeur du second (à $1 - \varepsilon(r)$ près) pour une suite indéfiniment croissante de valeurs de r, si les arguments des zéros sont convenablement choisis. Le théorème de M. Jensen donne d'autre part, dans tous les cas,

$$\log M(r) > [1 - \varepsilon(r)]\frac{r^{\rho(r)}}{e\rho(r)}, \tag{54}$$

pour une infinité de valeurs de r, inégalité qui peut être précisée lorsque l'on a, quel que soit $n > n_0$, $n > (1 - \varepsilon_n) r_n^{\rho(r_n)}$, mais qui, en général, est tout ce que l'on peut obtenir. Nous allons comparer les inégalités (53) et (54) pour les grandes valeurs de p. Le calcul de $I_2(p, \rho(r))$ est bien facile pour $p = 1$, $p = 2$; on a

$$I_2(1, \rho_1) = \frac{2^{2-\rho_1}}{2 - \rho_1},$$

$$I_2(2, \rho_1) = \frac{1}{2(4 - \rho_1)}\left(\frac{3}{2}\right)^{4-\rho_1} + \frac{1}{3 - \rho_1}\left(\frac{3}{2}\right)^{3-\rho_1} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{3-\rho_1}{2}, \frac{5-\rho_1}{2}, -\frac{9}{16}\right),$$

mais le calcul est plus compliqué pour $p > 2$ et est inutile pour notre objet. Considérons d'abord $I_1(p, \rho_1)$, dont la valeur se calcule explicitement pour $\rho_1 = p + \frac{1}{2}$; on a

$$I_1\left(p, p + \frac{1}{2}\right) = 2L(\sqrt{p} + \sqrt{p+1}) = Lp + 2L2 + \frac{h(p)}{p}.$$

Dans le cas général, on a

$$I_1(p, \rho_1) = \left(\frac{p}{p+1}\right)^{\rho_1 - p} \sum_{q=0}^{q=\infty} \left[\frac{1}{\rho_1 - p + q}\left(\frac{p}{p+1}\right)^q\right]$$

$$= \left(1 - \frac{h(p)}{p}\right)\left[\frac{1}{\rho_1 - p} + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{\rho_1 - p + q}\left(\frac{p}{p+1}\right)^q\right];$$

nous allons calculer l'erreur commise en remplaçant dans chaque terme de cette dernière série $\rho_1 - p$ par 0. Les termes correspondant à $q > \sqrt{Lp}$ sont multipliés par $1 + \frac{h(p)}{\sqrt{Lp}}$; or il y a $\sqrt{Lp}$ autres termes dont la valeur est inférieure à *un*; on aura donc :

$$\sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{\rho_1 - p + q}\left(\frac{p}{p+1}\right)^q = Lp - h(p)\sqrt{Lp},$$

et par suite

$$I_1(p, \rho_1) = \frac{1}{\rho_1 - p} + Lp - h(p)\sqrt{Lp}.$$

Considérons à présent $I_2(p, \rho_1)$; on a

$$I_2(p, \rho_1) = \int_0^{1+\frac{1}{p}} t^{p-\rho_1} \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}\, dt, \qquad \frac{\sin(p+1)\theta}{\sin p\theta} = t, \qquad 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{p+1}.$$

$\frac{\sin p\theta}{\sin\theta}$ croît lorsque θ décroît de $\frac{\pi}{p+1}$ à 0, son maximum est p, il résulte de là que

$$I_2(p, \rho_1) = \int_0^{1-\frac{\sqrt{Lp}}{p}} t^{p-\rho_1} \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}\, dt + h(p)\sqrt{Lp}.$$

La valeur de θ correspondant à $t = 1 - \frac{\sqrt{Lp}}{p}$ est supérieure à $\frac{\pi}{2p+1}$; soit $\frac{\pi}{p+k}$ cette valeur, on aura

$$1 - \frac{\sqrt{Lp}}{p} = \cos\frac{\pi}{p+k} - \sin\frac{\pi}{p+k}\,\frac{\cos\pi\frac{k}{p+k}}{\sin\pi\frac{k}{p+k}},$$

ce qui montre que

$$k = h(p)\frac{p}{\sqrt{\mathrm{L}p}}$$

et que par suite, lorsque t varie de o à $1-\dfrac{\sqrt{\mathrm{L}p}}{p}$, θ est égal à $\dfrac{\pi}{p+1}\left(1-\dfrac{h(p)}{\sqrt{\mathrm{L}p}}\right)$.

Or, nous avons

$$\sin p\theta = \frac{2\cos\left(p+\frac{1}{2}\right)\theta\sin\frac{\theta}{2}}{t-1},$$

d'où

$$\mathrm{I}_2(p, \rho_1) = \int_0^{1-\frac{\sqrt{\mathrm{L}p}}{p}} \frac{t^{p-\rho_1}}{1-t}\left(-\frac{\cos\left(p+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)dt + h(p)\sqrt{\mathrm{L}p}$$

$$= \left[1 \pm \frac{h(p)}{\mathrm{L}p}\right]\int_0^{1-\frac{\sqrt{\mathrm{L}p}}{p}} \frac{t^{p-\rho_1}}{1-t}dt + h(p)\sqrt{\mathrm{L}p}.$$

On développera en série sous le signe $\int$ et on intégrera; la série obtenue sera analogue à celle correspondant à $\mathrm{I}_1(p, \rho_1)$ et on aura

$$\mathrm{I}_2(p, \rho_1) = \frac{1}{p+1-\rho_1} + \mathrm{L}p + h_1(p)\sqrt{\mathrm{L}p}, \qquad |h_1(p)| < h(p).$$

Nous obtenons donc finalement

$$\mathrm{I}_1(p, \rho_1) + \mathrm{I}_2(p, \rho_1) = 2\mathrm{L}p + \frac{1}{(p+1-\rho_1)(\rho_1-p)} + h_1(p)\sqrt{\mathrm{L}p}.$$

On trouve ainsi que, pour les grandes valeurs de p et en supposant que

$$p - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{L}p}} < \rho(r) < p + 1 - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{L}p}},$$

on aura

$$\log \mathrm{M}(r) < \left(2\mathrm{L}p + h(p)\sqrt{\mathrm{L}p}\right) r^{\rho(r)}, \qquad r > r_0(p),$$

résultat tout à fait analogue à celui obtenu par M. Denjoy pour les produits canoniques d'ordre infini à croissance régulière moyenne. (La formule d'approximation de $m_p(u)$ utilisée en général donne, pour coefficient de $r^{\rho(r)}$, p au lieu de $2\mathrm{L}p$.)

On peut également remarquer que $m_p^1\left(1+\dfrac{1}{p}\right)$ restant fini, quel que soit p, le rapport de K_1 à K_2 tend vers un lorsque p devient très grand; et les approximations faites pour le calcul approché de I_2 montrent qu'il en est de même pour le rapport des deux sommes

$$\sum_{i=1}^{i=E(r^{\rho(r)})} m_p\left(\frac{r}{R_i}\right), \qquad \sum_{i=E(r^{\rho(r)})+1}^{i=\infty} m_p\left(\frac{r}{R_i}\right),$$

de sorte que les fonctions d'ordre fini très grand présentent les caractères des produits canoniques d'ordre infini de M. Denjoy (¹).

[**61**] Je n'insisterai pas sur l'application des résultats précédents aux réciproques, ni sur les cas de régularité relativement à l'exposant précisé. Je me bornerai à signaler le rôle considérable du facteur $e^{P(z)}$ et des arguments des zéros. Supposons que l'on ait

$$\log M(r) = h(r) r^{\rho(r)}, \qquad \overline{\lim_{x=\infty}}\, \rho'(x) = \rho, \qquad \lim_{x=\infty} x\rho'(x) \log x = 0;$$

si la fonction $\rho(x)$ reste supérieure à $p + \alpha (p < \rho < p + 1)$, nous obtenons des résultats très précis sur les modules des zéros. On a

$$n(r) = h(r) r^{\rho(r)};$$

mais lorsque $\rho(x)$ a une limite inférieure (pour $x = \infty$), inférieure ou égale à p, nous obtenons encore une limite supérieure pour $n(r)$, mais pas de limite inférieure. Or, si l'on part du développement de Taylor de la fonction, le second cas apparaît comme aussi « régulier » que le premier, et la théorie des fonctions correspondantes présente toutes les difficultés que l'on rencontre pour les fonctions d'ordre entier.

(¹) Dans le cas de la régularité moyenne, M. Denjoy trouve que l'on a

$$\log M(r) < 2Lp \,.\, n \,.\, [1 + \varepsilon(r)],$$

p étant une fonction croissante de r, mais qui est définie à partir de $n(r)$ de la même façon que le nombre fini p qui figure dans nos formules; on peut prendre par exemple

$$p = E\left(\frac{d \log n}{d \log r}\right),$$

et, dans certains cas plus réguliers,

$$p = E\left(\frac{\log n}{\log r}\right).$$

III. — Les fonctions orientées.

[**62**] J'appellerai avec M. Leau[1] *fonctions entières orientées* les fonctions d'ordre non entier dont les arguments des zéros ont une limite, que l'on peut supposer égale à π. L'étude de telles fonctions est intéressante au point de vue de la théorie générale parce qu'elle montre d'une façon très nette les difficultés qui se présentent dans la recherche des zéros d'une fonction entière donnée par une valeur approchée de $\log M(r)$, même lorsque cette valeur approchée est très précise, et même lorsqu'on connaît une ligne sur laquelle le maximum a lieu. J'ai indiqué ailleurs[2] une expression asymptotique du logarithme de telles fonctions lorsque l'on a

$$r_n = n^{\omega(n)}, \qquad \lim_{x=\infty} \omega(x) = \frac{1}{\rho}, \qquad \lim_{x=\infty} \omega'(x) . x \log x = 0,$$

j'étendrai rapidement le résultat au cas où l'on a seulement

$$\varlimsup_{x=\infty} \omega(x) = \frac{1}{\rho}; \qquad \omega(x) < \frac{1}{p+\alpha}, \qquad \alpha > 0; \qquad \lim_{x=\infty} \omega'(x) . x . \log x = 0.$$

Je poserai

$$n(r) = n \qquad (r_n \leqq r < r_{n+1}),$$

et désignerai par n_0 un nombre qui sera déterminé ultérieurement. Je décompose la fonction $f(z)$ en un produit de quatre facteurs correspondant respectivement : le premier P_1 au produit du facteur exponentiel par les n_0 premiers facteurs primaires, le second P_2 au produit des facteurs primaires dont l'indice est compris entre n_0 et n, le quatrième P_3 au produit des facteurs correspondant aux zéros d'indice supérieur à n, le troisième P_4 au produit des deux facteurs restants. On a

$$P_1 = M^{n_0 r^p} \qquad (M \text{ restant fini quel que soit } n_0),$$

puis

$$\log P_2 = A_1 A_2, \qquad A_1 = \sum_{-p}^{+\infty}{}' \left[(-1)^{q+1} \frac{1}{q z^q} \sum_{n_0}^{n-1} a_i^q \right],$$

$$A_2 = (n - n_0 - 1) \log r - \sum_{n_0}^{n-1} \log a_i + (n - n_0 - 1) i\varphi, \qquad z = re^{i\varphi}.$$

---

[1] Voir L. Leau, *Étude sur les fonctions entières orientées* (Annales de l'École Normale, 1906).

[2] Voir Valiron, *Expression asymptotique de certaines fonctions entières* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1912).

Pour calculer A_1 on doit calculer d'abord

$$\sum_{n_0}^{n-1} r_i^q = \frac{1 + \eta_q(n_0, n)}{1 + \frac{q}{\rho_1}} \times n \times r^q \left(1 - \frac{2\theta_q}{n}\right)^{\frac{q}{\rho_1}}, \qquad 0 < \theta_q < 1,$$

où l'on écrit ρ_1 au lieu de $\rho(r)$ et $x^{\rho(x)}$ étant toujours la fonction inverse de $x^{\omega(x)}$. Cette égalité s'obtient en transformant en intégrale. Étant donné ε, on peut prendre n_0 et $\frac{n}{n_0}$ assez grands pour que

$$|\eta_q(n_0, n)| < \varepsilon.$$

On a donc

$$\sum_{n_0}^{n-1} r_i^q < \frac{(1 + \varepsilon)nr^q}{1 + \frac{q}{\rho_1}}$$

et par suite la série

$$\sum_{-p}^{+\infty}{}' \left[\frac{1}{qr^q} \sum_{n_0}^{n-1} r_i^q\right]$$

converge, nous prendrons Q de façon que

$$\sum_{Q}^{\infty} \frac{1}{q\left(1 + \frac{q}{p+1}\right)} < \varepsilon$$

et nous aurons :

$$A_1 = \sum_{-p}^{Q}{}' \left[(-1)^{q-1} \frac{1}{qz^q} \sum_{n_0}^{n-1} a_i^q\right] + \eta_1 n, \qquad |\eta_1| < \varepsilon$$

$$= \sum_{-p}^{Q}{}' \left[(-1)^{q+1} \frac{1}{qz^q} \sum_{n_0}^{n-1} a_i^q\right] + \sum_{Q+1}^{\infty} \left[(-1)^{q-1} \frac{nr^q}{q\left[1 + \frac{q}{\rho_1}\right] z^q}\right] + \eta_2 n, \quad |\eta_2| < 2\varepsilon.$$

Nous prendrons n_0 assez grand pour que

$$\left|\left(1 - \frac{2\theta_q}{n}\right)^{\frac{q}{\rho_1}} - 1\right| < \varepsilon, \qquad q < Q;$$

$$|e^{i\varphi_i q} - 1| < \varepsilon, \qquad i > n_0;$$

nous aurons

$$\sum_{-p}^{Q}{}' \left[(-1)^{q-1}\frac{1}{qz^q}\sum_{n_0}^{n-1} a_i^q\right] = \sum_{-p}^{Q}{}' \left[(-1)^{q-1}\frac{1+\eta_3}{qz^q}\frac{nr^q}{1+\dfrac{q}{\rho_1}}\right], \qquad |\eta_3| < 3\varepsilon;$$

$$= n\sum_{-p}^{Q}{}' \frac{(-1)^{q-1}e^{-i\varphi q}}{q\left(1+\dfrac{q}{\rho_1}\right)} + \eta_4 n \sum_{-p}^{Q} \frac{1}{q\left[1+\dfrac{q}{p+\alpha}\right]}, \qquad |\eta_4| < 3\varepsilon;$$

d'où

$$A_1 = n\sum_{-p}^{+\infty}{}' \frac{(-1)^{q+1}e^{-i\varphi q}}{q\left[1+\dfrac{q}{\rho_1}\right]} + \eta' n, \qquad |\eta'| < h(n)\varepsilon.$$

On trouvera de même

$$A_2 = \frac{n}{\rho_1} + i\varphi n + \eta'' n,$$

$$\log P_3 = n\sum_{p+1}^{\infty} \frac{(-1)^q e^{i\varphi q}}{q\left[1-\dfrac{q}{\rho_1}\right]} + \eta''' n,$$

d'où, après quelques calculs :

$$\log(P_1P_2P_3) = n(r)\left[\frac{\pi e^{i\varphi\rho(r)}}{\sin[\pi\rho(r)]} + \eta(r,\varphi)\right], \qquad -\pi \leqq \varphi \leqq \pi.$$

Il suit de là que, *à l'extérieur de cercles décrits des zéros a_n comme centres avec un rayon égal à r_n^{-k}, k étant fixe et positif, on a l'égalité*

(55) $$\log f(z) = r^{\rho(r)}\left[\frac{\pi e^{i\varphi\rho(r)}}{\sin[\pi\rho(r)]} + \eta(r,\varphi)\right], \qquad -\pi \leqq \varphi \leqq \pi.$$

En prenant k assez grand, les cercles d'exclusion sont tous extérieurs les uns aux autres; la notation $\eta(r, \varphi)$ signifie que le nombre η tendant vers zéro avec $\dfrac{1}{r}$ est fonction de φ.

[**63**] L'égalité (55) donne, dans le cas où $\rho(r)$ est inférieur à *un*, la limitation de $\log M(r)$ pour les fonctions d'exposant $\rho(r)$. On a

$$\log M(r) < [1+\varepsilon(r)]\frac{\pi}{\sin[\pi\rho(r)]} r^{\rho(r)},$$

résultat qui se raccorde avec celui obtenu pour les fonctions d'ordre nul de seconde classe.

On peut également, au moyen de cette égalité, compléter le raisonnement employé par M. Lindelöf dans son Mémoire des *Rendiconti di Palermo* cité plus haut. Étant donnée une fonction $r^{\rho(r)}$, $\rho(r)$ étant un ordre précisé, nous formerons la fonction $V(x)$ du numéro 5 du Mémoire de M. Lindelöf en prenant

$$\psi(x) = \prod_1^\infty E\left(-\frac{x}{R_i}, p\right), \qquad i = R_i^{\rho_1(R_i)}, \qquad r^{\rho_1(r)} = \frac{\sin \pi\rho(r^2)}{\pi} r^{2\rho(r^2)};$$

et

$$V(x) = \log \psi\left(\sqrt{x}\right), \qquad \left(\sqrt{r} > 0\right);$$

comme dans l'application de M. Lindelöf $\rho(r) > \frac{1}{2}$, on a $p = 1$, et les conditions imposées à $V(x)$ sont bien vérifiées si l'on a soin de prendre pour $\rho(r)$ un ordre ayant pour limite ρ.

D'une façon générale, si ρ est compris entre p et $p + \frac{1}{2}$, la fonction $V(x)$ répond aux conditions de M. Lindelöf; dans les autres cas, il sera bien aisé encore de former une telle fonction en employant une transformation autre que $\left(x, \sqrt{x}\right)$. Il en résulte notamment que les résultats de MM. Lindelöf et Phragmèn (*Acta Mathematica*, t. XXXI) s'appliquent à toutes les fonctions d'ordre fini.

[**64**] Nous allons tirer de l'égalité (55) des résultats relatifs aux zéros des fonctions $f(z) + a$, résultats qui pourront prendre une forme intéressante étant donnée l'irrégularité possible de la fonction. Nous appliquerons d'abord le théorème de M. Jensen. Je m'appuierai sur la proposition suivante, qui est un cas particulier du théorème de M. Hadamard sur le minimum du module, et qui s'obtient par la méthode d'exclusion de M. Boutroux :

Pour une fonction entière d'ordre ρ *non entier et d'ordre précisé* $\rho(r)$, *on peut toujours trouver entre des cercles de rayons* R, $R(1 + \alpha)$ *des cercles sur lesquels on a l'inégalité :*

$$\log |f(z)| > -h(r) \left[\log \frac{1}{\alpha} + h_1(r)\right] r^{\rho(r)}$$

(on suppose naturellement que $\rho(x)$ a été choisi de façon à rester supérieur à $p + \alpha$).

Cette proposition rappelée, on voit que l'on a, quel que soit r,

$$\log |f(z) + a| = [1 + \varepsilon(r)] \frac{\pi \cos \varphi\rho(r)}{\sin \pi\rho(r)} r^{\rho(r)}$$

dans les intervalles

$$2q\pi - \frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 < \varphi\rho(r) < \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1 + 2q\pi, \qquad -\pi \leqq \varphi \leqq +\pi.$$

D'autre part, on a

$$\log |f(z) + a| = [1 + \varepsilon(r)] \log |a|$$

dans les intervalles

$$2q'\pi + \frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 < \varphi\rho(r) < 2q'\pi + \frac{3\pi}{2} - \varepsilon_1, \qquad -\pi \leqq \varphi \leqq +\pi.$$

Dans les inégalités écrites pour $\varphi\rho(r)$, ε_1 est une quantité fonction de r et qui tend vers zéro avec la fonction $\eta(r, \varphi)$ de l'égalité (55). Les intervalles restants ont une longueur totale inférieure à $3\varepsilon_1$; d'après le théorème de M. Hadamard rappelé ci-dessus, on peut choisir r $\big($entre R et $R(1 + \varepsilon_1)\big)$ de façon que dans ces intervalles

$$\log |f(z) + a| = -h_1'(r)(\log \varepsilon_1) r^{\rho(r)}, \qquad |h'(r)| < h(r).$$

Le nombre r étant ainsi choisi, on a

1° $\rho(r) \leqq p + \frac{1}{2}$, $\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(z) + a|\, d\varphi = [1 + \eta(r)](p + |\sin[\pi\rho(r)]|) \frac{r^{\rho(r)}}{\rho(r)\,|\sin[\pi\rho(r)]|}$;

2° $\rho(r) \geqq p + \frac{1}{2}$, $\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(z) + a|\, d\varphi = [1 + \eta(r)](p + 1) \frac{r^{\rho(r)}}{\rho(r)\,|\sin[\pi\rho(r)]|}$;

ces égalités ont lieu pour des valeurs de r dont le rapport est $1 + \varepsilon_1(r)$; elles ont par suite lieu quel que soit r; de plus, les fonctions

$$(p + |\sin[\pi\rho(r)]|) \frac{r^{\rho(r)}}{\rho(r)\,|\sin[\pi\rho(r)]|}, \qquad (p + 1)\frac{r^{\rho(r)}}{\rho(r)\,|\sin[\pi\rho(r)]|}$$

sont toutes deux des fonctions de r à dérivabilité rationnelle ou, plus exactement, si on désigne la première par $r^{\rho_1(r)}$, la deuxième par $r^{\rho_2(r)}$, $\rho_1(x)$ et $\rho_2(x)$ vérifient la condition

$$\lim_{x=\infty} y'(x) \,.\, x \log x = 0 \qquad \left(y'(x) = \begin{cases} y'(x+0) \\ y'(x-0) \end{cases}\right).$$

Par suite, si l'on désigne par $\rho_3(r)$ la fonction qui est égale à $\rho_1(r)$ lorsque $\rho(r) \leqq p + \frac{1}{2}$, et à $\rho_2(r)$ dans le cas contraire, $\rho_3(x)$ vérifie encore la condition précédente; et puisque l'on a

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x} dx = [1 + \eta(r)] r^{\rho_3(r)},$$

on aura, d'après la proposition générale du numéro 26,

$$n(x) \sim \rho_3(x) x^{\rho_3(x)}.$$

Donc, si nous appelons $n(x|a)$ le nombre des zéros de $f(z)+a$ dont le module est inférieur à x, on a

$$n(r|a)=[1+\eta(r)]\frac{p+\delta(r)}{\left|\sin\left(\pi\rho(r)\right)\right|}r^{\rho(r)}, \tag{56}$$

en désignant par $\delta(r)$ la fonction qui est égale à $\left|\sin\left(\pi\rho(r)\right)\right|$ lorsque $\rho(r)$ est inférieur ou égal à $p+\frac{1}{2}$ et à *un* dans le cas contraire. On peut d'ailleurs résoudre par rapport à r l'égalité (56); on aura, $\omega(x)$ étant la fonction considérée au numéro 62 et $r_n(a)$ désignant le module du $n^{\text{ième}}$ zéro de $f(z)+a$,

$$r_n(a)=(1+\eta_{1n})\left[\frac{n\left|\sin\dfrac{\pi}{\omega(n)}\right|}{p+\delta_1(n)}\right]^{\omega(n)}=(1+\eta_{1n})r_n(0)\left[\frac{\left|\sin\dfrac{\pi}{\omega(n)}\right|}{p+\delta_1(n)}\right]^{\omega(n)},$$

$\delta_1(n)$ étant égal à $\left|\sin\dfrac{\pi}{\omega(n)}\right|$ lorsque $\omega(n)$ est supérieur à $\dfrac{2}{2p+1}$ et à *un* dans le cas contraire.

[**65**] On peut obtenir des renseignements assez précis sur la position des zéros. D'après l'égalité (55), les zéros se trouvent ou bien dans le voisinage de la demi-droite d'argument π, ou bien dans le voisinage des courbes, ou arcs de courbes Γ_q, ayant pour équation

$$\varphi\rho(r)=\frac{\pi}{2}+q\pi,\qquad q=1,2,\ldots,j\begin{cases}j=p+1 & \text{si}\quad \rho(r)\geqq p+\dfrac{1}{2},\\ j=p & \text{si}\quad \rho(r)\leqq p+\dfrac{1}{2};\end{cases}$$

ou des courbes ou arcs symétriques des premiers par rapport à ox. Considérons d'abord un arc Γ_q ne coupant pas ox' et faisons-le tourner de $+\varepsilon$ et de $-\varepsilon$; les zéros de $f(z)+a$ voisins de Γ_q sont, à partir d'une certaine valeur de leur module, compris entre ces deux courbes $\Gamma_{q-\varepsilon}$, $\Gamma_{q+\varepsilon}$; et le nombre de ceux de ces zéros dont le module est compris entre $r_0(\varepsilon)$ (nombre à partir duquel les zéros sont tous entre $\Gamma_{q-\varepsilon}$ et $\Gamma_{q+\varepsilon}$) et r est égal au quotient par 2π de la variation de l'argument de $1+\dfrac{a}{f(z)}$ le long du contour formé par les deux arcs de courbes $\Gamma_{q-\varepsilon}$, $\Gamma_{q+\varepsilon}$ compris entre les cercles $|z|=r_0(\varepsilon)$ et $|z|=r$ et les arcs de ces cercles compris entre les deux courbes. Le long des deux arcs de $\Gamma_{q+\varepsilon}$ et $\Gamma_{q-\varepsilon}$, la variation d'argument est :

$$[1+\eta_1(r)]\frac{r^{\rho(r)}}{2\left|\sin\left(\pi\rho(r)\right)\right|}-[1+\eta_1(r_0)]\frac{r_0^{\rho(r_0)}}{2\left|\sin\pi\rho(r_0)\right|}.$$

Considérons les deux arcs de cercles; nous appliquerons le résultat suivant, dont la démonstration est tout analogue à celle du théorème de M. Hadamard sur le minimum (dans le cas le plus général) :

Si l'on a

$$n = (1 + \eta_n) r_n^{\rho(r_n)},$$

$\rho(x)$ *étant un exposant précisé, la variation de l'argument de* $f(z)$, *lorsque l'argument de* z *varie de* ε *(le module de* z *restant fixe), est :*

$$\sqrt{\varepsilon}\, h(r) r^{\rho(r)}.$$

Il résulte de cette proposition que le nombre des zéros de $f(z) + a$ situés dans notre contour est

$$[1 + \eta(r)] \frac{r^{\rho(r)}}{2 \,.\, \sin \pi\rho(r)|}.$$

On a ainsi les résultats suivants :

1° $\overline{\lim_{r=\infty}} \rho(r) = \rho < p + \frac{1}{2}$. Les $2p$ courbes Γ_q donnent $2p$ files de zéros contenant chacune $[1 + \eta(r)] \dfrac{r^{\rho(r)}}{2 \,.\, |\sin \pi\rho(r)|}$, zéros dont le module est inférieur à r, et il y a $r^{\rho(r)}$ autres zéros contenus pour $r > r_0(a)$ dans les cercles décrits des zéros a_n de $f(z)$ comme centres avec le rayon $[r_n(0)]^{-k}$;

2° $\underline{\lim_{r=\infty}} \rho(r) > p + \frac{1}{2}$. Les $2(p+1)$ courbes Γ_q donnent $2(p+1)$ files de zéros contenant chacune $[1 + \eta(r)] \dfrac{r^{\rho(r)}}{2\, |\sin \pi\rho(r)|}$ zéros, et, pour $r > r_0(a)$, il n'y a pas d'autres zéros que ceux correspondants à ces files.

3° $\underline{\lim_{r=\infty}} \rho(r) < \frac{1}{2} + p$, $\rho > p + \frac{1}{2}$. Il y a encore $2p$ courbes Γ_q qui ne coupent pas ox, donnant encore $2p$ files de zéros. Les deux autres courbes Γ_q, symétriques par rapport à ox, le coupent en une infinité de points et les portions à conserver sont les portions de Γ_{p+1} situées au-dessus de ox et les portions symétriques. En supprimant les portions de ox comprises entre ces arcs de courbes Γ_q et en faisant tourner la figure de $\pm\varepsilon$, l'aire balayée renfermera tous les zéros de module supérieur à $r_0(\varepsilon)$ et qui sont voisins de cette portion du plan. Le nombre de ceux dont le module est inférieur à r est

$$[1 + \eta(r)] \frac{\delta(r)}{|\sin(\pi\rho(r))|} r^{\rho(r)},$$

ces zéros se répartissant asymptotiquement de la même façon sur les portions symétriques de courbes Γ_q.

[**66**] On étendra facilement une partie de ces résultats au cas où, les zéros étant encore orientés, on a seulement

$$r_n = (1 + \eta_n) n^{\omega(n)}.$$

L'égalité (55) aura encore lieu, sauf dans un angle formé par le prolongement des demi-droites $\varphi = \pm \varepsilon(r)$.

[**67**] Les résultats obtenus ci-dessus montrent qu'étant donné le maximum du module d'une fonction entière, même par une formule très précise, par exemple

$$\mathrm{M}(r) = \mathrm{V}(r) + h(r),$$

où $h(r)$ est fini, mais inconnu, on ne sait rien de plus sur les zéros que lorsqu'on fait la seule hypothèse de la correspondance régulière d'ordre zéro; il en est encore de même si l'on connaît en plus une courbe sur laquelle le maximum a lieu (dans le cas où dans les exemples précédents on a $\varphi_n = 0$, p pair et $a \geqq 0$, le maximum a lieu sur ox).

Pour obtenir des résultats plus précis, il importe donc de faire une hypothèse sur les arguments des zéros. Nous allons démontrer la réciproque de l'égalité (55) :

Si l'on sait que les arguments des zéros d'une fonction entière d'ordre ρ non entier ont une limite, π par exemple, et si l'on a de plus

$$\log |f(r)| = (-1)^p [1 + \eta(r)] r^{\rho(r)}, \tag{57}$$

p étant le genre et $\rho(x)$ une fonction satisfaisant aux conditions

$$\overline{\lim_{x=\infty}}\, \rho(x) = \rho; \qquad \underline{\lim_{x=\infty}}\, \rho(x) > p + \alpha, \quad \alpha > 0; \qquad \lim_{x=\infty} \rho'(x)\,.\,x \log x = 0,$$

le nombre des zéros sera donné par l'égalité

$$n(r) = [1 + \eta(r)] \frac{|\sin(\pi\rho(r))|}{\pi} r^{\rho(r)}. \tag{58}$$

L'égalité (58) entraîne d'ailleurs (n° 66) l'égalité (57) et même l'égalité

$$\log |f(z)| = (-1)^p [e^{i\varphi\rho(r)} r^{\rho(r)} + \eta(r, \varphi)], \qquad -\pi + \varepsilon \leqq \varphi \leqq \pi - \varepsilon.$$

[**68**] Nous commencerons par établir la proposition suivante :

Étant donné un produit canonique de genre p et d'ordre non entier, dont les zéros ont pour orientation π, on a

$$\log |f(r)| = [1 + \eta(r)] (-1)^p \int_0^\infty \frac{n(x) r^{p+1}}{x^{p+1}(x + r)} dx + h_1(r) r^{p+1}, \qquad |h_1(r)| < h(r). \tag{59}$$

Supposons d'abord que les zéros aient tous pour argument π, et soit

$$-\pi+\alpha<\varphi<\pi-\alpha\,;$$

on a

$$\log f(z)=\sum_{1}^{\infty}\mathrm{E}\left(-\frac{z}{r_i},\,p\right),$$

or,

$$\mathrm{E}\left(-\frac{z}{r_i},p\right)=i\mathrm{E}\left(-\frac{z}{r_i},p\right)-(i-1)\mathrm{E}\left(-\frac{z}{r_{i-1}},p\right)+\int_{r_{i-1}}^{r_i}(-1)^p\frac{z^{p+1}}{x^{p+1}(x+z)}n(x)\,dx\,.$$

Nous aurons donc :

$$\log f(z)=\lim_{i=\infty}\left[i\mathrm{E}\left(-\frac{z}{r_i},p\right)+(-1)^p\int_0^{r_i}n(x)\frac{z^{p+1}}{x^{p+1}(x+z)}\,dx\right],$$

$$\log f(z)=(-1)^p\int_0^{\infty}n(x)\frac{z^{p+1}}{x^{p+1}(x+z)}\,dx\,. \tag{60}$$

En particulier, on aura

$$\log f(re^{i\varepsilon})=(-1)^p\int_0^{\infty}n(x)\frac{r^{p+1}}{x^{p+1}(x+r)}\left[\frac{x+r}{x+re^{i\varepsilon}}\,e^{i\varepsilon(p+1)}\right]dx\,;$$

or, pour $r>r_0(\varepsilon)$; la quantité entre crochets dans l'intégrale précédente est de la forme $1+h(r)\eta_1(r)$ avec $|\eta_1(r)|<\varepsilon$; on aura donc :

$$\log|f(re^{i\varepsilon})|=\left[1+\eta_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]\log f(r),\qquad r>r_0(\varepsilon).$$

Ceci posé, supposons que les zéros aient des arguments dont la limite est π. Étant donné le nombre ε, les arguments φ_n sont compris entre $\pi-\varepsilon$ et $\pi+\varepsilon$ à partir d'une certaine valeur de n, $n_0(\varepsilon)$. Nous pouvons supposer que cette circonstance se produit quel que soit n_0, à condition de multiplier la fonction par un produit de facteurs de la forme

$$\frac{\mathrm{E}\left(-\dfrac{z}{r_i},\,p\right)}{\mathrm{E}\left(\dfrac{z}{a_i},\,p\right)},\qquad i=1,\,2,\,\ldots,\,n_0(\varepsilon).$$

Le logarithme du module de ce produit a, pour $z=r$, une valeur absolue inférieure à

$$h(r)\sum_{1}^{n_0(\varepsilon)}\frac{r^{p+\frac{\varepsilon}{2}}}{r_i^{p+\frac{\varepsilon}{2}}}=h(r)r^{p+\varepsilon},\qquad r>r_0(\varepsilon).$$

Considérons alors le produit canonique dont les zéros ont des arguments compris entre $\pi - \varepsilon$ et $\pi + \varepsilon$; on sait (Denjoy) que $|E(x, p)|$ a pour $|x| = u$ un maximum ou un minimum pour $x = -u$, suivant que p est pair ou impair; on aura par suite

$$\left|E\left(-\frac{r}{r_i e^{i\iota}}, p\right)\right| \lesseqgtr \left|E\left(\frac{r}{a_i}, p\right)\right| \lesseqgtr \left|E\left(-\frac{r}{r_i}, p\right)\right|, \qquad \begin{array}{l} p \text{ pair}, \\ p \text{ impair}, \end{array}$$

et l'égalité (59) sera démontrée.

[**69**] L'égalité (60) donne immédiatement l'expression du maximum du module des fonctions de genre zéro; elle montre en particulier que $\log M(r)$ peut être une expression asymptotique simple de r dans des cas plus généraux que ceux considérés jusqu'ici $(n(x) \sim x^{\rho(x)})$; par exemple si l'on a

$$n = r_n^{\rho}(\sin \log r_n + A), \qquad \rho \text{ fixe},$$

on trouvera

$$\log M(r) = [1 + \varepsilon(r)]\pi r^{\rho}\left[\frac{A}{\sin \pi\rho} + \frac{\sin(\pi\rho) sh[\pi \sin \log r] - \cos(\pi\rho) sh(\pi \cos \log r)}{\sin^2(\pi\rho) + sh^2 \pi}\right],$$

mais on n'aura pas

$$\log M(r) = (1 + \varepsilon)\frac{n(r)\pi}{\sin(\pi\rho)}.$$

Les problèmes de correspondance que l'on pourrait se poser relativement aux fonctions orientées (même en supposant les zéros alignés) se ramènent à des résolutions d'équations intégrales singulières. Notamment la détermination des zéros d'une fonction de genre zéro dont les zéros ont pour argument π se ramène à la résolution de l'équation

$$\int_0^{\infty} \varphi(x)\frac{dx}{x(x+r)} = \psi(r),$$

$\varphi(x)$ étant la fonction inconnue et $\psi(r)$ une fonction continue. Dans l'intégrale, la limite zéro peut être remplacée par $x_0 \neq 0$; on aura alors une équation singulière dont la nature de la solution dépend évidemment du second membre; si $\psi(r)$ est une fonction $\log M(r)$, $\varphi(x)$ est discontinu.

[**70**] Revenons à la démonstration de l'égalité (58). Les égalités (57) et (59) nous donnent l'égalité

$$\int_0^{\infty} n(x)\frac{r^{p-1}}{x^{p-1}(x+r)}\,dx \sim r^{\rho(r)}, \tag{61}$$

qui nous servira de point de départ. Multiplions les deux membres de l'égalité par r^q, q étant un nombre dont la valeur sera déterminée plus tard. On a

$$\int_0^{\infty} n(x)\frac{r^{p+q-1}}{x^{p-1}(x+r)}\,dx \sim r^{\rho(r)-q}. \tag{62}$$

Posons

$$F(r) = \frac{r^{p+q+1}}{x+r};$$

on peut écrire

$$F(r) = r^{p+q} - xr^{p+q-1} + \ldots + (-1)^{p+q}x^{p+q} + (-1)^{p+q+1}\frac{x^{p+q+1}}{x+r},$$

d'où

$$\frac{d^{p+q+1}F(r)}{dr^{p+q+1}} = 1.2\ldots(p+q+1)\frac{x^{p+q+1}}{(x+r)^{p+q+2}},$$

ce qui montre que les dérivées $F^{(i)}(r)$ sont croissantes pour $i=(0), 1, 2, \ldots p+q$, puis alternativement décroissantes et croissantes; donc l'intégrale

$$\int_0^\infty n(x)\frac{F(r)}{x^{p+1}}dx$$

est croissante, ainsi que ses $p+q$ premières dérivées, et les dérivées suivantes sont alternativement croissantes et décroissantes. Dans ces conditions, eu égard aux propriétés de $\rho(x)$, nous pouvons dériver l'égalité (62) $p+q$ fois. Nous obtiendrons :

$$\int_0^\infty n(x)\frac{F^{(p+q)}(r)}{x^{p+1}}dx \sim (q+\rho_1)\ldots(\rho_1-p+1)r^{\rho_1-p}, \qquad \rho_1=\rho(r).$$

Les deux membres ont des dérivées décroissantes, mais on verra encore bien simplement dans ce cas particulier que l'on pourra encore dériver asymptotiquement cette égalité, ainsi que celles que l'on obtiendra ensuite. Nous dériverons encore $p+q+2$ fois, et, en remplaçant ensuite $F^{(2p+2q+2)}(r)$ par sa valeur, nous avons

$$\int_0^\infty n(x)\frac{x^q}{(x+r)^{2q+2p+3}}dx \sim \frac{(q+\rho_1)\ldots(\rho_1-q-2p-1)}{(-1)^{p+q+1}(2q+2p+2)!}r^{\rho_1-q-2p-2}.$$

Le quotient des deux membres de cette égalité est de la forme $1+\eta_q(r)$, $\eta_q(r)$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$, mais d'autant moins vite que q est plus grand. En utilisant l'égalité

$$\begin{aligned}\frac{(\rho_1+q)(\rho_1+q-1)\ldots(\rho_1-q-2p-1)}{(-1)^{p+q+1}\times 1.2\ldots(2p+2q+2)} &= \frac{(\rho_1-p)(\rho_1-p+1)\ldots(\rho_1+q)}{1.2\ldots(p+q)}\\ &\quad\times\frac{(p+1-\rho_1)\ldots(2p+q+1-\rho_1)}{1.2\ldots(p+q)}\,\frac{1}{p+q+1}\times\frac{1.2\ldots(p+q)}{(p+q+2)\ldots(2p+2q+2)}\end{aligned}$$

et la définition de la fonction $\Gamma(x)$, on voit que le coefficient de $r^{\rho_1-q-2p-2}$ dans notre égalité asymptotique est

$$\frac{1}{\Gamma(\rho_1-p)}\,\frac{1}{\Gamma\big(1-(\rho_1-p)\big)}\times\frac{1.2\ldots(p+q)}{(p+q+2)\ldots(2p+2q+2)}[1+\eta(q)],$$

d'où il résulte enfin :

$$(63)\quad \int_0^\infty n(x)\frac{x^q}{(x+r)^{2q+2p+3}}dx \sim \frac{\sin\pi(\rho_1-p)}{\pi}\frac{r^{\rho_1}}{r^{2p+q+2}}[1+\eta(q)]\frac{1.2\ldots(p+q)}{(p+q+2)\ldots(2p+2q+2)}.$$

La fonction $n(x)$ est croissante; nous aurons

$$n(t)\Phi(t)=n(t)\int_t^\infty \frac{x^q}{(x+r)^{2q+2p+3}}dx<\int_0^\infty n(x)\frac{x^q}{(x+r)^{2p+2q+3}}dx,$$

avec

$$\Phi(t)=\sum_{i=q+1}^{i=1}\frac{1}{2p+2q+2}\frac{q}{2p+2q+1}\cdots\frac{i}{2p+q+i+1}\frac{t^{i-1}}{(t+r)^{2p+q+i+1}}.$$

En prenant $r=kt$ (k fini), l'égalité (63) montre que, quelque petit que soit ε, on peut trouver une valeur $t_0(\varepsilon, q)$ telle que, pour $t>t_0(\varepsilon, q)$, on ait

$$n(t)<(1+\varepsilon)\frac{\sin\pi[\rho(kt)-p]}{\pi}\frac{(kt)^{\rho(kt)}}{k^{2p+q+2}}\frac{1+\varepsilon(q)}{\Psi(k)}\frac{1.2\ldots q}{(2p+q+2)\ldots(2p+2q+2)},$$

où l'on a

$$\Psi(k)=\frac{1}{2p+2q+2}\frac{1}{(1+k)^{2q+2p+2}}+\ldots$$
$$+\frac{1}{2p+2q+2}\frac{q}{2p+2q+1}\cdots\frac{1}{2p+q+2}\frac{1}{(1+k)^{2p+q+2}}.$$

En utilisant encore une fois les propriétés de $\rho(x)$, on aura

$$(kt)^{\rho(kt)}=t^{\rho(t)}k^{\rho(t)}(1+\eta),\qquad |\eta|<\varepsilon,$$

d'où enfin

$$n(t)<(1+2\varepsilon)\frac{\sin\pi(\rho(t)-p)}{\pi}t^{\rho(t)}\times\chi(t,q),\qquad t>t_0(\varepsilon, q),$$

avec

$$\frac{1}{\chi(t,q)}=\frac{1+\eta(q)}{k^{\rho(t)}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2p+q+2}}\sum_{i=0}^{i=q}\frac{(2p+q+2)(2p+q+3)\ldots(2p+q+2+i)}{1.2\ldots i}\frac{1}{(1+k)^i}.$$

Nous supposerons $k>1$. Dans notre Σ, nous avons les $q+1$ premiers termes du développement en série de

$$\left(1-\frac{1}{1+k}\right)^{-(2p+q+2)}=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2p+q+2},$$

la somme des termes manquants est inférieure au produit du dernier terme par

$$\frac{1+k}{k-1+\frac{h(q)}{q}};$$

et comme les formules d'approximation de la fonction $\Gamma(x)$ montrent que le coefficient de ce dernier terme est égal à

$$h(q)\times 4^q \times q^{\frac{1}{2}},$$

les termes manquants ont une somme inférieure à

$$h(q)\left(\frac{4}{1+k}\right)^q q^{\frac{1}{2}},$$

la somme totale étant indiquée ci-dessus. Il en résulte que

$$\chi(t, q) = 1 + \eta(q),$$

et nous avons l'inégalité

$$n(x) < [1+\varepsilon(x)]\frac{\sin \pi[\rho(x)-p]}{\pi}x^{\rho(x)}. \tag{64}$$

[**71**] Le résultat complet découle presque immédiatement de cette inégalité. L'égalité (61) nous donne

$$r^{\rho(r)}\big(1-\varepsilon(r)\big) < \int_{kr}^{k'r} n(x)\frac{r^{p+1}dx}{x^{p+1}(x+r)} + \int_0^{kr} n_1(x)\frac{r^{p+1}dx}{x^{p+1}(x+r)}$$
$$+\int_{k'r}^{\infty} n_1(x)\frac{r^{p+1}dx}{x^{p+1}(x+r)}, \qquad (k'>k),$$

en posant

$$n_1(x) = \big(1+\varepsilon_1(x)\big)\frac{\sin \pi(\rho(x)-p)}{\pi}x^{\rho(x)}.$$

Or, on a, soit en utilisant le résultat obtenu pour les fonctions orientées, soit par un calcul direct dans lequel on remplacera $\rho(x)$ par $\rho(r)$ (en utilisant les propriétés de $\rho(x)$),

$$\int_0^{\infty} n_1(x)\frac{dx}{x^{p+1}(x+r)} = \big(1+\varepsilon_2(x)\big)r^{\rho(r)-p-1},$$

et nous obtiendrons l'inégalité suivante (en supposant k et k' finis) :

$$r^{\rho(r)}\big(1+\varepsilon(r)\big) < n(k'r)\int_k^{k'}\frac{dt}{t^{p+1}(1+t)} + [1+\varepsilon_2(r)]r^{\rho(r)}$$
$$-[1-\varepsilon_3(r)]\frac{\sin \pi(\rho(r)-p)}{\pi}r^{\rho(r)}\int_k^{k'}\frac{t^{\rho(r)}dt}{t^{p+1}(1+t)};$$

d'où

$$n(k'r) > [1 - \varepsilon_3(r)] \frac{\sin \pi(\rho(r) - p)}{\pi} r^{\rho(r)} \cdot A(k, k'),$$

avec

$$A(k, k') = \frac{\displaystyle\int_k^{k'} \frac{t^{\rho(r)}\, dt}{t^{p+1}(1+t)} - \varepsilon_4(r)}{\displaystyle\int_k^{k'} \frac{dt}{t^{p+1}(1+t)}}.$$

Enfin, en posant $kr = x$, et en prenant $k' = k + \varepsilon$ et r assez grand pour que $\varepsilon_4(r) < \sqrt{\varepsilon}$, on aura

$$A(k, k') = k'^{\rho(r)}\left[1 - h(r)\sqrt{\varepsilon}\right]$$

et finalement

$$n(x) > [1 - \varepsilon(x)] \frac{\sin \pi(\rho(x) - p)}{\pi} x^{\rho(x)},$$

ce qui, comparé à l'inégalité (64), démontre la proposition en vue.

IV. — Applications a la fonction de Riemann.

[**72**] Je vais appliquer les résultats et méthodes précédentes à la fonction $\xi(t)$ de Riemann

$$\xi(t) = \frac{1}{2} s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s), \qquad s = \frac{1}{2} + it,$$

fonction entière de t, d'ordre *un*, et paire en t. Nous poserons

$$t = re^{i\varphi} = x + iy, \qquad -\pi \leqq \varphi \leqq +\pi,$$

d'où

$$s = \frac{1}{2} - y + ix,$$

les propriétés de $\zeta(s)$ montrent que les zéros de $\xi(t)$ sont dans (ou sur) la bande $t = \pm\frac{1}{2}$, nous pourrons donc appliquer à la fonction $\xi(\sqrt{z})$ $\left(\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}\right)$, dont les zéros ont pour orientation *zéro*, les résultats du paragraphe précédent. Il suffit de connaître $\log|\xi(t)|$ pour $t = re^{-i\frac{\pi}{2}}$. On a (¹)

$$\log s \quad = \log r + i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\log(s-1) = \log r + i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\log \pi^{-\frac{s}{2}} = -\frac{\log \pi}{2}\left(\frac{1}{2} - r\sin\varphi + ir\cos\varphi\right),$$

et, en supposant $y < 0$:

$$\log\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \log\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2}\left(ire^{i\varphi} - \frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{ire^{i\varphi}}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{ire^{i\varphi}}{2} - \frac{1}{4} + J\left(\frac{s}{2}\right);$$

et nous obtenons pour $y < 0$, $r > 2$:

$$(65)\quad \log|\xi(t)| = -\frac{\sin\varphi}{2} r\log r + \frac{r\sin\varphi}{2}\log(2\pi e) - \frac{r\cos\varphi}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r\cos\varphi}{\frac{1}{2} - r\sin\varphi}\right) + \frac{7}{4}\log r + A + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$A = \log\sqrt{2\pi} - \frac{3}{4}\log 2 - \frac{\cos^2\varphi}{4} + \log|\zeta(s)|.$$

Pour $t_1 = re^{-i\frac{\pi}{2}}$, nous avons

$$\log|\xi(t_1)| = [1 + \eta(r)]\frac{r\log r}{2};$$

nous poserons

$$\xi(\sqrt{z}) = \psi(z),$$

la fonction $\psi(z)$, d'ordre $\frac{1}{2}$, a ses zéros entre (ou sur) les branches de la courbe ayant en coordonnées polaires ρ, θ l'équation $\rho\sin^2\frac{\theta}{2} = 1$, en posant $z = \rho e^{i\theta}$, on a :

$$\log\psi(-\rho) \sim \frac{\sqrt{\rho}\log\rho}{4};$$

(¹) J'écris immédiatement les formules complètes qui serviront plus loin, mais il est clair que pour l'application actuelle il suffirait d'employer des formules beaucoup moins précises. J'emploierai dans ce paragraphe la notation $O(x)$ de M. Landau.

donc, d'après l'égalité (58),

$$n(\rho) \sim \frac{\sqrt{\rho}\log\rho}{4\pi},$$

et, par suite, le nombre $n(t)$ des zéros de $\xi(t)$ dont la partie réelle est positive et le module (ou la partie réelle) est inférieure à t est

$$n(t) = \big(1 + \eta(t)\big)\frac{t\log t}{2\pi}. \tag{66}$$

[**73**] Je montrerai maintenant que l'application du théorème de M. Jensen et du théorème général de M. Hadamard sur le minimum du module donne presque immédiatement un résultat beaucoup plus précis. La fonction $\xi(t)$ étant paire, on a :

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \log|\xi(re^{i\varphi})|\,d\varphi.$$

Considérons la droite $y = -\frac{3}{2}$, elle coupe le cercle de rayon r en deux points ayant pour arguments

$$\varphi_0 = -\frac{3}{2r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \qquad \varphi_1 = -\pi - \varphi_0;$$

nous calculerons d'abord

$$F(r) = \frac{1}{\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_0} \log|\xi(re^{i\varphi})|\,d\varphi;$$

on a

$$\begin{aligned} F(r) = {} & \frac{1}{\pi} r\log\left(\frac{r}{2\pi e}\right) + \frac{7}{4}\log r + B + \frac{O(\log r)}{r} \\ & + \frac{1}{\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_0}\log|\zeta(s)|\,d\varphi - \frac{r}{2\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_0}\cos\varphi \times \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r\cos\varphi}{\frac{1}{2} - r\sin\varphi}\right)d\varphi, \end{aligned}$$

avec

$$B = \log\sqrt{2\pi} - \frac{3\log 2}{4} - \frac{1}{8}.$$

On trouve

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1}^{\varphi_0}\cos\varphi\,.\,\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r\cos\varphi}{\frac{1}{2} - r\sin\varphi}\right)d\varphi &= -\frac{3\pi}{2r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) - r\int_{u_1}^{u_0}\frac{4u}{(1+u^2)^2}\,\frac{r(1+u^2)-u}{\left(r^2+\frac{1}{4}\right)(1+u^2) - 2ru}\,du \\ & \qquad \left(u_0 = -\frac{3}{4r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad u_1 = \frac{1}{u_0}\right) \\ &= -\frac{3\pi}{2r} + 2 + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \end{aligned}$$

et il vient :

$$(67) \qquad F(r) = \frac{r}{\pi}\log\left(\frac{r}{2\pi e^2}\right) + \frac{7}{4}\log r + B_1 + \frac{O(\log r)}{r} + \frac{1}{\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_0}\log|\zeta(s)|\,d\varphi,$$

$$B_1 = \log\sqrt{2\pi} - \frac{3\log 2}{4} + \frac{5}{8}.$$

[**74**] Nous ferons une première application de ce calcul; $\zeta(s)$ restant compris entre deux nombres finis non nuls pour $y \leqq -\frac{3}{2}$, nous obtenons :

$$\int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx = \frac{r}{2\pi}\log\left(\frac{r}{2\pi e^2}\right) + O(\log r) + A(r),$$

$$A(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_0}^{-\varphi_0}\log|\xi(re^{i\varphi})|\,d\varphi.$$

Or, $f(z)$ étant une fonction entière d'ordre ρ et dont $\rho(x)$ est un exposant précisé, à l'extérieur de cercles décrits de chaque zéro a_n comme centre avec un rayon égal à $r_n{}^{-\lambda}$, on a :

$$|f(z)| > e^{-h(r)r^{\rho(r)}\log r}.$$

Dans le cas actuel, on voit que l'on aura pour une valeur au moins de r comprise entre r et $r+1$

$$\log|\xi(t)| > -h(r)r(\log r)^2,$$

et par suite :

$$A(r) = O\big((\log r)^2\big).$$

Nous arrivons donc à l'égalité

$$(68) \qquad \int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx = \frac{r}{2\pi}\log\left(\frac{r}{2\pi e^2}\right) + O\big((\log r)^2\big)\ (^1),$$

valable pour une valeur au moins de r comprise entre r et $r+1$, donc pour toute valeur de r. Nous employons la méthode utilisée plus haut pour déduire de (68) une valeur approchée de $n(x)$. Nous avons

$$\int_r^{r'} n(x)\frac{dx}{x} = \int_r^{r'}\left(\frac{1}{2\pi}\log\frac{x}{2\pi e} + \frac{O(\log^2 r')}{r'-r}\right)dx,$$

de sorte que $n(x)$ traverse une fois la valeur (ou plus exactement l'intervalle)

$$\frac{x}{2\pi}\log\frac{x}{2\pi e} + x\,\frac{O\big((\log r)^2\big)}{r'-r}$$

---

(1) Ici encore on voit que, pour arriver à cette égalité, il eut suffi de faire les calculs avec l'approximation $O\big((\log r^2)\big)$.

dans l'intervalle r, r'; pour obtenir le meilleur résultat on doit prendre

$$r' = r + \sqrt{r}(\log r)^{\frac{3}{2}},$$

et l'on aura :

$$n(r) = \frac{r}{2\pi}\log\left(\frac{r}{2\pi e}\right) + O\left(\sqrt{r}(\log r)^{\frac{3}{2}}\right). \tag{69}$$

[**75**] On voit bien dans quelle voie on peut préciser, si possible, le résultat que nous venons d'obtenir, si l'on veut se conformer aux méthodes de la théorie des fonctions entières, c'est-à-dire raisonner sur $|\xi(t)|$. Il faut préciser la valeur de $A(r)$, c'est-à-dire préciser le théorème de M. Hadamard sur le minimum du module, en tenant compte du fait que les zéros sont entre les droites $y = \pm 1$, et en s'appuyant sur les résultats acquis. On peut écrire :

$$A(r) = -\frac{\varphi_0}{\pi}\log|\xi(re^{i\varphi_0})| + \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_0}^{-\varphi_0}\log\left|\frac{\xi(re^{i\varphi})}{\xi(re^{i\varphi_0})}\right| d\varphi;$$

supposons que l'on ait trouvé que le rapport

$$\left|\frac{\xi(re^{i\varphi})}{\xi(re^{i\varphi_0})}\right|, \qquad \varphi_0 < \varphi < -\varphi_0$$

reste compris entre $e^{-B(r)}$ et $e^{+B(r)}$, on aura, eu égard aux valeurs de φ_0 et $\xi(t)$, et à l'égalité (67) :

$$\int_0^r n(x)\frac{dx}{x} = F_1(r) + \frac{O(\log r)}{r} + \frac{3\lambda}{2\pi}\frac{B(r)}{r}, \qquad 0 < |\lambda| < 1 + \varepsilon(r). \tag{70}$$

$$F_1(r) = \frac{r}{2\pi}\log\left(\frac{r}{2\pi e^2}\right) + \frac{7}{8}\log r + \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_0}\log|\zeta(s)|\,d\varphi + B_2,$$

$$B_2 = \frac{\log\sqrt{2\pi}}{2} - \frac{3\log 2}{8} - \frac{1}{16}.$$

Supposons de plus que dans l'égalité (70) on ait, pour $r > R$,

$$\log r < B(r) < r^{h(r)}, \qquad O(\log r) < k_1 \log r,$$

ce qui est bien légitime; et supposons que l'égalité (70) ait lieu pour une infinité de valeurs de r telles qu'il y ait une au moins de ces valeurs dans tout intervalle $R', R' + k_2$ $(R' \geqq R)$; dans ces conditions, on aura en dérivant[1] :

$$n(r) = rF_1'(r) + \lambda\sqrt{k_3 B(r)\log r}, \qquad 0 < |\lambda| < 1, \tag{71}$$

$$r \geqq R + \sqrt{k_4\frac{B(R)}{\log R}};$$

k_3 et k_4 étant des nombres fixes indépendants de $B(r)$.

---

[1] En tenant compte de la valeur de $rF_1'(r)$ qui sera donnée au numéro 76.

Nous allons calculer $B(r)$, nous désignerons par $N(r, k_2)$ le nombre des zéros compris entre r et $r+k_2$, et par $N(k_2)$ le plus grand de ces nombres lorsque r varie de $\frac{r}{k_5}$ à rk_5. Nous passerons par l'intermédiaire de la fonction $\psi(z)$ et désignerons par ρ_n le module de son $n^{\text{ième}}$ zéro; nous emploierons aussi le fait qu'elle est d'ordre inférieur à *un*. On aura

$$e^{2B(r)} < \prod_1^\infty \left(1 + \frac{k_6\rho + k_7\rho_n}{(\rho-\rho_n)^2}\right), \qquad \rho = \sqrt{r};$$

nous ferons le calcul pour certaines valeurs de r comprises entre R_1 et $R_1 + k_2 = R_2$; donc, pour ρ compris entre ρ'_1 et $\rho''_1 = \rho'_1 + k_2^2 + 2k_2\sqrt{\rho'_1}$; nous traçons entre les cercles ρ'_1 et ρ''_1, $\mu N(k_2)$ cercles $(\mu > 4)$ dont les rayons sont en progression arithmétique et appliquons le procédé d'exclusion de M. Boutroux; nous prenons ρ dans une couronne non exclue, telle que

$$\frac{\rho - \rho'_1}{\rho''_1 - \rho'_1}, \qquad \frac{\rho''_1 - \rho}{\rho''_1 - \rho'_1}$$

soient supérieurs à $\frac{1}{4}$, ce qui est possible. On aura dès lors :

$$\prod_{\rho'_1 \leqq \rho_i \leqq \rho''_1}^{i} \left(1 + \frac{k_6\rho + k_7\rho_i}{(\rho-\rho_i)^2}\right) < e^{(k_8 + 2\log\mu)N(k_2)}.$$

Pour les valeurs de ρ_i comprises entre $\rho : \sqrt{k_5}$ et ρ'_1 nous grouperons les termes correspondants à $\rho'_{n+1} \leqq \rho_i \leqq \rho'_n = \rho'_{n+1} + 2k_2\sqrt{\rho'_{n+1}} + k_2^2$; nous aurons :

$$\prod_{\frac{\rho}{\sqrt{k_5}} \leqq \rho_i \leqq \rho'_1}^{i} \left(1 + \frac{k_6\rho + k_7\rho_i}{(\rho-\rho_i)^2}\right) < \prod_1^\infty \left(1 + \frac{k_9}{i^2}\right)^{N(k_2)} < e^{k_{10}N(k_2)}.$$

On aura un résultat analogue pour les termes correspondants à $\rho''_1 < \rho_i < \rho\sqrt{k_5}$; enfin

$$\prod_{\rho_i \geqq \rho\sqrt{k_5}}^{i} \left(1 + \frac{k_6\rho + k_7\rho_i}{(\rho-\rho_i)^2}\right) < \prod^{i} \left(1 + \frac{k_{11}}{\rho_i}\right) < e^{k_{12}},$$

et résultat analogue pour le produit des termes restants. Finalement on a

$$2B(r) < (k_{13} + 2\log\mu)N(k_2), \tag{72}$$

et en particulier, en supposant que μ est indépendant de r,

$$B(r) < k_{14}N(k_2), \tag{73}$$

égalité valable pour une valeur de r au moins dans tout intervalle de longueur k_2, et pour $r > R$.

[76] C'est de la formule (73) que nous partirons. Nous pourrions utiliser les résultats déjà obtenus (égalités (66) et (69) pour avoir une limite supérieure de $N(k_2)$, mais il suffit d'utiliser les formules les plus générales de la théorie des fonctions entières; on a

$$n(r) < k_{15} r \log r, \qquad r > R;$$

d'où une première limitation de $B(r)$,

$$B(r) < B_1(r) = k_{16}\, r \log r,$$

ce qui donne dans (72)

$$n(r) = rF_1'(r) + \lambda\sqrt{k_3 k_{16} r}\log r,$$
$$r > R + \sqrt{k_4 k_{16} R} = R_1,$$

résultat déjà plus précis que celui donné par (66) et (69). Nous allons faire une suite d'approximations. Il est nécessaire d'utiliser la valeur de $F_1'(r)$; on a, d'après l'expression de $F_1(r)$:

$$rF_1'(r) = \frac{r}{2\pi}\log\frac{r}{2\pi e} + \frac{7}{8} + C(r) + B_2,$$
$$C(r) = \Re\int_{\varphi_1}^{\varphi_0}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}e^{i\varphi}\,d\varphi + O\left(\frac{1}{r^2}\right) = O(1).$$

Nous pouvons donc, de l'expression trouvée pour $n(r)$, déduire une meilleure limitation de $N(k_2)$, et ainsi de suite. D'une façon générale, nous déduirons de

$$n(r) = rF_1'(r) + \lambda\sqrt{k_3 B_i(r)\log r}, \qquad r \geqq R_i, \qquad 0 < |\lambda| < 1$$

les nouvelles inégalités

$$N(k_2) < k_{17}\sqrt{k_3 B_i(r)\log r},$$
$$B(r) < B_{i+1}(r) = k_{14}k_{17}\sqrt{k_3 B_i(r)\log r},$$
$$n(r) = rF_1'(r) + \lambda\sqrt{k_3 B_{i+1}(r)\log r}, \qquad r \geqq R_{i+1} = R_i + \sqrt{k_4\frac{B_i(R_i)}{\log R_i}};$$

en supposant que $B_i(r)$ est supérieur ou égal à $\log r$. Or, on a :

$$B_i(r) = k_{14}^2 k_{17}^2 k_3 \log r\left[k_{16}k_{14}^{-4}k_{17}^{-4}k_3^{-2}\, r(\log r)^{-1}\right]^{2^{-i}},$$
$$R_i < R + i\sqrt{k_4 R}.$$

Il suffit, dès lors, de prendre $i = 2E(\log_2 r)$ pour voir que

$$(74) \qquad B(r) < (1+\varepsilon)k_{14}^2 k_{17}^2 k_3 \log r, \qquad r > R_0,$$

et

$$(75) \qquad n(r) = \frac{r}{2\pi}\log\frac{\pi}{2\pi e} + O(\log r).$$

On retrouve donc le résultat obtenu par M. von Mangoldt, résultat qu'on aurait obtenu plus rapidement en employant l'égalité

$$n(r+1) - n(r) = O(\log r),$$

qui donnait de suite pour $B(r)$ l'inégalité (74). Mais j'ai préféré employer la méthode d'approximations successives où j'ai simplement utilisé la valeur de $F_1'(r)$. On voit que l'ordre de l'approximation est l'ordre de $F_1'(r)$, c'est là un résultat général.

[**77**] J'indiquerai rapidement quelques conséquences des formules écrites ci-dessus[1]. Si l'on divise les deux membres de l'égalité (75) par r et que l'on intègre de o à r, on ne retrouve pas l'égalité (70) dans laquelle $B(r)$ est remplacé par sa valeur (74), mais seulement (68). L'égalité (70) avec la valeur de $B(r)$ donnée par (74) renferme donc plus de choses que l'égalité de M. von Mangoldt. Elle renseigne sur l'oscillation possible de $n(x)$. En écrivant

$$\int_r^{r'} \frac{n(x)}{x}\,dx = \int_r^{r'} \left(F_1'(x) + \frac{O(\log r')}{r(r'-r)}\right) dx,$$

on voit que, *dans un intervalle r, $r + \log r$, on a une fois au moins l'égalité*

$$n(x) = \frac{x}{2\pi} \log \frac{x}{2\pi e} + O(1).$$

L'égalité (70) n'a pas lieu pour toute valeur de r, mais si dans la méthode d'exclusion de M. Boutroux on prend pour μ une fonction croissante de r, on obtiendra (avec (75))

$$\int_0^{r} \frac{n(x)}{x}\,dx = F_1(r) + \frac{\log \mu . O(\log r)}{r},$$

égalité valable pour des valeurs de r dont la différence est $O\left(\frac{1}{\mu}\right)$; on aura donc, quel que soit r,

$$\int_0^{r} \frac{n(x)}{x}\,dx = F_1(r) + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \log r + \frac{\log \mu}{r} O(\log r),$$

ce qui conduit à prendre $\mu = O(r)$ et donne le résultat : $n(x)$ *étant le nombre des zéros de $\xi(t)$ dont le module est inférieur à x et la partie réelle positive, on a*

$$\int_0^{r} \frac{n(x)}{x}\,dx = F_1(r) + \frac{O\left((\log r)^2\right)}{r},$$

$F_1(r)$ étant la fonction dérivable figurant dans l'égalité (70).

---

[1] Pour les renseignements bibliographiques se reporter au livre de M. Landau ou à l'Encyclopédie.

[**78**] On voit facilement que, lorsque φ varie de φ_0 à $-\varphi_0$, le logarithme du module des facteurs qui figurent dans $\xi(t)$ et autres que $\zeta(s)$, ne varie que d'une constante; on a donc

$$\frac{1}{Ce^{B(r)}} \leqq \left| \frac{\zeta\left(\frac{1}{2} + ire^{i\varphi}\right)}{\zeta\left(\frac{1}{2} + ire^{i\varphi_0}\right)} \right| \leqq e^{B(r)} C,$$

et comme le dénominateur du membre intermédiaire est égal à $O(1)$, on voit que, entre r et $r+1$, il existe une infinité de cercles sur lesquels on a :

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + ire^{i\varphi}\right) \right| > r^{-k}, \qquad k > 0, \qquad \varphi_0 < \varphi < -\varphi_0,$$

C'est d'ailleurs sur cette inégalité que repose toute la démonstration, et si on l'obtenait d'une façon simple, l'égalité (75) en résulterait de suite.

En modifiant un peu la démonstration du numéro 75, on voit que l'on aura le résultat suivant : *Entre τ et $\tau + 1$ il existe une infinité de valeurs de τ pour lesquelles on a :*

$$|\zeta(s)| = |\zeta(\sigma + i\tau)| > \tau^{-k}, \qquad 0 \leqq \sigma \leqq 1.$$

V. — Les chemins de détermination de $f(z)$.

[**79**] Lorsque z s'éloigne indéfiniment sur un chemin L, $f(z)$ reste en général indéterminé, c'est-à-dire que, suivant la terminologie de M. Zoretti, le domaine d'indétermination suivant le chemin L ne se réduit pas en général à un point. Mais il existe des chemins L sur lesquels $f(z)$ tend vers une limite finie ou infinie; j'appellerai ces chemins *chemins de détermination*. Pour les fonctions d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$, sur tout chemin de détermination la limite est ∞. Si un chemin L est un chemin de détermination a, les points du plan pour lesquels $|f(z) - a| \leqq \varepsilon$ forment des aires dont l'une comprend l'arc de L qui s'éloigne indéfiniment; elle est limitée par une courbe continue C_ε que j'appellerai *ligne de module* ε. En donnant à ε toutes les valeurs (positives) entre O et ε_1 on obtient un ensemble de lignes C_ε qui ne recouvre pas nécessairement toute la portion du plan située du même côté de C_{ε_1} que l'arc infini de L. Toute ligne L' qui coupe toutes les lignes de module $\varepsilon < \varepsilon_2$ est un chemin de détermination a, et toute ligne L' de détermination a qui est contiguë à la ligne primitive L, en ce sens que par une déformation continue on peut l'amener à coïncider avec L sans qu'elle cesse à aucun moment d'être une ligne

de détermination a, jouit de cette propriété. Je dirai avec M. Boutroux que l'ensemble des chemins contigus de détermination a constitue une langue de détermination a; une langue est plus ou moins compliquée, suivant que les courbes C_ε ne recouvrent pas ou recouvrent tout le plan intérieur (du côté de L) à C_{ε_1}. Dans le second cas, toutes les trajectoires orthogonales des lignes C_ε sont des chemins de détermination a; c'est ce qui a lieu lorsque a est valeur exceptionnelle du sens de M. Picard. La classification des langues a été faite par M. Boutroux[1] et je ne m'y arrêterai pas, mon but étant beaucoup plus modeste. J'indiquerai, en utilisant la propriété fondamentale des fonctions d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$, quelques propriétés de *largeur* des langues.

[80] Soit α un nombre inférieur à $\frac{1}{2}$, et considérons les fonctions entières $g(z)$ dont le module du $n^{\text{ième}}$ zéro est

$$r_n = n^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad n \geqq n_0;$$

les propriétés des fonctions orientées montrent que, à l'extérieur des cercles décrits de chaque zéro a_n comme centre avec un rayon égal à n^k ($k > 0$), on a

$$|g(z)| = e^{h(r,\varphi) r^\alpha},$$

$h(r, \varphi)$ étant une quantité qui reste comprise entre deux nombres positifs fixes, d'ailleurs faciles à calculer. Nous obtenons ainsi une fonction qui dans tout le plan, le voisinage des zéros excepté, se comporte comme le maximum du module d'une exponentielle.

Je dirai qu'une ligne L qui s'éloigne indéfiniment est *simple*, lorsqu'elle ne coupe qu'une seule fois tout cercle $|z| = r$ et que, si on la fait tourner d'un angle ε autour de l'origine, la distance d'un point $|z|$ de L à la courbe obtenue (du côté de l'aire qui a été balayée dans la rotation) reste supérieure à r^{-k}. Soit un domaine D balayé par une courbe simple L lorsqu'on la fait tourner d'un angle $\frac{\pi}{\beta}\left(\beta \geqq \frac{1}{2}\right)$, soient L_1 et L_2 les courbes qui le limitent. Si γ est un nombre inférieur à β, il existe une fonction $\varphi(z)$ monogène, régulière, non nulle dans le domaine et telle que

$$|\varphi(z)| = e^{h(r,\varphi) r^\gamma}, \qquad |z| = r,$$

---

(1) Voir BOUTROUX, *Sur l'indétermination d'une fonction uniforme dans le voisinage d'une singularité transcendante* (Annales de l'École Normale, 1908, p. 317). J'ai appelé lignes de module constant ce que M. Boutroux appelle lignes frontières; il est clair que les mots langue et languette signifient un ensemble de chemins et non pas un domaine; un chemin est dans *les languettes qui bordent la langue de détermination* a lorsqu'il reste compris entre C_ε et $C_{\varepsilon'}$.

pour tous les points et le contour de D. Soit, en effet, β_1 un nombre compris entre β et γ; faisons tourner L_1 et L_2 respectivement d'un angle $\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\beta_1}-\frac{1}{\beta}\right)$ vers l'extérieur du domaine D, soient L_1' et L_2' les courbes obtenues. Posons

$$u = z^{2\beta_1};$$

lorsque z décrit le domaine D, l'une des déterminations de u décrit un domaine d compris entre deux courbes $l_1\, l_2$, qui sont des courbes simples, et lorsque z décrit le domaine D' formé par l'extension de D jusqu'à L'_1, L'_2, u décrit un domaine d' constitué par tout le plan où est marquée une coupure l'_1 (ligne médiane de $l_1\, l_2$). Soit $g(u)$ la fonction considérée ci-dessus, dont les zéros sont sur l'_1 et pour laquelle $\alpha = \frac{\gamma}{2\beta_1}$, dans tout le domaine d on a

$$|g(u)| = e^{h_1 |u|^{\frac{\gamma}{2\beta_1}}},$$

et par suite, z étant fonction uniforme de u lorsque u décrit d, on a

$$\varphi(z) = g(u).$$

[81] On peut, au moyen de cette fonction $\varphi(z)$, étendre les théorèmes de MM. Lindelöf et Phragmèn au cas de contours limités par des lignes simples. Les résultats que l'on obtiendra ainsi sont très proches des résultats généraux, mais la restriction imposée aux chemins simples est encore très gênante; on ne pourra obtenir que des cas d'exclusion. Étant donnée une langue infinie (langue infinie simple ou multiple de M. Boutroux) et k un nombre fixe positif, marquons sur chaque cercle $|z| = r$ l'arc le plus petit qui est traversé par tous les chemins de la langue sur lesquels $f(z) \geqq r^k$, $|z| = r$. J'appellerai le domaine formé par ces arcs la partie principale de la langue. On aura la proposition suivante :

Si dans une langue infinie on a

(77) $$|f(z)| < e^{r^{\gamma_1}},$$

la partie principale de la langue ne peut être enfermée entre deux chemins simples faisant un angle $\frac{\pi}{\gamma_1 + \delta}$, *$\delta$ étant positif quelconque.*

Car il existe dans le domaine considéré une fonction $\varphi(z)$ ne s'annulant pas et telle que

$$|\varphi(z)| = e^{h r^{\gamma_1 + \frac{\delta}{2}}},$$

et il suffira d'appliquer à la fonction $\frac{f(z)}{z^k}$ le théorème général de MM. Lindelöf et Phragmèn, en prenant $\omega(x) = \left(\varphi(x)\right)^{-1}$, pour voir que l'on arriverait à une contradiction. Il suffit d'ailleurs que l'inégalité (77) ait lieu sur une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants pour que la propriété ait lieu. En particulier, si l'on a

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log_2 M(r)}{\log r} < \frac{1}{2},$$

il ne peut exister de chemins simples sur lesquels $|f(z)| < r^k$.

On voit ainsi qu'il existe certainement une relation entre la façon dont $|f(z)|$ croît dans une langue et la largeur de cette langue (infinie). Il est d'ailleurs aisé de se convaincre qu'il existe effectivement des langues infinies (contiguës à des langues finies) dans lesquelles $f(z)$ croît d'une façon différente de $M(r)$. Soit la fonction

$$E_\alpha(z) = \sum \frac{z^n}{\Gamma(1+n\alpha)},$$

de M. Mittag-Leffler, qui est d'ordre $\frac{1}{\alpha}$ et tend vers zéro dans tout l'angle

$$\frac{\pi\alpha}{2} + \varepsilon \leqq \varphi \leqq 2\pi - \frac{\pi\alpha}{2} - \varepsilon;$$

la fonction

$$F(z) = E_\alpha(z) + e^{(-z)^k},$$

où k est un entier inférieur à $\frac{1}{\alpha}$ $(\alpha < 1)$, aura des langues infinies où $|F(z)|$ croît comme e^{r^k}, contiguës à des langues nulles.

[**82**] J'utiliserai encore les fonctions $g(z)$ à l'extension de théorèmes de M. Lindelöf sur les chemins de détermination finie. Nous aurons la proposition suivante :

Soit $f(z)$ une fonction d'ordre ρ et D un domaine obtenu en faisant tourner d'un angle égal à $\frac{\pi}{\rho+\delta}$, $\delta > 0$, une courbe C partant de l'origine et tel que, en chaque point z du contour du domaine, on puisse tracer un cercle extérieur au domaine tangent au contour et de rayon $\delta_1 r$ $(\delta_1 > 0)$.

Soient C_1 et C_2 deux chemins s'éloignant indéfiniment dans le domaine D et sur lesquels, s étant l'arc, $\frac{ds}{dr}$ reste compris entre deux nombres positifs fixes, si C_1 et C_2 sont des chemins sur lesquels $f(z)$ tend vers une limite, ces limites sont les mêmes.

Je remarquerai d'abord que, sous la seule condition que C soit un chemin simple, et sans hypothèses sur C_1 et C_2, le fait que sur C_1 et C_2 $f(z)$ est fini entraîne cette conclusion pour tout chemin de D compris entre C_1 et C_2. Ceci dit, supposons que $f(z)$ tende vers a sur C_1, vers b sur C_2: nous montrerons que $a - b$ est nul.

Soit α un nombre positif plus grand que *un*, lorsque le point z décrit le domaine D, le point $u = \frac{z}{\alpha}$ décrit un domaine d de la même espèce; je désignerai par $\varphi(u)$ la fonction construite pour le domaine d comme il a été indiqué au numéro 80, mais en prenant ici $n_0 = 1$; la nouvelle hypothèse faite sur C montre alors que l'on a

$$|\varphi(u)| = e^{h|u|^{\rho+\frac{\delta}{2}}}, \qquad 0 < A < h < B, \qquad |u| \geqq U_0,$$
$$0 < D \leqq |\varphi(u)| \leqq E, \qquad |u| \leqq U_0,$$

les nombres A, B, E, D, U_0 dépendant de δ et δ_1, mais étant indépendants de α. On a de plus, ρ étant évidemment supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$,

$$\lim_{u=0} \varphi'(u) = 0$$
$$|\varphi'(u)| < |u|^k e^{h|u|^{\rho+\frac{\delta}{2}}}, \qquad k > 0;$$

enfin, nous pouvons prendre

$$\varphi(0) = 1.$$

Ceci posé, traçons un cercle de rayon r_0 coupant C_1 en A_1, C_2 en A_2, et un cercle de rayon $R > r_0$ coupant ces courbes en A_2 et B_2, si l'on considère le contour Γ formé par les deux arcs de cercles ainsi déterminés et les arcs de C_1, C_2, et que l'on désigne par α un nombre supérieur à r_0, l'intégrale

$$\int_\Gamma f(z) \frac{\varphi'\left(\frac{z}{\alpha}\right)}{\left(\varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right)\right)^2} \frac{dz}{\alpha},$$

prise le long de Γ est nulle, et par suite $f(z)$ étant d'ordre ρ, on a, eu égard aux propriétés de $\varphi(u)$ et $\varphi'(u)$:

$$\int_{A_1\,(C_1)}^{\infty} f(z) \frac{\varphi'\left(\frac{z}{\alpha}\right)}{\left(\varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right)\right)^2} \frac{dz}{\alpha} + \int_{A_2\,|z|=r_0}^{A_1} f(z) \frac{\varphi'\left(\frac{z}{\alpha}\right)}{\left(\varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right)\right)^2} \frac{dz}{\alpha} - \int_{A_2\,(C_2)}^{\infty} f(z) \frac{\varphi'\left(\frac{z}{\alpha}\right)}{\left(\varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right)\right)^2} \frac{dz}{\alpha} = 0.$$

Quelque grand que soit r_0, on peut prendre α de façon que l'intégrale intermédiaire soit inférieure en module à un nombre donné ε, il suffit que

$$\frac{r_0 M}{\alpha} K < \varepsilon, \qquad M > |f(z)|, \qquad K \text{ fini}.$$

D'autre part, en prenant r_0 assez grand, on aura

$$f(z) = a + \eta_1(z) \quad \text{sur } C_1, \qquad |\eta_1(z)| < \varepsilon$$
$$f(z) = b + \eta_2(z) \quad \text{sur } C_2; \qquad |\eta_2(z)| < \varepsilon$$

et par suite :

$$|a - b| < \varepsilon(1 + \varepsilon) \left\{ 1 + \int_{\substack{A_1 \\ (C_1)}}^{\infty} \left| \frac{\varphi'\left(\frac{z}{\alpha}\right)}{\left(\varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right)\right)^2} \right| \frac{ds}{\alpha} + \int_{\substack{A_2 \\ (C_2)}}^{\infty} \left| \frac{\varphi'\left(\frac{z}{\alpha}\right)}{\left(\varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right)\right)^2} \right| \frac{ds}{\alpha} \right\}.$$

La quantité entre crochets reste finie d'après les hypothèses faites sur les chemins C_1 et C_2, de sorte que la propriété est établie. On pourrait remplacer les conditions imposées à C_1 et C_2 par d'autres plus compliquées et un peu moins restrictives, mais il semble impossible de se passer, dans la méthode exposée ci-dessus, d'hypothèses sur la sinuosité des chemins. J'indiquerai encore que, dans la démonstration, le fait que $f(z)$ est borné entre C_1 et C_2 n'intervient pas, ce qui permet d'élargir encore un peu les conditions imposées à C_1 et C_2 (1). Enfin, on verra en employant le principe général de MM. Lindelöf, Phragmèn, que, sur tout chemin s'éloignant indéfiniment entre C_1 et C_2, la *fonction* $f(z)$ tend vers la même limite que sur C_1 et C_2 (2).

[**83**] Je terminerai en donnant des exemples de singularités pouvant se produire dans la disposition des langues et qui montrent les difficultés qui se présentent. Considérons d'abord l'exemple donné par M. Hurwitz

$$f(z) = \int_0^z e^{-z^2}\, dz,$$

sur tout chemin s'éloignant indéfiniment dans l'angle $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, et même sur les côtés $f(z)$ tend vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; la dérivée de $f(z)$ est indéterminée pour $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$; et

---

(1) En faisant usage de la propriété de $f(z)$ d'être borné entre C_1 et C_2, on pourrait employer, au lieu de la fonction $\frac{\varphi'}{\varphi^2}$, une expression de la forme $\frac{1}{1 - \frac{z}{\lambda}}$, λ étant convenablement choisi.

(2) M. Lindelöf démontre des propriétés du genre des précédentes dans son Mémoire *Sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes, etc.* (Acta Societatis Scientiarum Fennicae, t. XXXV, nº 7). M. Denjoy a énoncé dans les Comptes rendus, 8 juillet 1907, des propositions beaucoup plus générales que les précédentes, sans aucune restriction sur la nature des chemins C_1 et C_2; mais sa note semble contenir des inexactitudes (passage de l'énoncé nº 1 du théorème II au théorème I).

lorsqu'on s'éloigne indéfiniment sur une ligne de module constant de $f'(z)$, $f(z)$ tend vers sa limite $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Il n'y a donc pas identité entre les langues d'une fonction et de sa dérivée (voir Boutroux, pp. 362, 369).

De même la considération de la fonction

$$e^{e^z}$$

montre qu'il peut exister des langues (de détermination *un* dans ce cas) qui ne sont contiguës à aucune autre. Ce fait tient sans doute à ce que la fonction est d'ordre infini, mais rien ne prouve que des circonstances analogues ne se présentent pas dans le cas de l'ordre fini.

Rectification. — Au numéro 4 j'ai dit que la fonction $V(X) = \log M(r)$ $(X = \log r)$ a une dérivée croissante continue, en réalité on peut seulement assurer que $V(X)$ a une dérivée à droite et à gauche qui est croissante; on devra considérer partout $\frac{d \log M(r)}{d \log r}$ comme étant la dérivée ou la dérivée à droite ou à gauche. Au numéro 4 la démonstration devra être légèrement modifiée, puisque $V'(X)$ n'est pas certainement continue; dans les énoncés des conditions nécessaires que doit vérifier $\log M(r)$ pour que la correspondance d'ordre zéro soit parfaitement régulière, on devra remplacer *dérivabilité rationnelle* par *croissance rationnelle*. Lorsque les coefficients sont réels, $V'(X)$ est continue, de sorte que la remarque qui termine le numéro 4 est toujours valable.