Annales de la faculté des sciences de Toulouse

A. Buhl

Sur les pseudo-lignes d'infini des intégrales doubles

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 10 (1918), p. 175-206

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1918_3_10__175_0>

SUR LES

PSEUDO-LIGNES D'INFINI DES INTÉGRALES DOUBLES

Par M. A. BUHL

Ce bref Mémoire apporte une contribution minime mais néanmoins intéressante à deux questions mises particulièrement en relief dans la *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* de MM. E. Picard et G. Simart :

1° Rechercher les circonstances réduisant le nombre de certaines intégrales doubles attachées à une surface algébrique, notamment le nombre d'intégrales de seconde espèce.

2° Étudier les causes des restrictions arithmétiques qui apparaissent inéluctablement dans la question précédente.

On sait que la formule de Stokes

$$\int_C \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz = \int\int_S \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} \end{vmatrix} d\sigma$$

s'applique à une surface non seulement en géométrie réelle mais aussi quand x, y et $z = f(x, y)$ appartiennent au champ bicomplexe. Appliquons-la à une surface algébrique.

Une première circonstance, source de grandes difficultés qui n'ont point d'analogue dans la Théorie des fonctions algébriques d'une variable, est que le déterminant symbolique contenu dans l'intégrale double peut fort bien ne pas admettre des lignes d'infini qui existent manifestement dans P, Q, R. L'exemple le plus anciennement connu donne la formule sur l'échange du paramètre et de l'argument, formule qui servira de point de départ.

Si l'on considère une combinaison linéaire d'intégrales doubles telles que

$$\int\int_S \mathrm{J}(x, y, z)\,dx\,dy,$$

celles-ci seront considérées comme réduites en nombre si la forme linéaire en question se réduit à une intégrale de ligne, mais, en général, il faudra prévoir dans P, Q, R des lignes d'infini que rien n'indique dans les $\mathrm{J}(x, y, z)$. Cette préoccupation s'introduit notamment dans le dénombrement des intégrales de seconde espèce, c'est-à-dire avec l'évaluation du nombre ρ de M. Émile Picard.

M. Picard donne des résultats explicites à cet égard en s'appuyant sur l'échange du paramètre et de l'argument quand ce théorème établit une relation linéaire entre intégrales attachées à la surface

$$z^2 = f(x)f(y).$$

Je me suis proposé de généraliser ledit théorème d'une manière qui généraliserait, du même coup, les conclusions relatives aux surfaces algébriques; mais il faut reconnaître que la généralisation ne se produit pas forcément dans la direction souhaitée.

On obtient bien toujours des théorèmes de réduction entre intégrales doubles, mais celles-ci ne sont pas forcément de seconde espèce. Elles ne sont même pas forcément attachées à *une* surface algébrique. Néanmoins, j'ai trouvé assez de formules intéressantes et de résultats explicites pour me pouvoir permettre d'en faire le résumé ci-après.

Quant à la question des conditions arithmétiques, elle est vraiment très facile à côté des précédentes. Elle est déjà vidée par M. Émile Picard et je ne fais que réexpliquer, sur de nouveaux exemples, ce que l'éminent géomètre a déjà fort bien expliqué sur d'autres.

La construction d'intégrales doubles algébriques, à pseudo-lignes d'infini, dépend de certaines conditions d'algébricité imposées à des solutions d'équations différentielles qui, en général, ne se plient pas à ces conditions. On ne les y adapte qu'en particularisant ces équations différentielles dans leur forme, leurs coefficients, ... et de telles restrictions sont évidemment de nature arithmétique.

Le présent travail a été préparé par deux Notes publiées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, les 9 décembre 1918 et 10 mars 1919.

Toulouse, juin 1919.

CHAPITRE PREMIER

Intégrales doubles avec une seule pseudo-ligne d'infini.

[**1**] *L'échange du paramètre et de l'argument.* — Soit un contour c enfermant une aire plane s. Cette airè s s'exprime par l'un ou l'autre des deux membres de l'identité

$$\int_c \mathrm{X}\,d\mathrm{Y} = \int\int_s d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}, \tag{1}$$

laquelle a un sens suffisamment clair et jouera un rôle fondamental dans la suite.

Soit la transformation

$$\mathrm{X} = \frac{\sqrt{\mathrm{P}(x)\mathrm{P}(y)}}{x-y}, \qquad \mathrm{Y} = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\mathrm{P}(y)} - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\mathrm{P}(x)}. \tag{2}$$

Elle change l'identité (1) en

$$\int_{\mathrm{C}} \frac{\sqrt{\mathrm{P}(x)}\,dy}{(x-y)\sqrt{\mathrm{P}(y)}} - \int_{\mathrm{C}} \frac{\sqrt{\mathrm{P}(y)}\,dx}{(x-y)\sqrt{\mathrm{P}(x)}} = \int\int_{\mathrm{S}} \frac{\mathrm{V}(x,y)\,dx\,dy}{2(x-y)^2\sqrt{\mathrm{P}(x)\mathrm{P}(y)}} \tag{3}$$

en laquelle

$$\mathrm{V}(x,y) = (x-y)[\mathrm{P}'(x) + \mathrm{P}'(y)] - 2\mathrm{P}(x) + 2\mathrm{P}(y).$$

Or on sait, et d'ailleurs il est fort aisé de constater, que $\mathrm{V}(x, y)$ est divisible par $(x-y)^2$, si bien que, en dépit du premier aspect, l'intégrale double de (3) n'admet pas la ligne d'infini $x=y$. En général P est un polynôme et *si le contour d'intégration* C *est un rectangle à côtés parallèles aux axes* Oxy, *l'intégrale double étendue à l'aire* S, *de* C, *peut être remplacée par une somme de produits de la forme*

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{\mathrm{P}(x)}} \cdot \int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{\mathrm{P}(y)}}. \tag{4}$$

Tel est, entre intégrales hyperelliptiques, le *théorème d'échange du paramètre et de l'argument.* C'est du moins la forme la plus anciennement connue du théorème; elle semble apparaître avec les travaux de Legendre sur les intégrales elliptiques. Elle est, en tout cas, bien connue d'Abel, tous les historiographes du génial adolescent mentionnant un résultat analogue au précédent obtenu par lui comme en jouant et rapidement noté dans ses plus anciens écrits (¹).

Le théorème, à ne le considérer que dans ses transformations principales et les plus utiles, passe, de là, dans les Mémoires de Jacobi et de Weierstrass où il s'allie avec l'autre et prodigieux théorème d'Abel sur les combinaisons algébrico-logarithmiques de différentielles algébriques. Le problème de l'inversion peut être abordé par ce double moyen, C'est ce que l'on aperçoit surtout chez Karl Weierstrass dans un premier Mémoire, assez embryonnaire, intitulé *Beitrag zur Theorie der Abelschen Integrale* (*Werke*, I, p. 111); l'idée se développe ensuite dans la plupart des écrits des *Werke*.

Toujours sous sa forme précédente, le théorème d'échange attire aussi l'attention de Charles Hermite (*Œuvres*, II, p. 202). Il s'agit ici d'une application élémentaire aux fonctions elliptiques, mais, bien avant, alors que l'illustre géomètre français n'avait que vingt-deux ans, il indique dans ses célèbres lettres à Jacobi des extensions concernant les fonctions de deux variables à quatre périodes (*Œuvres*, I, p. 30). L'idée est sensiblement la même que celle de Weierstrass, peut-être avec une certaine avance quant à la date (1844).

Le problème se dédouble avec les recherches de M. Émile Picard sur les fonctions de deux variables et les surfaces algébriques. Dans ce qui précède, ce qu'il y a d'intéressant dans la formule (3) ou dans ses extensions, c'est surtout le premier membre; il y a là une différence de termes symétriques pour laquelle on semble demander à l'intégrale double du second membre une réduction à une somme de termes tels que (4), bref une réduction à des formes particulièrement simples. Pour les intégrales normales de troisième espèce il y a même une formule analogue à (3) dont le second membre est nul.

Les travaux de M. Émile Picard inversent les choses. L'attention se fixe surtout sur le second membre de (3); c'est une intégrale double, de constitution rationnelle,

$$\frac{1}{2}\int\int_S \frac{V(x, y)}{(x-y)^2 z}\, dx\, dy \tag{5}$$

attachée à la surface algébrique

$$z^2 = P(x)P(y). \tag{6}$$

Comme $V(x, y)$ contient plusieurs termes, (5) est plutôt une somme d'intégrales

(¹) Niels Henrik Abel, *Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance* (Christiana, J. Dybwad; Paris, Gauthier-Villars, 1902). Voir dans ce *Mémorial* l'article de L. Sylow sur *Les études d'Abel et ses découvertes* (p. 31).

N.-H. Abel. *Sa vie et son œuvre*, par Ch. Lucas de Pesloüan (Gauthier-Villars, 1906). Voir p. 28.

doubles qui justement seront considérées comme *non distinctes* quand leur somme s'exprimera par une intégrale de ligne telle que celle constituant le premier membre de (3), intégrale de ligne qui est aussi rationnelle en x, y, z.

Cette question de dénombrement d'intégrales doubles renferme une difficulté capitale qui, comme le remarque encore M. E. Picard, s'aperçoit nettement sur l'égalité (3).

Pour mettre une intégrale double,

$$\int\int R(x, y, z)\,dx\,dy,$$

s'il est possible, sous la forme

$$\int P\,dx + Q\,dy,$$

il faut prévoir, dans P et Q, des lignes d'infini qui peuvent fort bien ne pas exister dans R.

M. E. Picard a consacré de grands efforts et de nombreuses pages à cette très difficile question. Ici je me borne à montrer que le problème pourra être considéré comme quelque peu avancé par le fait de chercher une théorie générale des égalités telles que (3). De même que (3) est attachée à la surface (6), on peut espérer trouver des extensions de (3) attachées à des surfaces plus générales que (6). Naturellement il arrive aussi que, chemin faisant, on trouve des extensions du théorème d'échange considéré de la première manière, extensions qui ont bien leur intérêt aussi.

[**2**] *Généralités sur les transformations à deux variables dont le déterminant ne contient qu'en apparence certaines lignes d'infini.* — Ce qui me paraît avoir quelque originalité de méthode, dans les considérations qui vont suivre, est le fait de toujours rattacher les égalités du type (3) à l'identité

$$\int_c X\,dY = \int\int_s dX\,dY \tag{1}$$

et ce par une transformation dont l'étude pourrait aussi bien être envisagée comme le véritable but.

D'ailleurs, le rôle de l'identité (1) est déjà extrêmement étendu dans une foule de théories. Sans rappeler toutes les applications qui en ont été faites dans mes précédents Mémoires sur la formule de Stokes, il me suffira d'invoquer, ce qui est plus voisin du sujet traité, la méthode qu'emploie Riemann pour obtenir les propriétés fondamentales des intégrales abéliennes, méthode qui consiste à partir de telles intégrales X, Y et à intégrer XdY le long d'un contour, rendant simplement connexe la surface à feuillets superposés qui uniformise la fonction algébrique à étudier.

Soit donc la transformation

$$(7) \qquad X = \frac{\Phi(x, y)}{x - \alpha(y)}, \qquad Y = Y(x, y)$$

qui, les fonctions Φ et Y étant quelconques, doit être considérée comme aussi générale que possible. La forme de X est simplement choisie de manière à mettre en évidence, dans cette fonction, la ligne d'infini $x = \alpha(y)$, qui est évidemment quelconque tant que la fonction $\alpha(y)$ n'est pas précisée. Pour simplifier l'écriture et lorsqu'il n'y aura pas de confusion à craindre, j'écrirai α pour $\alpha(y)$ et α' pour $\alpha'(y)$.

On voit immédiatement l'effet de la transformation (7) sur l'intégrale simple de (1).

Quant à l'intégrale double, elle se change en une autre intégrale double portant sur $\Delta\, dx\, dy$, si Δ est le déterminant fonctionnel

$$(8) \qquad \Delta = \frac{(x-\alpha)(\Phi_x Y_y - \Phi_y Y_x) - \Phi(Y_y + \alpha' Y_x)}{(x-\alpha)^2}.$$

Les indices affectant les fonctions de deux variables indiquent des dérivations partielles; ainsi Φ_x est mis pour Φ_x'.

Nous allons chercher, aussi directement que possible, à quelles conditions Δ ne contient pas la double ligne d'infini $(x-\alpha)^2$.

Pour que le numérateur de Δ soit divisible par $x - \alpha$, la condition est

$$(9) \qquad \alpha' Y_x(\alpha, y) + Y_y(\alpha, y) = 0$$

ou bien

$$(10) \qquad Y(\alpha, y) = C_1$$

si C_1 est une constante arbitraire.

Pour exprimer que le numérateur de Δ est divisible par $(x-\alpha)^2$, j'écrirai que la dérivée de ce numérateur par rapport à x s'annule pour $x = \alpha(y)$. En tenant compte de (9) et en omettant d'écrire des termes manifestement nuls pour $x = \alpha$, on a ainsi

$$\Phi_x(\alpha, y) Y_y(\alpha, y) - \Phi_y(\alpha, y) Y_x(\alpha, y) - \Phi(\alpha, y)[Y_{yx}(\alpha, y) + \alpha' Y_{xx}(\alpha, y)] = 0,$$

ce qui peut s'écrire, en tenant compte à nouveau de (9),

$$[\alpha' \Phi_x(\alpha, y) + \Phi_y(\alpha, y)] Y_x(\alpha, y) + \Phi(\alpha, y)[\alpha' Y_{xx}(\alpha, y) + Y_{yx}(\alpha, y)] = 0$$

ou encore

$$Y_x(\alpha, y)\frac{d}{dy}\Phi(\alpha, y) + \Phi(\alpha, y)\frac{d}{dy}Y_x(\alpha, y) = 0$$

et enfin

$$\Phi(\alpha, y)Y_x(\alpha, y) = C \tag{11}$$

avec une nouvelle constante arbitraire C.

Remarquons tout de suite que l'une des relations (9) et (11) peut être remplacée par la combinaison

$$\Phi(\alpha, y)Y_y(\alpha, y) = -\alpha' C$$

et que l'on peut alors énoncer ce résultat très symétrique :

Le déterminant Δ ne contient pas la ligne d'infini $x = \alpha(y)$ quand sont satisfaites deux quelconques des trois conditions

$$\left\{\begin{aligned} \alpha' Y_x(\alpha, y) + Y_y(\alpha, y) &= 0, \\ \Phi(\alpha, y)Y_x(\alpha, y) &= C, \\ \Phi(\alpha, y)Y_y(\alpha, y) &= -\alpha' C. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Ceci est le système fondamental du présent Mémoire.

[3] *Remarques.* — Le résultat qui vient d'être obtenu peut être résumé d'une manière intéressante en écrivant d'abord le déterminant Δ sous la forme

$$\Delta = \frac{(x-\alpha)(\Phi_x Y_y - \Phi_y Y_x) - (\Phi Y_y + \alpha' C) - \alpha'(\Phi Y_x - C)}{(x-\alpha)^2}. \tag{13}$$

Sur les trois conditions (12), il suffit d'en prendre deux ; prenons les deux dernières. Celles-ci expriment que : *Pour que Δ ne contienne pas la ligne d'infini $x = \alpha(y)$ il suffit, après avoir mis Δ sous la forme* (13), *d'exprimer que les deux dernières parenthèses du numérateur sont divisibles par le facteur simple $x - \alpha(y)$.*

Une autre remarque, absolument essentielle avant d'aller plus loin, va consister à préciser le sens du mot *divisibilité*. Jusqu'ici, dire qu'une expression est divisible par $(x-\alpha)^2$, c'est dire que cette expression et sa dérivée par rapport à x s'annulent pour $x = \alpha$. A ce compte-là

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

est divisible par $(x-y)^2$. Or ceci est évidemment trop général pour l'objet en vue.

Les numérateurs de Δ doivent être divisibles *en termes finis* par $(x-\alpha)^2$ tout comme cela a lieu pour le polynôme $V(x, y)$ qui s'introduit dans l'intégrale double de (3).

Et, même si une telle divisibilité est assurée, il peut encore arriver que Δ contienne des irrationnalités de natures diverses et telles que l'intégrale double de $\Delta\, dx dy$ ne puisse être considérée comme attachée à une même surface algébrique.

Donc on ne peut affirmer qu'à des solutions, *même algébriques*, du système (12), correspondent toujours des propriétés d'intégrales doubles respectivement attachées à des surfaces algébriques. Parmi ces solutions, même algébriques, il faudra encore faire un choix pour lequel il semble bien difficile de donner une méthode générale; ce choix fait naturellement partie des difficultés du problème.

[**4**] *Premières observations sur la résolution du système* (12). — La principale difficulté du système (12) est dans la première équation; si l'on peut construire cette première équation avec des fonctions $Y(x, y)$ et $\alpha(y)$ convenables, on pourra, dans nombre de cas, déterminer Φ par l'une des deux suivantes ou par une combinaison des deux suivantes.

Quant à la première équation (12) il semble qu'elle soit immédiatement intégrable comme il est indiqué en (10), mais, en général, la quadrature ne pourra être qu'indiquée; il restera toujours à en trouver une solution explicite $x = \alpha(y)$. *Celle-ci pourra en être une solution particulière* et il semble qu'il en soit généralement ainsi dans les cas pouvant être explicités.

Ainsi dans le cas de la transformation (2), la première équation (12) correspond à

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{P(y)} - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{P(x)} = C_1,$$

ce qui est la forme (10). L'équation (9) elle-même peut s'écrire

$$\frac{dx}{P(x)} = \frac{dy}{P(y)} \tag{14}$$

avec la solution *particulière* $x = \alpha(y) = y$.

Un second procédé, pour obtenir une première équation (12), consiste à chercher une telle équation parmi les équations différentielles abéliennes dont l'intégrale peut s'exprimer à la fois par des quadratures d'aspect transcendant et par des relations algébriques.

Un exemple simple est fourni par l'équation de la multiplication des fonctions elliptiques

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = m\,\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}. \tag{15}$$

Si m est un entier, cette équation admet une solution particulière $x = \alpha_m(y)$ *rationnelle* en y. Ce cas sera bientôt développé.

Une troisième méthode correspond aux équations différentielles du type

$$\frac{dx}{x\,\mathrm{P}(x^p)} = \frac{dy}{y\,\mathrm{P}(y^p)} \tag{16}$$

où $\mathrm{P}(u)$ désigne un polynôme quelconque en u. Cette équation admet la solution particulière $x = \varepsilon y$ si ε est l'une quelconque des racines d'ordre p de l'unité. On connaît donc ici p solutions particulières. On pourrait peut-être remarquer que si, dans (16), on multiplie les deux termes du premier rapport par x^{p-1} et les deux termes du second par y^{p-1}, cette équation (16) rentre immédiatement dans la forme (14). En fait, les équations (16) sont les seules qui, jusqu'à présent, m'ont fourni *explicitement* des intégrales avec *plusieurs* pseudo-lignes d'infini. Je propose donc, en attendant mieux, de leur conserver un rôle spécial (¹).

Bornons-nous, pour l'instant, à l'indication sommaire de ces trois méthodes. Cela suffit, d'ailleurs, pour mettre sur la voie de quelques remarques de nature très générale.

D'abord, si ces trois méthodes donnent des développements relativement aisés, il n'y a évidemment aucune raison pour qu'on ne puisse pas leur en adjoindre d'autres, ne serait-ce qu'au hasard de quelque nouvelle intuition. Et il semble que ce soit tout particulièrement l'étude de certaines classes d'équations différentielles, du premier ordre, à variables séparées, qui puisse fournir la principale clef quant à la construction des généralisations de la formule (3).

Enfin cette construction paraît soumise, très généralement et naturellement, à des *conditions arithmétiques*. A (15) s'attache le nombre *entier* m ou des nombres complexes spéciaux si les fonctions elliptiques correspondant au choix de f admettent la multiplication complexe, à (16) le nombre ε *racine d'ordre* p *de l'unité*, ...

Avec d'autres méthodes il y a tout lieu d'attendre d'autres conditions ayant encore d'autres aspects au point de vue arithmétique.

[**5**] *Recours à la multiplication des fonctions elliptiques.* — Imaginons que la première équation (12) soit satisfaite; on peut alors déterminer Φ par l'une ou l'autre des deux équations

$$\Phi = \frac{C}{Y_x}, \qquad \Phi = -\alpha' \frac{C}{Y_y}. \tag{17}$$

(¹) L'intervention des p racines de l'unité, c'est-à-dire d'une équation binôme attachée à l'équation différentielle (16), n'est qu'un cas très particulier de l'intervention des équations *abéliennes* dont toutes les racines sont permutées par de certains opérateurs.

On obtient, dans ces conditions, les formules

$$(18)\quad \int_C \frac{Y_x dx + Y_y dy}{Y_x(x-\alpha)} = \int\int_S \frac{(x-\alpha)[Y_x Y_{xy} - Y_y Y_{xx}] - Y_x(Y_y + \alpha' Y_x)}{Y_x^2(x-\alpha)^2} dx\,dy,$$

$$(19)\quad \int_C \alpha' \frac{Y_x dx + Y_y dy}{Y_y(x-\alpha)} = \int\int_S \frac{(x-\alpha)[\alpha'(Y_x Y_{yy} - Y_y Y_{xy}) - \alpha'' Y_x Y_y] - \alpha' Y_y (Y_y + \alpha' Y_x)}{Y_y^2(x-\alpha)^2} dx\,dy.$$

Ce sont vraisemblablement les plus simples que l'on puisse obtenir quant à la détermination de Φ, par le système (12), sans hypothèse spéciale sur Y. C'est pourquoi elles viennent ici en premier lieu.

Nous ferons maintenant, quant à Y, un choix remarquable et propre à faire retrouver des résultats connus. Soit

$$(20)\quad Y = m\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{f(y)}} - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

C'est l'hypothèse déjà représentée par l'équation (15); il est entendu que f est un polynôme du troisième degré. Alors les équations (18) et (19) deviennent respectivement

$$\int_C \frac{\sqrt{f(x)}}{x-\alpha_m}\left(\frac{m\,dy}{\sqrt{f(y)}} - \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}\right) = \int\int_S \frac{m(x-\alpha_m)f'(x) - 2mf(x) + 2\alpha'_m z}{2(x-\alpha_m)^2 z} dx\,dy.$$

$$\int_C \frac{\alpha'_m\sqrt{f(y)}}{x-\alpha_m}\left(\frac{m\,dy}{\sqrt{f(y)}} - \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}\right) = \int\int_S \frac{(x-\alpha_m)[2\alpha''_m f(y) + \alpha'_m f'(y)] + 2\alpha'^2_m f(y) - 2m\alpha'_m z}{2(x-\alpha_m)^2 z} dx\,dy$$

si

$$z = \sqrt{f(x)f(y)}$$

et si α_m désigne la solution *rationnelle* $\alpha_m(y)$ déjà indiquée pour (15).

L'addition des deux formules, la première étant multipliée par m, donne la suivante, plus symétrique et d'ailleurs plus simple par rapport à z,

$$(21)\quad \int_C \frac{m\sqrt{f(x)} + \alpha'_m\sqrt{f(y)}}{x-\alpha_m}\left(\frac{m\,dy}{\sqrt{f(y)}} - \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}\right) = \int\int_S \frac{V(x,y)\,dx\,dy}{2(x-\alpha_m)^2\sqrt{f(x)f(y)}},$$

en posant

$$V(x,y) = (x-\alpha_m)[m^2 f'(x) + 2\alpha''_m f(y) + \alpha'_m f'(y)] - 2m^2 f(x) + 2\alpha'^2 f(y).$$

L'équation (21) peut être immédiatement vérifiée par la formule de Riemann

$$\int_C P dx + Q dy = \int\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy. \tag{22}$$

A ce propos remarquons qu'il est souvent fort avantageux, pour certaines recherches subséquentes, de partir de formules telles que (21) que l'on se borne à vérifier, par (22), simplement pour être certain de l'exactitude du point de départ; il n'est pas alors nécessaire de voir sans cesse les formules au travers de leur procédé de genèse. C'est ainsi que Jacobi, Weierstrass, Hermite font couramment usage de (3) sans démonstration.

Quant au polynôme V, qui figure dans l'intégrale double de (21), il est également très aisé de vérifier directement sa divisibilité par $(x - \alpha_m)^2$.

On peut observer aussi que la formule (21) peut se déduire en bloc de l'identité (1) par la transformation

$$X = \frac{m\sqrt{f(x)} + \alpha'_m\sqrt{f(y)}}{x - \alpha_m}, \qquad Y = \int_{y_0}^{y} \frac{m\,dy}{\sqrt{f(y)}} - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}. \tag{23}$$

[**6**] *Significations diverses de la formule* (21). — La formule (21) exprime d'abord un théorème d'échange absolument analogue à celui exprimé par (3); elle se réduit même à (3) pour $m = 1$.

La division de $V(x, y)$ par $(x - \alpha_m)^2$ donne évidemment un quotient fini et, si l'on prend pour contour C un rectangle de côtés parallèles aux axes Oxy, l'intégrale double de (21) va se scinder en une somme de termes dont chacun sera le produit d'une intégrale simple en x par une intégrale simple en y.

Une autre portée de la formule (21) est qu'elle semble devoir diminuer le nombre des intégrales doubles de seconde espèce attachées à la surface $z^2 = f(x)f(y)$, mais des précisions sont nécessaires.

Jusqu'ici m a été considéré comme un entier et il semble, au premier abord, qu'il y ait en (21) une infinité de formules correspondant aux diverses valeurs entières de m. En réalité, elles ne sont pas distinctes, quant au problème de réduction envisagé, de par certaines relations de récurrence existant entre les α_m; elles ne donnent même rien de plus que (21) pour $m = 1$, c'est-à-dire que (3). C'est un fait sur lequel je ne m'arrêterai pas ici et qui a d'ailleurs été complètement discuté, avec des points de départ différents, par M. Émile Picard (*Fonctions de deux variables*, II, p. 259). Mais *si les fonctions elliptiques correspondant au choix du polynôme f admettent la multiplication complexe*, m peut prendre une valeur complexe pour laquelle la formule (21) joue un rôle nouveau, essentiellement distinct de celui qu'elle joue pour m entier.

Cette intervention de la multiplication complexe dans l'abaissement du nombre ρ relatif à la surface $z^2 = f(x)f(y)$ a encore été étudiée, très en détail, par M. Picard; mais, autant que j'ai pu m'en rendre compte, sans écriture explicite de la formule (21).

Le seul aspect du premier membre de cette formule (21) rappelle l'équation (15) et ceci porte à penser que les résultats associés à la *multiplication* des fonctions elliptiques doivent conduire à des résultats plus généraux associés à la *transformation* des fonctions elliptiques ou même abéliennes. Mais les résultats *explicites* à obtenir dans ces voies semblent encore à l'état bien embryonnaire.

[7] *Première extension de la formule* (21). — La formule (21) résultant de la transformation (23) appliquée à l'identité (1), il est indiqué de chercher à étudier la transformation plus générale

$$X = \frac{\sqrt{g(x)} + \alpha'\sqrt{f(y)}}{x - \alpha}, \qquad Y = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{f(y)}} - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{g(x)}}. \tag{24}$$

Appliquée à (1), celle-ci donne

$$\int_C \frac{\sqrt{g} + \alpha'\sqrt{f}}{x - \alpha}\left(\frac{dy}{\sqrt{f}} - \frac{dx}{\sqrt{g}}\right) = \int\int_S \frac{(x-\alpha)[g' + \alpha' f' + 2\alpha'' f] + 2\alpha'^2 f - 2g}{2(x-\alpha)^2\sqrt{fg}} dx\, dy. \tag{25}$$

Pour que cette formule soit de celles ici étudiées, il faut que l'expression fractionnaire sous l'intégrale double ait son numérateur divisible par $(x - \alpha)^2$. La condition de divisibilité par $x - \alpha$ est

$$\alpha'^2 f(y) - g(\alpha) = 0. \tag{26}$$

C'est-à-dire que $x = \alpha(y)$ doit être solution de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{g(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f(y)}}. \tag{27}$$

Reste ensuite à exprimer que la dérivée par rapport à x du numérateur en litige s'annule pour $x = \alpha(y)$, ce qui donne la condition

$$g'(\alpha) + \alpha' f'(y) + 2\alpha'' f(y) - 2g'(\alpha) = 0$$

naturellement vérifiée si (26) l'est.

Quels peuvent être maintenant les différents rôles de la formule (25).

Elle exprime indéniablement un théorème d'échange analogue à ceux déjà rencontrés.

Mais elle ne saurait, *en général*, apporter un théorème de réduction pour les intégrales attachées à la surface

$$z^2 = g(x)f(y). \tag{28}$$

En effet, pour que l'intégrale double de (25) soit une intégrale de construction rationnelle en x, y, z il faudrait que $\alpha(y)$ soit une fonction rationnelle et, *en général*, l'équation (27) n'aura pas de telles solutions. Celles-ci impliqueraient, en effet, qu'on pourrait unir rationnellement les intégrales

$$\int \frac{dx}{\sqrt{g(x)}}, \qquad \int \frac{dy}{\sqrt{f(y)}}.$$

On retrouve, encore ici, un procédé de discussion dû à M. E. Picard (*loc. cit.*, p. 254).

Resterait alors à étudier les cas particuliers où (27) admet des solutions rationnelles; l'un d'eux fait l'objet du paragraphe précédent. Mais la question générale est indéniablement liée à celle de la réduction du nombre des périodes dans les intégrales abéliennes.

Bornons-nous simplement à remarquer que si la formule initiale (3) exprime à la fois un théorème d'échange et une réduction dans le nombre des intégrales de seconde espèce attachées à la surface (6), on ne peut pas compter que des extensions de (3) généraliseront toujours les deux questions à la fois. Ainsi (25) est un nouveau théorème d'échange, mais n'apporte point, quant aux intégrales attachées à la surface (28), de réduction analogue à celle qui se produit quand f et g sont des polynômes identiques (cf. E. Picard, *loc. cit.*, p. 321).

[**8**] *Extension de la formule* (25). — Cherchons maintenant à voir ce que devient l'identité (1) quand on lui applique la transformation

$$X = \frac{[g(x)]^{\mu} + \alpha'[f(y)]^{\nu}}{x-\alpha}, \qquad Y = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{[f(y)]^{\nu}} - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{[g(x)]^{\mu}}. \tag{29}$$

On obtient sans peine l'égalité

$$\int_C \frac{g^{\mu} + \alpha' f^{\nu}}{x-\alpha}\left(\frac{dy}{f^{\nu}} - \frac{dx}{g^{\mu}}\right) = \int\int_S \frac{(x-\alpha)[\mu g^{2\mu-1}g' + \nu\alpha' f^{2\nu-1}f' + \alpha'' f^{2\nu}] + \alpha'^2 f^{2\nu} - g^{2\mu}}{(x-\alpha)^2 f^{\nu} g^{\mu}}\,dx\,dy. \tag{30}$$

L'expression fractionnaire sous l'intégrale double a son numérateur divisible par $x - \alpha$ si

$$\alpha'^2[f(y)]^{2\nu} - [g(\alpha)]^{2\mu} = 0,$$

c'est-à-dire si $x = \alpha(y)$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{[g(x)]^{\mu}} = \frac{dy}{[f(y)]^{\nu}}. \tag{31}$$

Quant à la division du même numérateur par $(x-\alpha)^2$, elle exige

$$\nu\alpha'[f(y)]^{2\nu-1}f'(y) + \alpha''[f(y)]^{2\nu} - \mu[g(\alpha)]^{2\mu-1}g'(\alpha) = 0,$$

ce qui a naturellement lieu si la première condition a lieu.

Quant au rôle de la formule (30), on voit d'abord qu'elle exprime un théorème d'échange analogue à celui exprimé par (25). Mais quant à savoir si elle peut être de quelque secours pour des réductions d'intégrales attachées à quelque surface algébrique, la question est fort compliquée.

D'abord la formule (30) me paraît écrite d'une manière aussi heureuse que possible précisément sous la forme (30). On voit ainsi, par le premier membre, que l'étude de cette formule (30) est liée, de la manière la plus manifeste, à celle de l'équation différentielle (31).

Voici cependant une transformation non sans quelque intérêt. Tout d'abord, si l'on effectue le produit des deux facteurs situés sous l'intégrale simple de (30), on trouve quatre termes, parmi lesquels deux représentent la différentielle de $\log(x-\alpha)$; on peut supprimer ceux-ci sous réserve, pour raisonner en toute sécurité, que le contour C ne coupera pas la ligne $x = \alpha(y)$; une telle restriction est d'ailleurs sous-entendue, dans tout ce qui précède, de manière générale.

Sous l'intégrale double divisons haut et bas par f^{ν} et posons

$$z = \frac{g^{\mu}}{f^{\nu}}, \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x} = \mu z \frac{g'}{g}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\nu z \frac{f'}{f}.$$

Alors (30) se change en ce cas particulier de la formule de Stokes

$$\int_C \frac{z^2 dy - \alpha' dx}{(x-\alpha)z} = \int\int_S \begin{vmatrix} -p & -q & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-\alpha'}{(x-\alpha)z} & \frac{z}{x-\alpha} & 0 \end{vmatrix} dx\,dy. \tag{32}$$

Il y a là, manifestement, des intégrales *associées* à la surface

$$z = \frac{[g(x)]^{\mu}}{[f(y)]^{\nu}}, \tag{33}$$

qui est une surface algébrique si μ et ν sont rationnels, mais non *attachées* à cette surface, au sens que l'on donne d'ordinaire au mot *attaché;* il faudrait, pour cela, que ces intégrales soient de construction *rationnelle* en x, y, z. Il faudrait, par suite, que $x = \alpha(y)$ soit une solution *rationnelle* de l'équation différentielle (31).

Nous voilà donc ramenés à chercher les formes, particulières à coup sûr, de $g(x)$ et de $f(y)$, et les valeurs, non moins particulières, de μ et ν, pour lesquelles (31) admet une ou plusieurs solutions rationnelles. Si une telle question a ses grandes lignes dans la théorie des fonctions abéliennes, elle n'est cependant pas riche en cas particuliers explicites et maniables. Tout ce que l'on peut pronostiquer, de manière assez vraisemblable, est que la surface (33), *pour* $g(x)$, $f(y)$, μ, ν *particuliers,* aura des intégrales doubles de seconde espèce (ou ayant, en certaines régions des champs d'intégration, le caractère d'intégrales de seconde espèce) dont le nombre admettra, en (32), un théorème de réduction.

Ce serait là la généralisation de ce que produit la multiplication complexe quant aux intégrales attachées à la surface $z^2 = f(x)f(y)$.

Et quant aux particularisations ainsi espérées pour $g(x), f(y)$, μ, ν, il faut évidemment s'attendre à les rencontrer, en général, sous forme *arithmétique*, ne serait-ce que parce que μ, ν et les coefficients figurant dans $g(x)$ et $f(y)$ sont des nombres.

On aperçoit donc ici, d'une manière relativement simple, le mécanisme arithmétique de questions liées aux plus hautes difficultés arithmétiques de la théorie des équations différentielles.

Il n'est pas non plus sans intérêt de remarquer que la méthode employée, pour revenir effleurer ces questions ardues, a sa base en la considération de transformations élémentaires, telles (24), appliquées à l'identité (1).

[9] *Formes irrationnelles de* Φ *tirées du système* (12). — Jusqu'ici les divers irrationnalités introduites l'ont été uniquement de par le choix de l'équation différentielle qui est la première équation du système (12). Rappelons que les équations (12) sont au nombre de trois par raison de symétrie, mais qu'il suffit d'en considérer deux, et remplaçons les deux dernières par une de leurs combinaisons, ayant par exemple la forme

$$F(\Phi Y_x,\ \Phi Y_y) = F(C,\ -\alpha' C). \tag{34}$$

On pourra tirer de là des formes de Φ, irrationnelles en général, auxquelles correspondront des formules où Y pourra, à l'inverse, correspondre à une équation différentielle de structure rationnelle.

Les formules ainsi obtenues paraissent plus compliquées ou, tout au moins, d'écriture plus laborieuse que celles déjà formées. Parfois, mais seulement dans des cas très particuliers, les deux méthodes semblent se rejoindre.

Expliquons-nous sur un exemple. Prenons pour (34)

$$\Phi Y_x \,.\, \Phi Y_y = -\alpha' C^2, \qquad \text{d'où} \qquad \Phi^2 = -\frac{\alpha' C^2}{Y_x Y_y}.$$

Alors le déterminant Δ, écrit en (8), se calcule facilement en multipliant haut et bas par Φ, ce qui permet de ne calculer que les dérivées partielles de Φ^2, savoir $2\Phi\Phi_x$ et $2\Phi\Phi_y$. La constante C disparaît du calcul et, en posant

$$z^2 = -\frac{\alpha}{Y_x Y_y}, \tag{35}$$

on obtient

$$\int_C \frac{z dY}{x-\alpha} = \int\!\!\int_S \frac{(x-\alpha)\left[Y_x \frac{\partial}{\partial y}\frac{\alpha'}{Y_x Y_y} - Y_y \frac{\partial}{\partial x}\frac{\alpha'}{Y_x Y_y}\right] + 2\alpha'\left[\frac{1}{Y_x} + \frac{\alpha'}{Y_y}\right]}{2(x-\alpha)^2 z} dx\,dy. \tag{36}$$

La vérification directe, par la formule de Riemann ou par celle de Stokes, est encore aisée.

Imaginons maintenant que l'on prenne pour équation (10)

$$Y = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{Q(y)} - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{P(x)} = C_1,$$

c'est-à-dire pour équation (9) ou première équation (12)

$$\frac{dx}{P(x)} = \frac{dy}{Q(y)} \tag{37}$$

et que l'on ait de cette dernière une solution $x = \alpha(y)$. Alors (36) devient

$$\int_C \frac{\sqrt{\alpha' P}\, dy}{(x-\alpha)\sqrt{Q}} - \int_C \frac{\sqrt{\alpha' Q}\, dx}{(x-\alpha)\sqrt{P}} = \int\!\!\int_S \frac{(x-\alpha)(\alpha' P' + \alpha' Q' + \alpha'' Q) - 2\alpha'(P - \alpha' Q)}{2(x-\alpha)^2 \sqrt{\alpha' PQ}} dx\,dy. \tag{38}$$

Cette formule est encore de vérification directe aisée. Elle correspond à la transformation

$$X = \frac{1}{x-\alpha}\sqrt{\alpha' P(x) Q(y)}, \qquad Y = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{Q(y)} - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{P(x)} \tag{39}$$

appliquée à l'identité (1). On voit aussi sans peine que, sous l'intégrale double de (38), l'expression fractionnaire a son numérateur divisible par $(x-\alpha)^2$.

Si, dans (37), on suppose que P et Q soient des polynômes identiques, on a alors la solution $x=y$ d'où $\alpha'=1$, $\alpha''=0$, et la formule (38) redonne la formule (3) dont elle est, vraisemblablement, la généralisation la plus simple et la plus naturelle.

Tout comme (3), (38) exprime d'abord un théorème d'échange.

Si $\alpha(y)$ est rationnelle et si P et Q sont des polynômes, la formule (38) est susceptible de réduire d'une unité le nombre des intégrales doubles de seconde espèce attachées à la surface

$$z^2=\alpha'(y)P(x)Q(y), \tag{40}$$

ainsi qu'il arrive pour $P\equiv Q$, $\alpha'=1$. M. Émile Picard s'est proposé de rechercher si une telle réduction était possible pour la surface

$$z^2=P(x)Q(y)$$

et la conclusion est négative, en général (*Fonctions de deux variables*, II, p. 319). Il est remarquable que cette réduction semble redevenir possible par l'introduction d'un facteur $\alpha'(y)$ dans l'équation de la surface, mais il faudrait, pour assurer définitivement la chose, traiter les cas où l'équation différentielle (37) admet des solutions $x=\alpha(y)$ rationnelles. De telles solutions ne peuvent évidemment exister que pour des formes particulières des polynômes P et Q, c'est-à-dire pour des valeurs particulières de leurs coefficients, bref *à des conditions arithmétiques*.

[**10**] *Autre exemple.* — On peut entrevoir des généralisations des surfaces (40) pour lesquelles on aurait des résultats analogues au précédent. Prenons pour relation (34)

$$\Phi^p Y_x^{\,p}\,.\,\Phi^q Y_y^{\,q}=C^{p+q}(-\alpha')^q, \qquad \text{d'où} \qquad \Phi^{p+q}=C^{p+q}(-\alpha')^q Y_x^{-p}Y_y^{-q}.$$

Alors en rattachant tout de suite les choses à l'équation (37), c'est-à-dire en posant

$$Y_y=\frac{1}{Q}, \qquad Y_x=-\frac{1}{P}$$

on obtient la formule

$$\int_C \frac{\alpha'^{\frac{q}{p+q}}}{x-\alpha}\left[\left(\frac{P}{Q}\right)^{\frac{p}{p+q}}dy-\left(\frac{Q}{P}\right)^{\frac{q}{p+q}}dx\right]=\int\int_S \frac{V(x,y)\,dx\,dy}{(p+q)(x-\alpha)^2P^{\frac{q}{p+q}}(\alpha'Q)^{\frac{p}{p+q}}} \tag{41}$$

en laquelle

$$V(x,y)=(x-\alpha)[p\alpha'P'+q\alpha'Q'+q\alpha''Q]-(p+q)\alpha'(P-\alpha'Q).$$

Pour $p = q = 1$ elle redonne (38); elle constitue un théorème d'échange.

Si l'on écrit

$$P^{\frac{q}{p+q}} = P \, . \, P^{\frac{-p}{p+q}},$$

on peut considérer la formule (41) comme attachée à la surface

$$z = \left(\frac{\alpha' Q}{P}\right)^{\frac{p}{p+q}}.$$

Mais pour que ceci ait lieu au sens *algébrique* ordinaire du mot *attaché*, il faut, en général, que la fonction $\alpha(y)$ soit rationnelle.

[**11**] *Autres formes de* Φ. *Cas où l'on n'obtient que des propriétés concernant certaines surfaces algébriques mais point de théorème d'échange.* — En combinant les deux dernières équations (12) on peut former des relations remplaçant (34) et d'un type différent. Par exemple

$$F(\Phi, \Phi) = F\left(\frac{C}{Y_x}, -\frac{\alpha' C}{Y_y}\right).$$

Prenons

$$2\Phi^2 = C^2(Y_x^{-2} + \alpha'^2 Y_y^{-2})$$

Alors en utilisant tout de suite l'équation différentielle (37), c'est-à-dire en prenant

$$Y_y = \frac{1}{Q(y)}, \qquad Y_x = -\frac{1}{P(x)}$$

on arrive à la formule

$$\int_C \frac{\sqrt{P^2 + \alpha'^2 Q^2}}{x - \alpha}\left(\frac{dy}{Q} - \frac{dx}{P}\right) = \int\int_S \frac{V(x, y)\,dx\,dy}{(x-\alpha)^2 PQ\sqrt{P^2 + \alpha'^2 Q^2}} \tag{42}$$

où

$$V(x, y) = (x - \alpha)[P^2P' + \alpha'^2Q^2Q' + \alpha'\alpha''Q^3] - (P^2 + \alpha'^2Q^2)(P - \alpha'Q).$$

Notons encore la possibilité d'une vérification directe et immédiate par la formule de Riemann ou par celle de Stokes. La divisibilité de $V(x, y)$ par $(x - \alpha)^2$ s'aperçoit tout aussi facilement.

Il faut maintenant noter une importante différence entre la formule (42) et les formules précédemment établies, telles (3), (21), (25), (30), (38), (41). Contrairement à ces dernières, la formule (42) n'exprime point de théorème d'échange, du moins au sens donné jusqu'ici à cette expression. Même si l'aire S est celle d'un rectangle C, de côtés parallèles aux axes, on ne peut conclure que l'intégrale double est une somme de produits d'intégrales simples *dont chacune ne dépend que de x ou que de y*, l'impossibilité provenant évidemment du radical contenu en dénominateur dans ladite intégrale ou plutôt du binôme situé sous ce radical.

Mais, au point de vue de la théorie des surfaces, la formule (42) peut être attachée à

$$z^2 = [P(x)]^2 + \alpha'^2[Q(y)]^2.$$

Elle exprime alors un théorème de réduction entre intégrales de la forme

$$\int\int_S \frac{x^m y^n}{PQz}\,dx\,dy.$$

[12] *Premières conclusions.* — La plus grande difficulté, rencontrée dans ce qui précède, quant à la construction d'intégrales doubles avec une pseudo-ligne d'infini, provient évidemment de l'étude de la première équation (12). Or, si l'on se rappelle que cette équation exprime simplement la divisibilité du numérateur de Δ par $x - \alpha(y)$, on peut d'abord faire cette remarque assez curieuse que le plus difficile est d'exprimer la divisibilité du numérateur en question par le facteur simple $x - \alpha$; si cette première division est possible, on pourra toujours s'arranger à déterminer la fonction $\Phi(x, y)$ de manière à ce que le numérateur de Δ soit divisible une seconde fois par $x - \alpha$, ceci sans nouvelles difficultés transcendantes.

Quant à la première équation (12), c'est l'équation différentielle

$$Y_x dx + Y_y dy = 0 \tag{43}$$

qui doit admettre la solution particulière $x = \alpha(y)$. Or, toute équation différentielle du premier ordre peut être ramenée à la forme (43) de par l'usage du facteur intégrant, ce qui, à vrai dire, suppose, en général, que l'on ait pu intégrer l'équation.

Mais on n'en voit pas moins, définitivement, que *la construction des intégrales doubles à pseudo-ligne d'infini*, ici envisagée, *revient à l'étude générale des équations différentielles du premier ordre*. Prenons une telle équation, au hasard; il faudra savoir l'intégrer pour la mettre, ou imaginer qu'on la mette, sous la forme (43). On aura ainsi la fonction Y. Il faudra ensuite connaître une solution $x = \alpha(y)$ de cette même équation différentielle, solution qui, dans les exemples précédents, se trouve toujours être rationnelle, mais qui, en général, pas plus que Y, ne pourra garder tout son caractère transcendant, *si l'on veut aboutir à des intégrales doubles de constitution algébrique*. Comme on l'a vu, par exemple sur la formule (36), les intégrales doubles en litige dépendent de $Y(x, y)$ et de $\alpha(y)$, donc de l'intégrale générale et d'une solution particulière de (43). L'étude est donc celle d'équations différentielles dont des solutions et leurs dérivées doivent satisfaire à certaines conditions d'algébricité. Or il n'y a pas de raison générale pour qu'une équation différentielle ait de telles solutions; ceci n'arrivera que pour certaines formes, pour certaines particularités des coefficients, et voilà, vraisemblablement, l'explication des conditions *arithmétiques* qui s'introduiront, *en général,* dans la construction des intégrales doubles à pseudo-ligne d'infini, quand ces intégrales doivent être ou de constitution algébrique ou *attachées* à *une* surface algébrique.

Il semble bien que l'on aperçoive tout ceci dans les résultats déjà acquis, bien que ce soit d'une manière plutôt étroite.

Les équations (14), (15), (16) sont des équations à variables séparées; donc elles sont immédiatement sous la forme (43) sans aucune recherche explicite de facteur intégrant; on en utilise ensuite des solutions particulières rationnelles, cependant que Y_x et Y_y ont des formes algébriques très simples.

Ce qui est fait est très peu de chose par rapport à ce qui reste à faire; les théorèmes d'échange, la construction des intégrales doubles à pseudo-lignes d'infini, les classifications et réductions concernant le nombre de telles intégrales, ne peuvent s'approfondir qu'en même temps que la théorie des équations différentielles du premier ordre.

CHAPITRE II

Extensions. Intégrales à plusieurs pseudo-lignes d'infini. Intégrales multiples.

[**13**] Lorsque l'on connaît une solution particulière d'une équation différentielle du premier ordre, on peut, de bien des manières, former une autre équation admettant la même solution particulière que la première. On peut donc se proposer, si l'on possède une certaine solution $x = \alpha(y)$ de la première équation d'un certain système (12), de conserver cette solution pour d'autres formes de Y. Nous allons voir que le projet n'est pas sans présenter quelque intérêt.

Imaginons que la première équation (12), ou l'équation (9) soit intégrée sous la forme (10). Cette équation

$$Y(\alpha, y) = C_1 \tag{10}$$

subsiste si l'on remplace $Y(x, y)$ par $\Psi Y + \Omega$ si, pour $x = \alpha(y)$, Ψ se réduit à une constante ainsi que Ω. De telles substitutions, dans les formules déjà encombrantes du chapitre précédent, conduiraient à des formules plus encombrantes encore. Mais on peut aisément voir ce que donne la méthode sur quelques exemples particuliers.

Reprenons la formule (36) et faisons-y

$$Y = A(x-\alpha) + \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{Q(y)} - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{P(x)}. \tag{44}$$

Pour le moment, A est un simple coefficient constant. Quant à α c'est toujours la solution $x = \alpha(y)$ de l'équation (37). Mais alors, au lieu et place de cette équation (37), nous avons l'équation $dY = 0$, où Y est la nouvelle expression (44), c'est-à-dire

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\dfrac{P}{1-AP}}{\dfrac{Q}{1-AQ\alpha'}}. \tag{45}$$

Il est d'ailleurs immédiatement visible sur cette équation qu'elle admet la solution particulière $x = \alpha(y)$ s'il en est ainsi de (37). Et alors, dans (36), on peut remplacer

$$Y_x \quad \text{par} \quad A - \frac{1}{P}, \qquad Y_y \quad \text{par} \quad -\alpha' A + \frac{1}{Q},$$

ce qui revient à remplacer, dans (38),

$$-\frac{1}{P} \quad \text{par} \quad A - \frac{1}{P}, \qquad \frac{1}{Q} \quad \text{par} \quad -\alpha' A + \frac{1}{Q}$$

ou, finalement, comme on pouvait le lire sur (45),

$$P \quad \text{par} \quad \frac{P}{1-AP}, \qquad Q \quad \text{par} \quad \frac{Q}{1-AQ\alpha'}. \tag{46}$$

Alors les deux membres de la formule (38) deviennent respectivement

$$\int_C \frac{1}{(x-\alpha)} \sqrt{\frac{\alpha' PQ}{(1-AP)(1-AQ\alpha')}} \left[A\,d(x-\alpha) + \frac{dy}{Q} - \frac{dx}{P} \right], \tag{47}$$

$$\int\!\!\int_S \frac{(x-\alpha)\left[\dfrac{Q\alpha'' + \alpha' Q'}{(1-AQ\alpha')^2} + \dfrac{\alpha' P'}{(1-AP)^2}\right] - 2\alpha'\left[\dfrac{P}{1-AP} - \dfrac{\alpha' Q}{1-AQ\alpha'}\right]}{2(x-\alpha)^2 \sqrt{\dfrac{\alpha' PQ}{(1-AP)(1-AQ\alpha')}}}\, dx\,dy. \tag{48}$$

Pour $A = 0$, ils redeviennent immédiatement ce qu'ils étaient en (38).

Comme A est une constante et que, par suite, les expressions qui, en (46), ont remplacé P et Q ne dépendent encore l'une que de x, l'autre que de y, l'égalité de (47) et de (48) constitue un théorème d'échange, et c'est même ce qu'il y a de plus remarquable, car cette propriété ne se conserve pas, en général, pour A fonction de x et de y,

Si les polynômes P et Q sont identiques, ce qui entraîne que la solution $x=\alpha(y)$ est simplement remplacée par $x=y$, la nouvelle formule équivaut simplement à l'égalité type (3) où $P(x)$ et $P(y)$ sont respectivement remplacés par

$$\frac{P(x)}{1-AP(x)}, \qquad \frac{P(y)}{1-AP(y)}.$$

Mais ceci n'est d'aucun intérêt. On pourrait prétendre, de meilleur droit et tout aussi inutilement, que la formule (3) est généralisée en y remplaçant $P(x)$ et $P(y)$ par des expressions rationnelles quelconques $P_1(x)$, $P_1(y)$. La chose tient à ce que les équations différentielles

$$\frac{dx}{P(x)}=\frac{dy}{P(y)}, \qquad \frac{dx}{P_1(x)}=\frac{dy}{P_1(y)}$$

admettent toutes deux la solution $x=y$. Mais je ne puis pas associer à l'équation (37) une équation *quelconque*

$$\frac{dx}{P_1(x)}=\frac{dy}{Q_1(y)}$$

admettant, comme (37), la solution $x=\alpha(y)$. Et alors il redevient remarquable que ce fait, impossible pour P_1 et Q_1 quelconques, soit possible pour des expressions P_1 et Q_1 de construction convenable.

Il n'en est pas moins fort regrettable que la méthode de ce paragraphe soit hors d'état de donner un résultat nouveau véritablement *explicite*, précisément dans le cas où l'équation différentielle qui est au fond de la question a la solution *explicite* $x=y$. Cela n'encourage point à de nouveaux développements. Notons seulement, comme conclusion, que s'il est aisé de réunir des équations différentielles, du premier ordre, diverses, de par l'existence d'une solution particulière commune à ces équations, on peut, de même, réunir des intégrales doubles avec une même double pseudo-ligne d'infini.

[**14**] *Intégrales à plusieurs pseudo-lignes d'infini.* — Cette question est, pour ainsi dire, l'inverse de la précédente où on réunissait plusieurs équations différentielles possédant une solution commune.

Ici, comme il est facile de le pressentir, la construction d'une même intégrale double, avec plusieurs pseudo-lignes d'infini, revient à la considération d'une même équation différentielle dont il faudra rechercher plusieurs solutions particulières. Étant donnée la difficulté, éprouvée dans tout ce qui précède, de raisonner explicitement sur une seule de ces solutions, il ne semble pas que l'on doive s'attendre à beaucoup de résultats explicites alors qu'il en faudra plus d'une. Il y a cependant quelques généralités remarquables et des résultats dignes d'être notés pour les lignes d'infini du type $x = \varepsilon y$ où ε est une racine de l'unité.

Commençons par les généralités.

Reprenons l'identité (1) et la transformation (7). Il est naturel de s'attendre à avoir une nouvelle pseudo-ligne d'infini dans la transformée de l'intégrale double si on l'introduit dans X en posant

$$\Phi(x, y) = \frac{\alpha(y) - \beta(y)}{x - \beta(y)} \Psi(x, y). \tag{49}$$

Le facteur $\alpha - \beta$ n'est pas essentiel et pourrait être considéré comme compris dans Ψ, mais il simplifie les calculs subséquents. Nous avons donc à considérer la transformation

$$X = \frac{\alpha - \beta}{(x-\alpha)(x-\beta)} \Psi(x, y), \qquad Y = Y(x, y).$$

Comme X n'est autre chose que

$$\frac{\Psi}{x-\alpha} - \frac{\Psi}{x-\beta},$$

le déterminant Δ est évidemment la différence de deux expressions (8), soit

$$\frac{(x-\alpha)(\Psi_x Y_y - \Psi_y Y_x) - \Psi(Y_y + \alpha' Y_x)}{(x-\alpha)^2} - \frac{(x-\beta)(\Psi_x Y_y - \Psi_y Y_x) - \Psi(Y_y + \beta' Y_x)}{(x-\beta)^2}. \tag{50}$$

Si l'on entend faire disparaître les deux lignes d'infini en évidence dans les deux termes de cette différence, on a à écrire deux systèmes analogues à (12), soit

$$\left\{\begin{aligned} \alpha' Y_x(\alpha, y) + Y_y(\alpha, y) &= 0, \\ \Psi(\alpha, y) Y_x(\alpha, y) &= C, \\ \Psi(\alpha, y) Y_y(\alpha, y) &= -\alpha' C, \end{aligned}\right. \tag{51}$$

$$\left\{\begin{aligned} \beta' Y_x(\beta, y) + Y_y(\beta, y) &= 0, \\ \Psi(\beta, y) Y_x(\beta, y) &= C_1, \\ \Psi(\beta, y) Y_y(\beta, y) &= -\beta' C_1. \end{aligned}\right. \tag{52}$$

Remarquons qu'en général les constantes C et C_1 sont distinctes.

De l'examen des systèmes simultanés (51) et (52), il résulte d'abord que α et β sont deux solutions d'une *même* équation différentielle qui est toujours la première équation (12).

Quant à la détermination de Ψ, elle appelle des difficultés très spéciales.

Il est toujours entendu que les deux dernières équations (12) ou (51) ne sont pas distinctes et qu'on peut, par exemple, les remplacer par une combinaison telle que (34), soit ici

$$F(\Psi Y_x, \Psi Y_y) = F(C, -\alpha' C).$$

A propos des deux dernières équations (52), on écrirait de même

$$F_1(\Psi Y_x, \Psi Y_y) = F_1(C_1, -\beta' C_1),$$

étant entendu qu'on a en vue *la seule* expression inconnue $\Psi(x; y)$ qui prendra alors d'elle-même les formes $\Psi(\alpha, y)$, $\Psi(\beta, y)$ quand on remplacera x par α, β dans $Y(x, y)$.

Ces deux équations, en général, seront incompatibles. Reste à examiner les cas où elles rentrent naturellement l'une dans l'autre, par exemple le cas où, les fonctions F et F_1 étant identiques, on peut écrire

$$F(\Psi Y_x, \Psi Y_y) = F(C, -\alpha' C) = F(C_1, -\beta' C_1). \tag{53}$$

Mais la dernière de ces relations exprime un mode de liaison entre α' et β' qui n'a aucune raison *générale* d'exister. Nous sommes donc conduits à rechercher des solutions α et β qui doivent non seulement appartenir à une même équation différentielle, mais qui pourront être assujetties à quelque autre condition.

Bien entendu, le raisonnement que nous venons de faire n'est pas le plus général qui puisse être fait quant à une étude complète des systèmes simultanés (51) et (52); mais il semble bien que la restriction apparue en fin de compte est dans la nature des choses et qu'elle apparaîtra toujours d'une manière ou d'une autre. Je m'expliquerai mieux en appelant Δ_1 et Δ_2 les deux termes de la différence (50). Nous avons à étudier l'intégrale

$$\int\int_S \Delta\, dx\, dy = \int\int_S \Delta_1 dx\, dy - \int\int_S \Delta_2 dx\, dy.$$

Imaginons qu'on détermine Δ_1 en ne tenant compte que du système (51) et Δ_2 en ne tenant compte que de (52). Nous aurons bien ainsi deux intégrales doubles dont la différence peut être considérée comme une intégrale unique avec deux pseudo-lignes doubles d'infini, mais il n'y a pas de raison pour qu'elles soient attachées à la même surface algébrique, car l'une dépend de α, comme on le voit par exemple en des formules telles que (36) et (38), et l'autre dépend de β. Et, pour corriger ceci, on ne voit guère que quelque nouvelle relation entre α et β.

Nous allons d'ailleurs éclaircir ce point sur un exemple où ce genre d'explication sera manifestement vrai.

[**15**] *Emploi des racines de l'unité.* — Il nous faut d'abord considérer une équation différentielle dont nous connaîtrons deux solutions particulières. En me plaçant toujours au point de vue de l'écriture explicite des formules finales, je n'ai pu, jusqu'ici, considérer d'autre équation que

$$\frac{dx}{x\mathrm{P}(x^p)} = \frac{dy}{y\mathrm{P}(y^p)},$$

les P étant des polynômes ordinaires $\mathrm{P}(u)$ en lesquels u est remplacé par x^p ou y^p; l'exposant p est un entier positif. Alors l'équation admet la solution particulière $x = \varepsilon y$ si ε est l'une quelconque des p racines de l'unité. En particulier, si α et β sont deux de ces racines, l'équation admettra les solutions $x = \alpha y$, $x = \beta y$. Ainsi, en posant

$$\mathrm{Y} = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y\mathrm{P}(y^p)} - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x\mathrm{P}(x^p)},$$

la première équation (51) et la première (52) seront satisfaites. Je vais essayer de satisfaire aux deux dernières équations de chaque système par la méthode du paragraphe **9**, c'est-à-dire en posant

$$\Psi^2 \mathrm{Y}_x \mathrm{Y}_y = -\mathrm{C}^2\alpha, \qquad \Psi^2 \mathrm{Y}_x \mathrm{Y}_y = -\mathrm{C}_1^2\beta.$$

Il faut alors que l'on ait

$$\mathrm{C}^2\alpha = \mathrm{C}_1^2\beta$$

et ceci est la dernière équation (53). Ici, il est aisé d'y satisfaire, par le choix de C et C_1, parce que $\alpha'(y) = \alpha$ et $\beta'(y) = \beta$ sont des constantes, mais α et β satisfont indéniablement à des conditions ayant deux origines bien distinctes : 1° Être racines de l'unité; 2° avoir un rapport constant. Si ces conditions rentrent très simplement l'une dans l'autre dans le cas présent il faut s'attendre, au contraire, à de redoutables difficultés de compatibilité dans des cas plus généraux.

Pour le moment, nous aurons

$$\Psi^2 = \begin{array}{c|}\mathrm{C}^2\alpha \\ \mathrm{C}_1^2\beta\end{array}\; xy\,\mathrm{P}(x^p)\,\mathrm{P}(y^p),$$

et, en posant

$$z^2 = xy\,\mathrm{P}(x^p)\,\mathrm{P}(y^p),$$

la formule finale

$$\int_{C} \frac{2yz}{(x-\alpha y)(x-\beta y)}\left[\frac{dy}{yP(y^p)}-\frac{dx}{xP(x^p)}\right]=\int\int_{S} \frac{yV(x,y)}{(x-\alpha y)^2(x-\beta y)^2 z}\,dx\,dy,$$

en laquelle

$$V(x,y)=\begin{cases}\quad (x-\alpha y)(x-\beta y)[P(x^p)+px^pP'(x^p)+P(y^p)+py^pP'(y^p)]\\ -2x(x-\alpha y)[P(x^p)-P(y^p)]-2(x-\beta y)[xP(x^p)-\alpha yP(y^p)].\end{cases}$$

Les vérifications directes sont aisées notamment quant à la divisibilité de V par

$$(x-\alpha y)^2(x-\beta y)^2.$$

[**16**] (¹) *Extensions aux intégrales multiples.* — Il semble possible, par des voies diverses, d'entreprendre la construction d'intégrales multiples présentant des pseudo-variétés d'infini tout en étant exprimables par des intégrales, d'ordre de multiplicité moindre d'une unité, qui sont des assemblages de termes admettant les pseudo-infinis précédents comme infinis véritables. Mais les différents procédés généraux, essayés dans le cas d'intégrales triples ou d'intégrales d'ordre de multiplicités plus élevé, exagèrent encore, comme on devait s'y attendre, les difficultés rencontrées à propos d'intégrales doubles. La généralité des points de départ exige des écritures encombrantes qui semblent bientôt d'autant plus vaines qu'on n'en tire des résultats explicites qu'au prix d'extrêmes particularisations.

Je m'attacherai surtout, pour le moment, à une extension de la formule (3) qui semble d'autant plus remarquable qu'il est difficile de dire dans quel mode de généralisation il conviendrait de la faire entrer.

Considérons la transformation initiale à trois variables

$$X=\frac{\sqrt{P(x)P(y)}}{x-y}+\frac{\sqrt{P(y)P(z)}}{y-z}+\frac{\sqrt{P(z)P(x)}}{z-x},$$
$$Y=\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{P(y)}-\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{P(x)},$$
$$Z=\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{P(z)}-\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{P(x)}.$$

(¹) Il convient de rapprocher du présent paragraphe des résultats de M. S. Lefschetz donnés dans une Note *Sur les intégrales multiples de variétés algébriques* (Comptes rendus, 29 mai 1917). Cet auteur emploie la formule de Green pour étendre, aux intégrales triples et multiples, la notion d'espèce. Il envisage ainsi, tout au moins théoriquement, des formules qui sont de nature à abaisser un certain entier λ attaché à de certaines variétés algébriques et analogue au nombre ρ introduit par M. E. Picard dans le cas des surfaces proprement dites.

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

se développe sous la forme

$$\begin{aligned} &\frac{1}{P(y)\,P(z)}\left[P(y)\,\frac{(x-y)\,P'(x)-2P(x)}{2(x-y)^2\sqrt{P(x)\,P(y)}}+P(z)\,\frac{(z-x)\,P'(z)+2P(x)}{2(z-x)^2\sqrt{P(x)\,P(z)}}\right]\\ &+\frac{1}{P(z)\,P(x)}\left[P(z)\,\frac{(y-z)\,P'(y)-2P(y)}{2(y-z)^2\sqrt{P(y)\,P(z)}}+P(x)\,\frac{(x-y)\,P'(x)+2P(y)}{2(x-y)^2\sqrt{P(y)\,P(x)}}\right]\\ &+\frac{1}{P(x)\,P(y)}\left[P(x)\,\frac{(z-x)\,P'(z)-2P(z)}{2(z-x)^2\sqrt{P(z)\,P(x)}}+P(y)\,\frac{(y-z)\,P'(y)+2P(z)}{2(y-z)^2\sqrt{P(z)\,P(y)}}\right]. \end{aligned}$$

Soit

$$U(x, y)=\frac{(x-y)[P'(x)+P'(y)]-2P(x)+2P(y)}{2\,(x-y)^2};$$

cela permet d'écrire le développement précédent sous la forme

$$\Delta=\frac{U(x, y)}{P(z)\sqrt{P(x)\,P(y)}}+\frac{U(y, z)}{P(x)\sqrt{P(y)\,P(z)}}+\frac{U(z, x)}{P(y)\sqrt{P(z)\,P(x)}}.$$

Considérons maintenant l'identité

$$\int\!\!\int_s X\,dY\,dZ=\int\!\!\int\!\!\int_v dX\,dY\,dZ \tag{54}$$

entre deux expressions d'un volume v enfermé dans une surface s. En vertu de la transformation précédente, l'intégrale double peut s'écrire

$$\int\!\!\int_S X\begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial z}p & \frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial z}q \\ \frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial Z}{\partial z}p & \frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}q \end{vmatrix}dx\,dy$$

ou bien

$$\int\!\!\int_S X\,\frac{\alpha P(x)+\beta P(y)+\gamma P(z)}{P(x)\,P(y)\,P(z)}\,d\sigma$$

si

$$-p\,dx\,dy = \alpha d\sigma, \qquad -q\,dx\,dy = \beta d\sigma, \qquad dx\,dy = \gamma d\sigma,$$

c'est-à-dire si α, β, γ sont les cosinus directeurs en l'élément $d\sigma$ de la surface S.

Finalement, on a

$$\int\int_S X \frac{\alpha P(x) + \beta P(y) + \gamma P(z)}{P(x) P(y) P(z)} d\sigma = \int\int\int_V \Delta\, dx\,dy\,dz. \tag{55}$$

Bien entendu, X représente le second membre de la première équation de la transformation initiale et Δ est l'autre trinôme formé ci-dessus.

La démonstration aurait d'ailleurs pu être abrégée par l'emploi de la formule de Green qui peut toujours être considérée comme une transformation de l'identité (54), comme j'ai déjà eu à le rappeler incidemment (troisième Mémoire *Sur les transformations et extensions de la formule de Stokes*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914, pp. 121-123).

Mais vu l'importance que l'on peut attacher à la formule (55), j'ai tenu à la démontrer d'une manière directe et complète en soi.

Quel est le rôle exact de la formule (55)? Les irrationnalités qu'elle contient ne semblent pas pouvoir être réduites à une seule et, dans ces conditions, on ne peut la considérer comme attachée à *une* variété algébrique. Mais elle constitue un théorème d'échange. Dans Δ, les U sont des polynômes à deux variables et, si l'on prend pour S un parallélépipède d'arêtes parallèles aux axes $Oxyz$, l'intégrale triple de (55) se scinde en une somme de produits tels que

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{P(x)}} \cdot \int \frac{y^n\,dy}{\sqrt{P(y)}} \cdot \int \frac{dz}{P(z)}. \tag{56}$$

Le théorème ainsi obtenu n'est pas essentiellement plus compliqué, au point de vue transcendant, que le théorème relatif à deux variables, les produits (56) ne différant de (4) que par une intégrale élémentaire, à expression algébrico-logarithmique.

[**17**] *Formule explicite relative à n variables.* — L'extension qui vient d'être traitée peut, aussi facilement, être envisagée dans le cas de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En posant

$$P(x_i) = P_i, \qquad U(x_i, x_j) = U_{ij},$$

on a

$$\int \cdots \int \left[\sum \frac{\sqrt{P_i P_j}}{x_i - x_j}\right] \frac{\Sigma \alpha_i P_i}{\Pi P_i} d\sigma = \int\int \cdots \int \sum \frac{U_{ij}\sqrt{P_i P_j}}{\Pi P_i} d\tau.$$

Les notations employées s'expliquent d'elles-mêmes. La formule dépend, si l'on veut, de celle de Green à n variables, remarque tout à fait analogue à celle du paragraphe précédent et pour laquelle je puis offrir la même référence bibliographique.

En respectant cette forme générale, la formule initiale (3) devrait s'écrire

$$\int_C \frac{\sqrt{P(x)P(y)}}{x-y}\,\frac{\alpha P(x)+\beta P(y)}{P(x)P(y)}\,ds = \int\int_S \frac{U(x,y)}{\sqrt{P(x)P(y)}}\,dx\,dy.$$

On voit que α et β sont des cosinus directeurs pour la normale en l'élément ds du contour plan C. Dans le cas général, il faut entendre que l'intégrale en $d\tau$ est étendue à une portion de l'espace à n dimensions enfermée dans l'hypersurface d'élément $d\sigma$, hypersurface qui peut avoir une équation telle que

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

On a alors

$$\alpha_i = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_n}\right)^2}},$$

$$dx_2 \ldots dx_n = \alpha_1\,d\sigma, \qquad dx_1\,dx_2 \ldots dx_n = d\tau.$$

On voit immédiatement que la formule générale, si l'on enclot l'espace τ dans une variété σ prismatoïdale, formée d'hyperplans parallèles aux hyperplans coordonnés, exprime un théorème d'échange complètement analogue à ceux déjà considérés pour $n=2$ et $n=3$.

[**18**] *Quelques remarques et méthodes diverses.* — Les difficultés que l'on rencontre à étudier le système (12) et ses extensions portent à se demander si l'on ne pourrait pas profiter de quelque intuition, d'un degré de généralité moindre, mais aboutissant plus aisément à des résultats explicites. L'égalité initiale (3) perdra difficilement son caractère fondamental; si nous avons pu l'étendre dans l'hyperespace c'est, en somme, en l'imitant assez servilement. On peut donc se demander si des transformations imitées de (2), et pas trop différentes, ne seraient pas de quelque utilité. Cette idée a été la première qui servit de point de départ aux présentes recherches et elle permet d'obtenir quelques formules que les généralités précédemment exposées donneraient moins aisément.

Soit la transformation

$$X = \frac{\Phi(x,y)}{x-\alpha y}, \qquad Y = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\Phi(y,y)} - \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\Phi(x,x)}$$

où α est, pour y, un simple coefficient constant.

Le déterminant de cette transformation est

$$\Delta = \frac{(x - \alpha y)[\Phi_x \Phi(x, x) + \Phi_y \Phi(y, y)] + \Phi[\alpha\Phi(y, y) - \Phi(x, x)]}{(x - \alpha y)^2 \Phi(x, x)\Phi(y, y)}.$$

Il serait bien facile d'étudier directement sur celui-ci les conditions de divisibilité du numérateur par $(x - \alpha y)^2$; mais, en ayant recours au système (12), on a immédiatement

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha y, \alpha y) &= \alpha\, \Phi(y, y) \\ \Phi(\alpha y, y) &= C\Phi(y, y) \end{aligned}$$

en désignant par C une constante arbitraire.

Soit maintenant, pour essayer d'introduire une seconde pseudo-ligne d'infini,

$$\Phi(x, y) = xy \frac{\Psi(x, y)}{x - \beta y}.$$

Alors le Δ précédent devient le produit de $(1 - \beta)$ par

$$\frac{(x - \alpha y)(x - \beta y)[x\Psi'_x \Psi(x, x) + y\Psi'_y \Psi(y, y)] + (\alpha\beta y^2 - x^2)\Psi[\Psi(x, x) - \Psi(y, y)]}{(x - \alpha y)^2 (x - \beta y)^2 \Psi(x, x)\Psi(y, y)}$$

et l'on trouve encore, soit directement, soit par l'application des systèmes associés (51) et (52), que les conditions de divisibilité du numérateur par le double facteur $(x - \alpha y)^2 (x - \beta y)^2$ sont

$$\left\{ \begin{aligned} \Psi(\alpha y, \alpha y) &= \Psi(y, y), \\ \Psi(\alpha y, y) &= C\Psi(y, y), \end{aligned} \right. \tag{57}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Psi(\beta y, \beta y) &= \Psi(y, y), \\ \Psi(\beta y, y) &= C_1\Psi(y, y), \end{aligned} \right. \tag{58}$$

avec les constantes arbitraires C et C_1 distinctes en général.

Pour faire une application très simple, soit la transformation (où Y est écrit à un facteur constant près)

$$X = \frac{xyz}{(x - \alpha y)(x - \beta y)}, \qquad Y = \log \frac{y}{x},$$

transformation attachée à la surface

$$z^\tau = \frac{P(x^p)}{P(y^p)}. \tag{59}$$

C'est alors z qui joue le rôle de Ψ et les conditions (57) et (58) sont vérifiables si α et β sont racines d'ordre p de l'unité. Dans ces conditions, on a la formule

$$\int_C \frac{z(xdy - ydx)}{(x-\alpha y)(x-\beta y)} = \int\int_S \frac{px+qy}{(x-\alpha y)(x-\beta y)}\, dx\, dy,$$

ou, plus explicitement,

$$(60) \qquad \int_C \frac{z(xdy - ydx)}{(x-\alpha y)(x-\beta y)} = \frac{p}{\tau}\int\int_S \frac{x^p P'(x^p)\,P(y^p) - y^p P'(y^p)\,P(x^p)}{(x-\alpha y)(x-\beta y)\,P^2(y^p)}\,\frac{dx\,dy}{z^{\tau-1}}.$$

On voit immédiatement que le premier facteur sous l'intégrale double a son numérateur divisible par $(x-\alpha y)$ et $(x-\beta y)$. Le résultat ainsi obtenu est analogue à celui du paragraphe **15**.

Voici maintenant un autre résultat analogue à celui du paragraphe **13**.

Au lieu de satisfaire aux systèmes (57) et (58) en prenant pour Ψ le z de la surface (59), on pourrait prendre aussi bien le z de

$$(61) \qquad z^\tau = \frac{P(x^p)}{P(y^p)} + (x-\alpha y)(x-\beta y)(x-y)A(x, y).$$

A ces surfaces est attachée une formule de réduction telle que (60) et qui comprend d'ailleurs (60) comme cas particulier. J'ai écrit cette formule pour l'examiner tout à l'aise, mais ne puis la reproduire à cause de sa trop grande complication matérielle.

Ici l'essentiel est de remarquer que si les systèmes (57) et (58) ne peuvent apporter aucune nouveauté véritable, puisque ce ne sont que des cas particuliers des systèmes (51) et (52), ils sont cependant particulièrement propres à l'étude des formules qui font l'objet de ce Mémoire, quand les pseudo-lignes d'infini sont des droites $x = \varepsilon y$ avec les ε racines de l'unité. De plus, les surfaces auxquelles sont attachées de telles formules se généralisent facilement comme (59) a été généralisée en (61).

Terminons sur une remarque intéressante.

Nous avons déjà vu, par exemple sur l'équation (40), que l'équation d'une surface pouvait contenir explicitement $\alpha(y)$ qui est, en général, une solution d'équation différentielle à laquelle on ne peut apporter de modification *arithmétique* sans détruire la formule qui réduit le nombre de certaines intégrales doubles précisément attachées à cette surface.

Or ceci apparaît, de plus en plus explicitement, avec la méthode d'extension indiquée au paragraphe **13** et qui vient de se représenter ici d'une manière un peu différente.

La surface (61) n'admet la formule de réduction qui lui est attachée que si α et β sont racines de l'unité. Les questions de configuration géométrique, qui pourraient ne pas changer pour de certaines variations continues de α et β, sont ici remplacées par des conditions arithmétiques. C'est toujours la même conclusion qui, comme on le voit au cours de ce Mémoire, peut apparaître sous des formes diverses et semble absolument générale en matière de construction d'intégrales doubles à pseudo-lignes d'infini.

On aurait d'ailleurs des conclusions analogues pour les intégrales multiples.