Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Louis Roy

Sur les équations générales des lignes élastiques et la propagation des ondes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 18 (1926), p. 117-195
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1926_3_18__117_0>

SUR LES
ÉQUATIONS GÉNÉRALES DES LIGNES ÉLASTIQUES
ET LA PROPAGATION DES ONDES

Par M. Louis ROY.

INTRODUCTION

Les recherches de Duhem sur l'Hydrodynamique et l'Élasticité(¹) ont montré la facilité avec laquelle on parvient aux équations les plus générales du mouvement des milieux continus, par l'emploi des méthodes analytiques régulières de la Thermodynamique générale. Frappé des avantages, disons même de la supériorité de cette doctrine, nous l'avons autrefois appliquée à notre tour au fil et à la membrane flexibles(²). Nous nous proposons de l'appliquer maintenant à la ligne élastique.

Bien que la théorie de la ligne élastique remonte à Bernoulli et à Euler, on sait que le point de vue de ces auteurs fut à peu près abandonné, dès que la théorie de l'Élasticité eut été définitivement constituée. Poisson et Cauchy cherchèrent, en effet, à déduire les équations des tiges minces de celles des milieux à trois dimensions par la méthode des développements en séries. Cette méthode consiste à admettre que les composantes de la pression élastique en un point sont développables en séries entières très convergentes des coordonnées transversales de ce point. Or, dès 1871, cette hypothèse paraissait déjà devoir être abandonnée, du moins en général, par suite de son désaccord avec certaines formules rigoureuses obtenues par de Saint-Venant et, ce qui est plus grave, avec l'expérience(³).

(¹) P. Duhem, *Recherches sur l'Hydrodynamique*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2ᵉ série, t. III, IV, V; 1901, 1902 et 1903; *Recherches sur l'Élasticité*, Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, 3ᵉ série, t. XXI, XXII et XXIII; 1904, 1905 et 1906.

(²) L. Roy, *Recherches sur la Dynamique du fil flexible*, Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, 3ᵉ série, t. XXIX, 1912; *Sur la propagation des ondes dans les membranes flexibles*, Journal de math. pures et appliquées, 6ᵉ série, t. VIII, 1912.

(³) J. Boussinesq, *Étude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques, dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres*, Journal de math. pures et appliquées, 2ᵉ série, t. XVI, 1871, p. 125.

Les travaux de MM. E. et F. Cosserat sur les corps minces[1] ont expliqué la cause profonde de ces contradictions et montré la véritable difficulté des méthodes basées sur les développements en séries et l'emploi exclusif des équations de l'Élasticité. Leurs recherches justifient donc le retour à l'étude directe des lignes et des surfaces élastiques, telle qu'on l'avait tentée avant la création de la théorie de l'Élasticité, et que ces auteurs ont reprise dans leur *Théorie des corps déformables*[2].

La théorie thermodynamique de la ligne élastique que nous allons exposer se trouve ainsi directement inspirée des travaux relativement récents de Duhem et de MM. Cosserat.

La première partie du présent Mémoire traite de la *ligne à six paramètres*; nous appelons ainsi la ligne la plus générale considérée par MM. Cosserat, où l'orientation de chaque trièdre mobile par rapport à l'axe longitudinal est laissée arbitraire. L'expression du potentiel thermodynamique interne, à laquelle nous aboutissons, correspond à celle qu'ont obtenue MM. Cosserat pour l'*action de déformation*; les méthodes régulières de l'Énergétique permettent d'en déduire, avec aisance et une entière sûreté, les équations générales du mouvement, en tenant compte des variations de température et des actions éventuelles de viscosité.

La seconde partie traite de la *ligne à quatre paramètres*, c'est-à-dire de la ligne considérée jusqu'ici par la plupart des auteurs, où l'un des axes du trièdre mobile est tangent à l'axe longitudinal; sa théorie se déduit donc de la précédente comme cas particulier. Dans l'étude des petits mouvements d'une telle ligne autour d'une position d'équilibre, nous développons en détail le cas d'une ligne, prismatique droite dans son état naturel, mais dont l'axe longitudinal peut affecter une forme quelconque dans sa position d'équilibre autour de laquelle les petits mouvements s'effectuent. Nous obtenons ainsi des équations assez simples, qui généralisent celles qui ont été obtenues jusqu'ici dans le cas des tiges droites, de température uniforme et dénuées de viscosité.

La théorie de la propagation des ondes nous conduit à certains résultats très généraux : *aucune onde n'est susceptible de se propager sur une ligne élastique affectée de viscosité; les lois de propagation établies pour les ondes de choc restent valables pour les ondes d'accélération et les ondes d'ordre supérieur*. Ces propositions s'appliquent aux deux classes de lignes étudiées, ce qui était à prévoir, puisque le choix du trièdre mobile a évidemment quelque chose d'artificiel. Nous insistons spécialement sur le cas de la ligne à quatre paramètres, dont chaque section droite est un plan de symétrie de contexture et nous étendons ainsi à des lignes de forme quelconque des formules de vitesses de propagation qui n'avaient encore été obtenues, sauf dans des

---

(1) E. et F. Cosserat, *Sur la Mécanique générale*, Comptes rendus, t. 145, 1907, p. 1139; *Sur la théorie des corps minces*, Comptes rendus, t. 146, 1908, p. 169.

(2) Hermann éditeur; Paris, 1909.

cas particuliers, qu'à partir des équations des vibrations longitudinales, tournantes et transversales des tiges droites et dans l'hypothèse d'une température uniforme.

Dans toute cette étude, le potentiel thermodynamique interne linéaire de la ligne élastique apparaît comme une fonction des déformations de la ligne au point considéré. Les déformations élastiques étant supposées très petites au sein de chaque tronçon de ligne, on peut prendre comme expression de ce potentiel un polynôme du second degré de ces déformations, dont les coefficients dépendent de la nature de la substance et de la forme de la section droite de la ligne. Ce sont les coefficients d'élasticité de la ligne. Si l'on s'en tient là, la théorie de la ligne élastique est entièrement satisfaisante et complètement autonome, en ce sens qu'elle n'emprunte rien à la théorie de l'Élasticité des milieux à trois dimensions. Mais de sérieuses difficultés surgissent si l'on veut rechercher comment ces coefficients dépendent des coefficients d'élasticité de la substance et de la forme de la section. A cet effet, le procédé le plus naturel consiste à former le potentiel thermodynamique interne linéaire en partant du potentiel d'un milieu à trois dimensions; mais il faut alors chercher, au préalable, les valeurs des trois dilatations et des trois glissements en un point d'un tronçon de ligne en fonction des déformations de la ligne en ce point. Dans le cas de la ligne à quatre paramètres, cette recherche est facilitée par certaines formules dues à Kirchhoff. Nous avons donc cherché et d'ailleurs réussi à généraliser les formules de Kirchhoff dans le cas de la ligne à six paramètres; malheureusement ces formules, purement cinématiques, ne suffisent pas à déterminer les dilatations et glissements, car elles renferment trois fonctions arbitraires.

Dans le cas de la ligne à quatre paramètres, dont chaque section droite est un plan de symétrie de contexture, on détermine ces trois fonctions arbitraires, ou du moins on arrive aux expressions cherchées des dilatations et glissements, en appliquant à un tronçon de ligne, c'est-à-dire au feuillet limité par deux sections droites infiniment voisines, les équations de l'équilibre élastique écrites en faisant abstraction de toute force extérieure. On reconnaît alors que ces équations, jointes aux formules de Kirchhoff, entraînent les conditions de Saint-Venant, c'est-à-dire celles qui expriment que la pression élastique sur tout élément parallèle à l'axe longitudinal est elle-même parallèle à cet axe. Mais, si l'on peut admettre, avec Kirchhoff, que les forces extérieures et d'inertie agissant sur les éléments de volume d'une ligne élastique sont négligeables par rapport à celles qui s'exercent sur sa surface latérale, on ne voit plus du tout comment il est permis de faire encore abstraction des premières, dès qu'on suppose que les secondes sont nulles. Faute de mieux, nous avons toutefois appliqué cette méthode à la ligne à quatre paramètres. Pour celle à six paramètres, nous nous sommes borné à faire le calcul des dilatations et glissements en faisant abstraction des trois fonctions arbitraires. L'expression à laquelle nous sommes ainsi parvenu pour le potentiel thermodynamique est donc très probablement incomplète et nous l'avons donnée à titre de simple indication en vue de recherches ultérieures.

Le présent Mémoire a été résumé en trois Notes insérées aux Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris :

1. *La propagation des ondes sur la ligne élastique à six paramètres*, séance du 1er mars 1926;

2. *La propagation des ondes sur la ligne élastique à quatre paramètres*, séance du 15 mars 1926;

3. *La loi adiabatique dynamique relative aux lignes élastiques*, séance du 29 mars 1926;

Et dans une communication au *Congrès international de Mécanique appliquée* tenu à Zurich en septembre 1926 :

Sur le potentiel thermodynamique interne des lignes élastiques.

PREMIÈRE PARTIE

LIGNE ÉLASTIQUE A SIX PARAMÈTRES

CHAPITRE PREMIER

ÉQUATIONS GÉNÉRALES

1. Préliminaires. — On appelle *ligne élastique* le corps élastique dont le volume est engendré par une surface plane S, dont le centre de gravité M décrit une courbe M_1M_2 appelée *axe longitudinal* de la ligne, de façon que cette surface reste constamment normale à la courbe. Celle-ci ne doit pas présenter de singularités et sa longueur, ainsi que ses rayons de courbure et de torsion en chaque point, sont supposés très grands par rapport aux dimensions transversales de S; de plus, si le contour de S varie dans le déplacement, cette variation doit s'effectuer avec continuité.

La configuration géométrique de la ligne élastique, à l'instant t, est considérée comme suffisamment déterminée par la connaissance d'une suite continue de trièdres $Muvw$, dont les arêtes sont trois éléments linéaires liés à la matière et dont le lieu des sommets M, à l'instant t, est l'axe longitudinal M_1M_2. Par suite de la petitesse des déformations élastiques au sein de chaque tronçon de ligne, on convient de négliger les petites variations des angles de ces trièdres, de sorte que nous pouvons les supposer constamment trirectangles. L'orientation de chaque trièdre $Muvw$, ou, pour abréger, de chaque trièdre (M), par rapport à la tangente en M à l'axe longitudinal étant laissée arbitraire, la configuration géométrique de la ligne élastique à chaque instant, par rapport à un trièdre fixe trirectangle $Oxyz$, se trouve complètement définie analytiquement par les coordonnées x, y, z de M et trois paramètres angulaires θ, φ, ψ, au moyen desquels s'expriment les neuf cosinus directeurs des axes Mu, Mv, Mw par rapport aux axes fixes $Oxyz$. Ces six paramètres x, y, z; θ, φ, ψ doivent être regardés comme des fonctions continues du temps t et d'une variable géométrique. Si l'on prend pour celle-ci l'arc $\widehat{M_1M} = s$ de l'axe longitudinal dans son état actuel, nous dirons qu'on emploie les *variables d'Euler* s, t; si l'on prend comme variable géométrique l'arc $\widehat{m_1m} = \omega$ de l'axe longitudinal dans son état primitif, m et M désignant le même point matériel dans l'état primitif et dans l'état actuel, nous dirons qu'on emploie les *variables de Lagrange* ω, t. Comme état primitif, nous conviendrons de prendre l'*état naturel*, c'est-à-dire l'état d'équilibre que prend la ligne quand elle n'est soumise à aucune force extérieure et quand tous ses points sont portés à une même température absolue T_0.

Les variables de Lagrange présentent sur celles d'Euler cet avantage, que chaque point matériel $M(x, y, z)$ de la ligne à tout instant est caractérisé par une valeur déterminée de la variable géométrique ω; de sorte que les composantes de la vitesse et de l'accélération de ce point sont simplement $\frac{\partial x}{\partial t}, \ldots; \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \ldots$. Au contraire, avec les variables d'Euler, l'abscisse curviligne s du point matériel M n'est pas constante par suite de l'extensibilité de la ligne, de sorte que la composante de sa vitesse suivant Ox est $\frac{\partial x}{\partial t} + V\frac{\partial x}{\partial s}$, V désignant la vitesse relative du point M le long de la ligne, ce qui complique singulièrement le calcul des forces d'inertie. Pour cette raison, nous emploierons exclusivement les variables de Lagrange ω, t dans tout ce qui va suivre.

Pour abréger, nous désignerons par la lettre d toute différentielle prise suivant la ligne à l'instant t, c'est-à-dire en ne faisant varier que ω, soit

$$d = \frac{\partial}{\partial \omega} d\omega, \tag{1}$$

de sorte que le symbole $\frac{d}{d\omega}$ devra être remplacé par $\frac{\partial}{\partial \omega}$ dans les résultats définitifs.

Cela posé, d'après la correspondance établie entre les points M et m, c'est-à-dire entre l'arc $s = \widehat{M_1M}$ compté sur l'état actuel et l'arc $\omega = \widehat{m_1m}$ compté sur l'état primitif, à l'élément $\overline{MM'} = ds$, de composantes dx, dy, dz, correspond l'élément $\overline{mm'} = d\omega$ et l'on a d'après (1)

$$ds = \Delta\, d\omega, \tag{2}$$

en posant

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2} = \sqrt{\left|\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2\right|}. \tag{3}$$

Nous représentons ainsi par le symbole $|\quad|$ une somme de trois termes analogues à celui qui est écrit, les deux autres s'en déduisant par permutation sur les lettres; afin de simplifier au maximum l'écriture des formules qui vont suivre, nous ferons un usage systématique de cette notation, toutes les fois qu'elle ne prêtera pas à confusion.

L'abscisse curviligne s de M est, d'après (2), donnée en fonction de ω, t par la formule

$$s = \int_0^\omega \Delta\, d\omega. \tag{4}$$

Soient ρ et ρ_0 les densités linéaires aux points homologues M et m; les éléments ds et $d\omega$ étant constitués par les mêmes points matériels ont même masse, d'où

$$\rho\, ds = \rho_0\, d\omega, \tag{5}$$

soit d'après (2)

$$\rho\Delta = \rho_0. \tag{6}$$

C'est l'équation de continuité qui détermine ρ à chaque instant, puisque ρ_0 est une fonction connue de ω.

2. Cinématique du trièdre mobile. — Soient α, β, γ; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ les cosinus directeurs des axes Mu, Mv, Mw du trièdre (M) au point $\mathrm{M}(x, y, z)$ d'abscisse curviligne $\widehat{\mathrm{M}_1\mathrm{M}} = s$ et à l'instant t; $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, ..., $\gamma_2 + d\gamma_2$ ceux des axes du trièdre (M') au point infiniment voisin $\mathrm{M}'(x + dx, y + dy, z + dz)$ d'abscisse curviligne $s + ds$ au *même* instant. On sait qu'on passe de (M) à (M') par une translation et une rotation infiniment petites, dont nous désignerons par $(\xi, \eta, \zeta)\, d\omega$ et $(p, q, r)\, d\omega$ les composantes suivant les axes mobiles Muvw, soit

$$\begin{aligned}
&\xi\, d\omega = \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;\\
&p\, d\omega = \alpha_2\, d\alpha_1 + \beta_2\, d\beta_1 + \gamma_2\, d\gamma_1 = -(\alpha_1\, d\alpha_2 + \beta_1\, d\beta_2 + \gamma_1\, d\gamma_2),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

ou plus simplement, d'après notre notation abrégée,

$$\xi = \left|\alpha\frac{dx}{d\omega}\right|, \qquad \eta = \left|\alpha_1\frac{dx}{d\omega}\right|, \qquad \zeta = \left|\alpha_2\frac{dx}{d\omega}\right|; \tag{7}$$

$$\left\{\begin{aligned}
p &= \left|\alpha_2\frac{d\alpha_1}{d\omega}\right| = -\left|\alpha_1\frac{d\alpha_2}{d\omega}\right|,\\
q &= \left|\alpha\frac{d\alpha_2}{d\omega}\right| = -\left|\alpha_2\frac{d\alpha}{d\omega}\right|,\\
r &= \left|\alpha_1\frac{d\alpha}{d\omega}\right| = -\left|\alpha\frac{d\alpha_1}{d\omega}\right|.
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

Cela posé, imprimons à la ligne un déplacement virtuel et soient $\delta u, \delta v, \delta w$ les composantes suivant Muvw du déplacement virtuel de M; $\delta\omega_u, \delta\omega_v, \delta\omega_w$ les composantes suivant les mêmes axes de la rotation virtuelle du trièdre (M). Il en résulte pour ξ, η, ζ; p, q, r des variations virtuelles $\delta\xi, \delta\eta, \dots, \delta r$ que nous allons calculer.

On a, d'après (7),

$$d\omega\delta(\xi, \eta, \zeta) = |\delta(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)\,dx + (\alpha, \alpha_1, \alpha_2)\,d\delta x|, \tag{9}$$

$\delta(x, y, z)$ désignant les composantes suivant les axes fixes $Oxyz$ du déplacement virtuel de M, soit

$$\delta(x, y, z) = (\alpha, \beta, \gamma)\,\delta u + (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\,\delta v + (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)\,\delta w.$$

On en déduit

$$d\delta x = \alpha\,d\delta u + \alpha_1\,d\delta v + \alpha_2\,d\delta w + d\alpha\,\delta u + d\alpha_1\,\delta v + d\alpha_2\,\delta w,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où, d'après les relations entre les cosinus et les formules (8),

$$\left\{\begin{aligned} |\alpha\,d\delta x| &= d\delta u + (q\,\delta w - r\,\delta v)\,d\omega,\\ |\alpha_1\,d\delta x| &= d\delta v + (r\,\delta u - p\,\delta w)\,d\omega,\\ |\alpha_2\,d\delta x| &= d\delta w + (p\,\delta v - q\,\delta u)\,d\omega. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

On a d'autre part, d'après (7),

$$\frac{d(x, y, z)}{d\omega} = (\alpha, \beta, \gamma)\,\xi + (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\,\eta + (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)\,\zeta; \tag{11}$$

d'où, en tenant compte de ce que

$$\left\{\begin{aligned} \delta\omega_u &= |\alpha_2\,\delta\alpha_1| = -|\alpha_1\,\delta\alpha_2|,\\ \delta\omega_v &= |\alpha\,\delta\alpha_2| = -|\alpha_2\,\delta\alpha|,\\ \delta\omega_w &= |\alpha_1\,\delta\alpha| = -|\alpha\,\delta\alpha_1|, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

les formules suivantes

$$\left\{\begin{aligned} |\delta\alpha\,dx| &= (\eta\,\delta\omega_w - \zeta\,\delta\omega_v)\,d\omega,\\ |\delta\alpha_1\,dx| &= (\zeta\,\delta\omega_u - \xi\,\delta\omega_w)\,d\omega,\\ |\delta\alpha_2\,dx| &= (\xi\,\delta\omega_v - \eta\,\delta\omega_u)\,d\omega. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Les formules (9) deviennent ainsi, d'après (10) et (13),

$$(14)\quad \begin{cases} \delta\xi = \dfrac{d\delta u}{d\omega} + q\delta w - r\delta v + \eta\delta\omega_w - \zeta\delta\omega_v, \\ \delta\eta = \dfrac{d\delta v}{d\omega} + r\delta u - p\delta w + \zeta\delta\omega_u - \xi\delta\omega_w, \\ \delta\zeta = \dfrac{d\delta w}{d\omega} + p\delta v - q\delta u + \xi\delta\omega_v - \eta\delta\omega_u. \end{cases}$$

Considérons maintenant les premières formules (8) et (12); on en déduit

$$(15)\quad \delta p\, d\omega - d\delta\omega_u = |\delta\alpha_2 d\alpha_1 - d\alpha_2 \delta\alpha_1|.$$

Mais, des formules bien connues de la Cinématique du corps solide

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{d(\alpha, \beta, \gamma)}{d\omega} = r(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) - q(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), \\ \dfrac{d(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}{d\omega} = p(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) - r(\alpha, \beta, \gamma), \\ \dfrac{d(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)}{d\omega} = q(\alpha, \beta, \gamma) - p(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \end{cases}$$

on déduit, d'après (12) et les relations entre les cosinus,

$$\begin{aligned} |\delta\alpha_2 d\alpha_1| &= -r\,|\alpha\delta\alpha_2|\, d\omega = -r\delta\omega_v d\omega, \\ |d\alpha_2 \delta\alpha_1| &= q\,|\alpha\delta\alpha_1|\, d\omega = -q\delta\omega_w d\omega, \end{aligned}$$

de sorte que (15) devient la première des égalités

$$(17)\quad \begin{cases} \delta p = \dfrac{d\delta\omega_u}{d\omega} + q\delta\omega_w - r\delta\omega_v, \\ \delta q = \dfrac{d\delta\omega_v}{d\omega} + r\delta\omega_u - p\delta\omega_w, \\ \delta r = \dfrac{d\delta\omega_w}{d\omega} + p\delta\omega_v - q\delta\omega_u. \end{cases}$$

Les formules (14) et (17) sont, aux différences de notations près, celles que MM. Cosserat ont données antérieurement [1].

---

[1] E. et F. COSSERAT, *loc. cit.*, p. 8, formules (8) et (7).

Établissons un dernier groupe de relations et soient $\delta\omega_x$, $\delta\omega_y$, $\delta\omega_z$ les composantes suivant les axes fixes $Oxyz$ de la rotation virtuelle du trièdre mobile (M); on a

$$\delta\omega_x = \alpha\delta\omega_u + \alpha_1\delta\omega_v + \alpha_2\delta\omega_w,$$

d'où

$$d\delta\omega_x = \alpha d\delta\omega_u + \alpha_1 d\delta\omega_v + \alpha_2 d\delta\omega_w + d\alpha\delta\omega_u + d\alpha_1\delta\omega_v + d\alpha_2\delta\omega_w.$$

Remplaçons alors $d\delta\omega_u$, $d\delta\omega_v$, $d\delta\omega_w$ par leurs valeurs tirées de (17) et $d\alpha$, $d\alpha_1$, $d\alpha_2$ par leurs valeurs (16); il vient la première des égalités

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\delta\omega_x}{d\omega} &= \alpha\delta p + \alpha_1\delta q + \alpha_2\delta r,\\ \frac{d\delta\omega_y}{d\omega} &= \beta\delta p + \beta_1\delta q + \beta_2\delta r,\\ \frac{d\delta\omega_z}{d\omega} &= \gamma\delta p + \gamma_1\delta q + \gamma_2\delta r.\end{aligned}\right.$$

3. Les six fonctions caractéristiques de la déformation. — Nous avons vu qu'on passe, à l'instant t, du trièdre (M) au trièdre infiniment voisin (M') par la translation $(\xi, \eta, \zeta)\,d\omega$ et par la rotation $(p, q, r)\,d\omega$. Dans l'état primitif, ces trièdres sont (m) et (m') et l'on passe de même du premier au second par une translation $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)\,d\omega$ et une rotation $(p_0, q_0, r_0)\,d\omega$, ces six composantes étant relatives aux axes mu, mv, mw du trièdre (m).

Si donc, par un déplacement d'ensemble sans déformation imprimé à l'état primitif, on amène (m) en coïncidence avec (M) de façon que les axes homologues mu, Mu; ... coïncident, il faut, après cela, imprimer à (m') la translation $(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0, \zeta - \zeta_0)\,d\omega$ et la rotation $(p - p_0, q - q_0, r - r_0)\,d\omega$ pour l'amener à coïncider avec (M'). La déformation en M de la ligne élastique dans son état actuel par rapport à son état primitif est alors caractérisée par les six fonctions

$$(19)\qquad \xi - \xi_0,\quad \eta - \eta_0,\quad \zeta - \zeta_0;\quad p - p_0,\quad q - q_0,\quad r - r_0$$

de ω, t en vertu des deux théorèmes suivants :

I. *Si les six fonctions* (19) *sont identiquement nulles, la déformation est nulle, en ce sens qu'on passe de l'état primitif à l'état actuel par un déplacement d'ensemble, et réciproquement.*

En effet, si les fonctions (19) sont nulles au point M, en amenant (m) sur (M) par un déplacement d'ensemble imprimé à l'état primitif, (m') vient sur (M') et, si les fonctions (19) sont identiquement nulles, cette coïncidence se produit tout le long de la ligne. Réciproquement, si, en amenant (m) sur (M) par un déplacement d'ensemble imprimé à l'état primitif, (m') vient en coïncidence avec (M'), c'est que les six fonctions sont nulles au point M et, si la coïncidence a lieu tout le long de la ligne, c'est que ces six fonctions sont identiquement nulles.

II. *Deux déformations, pour lesquelles les six fonctions* (19) *sont identiques, sont des déformations identiques, et réciproquement.*

Soient E, E_1 deux états déformés par rapport à l'état primitif E_0, pour lesquels

$$(20) \qquad \xi = \xi_1, \quad \eta = \eta_1, \quad \ldots, \quad r = r_1$$

tout le long de la ligne. On passe alors de (M) à (M') de la même manière que de (M_1) à (M'_1), en ce sens que si l'on amène (M) en coïncidence avec (M_1) par un déplacement d'ensemble effectué sur E, (M') vient en (M'_1), par suite E sur E_1. Réciproquement, si E peut être amené à coïncider avec E_1 par un déplacement d'ensemble, c'est qu'on passe de (M) à (M') de la même façon que de (M_1) à (M'_1), ce qui exige qu'on ait les relations (20) tout le long de la ligne, par suite que les six fonctions (19) soient identiques pour E et E_1.

4. **Potentiel thermodynamique interne et viscosité.** — Il résulte de ce qui précède que le potentiel thermodynamique interne de l'élément de ligne $\overline{MM'} = ds$ doit être le produit de sa masse $\rho_0 d\omega$ par une fonction des six déformations (19) et de la température absolue T de la ligne en M. Comme ρ_0 est une fonction donnée de ω, le potentiel thermodynamique interne de l'élément ds est donc de la forme

$$f(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0, \ldots, r - r_0, T, \omega)\, d\omega,$$

f étant une fonction des huit variables mises en évidence, et celui de la ligne entière

$$(21) \qquad \mathcal{F} = \int f(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0, \zeta - \zeta_0; p - p_0, q - q_0, r - r_0; T, \omega)\, d\omega,$$

l'intégration étant effectuée tout le long de l'axe longitudinal primitif. Cette expression correspond à celle qu'ont obtenue MM. Cosserat pour *l'action de déformation*, en cherchant une fonction des positions de deux trièdres infiniment voisins (M) et (M') ayant une variation nulle dans tout déplacement d'ensemble[1]. Si l'état primitif est homogène, ω ne figure pas explicitement dans la fonction f, puisqu'alors ρ_0 est constant.

[1] E. et F. Cosserat, *loc. cit.*, p. 10.

La variation virtuelle isothermique de $\mathcal{F}$ est ainsi

$$(22) \qquad \delta_T \mathcal{F} = \int \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \delta \xi + \frac{\partial f}{\partial \eta} \delta \eta + \ldots + \frac{\partial f}{\partial r} \delta r \right) d\omega.$$

D'autre part, la modification virtuelle isothermique de l'élément de ligne ds étant caractérisée par les six variations $\delta\xi, \delta\eta, \ldots, \delta r$, la Thermodynamique nous enseigne que le travail virtuel de viscosité de la ligne doit être de la forme

$$(23) \qquad \delta \mathcal{T}_v = - \int (F \delta \xi + G \delta \eta + H \delta \zeta + P \delta p + Q \delta q + R \delta r) \, d\omega,$$

F, G, ..., R étant les *actions de viscosité*, fonctions des huit paramètres dont dépend déjà la fonction f et en outre des six dérivées

$$(24) \qquad \dot\xi = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \qquad \dot\eta = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \qquad \ldots, \qquad \dot r = \frac{\partial r}{\partial t} \text{ (1)}.$$

Comme les actions de viscosité doivent s'annuler en même temps que ces dérivées, l'hypothèse la plus simple est de les considérer comme des fonctions linéaires et homogènes de ces dérivées, dont les coefficients sont seulement fonctions de $\xi - \xi_0$, $\eta - \eta_0$, ..., $r - r_0$, T, ω. D'après l'hypothèse générale de Lord Rayleigh, nous admettrons l'existence d'une *fonction dissipative* $\mathfrak{D}$, c'est-à-dire d'une forme quadratique des dérivées (24), telle qu'on ait

$$(25) \qquad (F, G, \ldots, R) = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial (\dot\xi, \dot\eta, \ldots, \dot r)},$$

de sorte que le travail élémentaire de viscosité dans une modification réelle où l'on a $\delta\xi = \dot\xi \, dt$, ..., a pour expression

$$(25') \qquad d\mathcal{T}_v = - dt \int 2\mathfrak{D} \, d\omega.$$

Ce dernier travail devant être essentiellement négatif, la fonction dissipative $\mathfrak{D}$ doit être une forme quadratique définie positive(2).

---

(1) Pour abréger, nous représenterons très souvent par des points placés au-dessus de la lettre les dérivées par rapport à t, soit : $\dot\xi = \frac{\partial \xi}{\partial t}$, $\ddot\xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$, ...

(2) Sur l'origine des propositions précédentes, voir P. Duhem, *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques.*

Si maintenant nous posons

$$(26)\qquad \begin{cases} \mathcal{R}_u = -(f'_\xi + \mathrm{F}), & \mathcal{R}_v = -(f'_\eta + \mathrm{G}), & \mathcal{R}_w = -(f'_\zeta + \mathrm{H}); \\ \mathcal{C}_u = -(f'_p + \mathrm{P}), & \mathcal{C}_v = -(f'_q + \mathrm{Q}), & \mathcal{C}_w = -(f'_r + \mathrm{R}), \end{cases}$$

il vient d'après (22) et (23)

$$\delta\mathcal{T}_v - \delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F} = \int (\mathcal{R}_u\delta\xi + \mathcal{R}_v\delta\eta + \ldots + \mathcal{C}_w\delta r)\,d\omega,$$

soit plus simplement, d'après notre notation abrégée,

$$(27)\qquad \delta\mathcal{T}_v - \delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F} = \int |\mathcal{R}_u\delta\xi + \mathcal{C}_u\delta p|\,d\omega.$$

Cette égalité nous montre que les expressions (26) représentent les composantes suivant les axes mobiles Muvw d'une force $\mathcal{R}$ et d'un couple $\mathcal{C}$.

5. Transformation de l'expression précédente. — Nous allons transformer le second membre de (27) en substituant aux six variations $\delta\xi, \delta\eta, \ldots, \delta r$ les variations $\delta u, \delta v, \delta w$; $\delta\omega_u, \delta\omega_v, \delta\omega_w$ relatives aux axes mobiles Muvw, puis les variations δx, $\delta y, \delta z$; $\delta\omega_x, \delta\omega_y, \delta\omega_z$ relatives aux axes fixes Oxyz. Les deux expressions ainsi obtenues nous permettront par la suite d'écrire presque immédiatement les équations du mouvement de la ligne dans chacun des deux systèmes d'axes.

Nous avons tout d'abord, en remplaçant $\delta\xi, \delta\eta, \ldots, \delta r$ par leurs valeurs (14) et (17),

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{T}_v - \delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F} = \int \bigg| &\mathcal{R}_u\left(\frac{d\delta u}{d\omega} + q\delta w - r\delta v + \eta\delta\omega_w - \zeta\delta\omega_v\right) \\ &+ \mathcal{C}_u\left(\frac{d\delta\omega_u}{d\omega} + q\delta\omega_w - r\delta\omega_v\right)\bigg|\,d\omega,\end{aligned}$$

ce qui donne, par intégrations par parties,

$$(28)\qquad \begin{aligned}\delta\mathcal{T}_v - \delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F} = {}& |\mathcal{R}_u\delta u + \mathcal{C}_u\delta\omega_u|_{\mathrm{M}_1}^{\mathrm{M}_2} \\ &+ \int \bigg| \left(-\frac{\partial\mathcal{R}_u}{\partial\omega} + r\mathcal{R}_v - q\mathcal{R}_w\right)\delta u \\ &\quad + \left(-\frac{\partial\mathcal{C}_u}{\partial\omega} + r\mathcal{C}_v - q\mathcal{C}_w + \zeta\mathcal{R}_v - \eta\mathcal{R}_w\right)\delta\omega_u\bigg|\,d\omega,\end{aligned}$$

M_1 et M_2 désignant l'origine et l'extrémité de la ligne.

Pour obtenir la seconde expression de (27) relative aux axes fixes $Oxyz$, désignons par $\mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y, \mathcal{R}_z$; $\mathcal{C}_x, \mathcal{C}_y, \mathcal{C}_z$ les composantes de la force $\mathcal{R}$ et du couple $\mathcal{C}$ suivant ces axes, soit

$$(\mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y, \mathcal{R}_z) = (\alpha, \beta, \gamma)\,\mathcal{R}_u + (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\,\mathcal{R}_v + (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)\,\mathcal{R}_w, \tag{29}$$

$$(\mathcal{C}_x, \mathcal{C}_y, \mathcal{C}_z) = (\alpha, \beta, \gamma)\,\mathcal{C}_u + (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\,\mathcal{C}_v + (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)\,\mathcal{C}_w. \tag{30}$$

On a, d'après (9) et (29),

$$|\mathcal{R}_u \delta\xi|\, d\omega = \mathcal{R}_u\, |\delta\alpha\, dx| + \mathcal{R}_v\, |\delta\alpha_1\, dx| + \mathcal{R}_w\, |\delta\alpha_2\, dx| + |\mathcal{R}_x d\delta x|. \tag{31}$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_u\, |\delta\alpha\, dx| &+ \mathcal{R}_v\, |\delta\alpha_1\, dx| + \mathcal{R}_w\, |\delta\alpha_2\, dx| \\
&= (\mathcal{R}_u \delta\alpha + \mathcal{R}_v \delta\alpha_1 + \mathcal{R}_w \delta\alpha_2)\, dx \\
&\quad + (\mathcal{R}_u \delta\beta + \mathcal{R}_v \delta\beta_1 + \mathcal{R}_w \delta\beta_2)\, dy \\
&\quad + (\mathcal{R}_u \delta\gamma + \mathcal{R}_v \delta\gamma_1 + \mathcal{R}_w \delta\gamma_2)\, dz
\end{aligned}$$

et comme on a

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}_u = |\alpha \mathcal{R}_x|, \qquad \mathcal{R}_v = |\alpha_1 \mathcal{R}_x|, \qquad \mathcal{R}_w = |\alpha_2 \mathcal{R}_x|; \\
&\delta\omega_x = \beta\delta\gamma + \beta_1\delta\gamma_1 + \beta_2\delta\gamma_2 = -(\gamma\delta\beta + \gamma_1\delta\beta_1 + \gamma_2\delta\beta_2), \\
&\delta\omega_y = \gamma\delta\alpha + \gamma_1\delta\alpha_1 + \gamma_2\delta\alpha_2 = -(\alpha\delta\gamma + \alpha_1\delta\gamma_1 + \alpha_2\delta\gamma_2), \\
&\delta\omega_z = \alpha\delta\beta + \alpha_1\delta\beta_1 + \alpha_2\delta\beta_2 = -(\beta\delta\alpha + \beta_1\delta\alpha_1 + \beta_2\delta\alpha_2),
\end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_u \delta\alpha + \mathcal{R}_v \delta\alpha_1 + \mathcal{R}_w \delta\alpha_2 &= \mathcal{R}_z \delta\omega_y - \mathcal{R}_y \delta\omega_z, \\
\mathcal{R}_u \delta\beta + \mathcal{R}_v \delta\beta_1 + \mathcal{R}_w \delta\beta_2 &= \mathcal{R}_x \delta\omega_z - \mathcal{R}_z \delta\omega_x, \\
\mathcal{R}_u \delta\gamma + \mathcal{R}_v \delta\gamma_1 + \mathcal{R}_w \delta\gamma_2 &= \mathcal{R}_y \delta\omega_x - \mathcal{R}_x \delta\omega_y.
\end{aligned}$$

L'égalité (31) s'écrit ainsi

$$|\mathcal{R}_u \delta\xi|\, d\omega = |\mathcal{R}_x d\delta x + (\mathcal{R}_y dz - \mathcal{R}_z dy)\, \delta\omega_x|. \tag{32}$$

Multiplions enfin les égalités (18) respectivement par $\mathcal{C}_x, \mathcal{C}_y, \mathcal{C}_z$ et ajoutons membre à membre; en tenant compte de (30), il vient

$$|\mathcal{C}_u \delta p|\, d\omega = |\mathcal{C}_x d\delta\omega_x|. \tag{33}$$

L'égalité (27) s'écrit donc encore, d'après (32) et (33),

$$\delta \mathcal{T}_v - \delta_T \mathcal{F} = \int |\mathcal{R}_x d\delta x + (\mathcal{R}_y dz - \mathcal{R}_z dy)\delta\omega_x + \mathcal{C}_x d\delta\omega_x|,$$

ce qui donne finalement, par intégrations par parties,

$$(34) \qquad \delta \mathcal{T}_v - \delta_T \mathcal{F} = |\mathcal{R}_x \delta x + \mathcal{C}_x \delta\omega_x|_{M_1}^{M_2} + \int |-d\mathcal{R}_x \delta x + (-d\mathcal{C}_x + \mathcal{R}_y dz - \mathcal{R}_z dy)\delta\omega_x|.$$

6. Équations du mouvement rapportées aux axes fixes. — D'après les principes de l'Énergétique, nous obtiendrons les équations du mouvement de la ligne en écrivant qu'on a, dans toute modification virtuelle isothermique,

$$(35) \qquad \delta \mathcal{T}_e + \delta J + \delta \mathcal{T}_v - \delta_T \mathcal{F} = 0,$$

$\delta \mathcal{T}_e$ désignant le travail virtuel des forces extérieures et δJ celui des forces d'inertie. Le calcul de ces travaux se trouve très simplifié par la remarque suivante.

Considérons, dans l'état primitif, un point matériel de la ligne appartenant au tronçon rapporté au trièdre (m) et soient u, v, w ses coordonnées relatives à ce trièdre. Dans l'état actuel, ce point est venu en P voisin de M et ses coordonnées relatives au trièdre (M) sont $u + U$, $v + V$, $w + W$; U, V, W désignant les composantes suivant les axes mobiles Mu, Mv, Mw du déplacement élastique du point. Les coordonnées absolues x_1, y_1, z_1 de P sont ainsi

$$x_1 = x + \alpha(u + U) + \alpha_1(v + V) + \alpha_2(w + W),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

d'où, en observant que les coordonnées relatives de P ne varient que par l'intermédiaire de U, V, W,

$$\delta x_1 = \delta x + (u + U)\delta\alpha + (v + V)\delta\alpha_1 + (w + W)\delta\alpha_2 + \alpha\delta U + \alpha_1\delta V + \alpha_2\delta W, \; \dots .$$

Or, dans ces formules, on peut sans erreur sensible réduire les parenthèses à u, v, w et négliger les trois derniers termes vis-à-vis de $\delta x, \dots$, puisque le déplacement élastique est très petit vis-à-vis de la distance (u, v, w), qui est elle-même très petite vis-à-vis de la distance $OM(x, y, z)$. On a ainsi très sensiblement

$$\delta x_1 = \delta x + u\delta\alpha + v\delta\alpha_1 + w\delta\alpha_2, \; \dots,$$

ce qui revient à dire que le déplacement virtuel d'un point quelconque du tronçon peut être calculé comme si ce tronçon était un corps solide. Pour calculer le travail virtuel $\delta\mathcal{T}_e + \delta \mathrm{J}$, nous pouvons donc effectuer au préalable la réduction, par rapport à chaque point M de l'axe longitudinal, des forces extérieures et d'inertie appliquées au tronçon comprenant ce point et, pour effectuer cette réduction, il nous suffit de partir des formules

$$(36) \qquad \begin{cases} x_1 = x + \alpha u + \alpha_1 v + \alpha_2 w, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

c'est-à-dire de procéder comme pour un corps solide.

Comme tronçon relatif au point M, nous prendrons le feuillet découpé dans la ligne par deux plans de coordonnées homologues des trièdres infiniment voisins (M) et (M'), de sorte que la réduction par rapport à M des forces extérieures qui lui sont appliquées donne une force et un couple de l'ordre de $\overline{\mathrm{MM}'} = ds$, soit encore de l'ordre de $d\omega$. Leurs quotients par ds ou $d\omega$ représentent donc la force et le couple extérieurs au point M par unité de longueur comptée sur l'état actuel ou sur l'état primitif. De même pour les forces d'inertie.

Cela posé, soient $\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Z}_1$; $\mathrm{L}_1, \mathrm{M}_1, \mathrm{N}_1$ les composantes suivant les axes fixes $Oxyz$ de la force et du couple appliqués à l'origine M_1 de la ligne, c'est-à-dire les éléments de la réduction par rapport à M_1 des forces appliquées à la base correspondante; $\mathrm{X}_2, \mathrm{Y}_2, \mathrm{Z}_2$; $\mathrm{L}_2, \mathrm{M}_2, \mathrm{N}_2$ les éléments analogues relatifs à son extrémité M_2; $\mathrm{X}_e, \mathrm{Y}_e, \mathrm{Z}_e$; $\mathrm{L}_e, \mathrm{M}_e, \mathrm{N}_e$ les composantes suivant les mêmes axes de la force extérieure et du couple extérieur au point M par unité de longueur comptée sur l'état actuel. Dans le cas le plus général, la force extérieure appliquée à un point P de la ligne étant fonction du temps, de la position et de la vitesse de ce point, les éléments précédents seront, d'après (36), des fonctions données de t, des six paramètres x, y, z; θ, φ, ψ et de leurs dérivées par rapport à t. Soient enfin $\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_i, \mathrm{Z}_i$; $\mathrm{L}_i, \mathrm{M}_i, \mathrm{N}_i$ les éléments analogues à $\mathrm{X}_e, \mathrm{Y}_e, \dots, \mathrm{N}_e$, mais relatifs aux forces d'inertie; on a

$$(37) \qquad \begin{aligned} \delta\mathcal{T}_e + \delta\mathrm{J} = |\mathrm{X}_1\delta x_1 + \mathrm{L}_1\delta\omega_{x1}| &+ |\mathrm{X}_2\delta x_2 + \mathrm{L}_2\delta\omega_{x2}| \\ &+ \int |(\mathrm{X}_e + \mathrm{X}_i)\,\delta x + (\mathrm{L}_e + \mathrm{L}_i)\,\delta\omega_x|\,ds. \end{aligned}$$

L'équation fondamentale (35) s'écrit ainsi, d'après (34),

$$(38) \qquad \begin{aligned} &|(\mathrm{X}_1 - \mathcal{R}_{x1})\,\delta x_1 + (\mathrm{L}_1 - \mathcal{C}_{x1})\,\delta\omega_{x1}| \\ &+ |(\mathrm{X}_2 + \mathcal{R}_{x2})\,\delta x_2 + (\mathrm{L}_2 + \mathcal{C}_{x2})\,\delta\omega_{x2}| \\ &+ \int |[(\mathrm{X}_e + \mathrm{X}_i)\,ds - d\mathcal{R}_x]\,\delta x \\ &+ [(\mathrm{L}_e + \mathrm{L}_i)\,ds - d\mathcal{C}_x + \mathcal{R}_y dz - \mathcal{R}_z dy]\,\delta\omega_x| = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité devant être satisfaite quels que soient $\delta x, \delta y, \ldots, \delta \omega_z$ tout le long de la ligne, on en conclut qu'on doit avoir :

I. A l'origine M_1 de la ligne,

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{lll} X_1 - \mathcal{R}_{x1} = 0, & Y_1 - \mathcal{R}_{y1} = 0, & Z_1 - \mathcal{R}_{z1} = 0; \\ L_1 - \mathcal{C}_{x1} = 0, & M_1 - \mathcal{C}_{y1} = 0, & N_1 - \mathcal{C}_{z1} = 0; \end{array} \right.$$

II. A son extrémité M_2,

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{lll} X_2 + \mathcal{R}_{x2} = 0, & Y_2 + \mathcal{R}_{y2} = 0, & Z_2 + \mathcal{R}_{z2} = 0; \\ L_2 + \mathcal{C}_{x2} = 0, & M_2 + \mathcal{C}_{y2} = 0, & N_2 + \mathcal{C}_{z2} = 0; \end{array} \right.$$

III. En chaque point de la ligne,

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\mathcal{R}_x}{ds} = X_e + X_i, \\ \dfrac{d\mathcal{R}_y}{ds} = Y_e + Y_i, \\ \dfrac{d\mathcal{R}_z}{ds} = Z_e + Z_i; \\ \dfrac{d\mathcal{C}_x}{ds} + \mathcal{R}_z \dfrac{dy}{ds} - \mathcal{R}_y \dfrac{dz}{ds} = L_e + L_i, \\ \dfrac{d\mathcal{C}_y}{ds} + \mathcal{R}_x \dfrac{dz}{ds} - \mathcal{R}_z \dfrac{dx}{ds} = M_e + M_i, \\ \dfrac{d\mathcal{C}_z}{ds} + \mathcal{R}_y \dfrac{dx}{ds} - \mathcal{R}_x \dfrac{dy}{ds} = N_e + N_i. \end{array} \right.$$

On a en outre, d'après (26), (29) et (30),

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_x = -\alpha(f'_\xi + F) - \alpha_1(f'_\eta + G) - \alpha_2(f'_\zeta + H), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathcal{C}_x = -\alpha(f'_p + P) - \alpha_1(f'_q + Q) - \alpha_2(f'_r + R), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Telles sont les équations du mouvement rapportées aux axes fixes; nous donnerons plus loin les expressions des forces d'inertie.

7. Signification physique de la force $\mathcal{R}$ et du couple $\mathcal{C}$. — La signification physique de la force $\mathcal{R}$ et du couple $\mathcal{C}$ en chaque point M de l'axe longitudinal résulte immédiatement des équations précédentes. Supposons qu'on supprime la portion M_1M de la ligne; les équations du mouvement de la partie restante MM_2 ne sont pas modifiées si, sans changer les forces extérieures appliquées à MM_2, on applique en M la force $\mathcal{R}$ et le couple $\mathcal{C}$. D'après le postulat sur les liaisons, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{C}$ représentent donc les éléments de la réduction par rapport à M des forces de liaisons exercées par M_1M sur MM_2. Inversement, ces vecteurs pris en sens contraires, soit $-\mathcal{R}$, $-\mathcal{C}$, représentent les éléments de la réduction par rapport à M des forces de liaisons exercées par MM_2 sur M_1M. Il résulte alors des six équations universelles du mouvement des systèmes matériels que l'ensemble des forces extérieures et d'inertie appliquées à la portion M_1M, de la force $-\mathcal{R}$ et du couple $-\mathcal{C}$ doit constituer un système de vecteurs nul. Autrement dit, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{C}$ représentent aussi les éléments de la réduction par rapport à M des forces extérieures et d'inertie appliquées à la portion M_1M. Ces éléments sont donc précisément ceux qui servent à définir, en Résistance des matériaux, l'effort longitudinal d'extension ou de compression, l'effort tranchant, le moment de torsion et le moment fléchissant au point M, par leurs projections sur la tangente à l'axe longitudinal et sur le plan normal à cet axe.

8. Démonstration directe. — Les équations (39), (40), (41) sont d'ailleurs indépendantes de la considération des trièdres (M) et peuvent s'obtenir par de simples considérations de Mécanique rationnelle. L'Énergétique n'intervient qu'ensuite pour parvenir aux relations (42).

En effet, la réduction par rapport à M des forces extérieures et d'inertie appliquées à la portion $\widehat{M_1M} = s$ donne une force $\mathcal{R}$ et un couple $\mathcal{C}$ ayant pour composantes

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{R}_x = X_1 + \int_0^s (X_e + X_i)'\,ds', \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\mathcal{C}_x = L_1 + (y_1 - y)Z_1 - (z_1 - z)Y_1 \\ &\qquad + \int_0^s [(L_e + L_i)' + (y' - y)(Z_e + Z_i)' - (z' - z)(Y_e + Y_i)']\,ds', \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}\right.$$

où les accents se rapportent à un point M' variable de l'arc M_1M. En dérivant les trois premières par rapport à s, on retrouve immédiatement les trois premières équations (41). En procédant de même pour les trois autres (43), il vient

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{C}_x}{ds} = &-\frac{dy}{ds}Z_1 + \frac{dz}{ds}Y_1 + L_e + L_i \\ &-\frac{dy}{ds}\int_0^s (Z_e + Z_i)'\,ds' + \frac{dz}{ds}\int_0^s (Y_e + Y_i)'\,ds', \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

ce qui, d'après les trois premières (43) redonne immédiatement les trois dernières (41). Pour retrouver les conditions aux limites (39), (40), remarquons que les premières s'obtiennent immédiatement en faisant $s=0$ dans (43). En y faisant ensuite $s = M_1M_2$, elles deviennent

$$\mathcal{R}_{x2} = X_1 + \int (X_e + X_i)\, ds,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\mathcal{C}_{x2} = L_1 + (y_1 - y_2) Z_1 - (z_1 - z_2) Y_1$$
$$+ \int [L_e + L_i + (y - y_2)(Z_e + Z_i) - (z - z_2)(Y_e + Y_i)]\, ds,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

les intégrations s'étendant maintenant à la ligne entière. Pour simplifier ces conditions, appliquons à la ligne entière les six équations universelles exprimant que les forces extérieures et d'inertie forment un système nul, soit

$$X_1 + \int (X_e + X_i)\, ds + X_2 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$L_1 + y_1 Z_1 - z_1 Y_1 + \int [L_e + L_i + y(Z_e + Z_i)$$
$$- z(Y_e + Y_i)]\, ds + L_2 + y_2 Z_2 - z_2 Y_2 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En ajoutant membre à membre chacune de celles-ci à l'équation correspondante du groupe précédent, on retrouve après simplifications évidentes les conditions (40).

Il ne nous reste plus qu'à retrouver les formules (42). A cet effet, calculons d'abord $\delta\mathcal{T}_e + \delta J$ en tenant compte des équations déjà obtenues (39), (40), (41); ce travail virtuel est donné par (37). Remplaçons-y les forces extérieures et d'inertie par leurs valeurs (41); il vient

$$\delta\mathcal{T}_e + \delta J = |X_1 \delta x_1 + L_1 \delta\omega_{x1}| + |X_2 \delta x_2 + L_2 \delta\omega_{x2}|$$
$$+ \int |d\mathcal{R}_x \delta x + (d\mathcal{C}_x - \mathcal{R}_y dz + \mathcal{R}_z dy)\, \delta\omega_x| .$$

En transformant les termes en $d\mathcal{R}_x, d\mathcal{R}_y, \ldots, d\mathcal{C}_z$ par intégrations par parties, les termes tout intégrés se détruisent avec ceux de la première ligne d'après (39), (40) et il reste

$$\delta\mathcal{T}_e + \delta J = -\int |\mathcal{R}_x d\delta x + (\mathcal{R}_y dz - \mathcal{R}_z dy)\, \delta\omega_x + \mathcal{C}_x d\delta\omega_x| .$$

Or, soient $\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_v, \ldots, \mathcal{C}_w$ les composantes de la force $\mathcal{R}$ et du couple $\mathcal{C}$ suivant les axes mobiles $Muvw$; il en résulte les formules (29), (30), puis (32), (33), d'après lesquelles l'égalité précédente devient

$$\delta \mathcal{T}_e + \delta \mathrm{J} = -\int |\mathcal{R}_u \delta \xi + \mathcal{C}_u \delta p|\, d\omega.$$

Mais, d'après l'équation fondamentale (35), la dernière intégrale doit être égale à $\delta \mathcal{T}_v - \delta_{\mathrm{T}} \mathcal{F}$ et la comparaison avec (27) montre que $\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_v, \ldots, \mathcal{C}_w$ doivent être donnés par (26), ce qui entraîne les égalités (42).

9. Équations intrinsèques. — Nous appelons équations intrinsèques les équations du mouvement rapportées aux axes mobiles $Muvw$; nous allons les obtenir très simplement par application de l'égalité (28).

Soient $\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Z}_1$; $\mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1, \mathcal{N}_1$ les composantes suivant les axes $\mathrm{M}_1 uvw$ de la force et du couple extérieurs appliqués à l'origine M_1 de la ligne; $\mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Z}_2$; $\mathcal{L}_2, \mathcal{M}_2, \mathcal{N}_2$ les éléments analogues relatifs à son extrémité M_2; $\mathcal{X}_e, \mathcal{Y}_e, \mathcal{Z}_e$; $\mathcal{L}_e, \mathcal{M}_e, \mathcal{N}_e$ les composantes suivant les axes $Muvw$ de la force et du couple extérieurs au point M, par unité de longueur comptée sur l'état primitif; $\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, \mathcal{Z}_i$; $\mathcal{L}_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{N}_i$ les éléments analogues relatifs aux forces d'inertie. On a

$$(44)\qquad \begin{aligned} \delta \mathcal{T}_e + \delta \mathrm{J} = {} & |\mathcal{X}_1 \delta u_1 + \mathcal{L}_1 \delta \omega_{u1}| + |\mathcal{X}_2 \delta u_2 + \mathcal{L}_2 \delta \omega_{u2}| \\ & + \int |(\mathcal{X}_e + \mathcal{X}_i)\delta u + (\mathcal{L}_e + \mathcal{L}_i)\delta \omega_u|\, d\omega. \end{aligned}$$

L'égalité (35) s'écrit ainsi, d'après (28),

$$\begin{aligned} & |(\mathcal{X}_1 - \mathcal{R}_{u1})\delta u_1 + (\mathcal{L}_1 - \mathcal{C}_{u1})\delta \omega_{u1}| \\ & + |(\mathcal{X}_2 + \mathcal{R}_{u2})\delta u_2 + (\mathcal{L}_2 + \mathcal{C}_{u2})\delta \omega_{u2}| \\ & + \int \left| \left(\mathcal{X}_e + \mathcal{X}_i - \frac{\partial \mathcal{R}_u}{\partial \omega} + r\mathcal{R}_v - q\mathcal{R}_w\right)\delta u \right. \\ & \left. + \left(\mathcal{L}_e + \mathcal{L}_i - \frac{\partial \mathcal{C}_u}{\partial \omega} + r\mathcal{C}_v - q\mathcal{C}_w + \zeta\mathcal{R}_v - \eta\mathcal{R}_w\right)\delta \omega_u \right| d\omega = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité devant être satisfaite quels que soient $\delta u, \delta v, \ldots, \delta \omega_w$ tout le long de la ligne, on en conclut qu'on doit avoir :

I. A l'origine M_1 de la ligne, c'est-à-dire pour $\omega = 0$,

$$(45)\qquad \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{X}_1 - \mathcal{R}_{u1} = 0, & \mathcal{Y}_1 - \mathcal{R}_{v1} = 0, & \mathcal{Z}_1 - \mathcal{R}_{w1} = 0; \\ \mathcal{L}_1 - \mathcal{C}_{u1} = 0, & \mathcal{M}_1 - \mathcal{C}_{v1} = 0, & \mathcal{N}_1 - \mathcal{C}_{w1} = 0; \end{array} \right.$$

II. A son extrémité M_2, c'est-à-dire pour $\omega = l$, l étant la longueur de l'axe longitudinal dans son état primitif,

$$(46)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \mathcal{X}_2 + \mathcal{R}_{u2} = 0, & \mathcal{Y}_2 + \mathcal{R}_{v2} = 0, & \mathcal{Z}_2 + \mathcal{R}_{w2} = 0; \\ \mathcal{L}_2 + \mathcal{C}_{u2} = 0, & \mathcal{M}_2 + \mathcal{C}_{v2} = 0, & \mathcal{N}_2 + \mathcal{C}_{w2} = 0; \end{array}\right.$$

III. En chaque point de la ligne, c'est-à-dire pour $0 \leqslant \omega \leqslant l$,

$$(47)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathcal{R}_u}{\partial \omega} + q\mathcal{R}_w - r\mathcal{R}_v = \mathcal{X}_e + \mathcal{X}_i, \\ \dfrac{\partial \mathcal{R}_v}{\partial \omega} + r\mathcal{R}_u - p\mathcal{R}_w = \mathcal{Y}_e + \mathcal{Y}_i, \\ \dfrac{\partial \mathcal{R}_w}{\partial \omega} + p\mathcal{R}_v - q\mathcal{R}_u = \mathcal{Z}_e + \mathcal{Z}_i; \\ \dfrac{\partial \mathcal{C}_u}{\partial \omega} + q\mathcal{C}_w - r\mathcal{C}_v + \eta\mathcal{R}_w - \zeta\mathcal{R}_v = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_i, \\ \dfrac{\partial \mathcal{C}_v}{\partial \omega} + r\mathcal{C}_u - p\mathcal{C}_w + \zeta\mathcal{R}_u - \xi\mathcal{R}_w = \mathcal{M}_e + \mathcal{M}_i, \\ \dfrac{\partial \mathcal{C}_w}{\partial \omega} + p\mathcal{C}_v - q\mathcal{C}_u + \xi\mathcal{R}_v - \eta\mathcal{R}_u = \mathcal{N}_e + \mathcal{N}_i. \end{array}\right.$$

Telles sont les équations intrinsèques, auxquelles on doit adjoindre les égalités (26); nous aurions également pu les déduire des équations relatives aux axes fixes $Oxyz$ par un changement de coordonnées.

10. Expressions des forces d'inertie. — Nous avons vu (n° 6) que la réduction des forces extérieures et d'inertie peut s'effectuer comme si chaque tronçon de ligne était un corps solide; on a donc, d'après (36),

$$X_i ds = -\sum m\ddot{x}_1 = -\rho ds\ddot{x} - \ddot{\alpha}\sum mu - \ddot{\alpha}_1\sum mv - \ddot{\alpha}_2\sum mw\ (^1),$$

m étant la masse du point P et les sommations étant étendues à tous les points matériels du tronçon de masse $\sum m = \rho ds = \rho_0 d\omega$. Or, le tronçon étant un feuillet découpé dans la ligne par deux sections généralement obliques et infiniment voisines, et le point M étant le centre de gravité de la section normale, les sommes $\sum m(u, v, w)$ sont nulles ou infiniment petites du second ordre, de sorte qu'on a simplement

$$(X_i, Y_i, Z_i) = -\rho(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$$

(1) Voir la note (1), p. 128.

et par suite

$$(48)\qquad \mathfrak{X}_i = -\rho_0 |\alpha \ddot{x}|, \qquad \mathfrak{Y}_i = -\rho_0 |\alpha_1 \ddot{x}|, \qquad \mathfrak{Z}_i = -\rho_0 |\alpha_2 \ddot{x}|,$$

l'indice zéro tenant à ce que la force par unité de longueur $(\mathfrak{X}_i, \mathfrak{Y}_i, \mathfrak{Z}_i)$ est rapportée à l'état primitif, tandis que la première (X_i, Y_i, Z_i) est rapportée à l'état actuel.

Pour simplifier au maximum les expressions du couple d'inertie, prenons pour axes mobiles $Muvw$ les axes principaux d'inertie relatifs au point M de la face du feuillet passant par ce point; ces axes deviennent ainsi les axes principaux d'inertie du tronçon relatifs au point M, de sorte que nous avons, d'après des formules bien connues de la Dynamique du corps solide,

$$(49)\qquad \begin{cases} \mathfrak{L}_i = -\rho_0 [A^2 \dot{\mathfrak{P}} + (C^2 - B^2) \mathfrak{Q}\mathfrak{R}], \\ \mathfrak{M}_i = -\rho_0 [B^2 \dot{\mathfrak{Q}} + (A^2 - C^2) \mathfrak{R}\mathfrak{P}], \\ \mathfrak{N}_i = -\rho_0 [C^2 \dot{\mathfrak{R}} + (B^2 - A^2) \mathfrak{P}\mathfrak{Q}], \end{cases}$$

A, B, C étant les rayons de giration par rapport aux axes Mu, Mv, Mw de la face du feuillet passant par M et

$$(50)\qquad \begin{cases} \mathfrak{P} = |\alpha_2 \dot{\alpha}_1| = -|\alpha_1 \dot{\alpha}_2|, \\ \mathfrak{Q} = |\alpha \dot{\alpha}_2| = -|\alpha_2 \dot{\alpha}|, \\ \mathfrak{R} = |\alpha_1 \dot{\alpha}| = -|\alpha \dot{\alpha}_1| \end{cases}$$

les composantes suivant les axes $Muvw$ de la rotation instantanée du tronçon, c'est-à-dire du trièdre mobile (M). Par exemple, si le tronçon est le feuillet découpé dans la ligne par les plans infiniment voisins vMw et $v'M'w'$, on a $A^2 = B^2 + C^2$. On déduit enfin de (49)

$$L_i = \frac{\rho}{\rho_0}(\alpha \mathfrak{L}_i + \alpha_1 \mathfrak{M}_i + \alpha_2 \mathfrak{N}_i),$$

. . . .

Le calcul qui précède suppose évidemment les deux faces du feuillet à peu près parallèles, c'est-à-dire se coupant à une distance de M très grande par rapport aux dimensions transversales de la ligne.

11. Relation supplémentaire. — D'après le second principe de la Thermodynamique, la quantité de chaleur δQ, dégagée par une portion quelconque $\mu_1 \mu_2$ de la ligne dans une modification virtuelle, a pour expression

$$\mathbf{E}\,\delta Q = \int T \delta f'_T d\omega - \delta \mathfrak{T}_p,$$

$\mathbf{E}$ désignant l'équivalent mécanique de la chaleur et $\delta\mathcal{C}_v$ le travail virtuel de viscosité relatif à la portion de ligne considérée à laquelle s'étend l'intégration.

La quantité de chaleur dQ dégagée dans une modification réelle est alors, d'après (25'),

$$\mathbf{E}dQ = dt\int \mathrm{T}(f''_{\mathrm{T}\xi}\dot{\xi} + f''_{\mathrm{T}\eta}\dot{\eta} + \ldots + f''_{\mathrm{T}r}\dot{r} + f''_{\mathrm{T}^2}\dot{\mathrm{T}})\,d\omega + dt\int 2\mathfrak{D}\,d\omega,$$

soit encore

$$(51)\qquad dQ = dt\int\left[\frac{\mathrm{T}}{\mathbf{E}}(f''_{\mathrm{T}\xi}\dot{\xi} + f''_{\mathrm{T}\eta}\dot{\eta} + \ldots + f''_{\mathrm{T}r}\dot{r}) - c\dot{\mathrm{T}} + \frac{2\mathfrak{D}}{\mathbf{E}}\right]d\omega,$$

la quantité

$$c = -\frac{\mathrm{T}}{\mathbf{E}}f''_{\mathrm{T}^2}$$

désignant la *capacité calorifique linéaire* comptée sur l'état primitif.

Mais on a aussi, d'après la théorie de la conductibilité calorifique et en supposant la ligne athermane et dénuée de sources de chaleur,

$$(52)\qquad \begin{aligned} dQ &= dt\left[-\left(\mathrm{K}\frac{d\mathrm{T}}{ds}\right)_{\mu_1}^{\mu_2} + \int k(\mathrm{T}-\mathrm{T}_e)\,ds\right] \\ &= dt\int\left[-\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\mathrm{K}}{\Delta}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial\omega}\right) + k\Delta(\mathrm{T}-\mathrm{T}_e)\right]d\omega, \end{aligned}$$

K désignant le produit de la section droite de la ligne par son coefficient de conductibilité intérieure suivant son axe, k le produit du périmètre de cette section droite par le coefficient de conductibilité extérieure et T_e la température absolue extérieure. D'où, en égalant les deux expressions (51) et (52) et puisque le champ d'intégration est arbitraire,

$$(53)\qquad \begin{aligned} c\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial t} = {}& \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\mathrm{K}}{\Delta}\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial\omega}\right) - k\Delta(\mathrm{T}-\mathrm{T}_e) \\ & + \frac{\mathrm{T}}{\mathbf{E}}\left(f''_{\mathrm{T}\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} + f''_{\mathrm{T}\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t} + f''_{\mathrm{T}\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right. \\ & \qquad \left. + f''_{\mathrm{T}p}\frac{\partial p}{\partial t} + f''_{\mathrm{T}q}\frac{\partial q}{\partial t} + f''_{\mathrm{T}r}\frac{\partial r}{\partial t}\right) + \frac{2\mathfrak{D}}{\mathbf{E}}. \end{aligned}$$

Telle est la relation supplémentaire, c'est-à-dire l'équation indéfinie de la température; les conditions aux limites correspondantes, c'est-à-dire relatives aux deux bases de la ligne, sont celles que fournit la théorie de la conductibilité calorifique, soit :

I. A l'origine M_1, c'est à-dire pour $\omega = 0$,

$$\frac{K}{\Delta}\frac{\partial T}{\partial \omega} = k'(T - T_e); \tag{54}$$

II. A l'extrémité M_2, c'est-à-dire pour $\omega = l$,

$$\frac{K}{\Delta}\frac{\partial T}{\partial \omega} = -k'(T - T_e), \tag{55}$$

k' désignant le produit de la section terminale par le coefficient de conductibilité extérieure.

Le problème général du mouvement de la ligne élastique à six paramètres est ainsi complètement mis en équations. Les composantes $\mathcal{R}_u$; $\mathcal{R}_v, \ldots, \mathcal{C}_w$; $\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, \ldots, \mathcal{N}_i$ étant supposées remplacées par leurs valeurs (26), (48) et (49) dans (47), ces six équations, la relation supplémentaire (53) et l'équation de continuité (6) constituent un système de huit équations indéfinies qui, jointes aux conditions aux limites (45), (46), (54), (55) et aux conditions initiales, déterminent les huit inconnues principales

$$x, y, z; \quad \theta, \varphi, \psi; \quad T; \rho$$

en fonction de ω, t. L'arc s est ensuite donné par (4).

12. Généralisation des formules de Kirchhoff. — Nous avons implicitement supposé jusqu'ici que le potentiel thermodynamique interne linéaire f est une fonction donnée des six déformations (19), de la température absolue T et de ω. Ces déformations étant par hypothèse très petites, il suffit de prendre pour f un polynôme du second degré par rapport aux six déformations, dont les coefficients sont des fonctions de T, ω dépendant de la nature de la ligne et de la forme de sa section au point considéré. On obtiendrait de même le développement de la fonction dissipative $\mathfrak{D}$. En procédant ainsi, la théorie de la ligne élastique constitue en quelque sorte une théorie autonome, en ce sens qu'elle n'emprunte rien à la théorie classique de l'Élasticité.

Toutefois, on peut se proposer de rechercher les relations entre les coefficients de la fonction f et les coefficients d'élasticité de la substance constituant la ligne. C'est ce qu'a fait Kirchhoff, dès 1858[1], pour une ligne à quatre paramètres, de

---

[1] G. Kirchhoff, Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes (Gesammelte Abhandlungen, p. 311).

section circulaire, isotrope, sans viscosité et de température uniforme, en formant la fonction f à l'aide du potentiel d'un milieu à trois dimensions peu déformé. A cet effet, il a calculé les six déformations ∂_i, g_i de ce milieu au moyen des formules, qui maintenant portent son nom et qui font connaître la partie principale du déplacement élastique (U, V, W) en un point (u, v, w) du tronçon MM' rapporté au trièdre mobile (M). Nous allons donc tout d'abord généraliser les formules de Kirchhoff, c'est-à-dire les établir pour la ligne élastique à six paramètres.

Considérons dans l'état primitif un point $P_0(u, v, w)$ de la ligne rapporté au trièdre (m); dans l'état actuel déformé, ce point est venu en $P(u+U, v+V, w+W)$ par rapport au trièdre (M), le déplacement élastique (U, V, W) du point étant fonction de t, ω, u, v, w. Soit alors $P'_0(u, v, w)$ le point homologue de P_0 par rapport au trièdre (m') infiniment voisin de (m), tel que $\overline{mm'} = d\omega$; ses coordonnées par rapport à (m) sont $u + du$, $v + dv$, $w + dw$, avec

$$d(u, v, w) = (l, m, n)\, d\omega, \tag{56}$$

en posant

$$l = \xi_0 + q_0 w - r_0 v, \qquad m = \eta_0 + r_0 u - p_0 w, \qquad n = \zeta_0 + p_0 v - q_0 u. \tag{57}$$

Dans l'état déformé, P'_0 est venu en P'. On peut alors obtenir les coordonnées absolues de P' en augmentant celles x_1, y_1, z_1 de P soit de leurs différentielles en ω, soit de leurs différentielles en u, v, w calculées au moyen de (56); d'où

$$\frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial\omega} = l\frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial u} + m\frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial v} + n\frac{\partial(x_1, y_1, z_1)}{\partial w}.$$

En remplaçant dans ces trois égalités x_1, y_1, z_1 par leurs valeurs

$$x_1 = x + \alpha(u + U) + \alpha_1(v + V) + \alpha_2(w + W),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial\omega} + \frac{\partial\alpha}{\partial\omega}(u + U) + \frac{\partial\alpha_1}{\partial\omega}(v + V) + \frac{\partial\alpha_2}{\partial\omega}(w + W)\\
&+ \alpha\frac{\partial U}{\partial\omega} + \alpha_1\frac{\partial V}{\partial\omega} + \alpha_2\frac{\partial W}{\partial\omega} = l\left[\alpha\left(1 + \frac{\partial U}{\partial u}\right) + \alpha_1\frac{\partial V}{\partial u} + \alpha_2\frac{\partial W}{\partial u}\right]\\
&\qquad\qquad + m\left[\alpha\frac{\partial U}{\partial v} + \alpha_1\left(1 + \frac{\partial V}{\partial v}\right) + \alpha_2\frac{\partial W}{\partial v}\right]\\
&\qquad\qquad + n\left[\alpha\frac{\partial U}{\partial w} + \alpha_1\frac{\partial V}{\partial w} + \alpha_2\left(1 + \frac{\partial W}{\partial w}\right)\right],
\end{aligned}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

En multipliant respectivement par α, β, γ et ajoutant membre à membre, de même par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, enfin par $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, nous obtenons encore, d'après (7) et (8),

$$\xi + q(w+W) - r(v+V) + \frac{\partial U}{\partial \omega} = l\left(1 + \frac{\partial U}{\partial u}\right) + m\frac{\partial U}{\partial v} + n\frac{\partial U}{\partial w},$$
$$\eta + r(u+U) - p(w+W) + \frac{\partial V}{\partial \omega} = l\frac{\partial V}{\partial u} + m\left(1 + \frac{\partial V}{\partial v}\right) + n\frac{\partial V}{\partial w},$$
$$\zeta + p(v+V) - q(u+U) + \frac{\partial W}{\partial \omega} = l\frac{\partial W}{\partial u} + m\frac{\partial W}{\partial v} + n\left(1 + \frac{\partial W}{\partial w}\right),$$

soit enfin, d'après (57),

$$(58)\quad \begin{cases} l\dfrac{\partial U}{\partial u} + m\dfrac{\partial U}{\partial v} + n\dfrac{\partial U}{\partial w} = \dfrac{\partial U}{\partial \omega} + \xi - \xi_0 + (q-q_0)w - (r-r_0)v + qW - rV, \\ l\dfrac{\partial V}{\partial u} + m\dfrac{\partial V}{\partial v} + n\dfrac{\partial V}{\partial w} = \dfrac{\partial V}{\partial \omega} + \eta - \eta_0 + (r-r_0)u - (p-p_0)w + rU - pW, \\ l\dfrac{\partial W}{\partial u} + m\dfrac{\partial W}{\partial v} + n\dfrac{\partial W}{\partial w} = \dfrac{\partial W}{\partial \omega} + \zeta - \zeta_0 + (p-p_0)v - (q-q_0)u + pV - qU. \end{cases}$$

Ces formules généralisent celles que Kirchhoff a établies pour une ligne à quatre paramètres, droite et non torse dans l'état primitif. Pour une telle ligne, on a en effet, en supposant chaque axe Mu tangent à l'axe longitudinal,

$$\xi_0 = 1, \quad (\eta_0, \zeta_0;\ p_0, q_0, r_0) = 0, \quad \xi = \frac{ds}{d\omega} = 1 + \delta, \quad (\eta, \zeta) = 0,$$

$\delta = \dfrac{ds - d\omega}{d\omega}$ désignant la dilatation de l'axe longitudinal; d'où $l = 1$, $(m, n) = 0$ d'après (57). Les formules (58) deviennent ainsi

$$\frac{\partial U}{\partial u} = \frac{\partial U}{\partial \omega} + \delta + q(w+W) - r(v+V),$$
$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial \omega} + r(u+U) - p(w+W),$$
$$\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{\partial W}{\partial \omega} + p(v+V) - q(u+U)$$

et ce sont précisément celles de Kirchhoff[1].

Tout d'abord, les fonctions U, V, W varient évidemment beaucoup plus vite en

[1] G. KIRCHHOFF, *loc. cit.*, p. 297 et 298.

fonction de u, v, w qu'en fonction de ω[1] et elles sont toujours très petites par rapport à u, v, w; les égalités (58) s'écrivent donc très sensiblement

$$
(59)\qquad \left\{
\begin{aligned}
l\frac{\partial U}{\partial u} + m\frac{\partial U}{\partial v} + n\frac{\partial U}{\partial w} &= \xi - \xi_0 + (q - q_0)\,w - (r - r_0)\,v,\\
l\frac{\partial V}{\partial u} + m\frac{\partial V}{\partial v} + n\frac{\partial V}{\partial w} &= \eta - \eta_0 + (r - r_0)\,u - (p - p_0)\,w,\\
l\frac{\partial W}{\partial u} + m\frac{\partial W}{\partial v} + n\frac{\partial W}{\partial w} &= \zeta - \zeta_0 + (p - p_0)\,v - (q - q_0)\,u.
\end{aligned}
\right.
$$

Mais on peut encore les simplifier. En effet, les composantes p_0, q_0, r_0; p, q, r sont de l'ordre de grandeur des inverses des rayons de courbure et de torsion de l'axe longitudinal en m et M; leurs produits par u, v, w sont donc des nombres très petits, en quelque sorte du premier ordre de petitesse, puisque, par définition, les dimensions transversales de la ligne élastique sont très petites par rapport à ses rayons de courbure et de torsion. Et il en est de même des produits $(q - q_0)\,w, \ldots,$ car les différences $p - p_0, \ldots$ sont de l'ordre de chaque composante p ou $p_0, \ldots,$ puisque, en passant de son état primitif à son état actuel, la ligne élastique est, en général et dans son ensemble, affectée d'une déformation finie. Il en résulte que les termes en $q_0 w \dfrac{\partial U}{\partial u}, \ldots,$ des premiers membres de (59) et provenant de l, m, n sont négligeables vis-à-vis des deux derniers termes des seconds membres, comme étant au moins du second ordre de petitesse, puisque U, V, W sont très petits vis-à-vis de u, v, w. Les égalités (58) se réduisent donc très sensiblement aux suivantes

$$
(60)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\xi_0\frac{\partial U}{\partial u} + \eta_0\frac{\partial U}{\partial v} + \zeta_0\frac{\partial U}{\partial w} &= \xi - \xi_0 + (q - q_0)\,w - (r - r_0)\,v,\\
\xi_0\frac{\partial V}{\partial u} + \eta_0\frac{\partial V}{\partial v} + \zeta_0\frac{\partial V}{\partial w} &= \eta - \eta_0 + (r - r_0)\,u - (p - p_0)\,w,\\
\xi_0\frac{\partial W}{\partial u} + \eta_0\frac{\partial W}{\partial v} + \zeta_0\frac{\partial W}{\partial w} &= \zeta - \zeta_0 + (p - p_0)\,v - (q - q_0)\,u,
\end{aligned}
\right.
$$

dont la solution générale est

$$
(61)\qquad \left\{
\begin{aligned}
U &= \frac{\xi - \xi_0}{\xi_0}\,u + \frac{q - q_0}{2\zeta_0}\,w^2 - \frac{r - r_0}{2\eta_0}\,v^2 + \mathfrak{U},\\
V &= \frac{\eta - \eta_0}{\eta_0}\,v + \frac{r - r_0}{2\xi_0}\,u^2 - \frac{p - p_0}{2\zeta_0}\,w^2 + \mathfrak{V},\\
W &= \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta_0}\,w + \frac{p - p_0}{2\eta_0}\,v^2 - \frac{q - q_0}{2\xi_0}\,u^2 + \mathfrak{W},
\end{aligned}
\right.
$$

---

[1] Voir à ce sujet : CLEBSCH-SAINT-VENANT, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, note de la page 421.

$\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ étant des fonctions arbitraires de deux quelconques des trois binômes

$$\eta_0 w - \zeta_0 v, \qquad \zeta_0 u - \xi_0 w, \qquad \xi_0 v - \eta_0 u.$$

Les dilatations et glissements δ_i, g_i du tronçon de ligne se calculent ensuite au moyen des formules bien connues

$$(62)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2\right],\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;\\ g_1 &= \frac{\partial V}{\partial w} + \frac{\partial W}{\partial v} + \frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial U}{\partial w} + \frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial w} + \frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial w},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\end{aligned}\right.$$

qui donnent, *en ne tenant pas compte des fonctions* $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$,

$$(63)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\xi - \xi_0}{\xi_0} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\xi - \xi_0}{\xi_0}\right)^2 + \frac{(q - q_0)^2 + (r - r_0)^2}{\xi_0^2}u^2\right],\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;\\ g_1 &= (p - p_0)\left(\frac{v}{\eta_0} - \frac{w}{\zeta_0}\right) - \frac{1}{\eta_0\zeta_0}\left\{(q - q_0)(r - r_0)vw + [(\eta - \eta_0)w - (\zeta - \zeta_0)v](p - p_0)\right\},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\end{aligned}\right.$$

chaque terme non écrit se déduisant du précédent par permutation tournante sur les lettres.

13. Potentiel thermodynamique interne. — Tout d'abord, on sait que le potentiel thermodynamique interne d'un corps élastique à trois dimensions peu déformé et de contexture quelconque a pour expression

$$(64)\qquad \int [\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1\delta_1 + \mathcal{A}_2\delta_2 + \dots + \mathcal{A}_6 g_3 + \psi(\delta_1, \delta_2, \dots, g_3)]\, d\varpi,$$

ψ étant une forme quadratique des déformations δ_i, g_i au point de coordonnées primitives x, y, z, contenant 21 coefficients $\mathcal{A}_{ij}$; les 28 coefficients $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}_{ij}$ sont des fonctions de x, y, z et de la température absolue T au point (x, y, z) et l'intégration est étendue au volume ϖ du corps dans son état primitif. L'état primitif que nous avons choisi étant l'état naturel, c'est-à-dire l'état d'équilibre que prend le corps à la température uniforme T_0 quand il n'est soumis à aucune force extérieure, les six coefficients $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_6$ doivent s'annuler à cette température T_0 [1].

---

[1] P. Duhem, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*, t. II, p. 211.

Prenons comme volume ϖ le tronçon de ligne considéré dès le n° 6, c'est-à-dire ici le feuillet découpé dans la ligne primitive par deux plans de coordonnées homologues des trièdres infiniment voisins (m) et (m'); la ligne pouvant être considérée comme prismatique sur une longueur infiniment petite, on a sensiblement $\varpi = \mathrm{S}d\omega$, S étant la section droite de la ligne dans l'état primitif. D'autre part, les coefficients $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{A}_{ij}$ peuvent être regardés comme de simples fonctions de ω et de la température T en M, par suite de la petitesse du tronçon. Enfin, comme nous convenons de calculer le potentiel interne en nous limitant aux termes du second ordre de petitesse, il suffit de calculer ψ en limitant les expressions (62) des ∂_i, g_i à leurs termes du premier ordre; nous devons par contre conserver les expressions complètes dans la partie linéaire $\mathcal{A}_1\partial_1 + \mathcal{A}_2\partial_2 + \ldots$ (¹).

C'est ici que nous rencontrons une grosse difficulté. En effet, dans le calcul des ∂_i, g_i à partir de (61), nous n'avons pas le droit de négliger les fonctions arbitraires $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$, car elles peuvent dépendre de nos six déformations $\xi - \xi_0$, $\eta - \eta_0$, ... Il faudrait donc chercher tout d'abord à les déterminer, en substituant les expressions (61) dans les équations générales de l'élasticité appliquées au tronçon de ligne. C'est bien ce qu'a fait Kirchhoff dans le cas de la ligne à quatre paramètres, mais en simplifiant les équations de l'élasticité par des hypothèses inspirées des travaux de Saint-Venant, qui sont loin d'être à l'abri de toute critique. Ne pouvant donc songer à déterminer de façon vraiment satisfaisante les fonctions $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ dans le cas beaucoup plus général où nous nous trouvons, nous nous bornerons à appliquer les expressions très probablement incomplètes (63). L'expression de f à laquelle nous allons ainsi parvenir sera donc très probablement incomplète aussi, *de sorte que la suite de notre calcul n'aura que la valeur d'une simple indication destinée à préparer des recherches ultérieures.*

Cette réserve faite, il résulte du choix des axes $muvw$ que les intégrales

$$\int (u, v, w, vw, wu, uv)\, d\varpi \tag{65}$$

sont nulles ou infiniment petites de l'ordre de $d\omega^2$, de sorte que, d'après (63), les termes de (64) provenant des termes en g_i et en $\partial_i g_j$ sont nuls. Le nombre des coefficients d'élasticité $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{A}_{ij}$ intervenant dans l'expression du potentiel de la ligne se trouve ainsi réduit à 16. Comme on a d'ailleurs

$$\int (u^2, v^2, w^2)\, d\varpi = (\mathrm{A}_1^2, \mathrm{B}_1^2, \mathrm{C}_1^2)\,\varpi,$$

(¹) La nécessité de conserver les expressions complètes des ∂_i, g_i, lorsque les coefficients $\mathcal{A}_i$ ne sont pas nuls, a été signalée récemment par M. Jouguet : *Notes sur la théorie de l'Élasticité*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3ᵉ série, t. XII, 1921, p. 77.

A_1, B_1, C_1 étant les rayons de giration par rapport aux plans *vmw*, *wmu*, *umv* de la face du feuillet passant par m, l'un d'eux étant ainsi toujours nul, il vient, d'après (63) pour le potentiel thermodynamique interne linéaire et *avec les réserves faites* ,

$$
\begin{aligned}
(66)\quad \frac{f}{S} = \mathcal{A}_0 &+ \mathcal{A}_1\left\{\frac{\xi-\xi_0}{\xi_0}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\xi-\xi_0}{\xi_0}\right)^2+\frac{(q-q_0)^2+(r-r_0)^2}{\xi_0^2}A_1^2\right]\right\} \\
&+ \mathcal{A}_2\left\{\frac{\eta-\eta_0}{\eta_0}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\eta-\eta_0}{\eta_0}\right)^2+\frac{(r-r_0)^2+(p-p_0)^2}{\eta_0^2}B_1^2\right]\right\} \\
&+ \mathcal{A}_3\left\{\frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta_0}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta_0}\right)^2+\frac{(p-p_0)^2+(q-q_0)^2}{\zeta_0^2}C_1^2\right]\right\} \\
&+\left(\mathcal{A}_{11}\frac{\xi-\xi_0}{\xi_0}+\mathcal{A}_{12}\frac{\eta-\eta_0}{\eta_0}+\mathcal{A}_{13}\frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta_0}\right)\frac{\xi-\xi_0}{\xi_0} \\
&\qquad+\left(\mathcal{A}_{22}\frac{\eta-\eta_0}{\eta_0}+\mathcal{A}_{23}\frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta_0}\right)\frac{\eta-\eta_0}{\eta_0}+\mathcal{A}_{33}\left(\frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta_0}\right)^2 \\
&+\mathcal{A}_{44}\left(\frac{B_1^2}{\eta_0^2}+\frac{C_1^2}{\zeta_0^2}\right)(p-p_0)^2+\mathcal{A}_{55}\left(\frac{C_1^2}{\zeta_0^2}+\frac{A_1^2}{\xi_0^2}\right)(q-q_0)^2+\mathcal{A}_{66}\left(\frac{A_1^2}{\xi_0^2}+\frac{B_1^2}{\eta_0^2}\right)(r-r_0)^2 \\
&-\mathcal{A}_{56}\frac{A_1^2}{\xi_0^2}(q-q_0)(r-r_0)-\mathcal{A}_{64}\frac{B_1^2}{\eta_0^2}(r-r_0)(p-p_0)-\mathcal{A}_{45}\frac{C_1^2}{\zeta_0^2}(p-p_0)(q-q_0).
\end{aligned}
$$

Si l'on se borne à considérer de très petites variations de température θ à partir de la température T_0 de l'état primitif, c'est-à-dire si l'on pose $T = T_0 + \theta$, il suffit de remplacer T par T_0 dans les $\mathcal{A}_{ij}$, puisqu'on limite f aux termes du second ordre de petitesse, et de remplacer $\mathcal{A}_i(T_0+\theta)$ par $\left(\frac{d\mathcal{A}_i}{dT}\right)_{T=T_0}\theta$, puisque $\mathcal{A}_i(T_0)$ est nul, en effaçant alors les termes entre crochets.

Dans le cas d'un milieu isotrope, le potentiel thermodynamique interne par unité de volume a pour expression

$$
\mathcal{A}_0 - \nu(\partial_1+\partial_2+\partial_3)+\frac{\lambda}{2}(\partial_1+\partial_2+\partial_3)^2+\mu\left(\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2+\frac{g_1^2+g_2^2+g_3^2}{2}\right),
$$

λ, μ étant les deux coefficients de Lamé, ν un troisième coefficient d'élasticité; on obtiendra donc l'expression correspondante de f en faisant dans (66)

$$
\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_2=\mathcal{A}_3=-\nu,\qquad \mathcal{A}_{11}=\mathcal{A}_{22}=\mathcal{A}_{33}=\frac{\lambda}{2}+\mu,
$$

$$
\mathcal{A}_{12}=\mathcal{A}_{23}=\mathcal{A}_{13}=\lambda,\qquad \mathcal{A}_{44}=\mathcal{A}_{55}=\mathcal{A}_{66}=\frac{\mu}{2}.
$$

$$
(\mathcal{A}_{56},\mathcal{A}_{64},\mathcal{A}_{45})=0.
$$

La valeur commune $\left(\frac{d\nu}{dT}\right)_{T=T_0}$ des trois quantités $-\left(\frac{d\mathcal{A}_i}{dT}\right)_{T=T_0}$ est alors celle que nous avons autrefois désignée par ν(¹).

Il résulte de (66) que les six dérivées $f'_{(\xi, \eta, \dots, r)}$ s'annulent pour $T = T_0$, $\xi = \xi_0, \dots, r = r_0$, de sorte que, d'après (26), la force $\mathcal{R}$ et le couple $\mathcal{C}$ dans l'état naturel sont nuls; les équations (45), (46), (47) montrent alors que la ligne est en équilibre dans cet état, sans être soumise à aucune force extérieure et nous retrouvons ainsi la définition même de l'état naturel.

14. Potentiel thermodynamique interne dans le cas d'un état primitif quelconque. — Supposons maintenant que l'état primitif ne soit plus l'état naturel, mais un état d'équilibre quelconque de la ligne correspondant aux petites déformations $\xi'_0 - \xi_0, \eta'_0 - \eta_0, \dots, r'_0 - r_0$ à partir de l'état naturel. Le potentiel thermodynamique interne linéaire f de la ligne dans son état actuel devient un polynôme en $\xi - \xi'_0$, $\eta - \eta'_0, \dots, r - r'_0$; de sorte que, pour l'obtenir, il suffit de faire

$$\xi - \xi_0 = (\xi - \xi'_0) + (\xi'_0 - \xi_0), \dots$$

dans l'expression (66) supposée exacte. On voit alors que cette transformation fait surgir des termes linéaires en $\xi - \xi'_0, \dots$ provenant des termes du second degré de (66). Il en résulte que les six dérivées $f'_{(\xi, \eta, \dots, r)}$ ne s'annulent pas pour $T = T_0$, $\xi = \xi'_0, \dots$, de sorte que la force $\mathcal{R}$ et le couple $\mathcal{C}$ ont maintenant, dans l'état primitif, des valeurs non nulles déterminées par (26). Les équations (45), (46) et (47) feraient ensuite connaître la loi de forces extérieures assurant l'équilibre de la ligne dans son état primitif déformé.

15. Fonction dissipative. — La fonction dissipative $\mathfrak{D}$ de la ligne élastique se déduit de celle d'un milieu à trois dimensions en procédant comme nous l'avons indiqué pour le potentiel thermodynamique. Toutefois, comme la fonction dissipative par unité de volume d'un milieu à trois dimensions est une forme quadratique des vitesses de déformations, donc ne contient pas de termes linéaires, la fonction $\mathfrak{D}$, relative à une ligne de contexture quelconque et sous les mêmes réserves qu'au n° 13, renferme quatre coefficients de moins que la fonction f, donc ne dépend que de 12 coefficients a_{ij}. Nous obtenons ainsi

(¹) L. Roy, *Recherches sur les propriétés thermomécaniques des corps solides*, Journal de math. pures et appl., 6ᵉ série, t. VI, 1910, p. 225.

$$(67)\qquad \frac{\mathfrak{D}}{\mathrm{S}} = \left(a_{11}\frac{\dot\xi}{\xi_0} + a_{12}\frac{\dot\eta}{\eta_0} + a_{13}\frac{\dot\zeta}{\zeta_0}\right)\frac{\dot\xi}{\xi_0}$$
$$+ \left(a_{22}\frac{\dot\eta}{\eta_0} + a_{23}\frac{\dot\zeta}{\zeta_0}\right)\frac{\dot\eta}{\eta_0} + a_{33}\left(\frac{\dot\zeta}{\zeta_0}\right)^2$$
$$+ a_{44}\left(\frac{\mathrm{B}_1^2}{\eta_0^2} + \frac{\mathrm{C}_1^2}{\zeta_0^2}\right)\dot p^2 + a_{55}\left(\frac{\mathrm{C}_1^2}{\zeta_0^2} + \frac{\mathrm{A}_1^2}{\xi_0^2}\right)\dot q^2 + a_{66}\left(\frac{\mathrm{A}_1^2}{\xi_0^2} + \frac{\mathrm{B}_1^2}{\eta_0^2}\right)\dot r^2$$
$$- a_{56}\frac{\mathrm{A}_1^2}{\xi_0^2}\dot q\dot r \qquad - a_{64}\frac{\mathrm{B}_1^2}{\eta_0^2}\dot r\dot p \qquad - a_{45}\frac{\mathrm{C}_1^2}{\zeta_0^2}\dot p\dot q,$$

les coefficients a_{ij} étant de simples fonctions de ω, T. Il est bien évident que cette expression entraîne les mêmes réserves que celle (66) de f.

Si le milieu est isotrope, on a

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{\Lambda}{2} + \mathrm{M}, \qquad a_{12} = a_{23} = a_{13} = \Lambda,$$
$$a_{44} = a_{55} = a_{66} = \frac{\mathrm{M}}{2}, \qquad (a_{56}, a_{64}, a_{45}) = 0,$$

Λ et M étant les deux coefficients de viscosité de la substance(¹).

16. Équations des petits mouvements. — Reprenons les équations intrinsèques du mouvement

$$(47)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{R}_u}{\partial \omega} + q\mathcal{R}_w - r\mathcal{R}_v = \mathcal{X}_e + \mathcal{X}_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial \mathcal{C}_u}{\partial \omega} + q\mathcal{C}_w - r\mathcal{C}_v + \eta\mathcal{R}_w - \zeta\mathcal{R}_v = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \end{cases}$$

pour $\omega = 0$,

$$(45)\qquad \mathcal{X}_1 - \mathcal{R}_{u1} = 0, \ \dots;$$

pour $\omega = l$,

$$(46)\qquad \mathcal{X}_2 + \mathcal{R}_{u2} = 0, \ \dots.$$

(¹) P. Duhem, *Recherches sur l'Élasticité*, p. 49.

Le problème des petits mouvements est le suivant : on suppose ces équations vérifiées pour un système de valeurs de

$$x, y, z; \quad \alpha, \beta, \ldots, \gamma_2; \quad \xi, \eta, \ldots, r; \quad \mathrm{T}, \rho; \quad \mathcal{R}_u, \mathcal{R}_v, \ldots, \mathcal{C}_w$$

indépendantes de t, c'est-à-dire fonctions de ω seulement. En supposant stable l'équilibre ainsi défini, on cherche à les vérifier pour des valeurs infiniment voisines

$$x + \delta x, \quad y + \delta y, \quad \ldots, \quad \mathcal{C}_w + \delta \mathcal{C}_w$$

des précédentes, les accroissements infiniment petits $\delta x, \delta y, \ldots, \delta \mathcal{C}_w$ étant des fonctions de ω, t, qui vérifient le résultat de la différentiation de (47), (45) et (46), soit

$$(68)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \delta \mathcal{R}_u}{\partial \omega} + q\,\delta \mathcal{R}_w - r\,\delta \mathcal{R}_v + \mathcal{R}_w \delta q - \mathcal{R}_v \delta r = \delta \mathcal{X}_e + \delta \mathcal{X}_i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\frac{\partial \delta \mathcal{C}_u}{\partial \omega} + q\,\delta \mathcal{C}_w - r\,\delta \mathcal{C}_v + \mathcal{C}_w \delta q - \mathcal{C}_v \delta r \\ &\qquad + \eta\,\delta \mathcal{R}_w - \zeta\,\delta \mathcal{R}_v + \mathcal{R}_w \delta \eta - \mathcal{R}_v \delta \zeta = \delta \mathfrak{L}_e + \delta \mathfrak{L}_i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}\right.$$

pour $\omega = 0$,

$$(69)\qquad \delta \mathcal{X}_1 - \delta \mathcal{R}_{u1} = 0, \ldots;$$

pour $\omega = l$,

$$(70)\qquad \delta \mathcal{X}_2 + \delta \mathcal{R}_{u2} = 0, \ldots.$$

Dans ces équations, les termes figurant hors des caractéristiques δ doivent recevoir leurs valeurs correspondant à l'équilibre. Ce sont les équations des petits mouvements; nous allons calculer les différents accroissements qui y figurent.

En différentiant les six relations entre les cosinus

$$|\alpha^2| = 1, \ldots; \qquad |\alpha\alpha_1| = 0, \ldots,$$

il vient

$$|\alpha\,\delta\alpha| = 0, \ldots; \qquad |\alpha\,\delta\alpha_1 + \alpha_1\,\delta\alpha| = 0, \ldots$$

et celles-ci sont vérifiées en introduisant les angles infiniment petits l, m, n dont il faut faire tourner le trièdre (M) autour de chacun de ses axes, dans sa position d'équibre, pour lui donner l'orientation infiniment voisine qu'il possède à l'instant t, soit

$$(71)\quad \begin{cases} \delta(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = n(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) - m(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), \\ \delta(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = l(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) - n(\alpha,\ \beta,\ \gamma), \\ \delta(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = m(\alpha,\ \beta,\ \gamma) - l(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \end{cases}$$

formules analogues à (16).

Ces trois paramètres l, m, n vont jouer, dans la théorie des petits mouvements, le même rôle que les trois angles θ, φ, ψ au moyen desquels s'expriment les neuf cosinus dans la théorie des mouvements quelconques. Calculons tout d'abord $\delta(\xi, \eta, \ldots, r)$ en fonction de l, m, n; on a, d'après (7),

$$(72)\quad \delta\xi = \left| \frac{dx}{d\omega}\delta\alpha + \alpha\delta\frac{dx}{d\omega} \right|,$$

et, d'après (7) et (71),

$$(73)\quad \left| \frac{dx}{d\omega}\delta\alpha \right| = \eta n - \zeta m.$$

Soient, d'autre part, u, v, w les composantes du déplacement $(\delta x, \delta y, \delta z)$ de M suivant les axes mobiles $Muvw$, c'est-à-dire

$$(74)\quad u = |\alpha\delta x|, \qquad v = |\alpha_1\delta x|, \qquad w = |\alpha_2\delta x|;$$

on en déduit

$$(75)\quad \frac{du}{d\omega} = \left| \alpha\delta\frac{dx}{d\omega} + \frac{d\alpha}{d\omega}\delta x \right|.$$

Mais, d'après (16) et (74),

$$(76)\quad \left| \frac{d\alpha}{d\omega}\delta x \right| = rv - qw,$$

de sorte que, d'après (1), (73) et (75), l'égalité (72) devient la première des suivantes

$$(77)\quad \begin{cases} \delta\xi = \dfrac{\partial u}{\partial\omega} + qw - rv + \eta n - \zeta m, \\ \delta\eta = \dfrac{\partial v}{\partial\omega} + ru - pw + \zeta l - \xi n, \\ \delta\zeta = \dfrac{\partial w}{\partial\omega} + pv - qu + \xi m - \eta l. \end{cases}$$

On a de même, d'après (8),

$$\delta p = \left| \alpha_2 \frac{d\delta\alpha_1}{d\omega} + \frac{d\alpha_1}{d\omega}\delta\alpha_2 \right|. \tag{78}$$

Or, il résulte de (71) que

$$\frac{d\delta\alpha_1}{d\omega} = \alpha_2 \frac{dl}{d\omega} - \alpha\frac{dn}{d\omega} + l\frac{d\alpha_2}{d\omega} - n\frac{d\alpha}{d\omega},$$

d'où, d'après (8) et les relations entre les cosinus,

$$\left| \alpha_2 \frac{d\delta\alpha_1}{d\omega} \right| = \frac{dl}{d\omega} + qn.$$

Comme enfin, d'après (8) et (71),

$$\left| \frac{d\alpha_1}{d\omega}\delta\alpha_2 \right| = -rm,$$

l'égalité (78) devient la première des suivantes

$$\left\{ \begin{aligned} \delta p &= \frac{\partial l}{\partial\omega} + qn - rm, \\ \delta q &= \frac{\partial m}{\partial\omega} + rl - pn, \\ \delta r &= \frac{\partial n}{\partial\omega} + pm - ql. \end{aligned} \right. \tag{79}$$

Passons au calcul de $\delta\mathcal{X}_i, \ldots, \delta\mathcal{N}_i$. On a, d'après (48) et (74), en tenant compte de ce que les dérivées par rapport au temps $\ddot{x}, \ddot{y}, \ldots$ sont nulles à l'équilibre,

$$\delta\mathcal{X}_i = -\rho_0 |\alpha\delta\ddot{x}| = -\rho_0\ddot{u},$$

d'où

$$\delta(\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, \mathcal{Z}_i) = -\rho_0(\ddot{u}, \ddot{v}, \ddot{w}). \tag{80}$$

On a de même, d'après (49),

$$\delta\mathcal{L}_i = -\rho_0 A^2 \delta\dot{\mathcal{L}},$$

puisque $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{R}$ sont nuls à l'équilibre; d'où, d'après (50) et (71),

$$\dot{\mathfrak{L}} = |\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 + \alpha_2 \ddot{\alpha}_1|, \qquad \delta \dot{\mathfrak{L}} = |\alpha_2 \delta \ddot{\alpha}_1| = \ddot{l};$$

de là, la première des formules

$$\delta(\mathfrak{L}_i, \mathfrak{M}_i, \mathfrak{N}_i) = -\rho_0(A^2 \ddot{l}, B^2 \ddot{m}, C^2 \ddot{n}). \tag{81}$$

Quant aux éléments $\mathfrak{X}_e, \mathfrak{Y}_e, \ldots, \mathfrak{N}_e$ de la réduction des forces extérieures, ce sont, dans le cas le plus général, des fonctions de la position et de la vitesse du trièdre, c'est-à-dire de

$$x, y, z; \quad \alpha, \beta, \ldots, \gamma_2; \quad \dot{x}, \dot{y}, \ldots, \dot{\gamma}_2.$$

Les quantités $\delta\mathfrak{X}_e, \ldots, \delta\mathfrak{N}_e$ sont donc des fonctions linéaires de $\delta x, \delta y, \ldots, \delta \dot{\gamma}_2$, c'est-à-dire de

$$u, v, w; \quad l, m, n; \quad \dot{u}, \dot{v}, \ldots, \dot{n},$$

dont les coefficients ont des valeurs connues, dont il serait facile d'écrire les expressions générales.

Il ne nous reste plus qu'à calculer $\delta(\mathfrak{R}_u, \mathfrak{R}_v, \ldots, \mathfrak{C}_w)$. On a à cet effet, d'après (25) et (26),

$$\begin{aligned} -\delta\mathfrak{R}_u &= f''_{\xi^2}\delta\xi + f''_{\xi\eta}\delta\eta + \ldots + f''_{\xi r}\delta r + f''_{\xi\tau}\dot{\theta} \\ &\quad + \mathfrak{D}''_{\dot{\xi}^2}\delta\dot{\xi} + \mathfrak{D}''_{\dot{\xi}\dot{\eta}}\delta\dot{\eta} + \ldots + \mathfrak{D}''_{\dot{\xi}\dot{r}}\delta\dot{r}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{82}$$

Si les expressions (66) et (67) sont valables, on voit que les variations $\delta(\mathfrak{R}_u, \mathfrak{R}_v, \mathfrak{R}_w)$ sont indépendantes de $\delta p, \delta q, \ldots, \delta \dot{r}$ et les variations $\delta(\mathfrak{C}_u, \mathfrak{C}_v, \mathfrak{C}_w)$ indépendantes de $\delta\xi, \delta\eta, \ldots, \delta\dot{\zeta}$. On a d'ailleurs, d'après (77) et (79),

$$\left\{\begin{aligned} \delta\dot{\xi} &= \frac{\partial \dot{u}}{\partial \omega} + q\dot{w} - r\dot{v} + \eta \dot{n} - \zeta \dot{m}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \delta\dot{r} &= \frac{\partial \dot{n}}{\partial \omega} + p\dot{m} - q\dot{l}. \end{aligned}\right. \tag{83}$$

Enfin, la relation supplémentaire (53) différentiée nous donne

$$(84)\qquad c\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\mathrm{K}\frac{\partial\theta}{\partial\omega}\right) - k\theta + \frac{\mathrm{T}}{\mathbf{E}}\left(f''_{\mathrm{T}\xi}\frac{\partial\delta\xi}{\partial t} + f''_{\mathrm{T}\eta}\frac{\partial\delta\eta}{\partial t} + \ldots + f''_{\mathrm{T}\zeta}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial t}\right),$$

car, d'après (2), nous pouvons évidemment remplacer ici Δ par l'unité sans erreur sensible; avec, d'après (54) et (55),

$$(85)\qquad \text{pour}\quad \omega = (0, l),\qquad \mathrm{K}\frac{\partial\theta}{\partial\omega} = \pm k'\theta.$$

Moyennant les expressions (77) et (79) à (83), les équations (68) et (84) constituent un système de sept équations indéfinies linéaires qui, jointes aux conditions aux limites (69), (70), (85) et aux conditions initiales, déterminent les sept fonctions inconnues u, v, w; l, m, n; θ en fonction de ω, t.

Les équations précédentes ne font pas intervenir la variation $\delta\rho$ de la densité linéaire; proposons-nous de la calculer. On a, d'après (6),

$$(86)\qquad \Delta\delta\rho + \rho\delta\Delta = 0$$

et, d'après (3),

$$(87)\qquad \Delta\delta\Delta = \left|\frac{dx}{d\omega}\frac{d\delta x}{d\omega}\right|,$$

avec, d'après (74),

$$\delta x = \alpha u + \alpha_1 v + \alpha_2 w.$$

D'où, d'après (11),

$$\frac{dx}{d\omega}\frac{d\delta x}{d\omega} = \xi\alpha\frac{d\delta x}{d\omega} + \eta\alpha_1\frac{d\delta x}{d\omega} + \zeta\alpha_2\frac{d\delta x}{d\omega}.$$

Mais, d'après (75) et (76), on a

$$\left|\alpha\frac{d\delta x}{d\omega}\right| = \frac{\partial u}{\partial\omega} + qw - rv,$$

d'où, d'après (86), (87) et en remarquant qu'on peut remplacer Δ par l'unité dans les résultats,

$$\delta\Delta = \left|\xi\left(\frac{\partial u}{\partial\omega} + qw - rv\right)\right|,$$

$$(88)\qquad \delta\rho + \rho\left|\xi\left(\frac{\partial u}{\partial\omega} + qw - rv\right)\right| = 0.$$

CHAPITRE II

PROPAGATION DES ONDES

17. Préliminaires. — Considérons une discontinuité persistante se propageant sur la ligne élastique et soient, à l'instant t, M le point de discontinuité sur l'état actuel, m son homologue sur l'état primitif. Ce point partage la ligne en deux régions : la région 1 constituée par l'arc $\widehat{M_1M}$ ou $\widehat{m_1m}$ et la région 2 constituée par l'arc $\widehat{MM_2}$ ou $\widehat{mm_2}$. Les vitesses de propagation de l'onde sur l'état primitif et sur l'état actuel

$$\mathfrak{V}_0 = \frac{d\omega}{dt}, \qquad \mathfrak{V} = \frac{ds}{dt}, \tag{89}$$

comptées positivement suivant la tangente en m et M à l'axe longitudinal menée dans le sens des arcs $\widehat{m_1m} = \omega$ et $\widehat{M_1M} = s$ croissants, sont donc positives ou négatives suivant que la discontinuité se propage de la région 1 vers la région 2, ou inversement.

Nous conviendrons d'affecter de l'indice 1 ou de l'indice 2 toute quantité relative aux régions 1 ou 2, et nous désignerons par la caractéristique δ' la variation brusque qu'éprouve toute quantité discontinue A à la traversée de l'onde dans le sens positif, soit

$$\delta' A = A_2 - A_1.$$

18. Les discontinuités au point de vue cinématique. — Supposons tout d'abord la discontinuité du premier ordre par rapport aux paramètres fixant la configuration de la ligne à chaque instant, c'est-à-dire par rapport à $x, y, z; \alpha, \beta, \ldots, \gamma_2$ (onde de choc). Il existe alors 12 quantités $\lambda, \mu, \nu;\ a, b, \ldots, c_2$, telles qu'on ait

$$\left\{\begin{aligned} &\delta' \frac{\partial(x, y, z;\ \alpha, \beta, \ldots, \gamma_2)}{\partial \omega} = (\lambda, \mu, \nu;\ a, b, \ldots, c_2), \\ &\delta' \frac{\partial(x, y, z;\ \alpha, \beta, \ldots, \gamma_2)}{\partial t} = -(\lambda, \mu, \nu;\ a, b, \ldots, c_2)\,\mathfrak{V}_0\text{[1]}. \end{aligned}\right. \tag{90}$$

---

[1] Pour l'établissement de ces formules et d'autres analogues, voir nos *Recherches sur la dynamique du fil flexible*, Annales de l'École Normale supérieure, 3e série, t. XXIX, 1912, p. 381 et suiv.

Les neuf discontinuités $a, b, \ldots, c_2$ sont d'ailleurs reliées par six relations résultant des relations entre les cosinus dérivées par rapport à ω

$$\left|\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \omega}\right| = 0, \ldots, \qquad \left|\alpha \frac{\partial \alpha_1}{\partial \omega} + \alpha_1 \frac{\partial \alpha}{\partial \omega}\right| = 0, \ldots,$$

qui donnent

$$(91) \quad \begin{cases} |\alpha a| = 0, \qquad |\alpha_1 a_1| = 0, \qquad |\alpha_2 a_2| = 0; \\ |\alpha a_1| + |\alpha_1 a| = 0, \qquad |\alpha_1 a_2| + |\alpha_2 a_1| = 0, \qquad |\alpha_2 a| + |\alpha a_2| = 0. \end{cases}$$

Les trois premières expriment que chaque vecteur discontinuité (a, b, c), (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) est perpendiculaire à chacun des axes $\mathrm{M}u$, $\mathrm{M}v$, $\mathrm{M}w$ qui lui correspond.

D'après les formules (3), (6), (7), (8), (50), la discontinuité sera en général d'ordre zéro par rapport à $\Delta, \rho;\ \xi, \eta, \ldots, r;\ \mathfrak{L}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ et nous aurons

$$(92) \quad \begin{cases} \delta'(\rho\Delta) = 0, \\ \delta'\xi = |\alpha\lambda|, \qquad \delta'\eta = |\alpha_1\lambda|, \qquad \delta'\zeta = |\alpha_2\lambda|; \\ \delta' p = |\alpha_2 a_1| = -|\alpha_1 a_2|, \qquad \delta' q = |\alpha a_2| = -|\alpha_2 a|, \\ \delta' r = |\alpha_1 a| = -|\alpha a_1|; \\ \delta'(\mathfrak{L}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}) = -\delta'(p, q, r)\mathfrak{V}_0. \end{cases}$$

Inversement, les formules (91), (92) permettent d'exprimer les douze quantités $\lambda, \mu, \nu;\ a, b, \ldots, c_2$ en fonction des six discontinuités $\delta'(\xi, \eta, \ldots, r)$, ce qui donne par un calcul facile

$$(93) \quad \begin{cases} (\lambda, \mu, \nu) = (\alpha, \beta, \gamma)\delta'\xi + (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\delta'\eta + (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)\delta'\zeta, \\ (a, b, c) = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\delta' r - (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)\delta' q, \\ (a_1, b_1, c_1) = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)\delta' p - (\alpha, \beta, \gamma)\delta' r, \\ (a_2, b_2, c_2) = (\alpha, \beta, \gamma)\delta' q - (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\delta' p. \end{cases}$$

Établissons enfin la relation entre $\mathfrak{V}_0$ et $\mathfrak{V}$; nous allons voir qu'elle dépend du sens de la propagation par suite de la discontinuité de ρ. Supposons, en effet, que la discontinuité se propage de la région 1 vers la région 2 et soit $\mathfrak{V}_2$ la valeur correspondante de $\mathfrak{V}$; l'élément ds franchi par l'onde pendant le temps dt se trouvant, à l'instant t, dans la région 2, on a d'après (5) $\rho_2 ds = \rho_0 d\omega$, d'où

$$(94) \qquad \rho_2 \mathfrak{V}_2 = \rho_0 \mathfrak{V}_0.$$

Pour une propagation en sens inverse, on aurait de même

$$\rho_1 \mathfrak{V}_1 = \rho_0 \mathfrak{V}_0,$$

ces vitesses étant maintenant négatives, de sorte que, si $\mathfrak{V}_0$ a la même valeur absolue dans les deux cas, on a

$$\rho_1 \mathfrak{V}_1 + \rho_2 \mathfrak{V}_2 = 0.$$

C'est l'extension au cas des lignes d'une relation établie par Riemann pour les ondes planes dans les fluides et généralisée par M. Jouguet[1].

Supposons maintenant la discontinuité d'ordre $n > 1$ par rapport à x, y, z; $\alpha, \beta, \ldots, \gamma_2$ (ondes d'accélération ou d'ordre supérieur). Il existe alors douze quantités λ, μ, ν; $a, b, \ldots, c_2$, telles qu'on ait

$$\delta' \frac{\partial^n (x, y, z; \alpha, \beta, \ldots, \gamma_2)}{\partial \omega^{n-p} \partial t^p} = (\lambda, \mu, \nu; a, b, \ldots, c_2)(-\mathfrak{V}_0)^p \tag{95}$$

et les six relations entre les cosinus dérivées n fois par rapport à ω conduisent encore aux égalités (91). D'autre part, la discontinuité est en général d'ordre $n-1$ par rapport à Δ, ρ; $\xi, \eta, \ldots, r$; $\mathfrak{L}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$, de sorte que les égalités (3), (6), (7), (8), (50) dérivées $n-1$ fois par rapport à ω nous donnent

$$(96) \quad \left\{ \begin{aligned} &\delta' \frac{\partial^{n-1}(\Delta, \rho)}{\partial \omega^{n-p-1} \partial t^p} = \left(\frac{1}{\Delta}, -\frac{\rho^3}{\rho_0^2} \right) \left| \frac{\partial x}{\partial \omega} \lambda \right| (-\mathfrak{V}_0)^p, \\ &\delta' \frac{\partial^{n-1} \xi}{\partial \omega^{n-p-1} \partial t^p} = |\alpha \lambda| (-\mathfrak{V}_0)^p, \qquad \delta' \frac{\partial^{n-1} \eta}{\partial \omega^{n-p-1} \partial t^p} = |\alpha_1 \lambda| (-\mathfrak{V}_0)^p, \\ &\qquad\qquad \delta' \frac{\partial^{n-1} \zeta}{\partial \omega^{n-p-1} \partial t^p} = |\alpha_2 \lambda| (-\mathfrak{V}_0)^p; \\ &\delta' \frac{\partial^{n-1} p}{\partial \omega^{n-p-1} \partial t^p} = |\alpha_2 a_1| (-\mathfrak{V}_0)^p = -|\alpha_1 a_2| (-\mathfrak{V}_0)^p, \\ &\delta' \frac{\partial^{n-1} q}{\partial \omega^{n-p-1} \partial t^p} = |\alpha a_2| (-\mathfrak{V}_0)^p = -|\alpha_2 a| (-\mathfrak{V}_0)^p; \\ &\delta' \frac{\partial^{n-1} r}{\partial \omega^{n-p-1} \partial t^p} = |\alpha_1 a| (-\mathfrak{V}_0)^p = -|\alpha a_1| (-\mathfrak{V}_0)^p; \\ &\delta' \frac{\partial^{n-1}(\mathfrak{L}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R})}{\partial \omega^{n-p-1} \partial t^p} = -\delta' \frac{\partial^{n-1}(p, q, r)}{\partial \omega^{n-p-1} \partial t^p} \mathfrak{V}_0. \end{aligned} \right.$$

---

[1] E. Jouguet, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 132, p. 673.

On en déduit, d'après (91), les formules analogues à (93)

$$(97)\quad \left\{\begin{array}{l} \lambda = \alpha\delta' \dfrac{\partial^{n-1}\xi}{\partial\omega^{n-1}} + \alpha_1\delta' \dfrac{\partial^{n-1}\eta}{\partial\omega^{n-1}} + \alpha_2\delta' \dfrac{\partial^{n-1}\zeta}{\partial\omega^{n-1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a = \alpha_1\delta' \dfrac{\partial^{n-1}r}{\partial\omega^{n-1}} - \alpha_2\delta' \dfrac{\partial^{n-1}q}{\partial\omega^{n-1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Enfin, par suite de la continuité de ρ, l'égalité (94) devient

$$\rho\mathfrak{V} = \rho_0\mathfrak{V}_0.$$

19. Équations fondamentales des ondes de choc. — Considérons, pour fixer les idées, une onde se propageant dans le sens positif, c'est-à-dire de la région 1 vers la région 2 et soient M, M' les positions du point de discontinuité aux instants t et $t+dt$; nous allons appliquer l'équation fondamentale (35) à la portion $\mu_1\mu_2$, μ_1 et μ_2 étant deux points des régions 1 et 2, tels que $\overline{\mu_1 M} = \varepsilon_1 dt$, $\overline{M'\mu_2} = \varepsilon_2 dt$, ε_1 et ε_2 désignant deux quantités finies.

Les points μ_1 et μ_2 n'étant pas atteints par l'onde pendant le temps dt, les équations générales du mouvement établies dans l'hypothèse de la continuité sont applicables en ces deux points à l'instant t. D'après la signification des éléments $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ (n° 8), le reste de la ligne, constitué par les portions $\widehat{M_1\mu_1}$ et $\widehat{\mu_2 M_2}$, peut être supprimé, sauf à adjoindre aux forces extérieures la force $\mathcal{R}$ et le couple $\mathcal{C}$ en μ_1, la force $-\mathcal{R}$ et le couple $-\mathcal{C}$ en μ_2. L'équation (35) appliquée à la portion $\mu_1\mu_2$ nous donne ainsi, en utilisant les axes mobiles,

$$(98)\qquad \delta\mathcal{T}_e + \delta\mathrm{J} + \delta\mathcal{T}_v - \delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F} - |\mathcal{R}_u\delta u + \mathcal{C}_u\delta\omega_u|_{\mu_1}^{\mu_2} = 0.$$

Nous avons tout d'abord

$$\delta\mathcal{T}_e - \delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F} = \int |\mathcal{X}_e\delta u + \mathcal{L}_e\delta\omega_u|\, d\omega - \int |f'_\xi\delta\xi + f'_p\delta p|\, d\omega,$$

les intégrales étant étendues à la portion considérée. Or, d'après (14) et (17), les variations $\delta\xi, \delta\eta, \ldots, \delta r$ sont de l'ordre de $\delta u, \delta v, \ldots, \delta\omega_w$; l'expression précédente est donc de l'ordre de $(\delta u, \delta v, \ldots, \delta\omega_w)\, dt$, puisque le champ d'intégration est de l'ordre de dt, et il en est de même de la partie de $\delta\mathrm{J} + \delta\mathcal{T}_v$ relative aux régions $\mu_1 M$, $M'\mu_2$ non atteintes par l'onde pendant le temps dt. Mais il n'en est plus ainsi de la partie de $\delta\mathrm{J} + \delta\mathcal{T}_v$ relative à la portion MM' balayée par l'onde pendant le temps dt.

Soient, en effet, V et V' les vitesses d'un même point matériel M aux instants

t et $t+dt$, $(\mathcal{L}', \mathcal{Q}', \mathcal{R}')$ la rotation instantanée du trièdre (M) à l'instant $t+dt$; on peut écrire d'une manière générale

$$\ddot{x} = \frac{V'_x - V_x}{dt}, \ldots; \qquad \dot{\mathcal{L}} = \frac{\mathcal{L}' - \mathcal{L}}{dt}, \ldots,$$

de sorte qu'on a pour les différents points de MM'

$$\ddot{x} = \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_2}{dt} = -\frac{\delta'\dot{x}}{dt}, \ldots; \qquad \dot{\mathcal{L}} = -\frac{\delta'\mathcal{L}}{dt}, \ldots,$$

ce qui revient à dire que les accélérations des points immédiatement en avant du front de l'onde sont infinies si la discontinuité est effectivement du premier ordre. On a donc, pour la portion MM' et d'après (48), (49) et (89),

$$\begin{aligned} \delta\dot{J} &= |\mathfrak{X}_i\delta u + \mathfrak{L}_i\delta\omega_u|\, d\omega \\ &= (|\alpha\delta'\dot{x}|\,\delta u + |\alpha_1\delta'\dot{x}|\,\delta v + |\alpha_2\delta'\dot{x}|\,\delta w + |A^2\delta'\mathcal{L}\delta\omega_u|)\,\rho_0\mathfrak{V}_0, \end{aligned}$$

car les termes en $\mathcal{Q}\mathcal{R}$, ... de $\mathfrak{L}_i$, $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{N}_i$ donnent des quantités de l'ordre de $(\delta\omega_u, \delta\omega_v, \delta\omega_w)\,dt$, donc négligeables. D'où, d'après (90), (92),

$$\delta\dot{J} = -(\delta'\xi\delta u + \delta'\eta\delta v + \delta'\zeta\delta w + |A^2\delta' p\,\delta\omega_u|)\,\rho_0\mathfrak{V}_0^2.$$

L'expression de $\delta\mathcal{C}_v$ pour la portion MM' est, d'après (23),

$$\delta\mathcal{C}_v = -|F_2\delta\xi + P_2\delta p|\,\mathfrak{V}_0\,dt;$$

elle est de l'ordre de $\delta\xi, \delta\eta, \ldots, \delta r$, car les actions de viscosité $F_2, G_2, \ldots, R_2$, qui doivent être calculées à l'origine de la région 2, sont des fonctions linéaires et homogènes de

(99) $$\dot{\xi} = -\frac{\delta'\xi}{dt}, \qquad \dot{\eta} = -\frac{\delta'\eta}{dt}, \ldots, \qquad \dot{r} = -\frac{\delta' r}{dt},$$

de sorte que les produits $(F_2, G_2, \ldots, R_2)\,dt$ sont finis. On a donc, d'après (14) et (17),

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{C}_v = -\Big|&F_2\Big(\frac{d\delta u}{d\omega} + q\delta w - r\delta v + \eta\delta\omega_w - \zeta\delta\omega_v\Big) \\ &+ P_2\Big(\frac{d\delta\omega_u}{d\omega} + q\delta\omega_w - r\delta\omega_v\Big)\Big|\,\mathfrak{V}_0\,dt. \end{aligned}$$

Enfin, comme le déplacement virtuel $(\delta u, \delta v, \ldots, \delta\omega_w)$ est continu tout le long de la ligne, on a sensiblement

$$|\mathcal{R}_u\delta u + \mathcal{C}_u\delta\omega_u|_{\mu_1}^{\mu_2} = |\delta'\mathcal{R}_u\delta u + \delta'\mathcal{C}_u\delta\omega_u|,$$

de sorte que l'équation (98) devient

$$(100)\qquad \begin{aligned}&(\delta'\xi\,\delta u + \delta'\eta\,\delta v + \delta'\zeta\,\delta w + |A^2\delta' p\,\delta\omega_u|)\,\rho_0\mathfrak{V}_0^2\\
&+\left|F_2\left(\frac{d\delta u}{d\omega} + q\,\delta w - r\,\delta v + \eta\,\delta\omega_w - \zeta\,\delta\omega_v\right)\right.\\
&\left.+P_2\left(\frac{d\delta\omega_u}{d\omega} + q\,\delta\omega_w - r\,\delta\omega_v\right)\right|\mathfrak{V}_0\,dt\\
&+|\delta'\mathcal{R}_u\,\delta u + \delta'\mathcal{C}_u\,\delta\omega_u| = 0\end{aligned}$$

et, comme elle doit être vérifiée quelles que soient les fonctions $\delta u, \delta v, \ldots, \delta\omega_w$ et leurs dérivées, on en conclut qu'on doit avoir

$$(101)\qquad (F_2, G_2, H_2;\; P_2, Q_2, R_2)\,\mathfrak{V}_0\,dt = 0;$$

$$(102)\qquad \left\{\begin{aligned}&\rho_0\mathfrak{V}_0^2\,\delta'(\xi, \eta, \zeta) + \delta'(\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_v, \mathcal{R}_w) = 0,\\
&\rho_0\mathfrak{V}_0^2(A^2\delta' p, B^2\delta' q, C^2\delta' r) + \delta'(\mathcal{C}_u, \mathcal{C}_v, \mathcal{C}_w) = 0.\end{aligned}\right.$$

Ce sont là les douze équations fondamentales des ondes de choc.

20. Ligne affectée de viscosité. — Si $\mathfrak{V}_0$ n'est pas nul, les équations (101) exigent qu'on ait

$$(F_2, G_2, \ldots, R_2)\,dt = 0.$$

Comme ces six équations sont linéaires et homogènes en $\dot\xi\,dt = -\delta'\xi$, $\dot\eta\,dt = -\delta'\eta, \ldots, \dot r\,dt = -\delta' r$ et que leur déterminant n'est pas nul, puisque la fonction dissipative est une forme quadratique définie positive, il faut que $\delta'(\xi, \eta, \ldots, r)$ soient nuls, c'est-à-dire qu'on ait, d'après (93),

$$(\lambda, \mu, \nu;\; a, b, \ldots, c_2) = 0.$$

De là, le résultat suivant :

Une ligne élastique à six paramètres affectée de viscosité ne peut être le siège d'aucune onde de choc qui se propage.

21. Ligne dénuée de viscosité. — On a alors seulement les six équations (102), avec, d'après (26),

$$(103)\qquad \mathcal{R}_u = -f'_\xi,\qquad \mathcal{R}_v = -f'_\eta,\ \ldots,\qquad \mathcal{C}_w = -f'_r.$$

Comme les six déformations $\xi - \xi_0, \eta - \eta_0, \ldots, r - r_0$ sont supposées très petites, il en est de même de leurs variations $\delta'(\xi, \eta, \ldots, r)$ à la traversée de l'onde, de sorte que, si nous supposons la variation correspondante $\delta' T$ de la température également très petite, nous pouvons calculer les variations $\delta'(\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_r, \ldots, \mathcal{C}_w)$ par une simple différentiation de (103), soit

$$(104)\qquad \left\{\begin{array}{l} \delta'\mathcal{R}_u = -(f''_{\xi^2}\delta'\xi + f''_{\xi\eta}\delta'\eta + \ldots + f''_{\xi r}\delta' r + f''_{\xi \mathrm{T}}\delta'\mathrm{T}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \delta'\mathcal{C}_w = -(f''_{r\xi}\delta'\xi + f''_{r\eta}\delta'\eta + \ldots + f''_{r^2}\delta' r + f''_{r\mathrm{T}}\delta'\mathrm{T}), \end{array}\right.$$

formules où les dérivées partielles peuvent être indifféremment calculées dans la région 1 ou la région 2 en un point infiniment voisin du point de discontinuité M, puisque les discontinuités sont très petites. Nous avons alors deux cas à distinguer.

I. *La ligne est bonne conductrice de la chaleur* ($\mathrm{K} \neq 0$). — Dans ces conditions, la théorie de la conductibilité calorifique nous enseigne que la température ne saurait présenter de variation brusque; on a donc $\delta'\mathrm{T} = 0$, de sorte que les équations (102) deviennent, d'après (104),

$$(105)\qquad \left\{\begin{array}{l} (f''_{\xi^2} - \rho_0\mathfrak{V}^2_0)\delta'\xi + f''_{\xi\eta}\delta'\eta + \ldots + f''_{\xi r}\delta' r = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ f''_{r\xi}\delta'\xi + f''_{r\eta}\delta'\eta + \ldots + (f''_{r^2} - \mathrm{C}^2\rho_0\mathfrak{V}^2_0)\delta' r = 0. \end{array}\right.$$

Pour que les discontinuités ne soient pas toutes nulles, il faut et il suffit que le déterminant de ces six équations linéaires et homogènes le soit, c'est-à-dire qu'on ait

$$(106)\qquad \begin{vmatrix} f''_{\xi^2} - \rho_0\mathfrak{V}^2_0 & f''_{\xi\eta} & \ldots & f''_{\xi r}\\ f''_{\eta\xi} & f''_{\eta^2} - \rho_0\mathfrak{V}^2_0 & \ldots & f''_{\eta r}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ f''_{r\xi} & f''_{r\eta} & \ldots & f''_{r^2} - \mathrm{C}^2\rho_0\mathfrak{V}^2_0 \end{vmatrix} = 0,$$

équation du sixième degré en $\mathfrak{V}^2_0$, qui détermine six vitesses possibles de propagation, à supposer toutefois qu'elles soient toutes réelles. L'une de ces vitesses étant choisie, les équations (105) se réduisent à cinq distinctes, d'où l'on déduit un résultat de la forme

$$(107)\qquad \frac{\delta'\xi}{\mathrm{D}_1} = \frac{\delta'\eta}{\mathrm{D}_2} = \ldots = \frac{\delta' r}{\mathrm{D}_6},$$

les D_i étant des fonctions connues, ce qui détermine $\delta'(\xi, \eta, \ldots, r)$ en fonction d'un paramètre arbitraire. On déduit ensuite $\lambda, \mu, \nu;\ a, b, \ldots, c_2$ des formules (93). Le problème est ainsi entièrement résolu, en ce sens que tous les éléments du mouvement 2 au point M se déduisent de ceux du mouvement 1 au même point, à l'aide d'un paramètre arbitraire auquel chaque discontinuité est proportionnelle.

Si l'on admet la validité de l'expression (66) *de* f, l'équation (106) se décompose en deux équations du troisième degré, puisque les neuf dérivées rectangles $f''_{\xi p}$, $f''_{\xi q}$, ..., $f''_{\zeta r}$ sont alors nulles; l'équation (106) s'écrit donc plus simplement

$$(108)\quad \begin{vmatrix} f''_{\xi^2} - \rho_0 \mathfrak{V}^2_0 & f''_{\xi\eta} & f''_{\xi\zeta} \\ f''_{\eta\xi} & f''_{\eta^2} - \rho_0 \mathfrak{V}^2_0 & f''_{\eta\zeta} \\ f''_{\zeta\xi} & f''_{\zeta\eta} & f''_{\zeta^2} - \rho_0 \mathfrak{V}^2_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f''_{p^2} - A^2 \rho_0 \mathfrak{V}^2_0 & f''_{pq} & f''_{pr} \\ f''_{qp} & f''_{q^2} - B^2 \rho_0 \mathfrak{V}^2_0 & f''_{qr} \\ f''_{rp} & f''_{rq} & f''_{r^2} - C^2 \rho_0 \mathfrak{V}^2_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Enfin, si la ligne est isotrope, il résulte des valeurs des coefficients $\mathfrak{A}_i$ et $\mathfrak{A}_{ij}$ données au n° 13 que trois autres dérivées rectangles f''_{pq}, f''_{qr}, f''_{rp} sont également nulles, de sorte que le second déterminant de (108) se réduit à

$$(f''_{p^2} - A^2 \rho_0 \mathfrak{V}^2_0)(f''_{q^2} - B^2 \rho_0 \mathfrak{V}^2_0)(f''_{r^2} - C^2 \rho_0 \mathfrak{V}^2_0) = 0,$$

ce qui donnerait les trois vitesses de propagation

$$(109)\quad \mathfrak{V}^2_0 = \frac{\mu - \nu}{\rho_0} \left[\frac{1}{A^2}\left(\frac{B^2_1}{\eta^2_0} + \frac{C^2_1}{\zeta^2_0}\right),\ \frac{1}{B^2}\left(\frac{C^2_1}{\zeta^2_0} + \frac{A^2_1}{\xi^2_0}\right),\ \frac{1}{C^2}\left(\frac{A^2_1}{\xi^2_0} + \frac{B^2_1}{\eta^2_0}\right) \right],$$

ρ_0 désignant alors la densité *cubique* dans l'état naturel.

II. *La ligne est mauvaise conductrice de la chaleur* ($K = 0$). — Dans ces conditions et en supposant $\mathfrak{V}_0 \neq 0$, la première expression (51) de dQ relative à l'élément MM' est, d'après (99), de l'ordre de dt, tandis que la seconde (52) est de l'ordre de dt^2; l'expression (51) de dQ est donc nulle, de sorte que la propagation s'effectue suivant la loi adiabatique. On a alors, en remplaçant dans (51) $\dot{T}$ par $-\frac{\delta' T}{dt}$,

$$(110)\quad \delta' T = \frac{T}{c\mathbf{E}}(f''_{T\xi}\delta'\xi + f''_{T\eta}\delta'\eta + \ldots + f''_{Tr}\delta' r)$$

et les six équations (102) deviennent, d'après (104),

$$(111)\quad \left\{ \begin{array}{l} \left(f''_{\xi^2} + \frac{T}{c\mathbf{E}} f''^2_{T\xi} - \rho_0 \mathfrak{V}^2_0\right)\delta'\xi + \left(f''_{\xi\eta} + \frac{T}{c\mathbf{E}} f''_{T\xi} f''_{T\eta}\right)\delta'\eta + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \left(f''_{\xi r} + \frac{T}{c\mathbf{E}} f''_{T\xi} f''_{Tr}\right)\delta' r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(f''_{r\xi} + \frac{T}{c\mathbf{E}} f''_{Tr} f''_{T\xi}\right)\delta'\xi + \left(f''_{r\eta} + \frac{T}{c\mathbf{E}} f''_{Tr} f''_{T\eta}\right)\delta'\eta + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \left(f''_{r^2} + \frac{T}{c\mathbf{E}} f''^2_{Tr} - C^2 \rho_0 \mathfrak{V}^2_0\right) = 0. \end{array} \right.$$

On en déduit, comme précédemment, l'équation aux vitesses de propagation

$$(112)\qquad \begin{vmatrix} f''_{\xi^2} + \dfrac{T}{c\mathbf{E}} f''^2_{T\xi} - \rho_0 \mathcal{V}^2_0 & f''_{\xi\eta} + \dfrac{T}{c\mathbf{E}} f''_{T\xi} f''_{T\eta} & \cdots & f''_{\xi r} + \dfrac{T}{c\mathbf{E}} f''_{T\xi} f''_{Tr} \\ f''_{\eta\xi} + \dfrac{T}{c\mathbf{E}} f''_{T\eta} f''_{T\xi} & f''_{\eta^2} + \dfrac{T}{c\mathbf{E}} f''^2_{T\eta} - \rho_0 \mathcal{V}^2_0 & \cdots & f''_{\eta r} + \dfrac{T}{c\mathbf{E}} f''_{T\eta} f''_{Tr} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f''_{r\xi} + \dfrac{T}{c\mathbf{E}} f''_{Tr} f''_{T\xi} & f''_{r\eta} + \dfrac{T}{c\mathbf{E}} f''_{Tr} f''_{T\eta} & \cdots & f''_{r^2} + \dfrac{T}{c\mathbf{E}} f''^2_{Tr} - C^2 \rho_0 \mathcal{V}^2_0 \end{vmatrix} = 0.$$

On voit que le déterminant est encore symétrique, mais, *en admettant la validité de l'expression* (66) *de* f, il ne se décompose plus comme le précédent (106) en deux autres du troisième degré par suite des termes où figure la température, du moins dans le cas général où la température actuelle $T = T_0 + \theta$ n'est pas très voisine de la température T_0 de l'état naturel. Dans le cas contraire où θ est très petit, il résulte de ce que nous avons dit au n° 13 que les trois dérivées rectangles $f''_{T(p,\,q,\,r)}$ sont nulles, de sorte que l'équation (112) se décomposerait encore en deux équations du troisième degré, la deuxième s'obtenant en annulant le second déterminant de (108). Les trois vitesses correspondantes ne se trouveraient donc pas changées du fait de l'hypothèse d'adiabatie. En particulier, si la ligne est isotrope, ces trois vitesses seraient encore données par (109), le coefficient ν étant alors effacé, puisque sa valeur $\left(\dfrac{d\nu}{dT}\right)_{T=T_0}\theta$ est maintenant négligeable vis-à-vis de μ, par suite de la petitesse de θ. Enfin, le calcul des discontinuités s'effectue comme précédemment à l'aide des équations (111) et (93).

22. Loi adiabatique dynamique. — L'égalité (110) constitue la relation supplémentaire dans la propagation adiabatique des ondes de choc; nous l'avons obtenue en annulant la quantité de chaleur dégagée pendant le temps dt par l'élément de ligne franchi par l'onde pendant le même temps, cette quantité de chaleur ayant été calculée à l'aide du principe de Carnot. Si nous la calculons, au contraire, à l'aide du principe d'équivalence, nous aboutirons à une forme nouvelle, nécessairement équivalente à (110), qui correspondra à ce qu'on appelle en Hydrodynamique la *loi adiabatique dynamique*. M. Jouguet, à qui l'on doit la généralisation de cette loi en Hydrodynamique, l'a récemment établie pour un milieu quelconque à trois dimensions dénué de viscosité[1]; nous allons la rechercher pour les lignes élastiques sans viscosité, puisque, s'il y a viscosité, nous savons qu'aucune onde de choc n'est susceptible de se propager.

---

[1] E. JOUGUET, *Notes sur la théorie de l'Élasticité*, Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, 3e série, t. XII, 1921, p. 62.

Le principe d'équivalence appliqué à une portion $\mu_1\mu_2$ de la ligne s'écrit

$$(113)\qquad d\mathcal{T}_e = \mathbf{E}dQ + d\int(\mathfrak{U} + \mathfrak{W})\,dm,$$

où $d\mathcal{T}_e$ est le travail élémentaire des forces extérieures, qui comprend celui de la force $\mathcal{R}$ et du couple $\mathcal{C}$ en μ_1, de la force $-\mathcal{R}$ et du couple $-\mathcal{C}$ en μ_2, ces éléments résultant de la suppression des portions $M_1\mu_1$ et μ_2M_2, ainsi qu'il a été expliqué au n° 19; $\mathfrak{U}$ désigne l'énergie interne, $\mathfrak{W}$ l'énergie cinétique par unité de masse et d la variation éprouvée pendant le temps dt par l'intégrale étendue à tous les éléments de masse dm de la portion $\mu_1\mu_2$ considérée. Si nous désignons par

$$(114)\qquad U = |\alpha\dot{x}|,\qquad V = |\alpha_1\dot{x}|,\qquad W = |\alpha_2\dot{x}|$$

les composantes de la vitesse de M suivant les axes mobiles $Muvw$, nous avons

$$(115)\qquad d\mathcal{T}_e = dt\int|\mathcal{X}_e U + \mathfrak{L}_e\mathfrak{L}|\,d\omega - dt|\mathcal{R}_u U + \mathcal{C}_u\mathfrak{L}|_{\mu_1}^{\mu_2}.$$

Cela posé, appliquons l'égalité (113) à la portion $\mu_1\mu_2$ comprenant l'onde et précédemment considérée (n° 19); pour MM', on a

$$d(\mathfrak{U} + \mathfrak{W}) = -\delta'(\mathfrak{U} + \mathfrak{W}),\qquad dm = \rho_0\mathfrak{T}_0\,dt;$$

d'où

$$d\int(\mathfrak{U} + \mathfrak{W})\,dm = -\rho_0\mathfrak{T}_0\,dt\,\delta'(\mathfrak{U} + \mathfrak{W}),$$

les parties relatives à μ_1M et $M'\mu_2$ étant de l'ordre de dt^2. On a de même

$$d\mathcal{T}_e = -dt\,\delta'|\mathcal{R}_u U + \mathcal{C}_u\mathfrak{L}|,$$

le premier terme du second membre de (115) étant de l'ordre de dt^2; l'égalité (113) devient ainsi

$$\mathbf{E}dQ = [\rho_0\mathfrak{T}_0\delta'(\mathfrak{U} + \mathfrak{W}) - \delta'|\mathcal{R}_u U + \mathcal{C}_u\mathfrak{L}|]\,dt,$$

quantité de l'ordre de dt. Or, pour $K = 0$, la seconde expression de dQ fournie par (52) étant de l'ordre de dt^2, on en conclut qu'on doit avoir

$$(116)\qquad \rho_0\mathfrak{T}_0\delta'(\mathfrak{U} + \mathfrak{W}) - \delta'|\mathcal{R}_u U + \mathcal{C}_u\mathfrak{L}| = 0.$$

Cela posé, nous avons

$$2\mathfrak{W} = |U^2 + A^2\mathfrak{L}^2|,$$

d'où

$$2\delta'\mathfrak{W} = |(U_1 + U_2)\,\delta'U + A^2(\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2)\,\delta'\mathfrak{L}|$$

et d'autre part

$$2\delta'|\mathcal{R}_u U + \mathcal{C}_u \mathcal{L}| = |(\mathcal{R}_{u1} + \mathcal{R}_{u2})\delta' U + (\mathcal{C}_{u1} + \mathcal{C}_{u2})\delta' \mathcal{L} + (U_1 + U_2)\delta' \mathcal{R}_u + (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)\delta' \mathcal{C}_u|.$$

Mais on a, d'après (90), (92) et (114)

$$\delta'(U, V, W) = -\mathcal{V}_0 \delta'(\xi, \eta, \zeta),$$

d'où

$$2\delta'\mathcal{U} = -\mathcal{V}_0 |(U_1 + U_2)\delta'\xi + A^2(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)\delta' p|,$$

$$2\delta'|\mathcal{R}_u U + \mathcal{C}_u \mathcal{L}| = -\mathcal{V}_0 |(\mathcal{R}_{u1} + \mathcal{R}_{u2})\delta'\xi + (\mathcal{C}_{u1} + \mathcal{C}_{u2})\delta' p| + |(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2)\delta'\mathcal{R}_u + (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)\delta'\mathcal{C}_u|,$$

soit enfin, d'après (102),

$$2(\rho_0 \mathcal{V}_0 \delta'\mathcal{U} - \delta'|\mathcal{R}_u U + \mathcal{C}_u \mathcal{L}|) = \mathcal{V}_0 |(\mathcal{R}_{u1} + \mathcal{R}_{u2})\delta'\xi + (\mathcal{C}_{u1} + \mathcal{C}_{u2})\delta' p| = -\frac{1}{\rho_0 \mathcal{V}_0}\delta'\left|\mathcal{R}^2_u + \left(\frac{\mathcal{C}_u}{A}\right)^2\right|.$$

L'égalité (116) peut donc s'écrire sous les deux formes équivalentes

$$2\rho_0 \delta'\mathcal{U} + |(\mathcal{R}_{u1} + \mathcal{R}_{u2})\delta'\xi + (\mathcal{C}_{u1} + \mathcal{C}_{u2})\delta' p| = 0, \tag{117}$$

$$2\rho^2_0 \mathcal{V}^2_0 \delta'\mathcal{U} - \delta'\left|\mathcal{R}^2_u + \left(\frac{\mathcal{C}_u}{A}\right)^2\right| = 0. \tag{118}$$

L'une ou l'autre de ces égalités exprime la loi adiabatique dynamique relative aux lignes élastiques; la seconde rappelle tout particulièrement l'une des formes données par M. Jouguet pour les milieux à trois dimensions.

23. Ondes d'accélération avec viscosité. — Supposons maintenant la discontinuité du second ordre en x, y, z; $\alpha, \beta, \ldots, \gamma_2$; elle est alors du premier ordre par rapport à Δ, ρ; ξ, η, ζ; p, q, r; $\mathcal{L}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ et nous avons les formules (95), (96), (97) avec $n = 2$. Supposons la discontinuité également du premier ordre par rapport à T. Les équations indéfinies (47) ne s'appliquent pas encore, les dérivées $\dfrac{\partial(\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_v, \ldots, \mathcal{C}_w)}{\partial\omega}$ n'ayant pas de sens au point de discontinuité M séparatif des régions 1 et 2, puisque, d'après (26), $\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_v, \ldots, \mathcal{C}_w$ y sont discontinus par suite de la viscosité. Mais nous pouvons écrire, d'après (27) et (35), en considérant la même portion de ligne $\mu_1\mu_2$ que dans le cas des ondes de choc,

$$\int |(\mathcal{X}_e + \mathcal{X}_i)\,\delta u + (\mathcal{L}_e + \mathcal{L}_i)\,\delta\omega_u|\, d\omega$$
$$+ \int |\mathcal{R}_u \delta\dot{\xi} + \mathcal{C}_u \delta\dot{p}|\, d\omega - |\mathcal{R}_u \delta u + \mathcal{C}_u \delta\omega_u|_{\mu_1}^{\mu_2} = 0.$$

Or, les deux intégrales étant de l'ordre de $dt(\delta u, \delta v, \ldots, \delta\omega_w)$, il reste

$$|\delta'\mathcal{R}_u \delta u + \delta'\mathcal{C}_u \delta\omega_u| = 0,$$

égalité qui, devant être vérifiée quel que soit le déplacement virtuel, exige qu'on ait

$$\delta'(\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_v, \ldots, \mathcal{C}_w) = 0, \tag{119}$$

c'est-à-dire, d'après (26),

$$\delta'(\mathrm{F}, \mathrm{G}, \ldots, \mathrm{R}) = 0.$$

Nous avons ainsi six équations linéaires et homogènes en $\delta'(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \ldots, \dot{r})$, dont le déterminant n'est pas nul, puisque la fonction dissipative est une forme quadratique définie positive; il faut donc que toutes ces discontinuités soient nulles, c'est-à-dire qu'on ait

$$\mathcal{V}_0 \delta' \frac{\partial(\xi, \eta, \ldots, r)}{\partial\omega} = 0,$$

soit encore, d'après (97) et en supposant $\mathcal{V}_0 \neq 0$,

$$(\lambda, \mu, \nu;\ a, b, \ldots, c_2) = 0.$$

De là le résultat suivant :

Une ligne élastique à six paramètres affectée de viscosité ne peut être le siège d'aucune onde d'accélération qui se propage.

24. Ondes d'accélération sans viscosité. — Les composantes $\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_v, \ldots, \mathcal{C}_w$ étant maintenant continues, nous pouvons appliquer les équations indéfinies (47) qui, écrites de part et d'autre du point de discontinuité et retranchées membre à membre, nous donnent

$$\delta' \frac{\partial(\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_v, \ldots, \mathcal{C}_w)}{\partial\omega} = \delta'(\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, \ldots, \mathcal{N}_i), \tag{120}$$

tous les autres termes restant continus à la traversée de l'onde, en particulier la force et le couple extérieurs linéaires $(\mathcal{X}_e, \mathcal{Y}_e, \ldots, \mathcal{N}_e)$. Or nous avons, d'après (103),

$$(121)\quad \begin{cases} \delta' \dfrac{\partial \mathcal{R}_u}{\partial \omega} = -\left(f''_{\xi^2}\delta'\dfrac{\partial \xi}{\partial \omega} + f''_{\xi\eta}\delta'\dfrac{\partial \eta}{\partial \omega} + \ldots + f''_{\xi r}\delta'\dfrac{\partial r}{\partial \omega} + f''_{\xi \mathrm{T}}\delta'\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \omega}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et, d'après (48), (49), (95) et (96),

$$(122)\quad \begin{cases} \delta'(\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, \mathcal{Z}_i) = -\rho_0 \mathcal{V}^2_0 \delta' \dfrac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \omega}, \\ \delta'(\mathcal{L}_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{N}_i) = -\rho_0 \mathcal{V}^2_0 \left(\mathrm{A}^2\delta'\dfrac{\partial p}{\partial \omega},\ \mathrm{B}^2\delta'\dfrac{\partial q}{\partial \omega},\ \mathrm{C}^2\delta'\dfrac{\partial r}{\partial \omega}\right). \end{cases}$$

Cela posé, tout comme dans le cas des ondes de choc, nous avons encore deux cas à distinguer.

I. *La ligne est bonne conductrice de la chaleur* ($\mathrm{K} \neq 0$). — Pour calculer $\delta'\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial \omega}$, nous ne pouvons pas encore employer l'équation indéfinie (53) établie en supposant continues les dérivées premières; mais nous pouvons écrire, d'après (51), (52) et en tenant compte de ce que la viscosité est ici nulle,

$$(123)\quad \int \left[\frac{\mathrm{T}}{\mathbf{E}}(f''_{\mathrm{T}\xi}\dot{\xi} + f''_{\mathrm{T}\eta}\dot{\eta} + \ldots + f''_{\mathrm{T}r}\dot{r}) - c\dot{\mathrm{T}}\right] d\omega = -\left(\frac{\mathrm{K}}{\Delta}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \omega}\right)_{\mu_1}^{\mu_2} + \int k(\mathrm{T} - \mathrm{T}_e)\, ds,$$

les intégrales s'étendant à une portion quelconque $\mu_1 \mu_2$ de la ligne. Si nous prenons pour celle-ci la portion de l'ordre de dt déjà considérée comprenant le point de discontinuité, les intégrales sont de l'ordre de dt, de sorte que (123) devient, dans notre hypothèse où K n'est pas nul,

$$\delta'\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \omega} = 0.$$

La discontinuité est donc au moins du second ordre par rapport à T. Dans ces conditions, les équations (120) deviennent, d'après (121) et (122),

$$(f''_{\xi^2} - \rho_0 \mathcal{V}^2_0)\delta'\frac{\partial \xi}{\partial \omega} + f''_{\xi\eta}\delta'\frac{\partial \eta}{\partial \omega} + \ldots + f''_{\xi r}\delta'\frac{\partial r}{\partial \omega} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f''_{r\xi}\delta'\frac{\partial \xi}{\partial \omega} + f''_{r\eta}\delta'\frac{\partial \eta}{\partial \omega} + \ldots + (f''_{r^2} - \mathrm{C}^2\rho_0\mathcal{V}^2_0)\delta'\frac{\partial r}{\partial \omega} = 0.$$

Nous retrouvons ainsi les mêmes équations (105) que pour les ondes de choc, sauf que l'ordre des discontinuités s'y trouve simplement élevé d'une unité. Le raisonnement s'achève donc comme au n° 21, I : les vitesses de propagation sont encore données par l'équation (106), au sujet de laquelle on peut faire les mêmes observations conduisant aux équations (108) et (109). On en déduit ensuite les discontinuités $\delta' \frac{\partial \xi}{\partial \omega}$, ... par les formules analogues à (107), après quoi λ, μ, ..., c_2 sont donnés par (97).

II. *La ligne est mauvaise conductrice de la chaleur* (K = o). — Dans ces conditions, l'équation indéfinie (53) est applicable et donne, dans notre hypothèse de viscosité nulle,

$$\delta' \dot{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{T}}{c\mathbf{E}} (f''_{\mathrm{T}\xi} \delta' \dot{\xi} + f''_{\mathrm{T}\eta} \delta' \dot{\eta} + \ldots + f''_{\mathrm{T}r} \delta' \dot{r}),$$

c'est-à-dire, en supposant $\mathfrak{V}_0 \neq 0$,

$$\delta' \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \omega} = \frac{\mathrm{T}}{c\mathbf{E}} \left(f''_{\mathrm{T}\xi} \delta' \frac{\partial \xi}{\partial \omega} + f''_{\mathrm{T}\eta} \delta' \frac{\partial \eta}{\partial \omega} + \ldots + f''_{\mathrm{T}r} \delta' \frac{\partial r}{\partial \omega} \right). \tag{124}$$

Les équations (120) deviennent alors, d'après (121), (122) et (124),

$$\left(f''_{\xi^2} + \frac{\mathrm{T}}{c\mathbf{E}} f''^2_{\mathrm{T}\xi} - \rho_0 \mathfrak{V}_0^2 \right) \delta' \frac{\partial \xi}{\partial \omega} + \left(f''_{\xi\eta} + \frac{\mathrm{T}}{c\mathbf{E}} f''_{\mathrm{T}\xi} f''_{\mathrm{T}\eta} \right) \delta' \frac{\partial \eta}{\partial \omega} + \ldots$$
$$+ \left(f''_{\xi r} + \frac{\mathrm{T}}{c\mathbf{E}} f''_{\mathrm{T}\xi} f''_{\mathrm{T}r} \right) \delta' \frac{\partial r}{\partial \omega} = 0,$$

....

$$\left(f''_{r\xi} + \frac{\mathrm{T}}{c\mathbf{E}} f''_{\mathrm{T}r} f''_{\mathrm{T}\xi} \right) \delta' \frac{\partial \xi}{\partial \omega} + \left(f''_{r\eta} + \frac{\mathrm{T}}{c\mathbf{E}} f''_{\mathrm{T}r} f''_{\mathrm{T}\eta} \right) \delta' \frac{\partial \eta}{\partial \omega} + \ldots$$
$$+ \left(f''_{r^2} + \frac{\mathrm{T}}{c\mathbf{E}} f''^2_{\mathrm{T}r} - \rho_0 \mathfrak{V}_0^2 \right) \delta' \frac{\partial r}{\partial \omega} = 0.$$

Nous retrouvons ainsi les mêmes équations (111) que pour les ondes de choc, sauf que l'ordre des discontinuités s'y trouve simplement élevé d'une unité; le raisonnement s'achève donc comme au n° 21, II : les vitesses de propagation sont encore données par l'équation (112), avec les remarques déjà faites.

25. Ondes d'ordre supérieur. — Supposons enfin la discontinuité du troisième ordre en x, y, z; α, β, ..., γ_2; elle est alors du second ordre par rapport à Δ, ρ; ξ, η, ..., r; $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, et nous la supposons également du second ordre par rapport à T. Les équations indéfinies (47) et (53) sont maintenant dans tous les cas applicables; les premières nous donnent

$$\delta' \frac{\partial (\mathfrak{R}_u, \mathfrak{R}_v, \ldots, \mathfrak{C}_w)}{\partial \omega} = 0,$$

ces dérivées étant discontinues par l'intermédiaire des actions de viscosité F, G, ..., R. En raisonnant comme au n° 23, il vient ainsi

$$\mathcal{V}_0^2 \delta' \frac{\partial^2(\xi, \eta, \ldots, r)}{\partial \omega^2} = 0,$$

soit encore, d'après (91) et en supposant $\mathcal{V}_0 \neq 0$,

$$(\lambda, \mu, \nu; a, b, \ldots, c_2) = 0.$$

Aucune onde du troisième ordre n'est donc susceptible de se propager sur une ligne élastique à six paramètres affectée de viscosité.

Si maintenant la ligne est dénuée de viscosité, les équations indéfinies (47) dérivées par rapport à ω nous donnent

$$\delta' \frac{\partial^2(\mathcal{R}_u, \mathcal{R}_v, \ldots \mathcal{C}_w)}{\partial \omega^2} = \delta' \frac{\partial(\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, \ldots, \mathcal{N}_i)}{\partial \omega},$$

d'où nous déduirions par les raisonnements déjà faits les mêmes conclusions qu'au n° 24. Les discontinuités d'un ordre quelconque supérieur à 3 fourniraient exactement les mêmes résultats. En définitive :

*Les **résultats** énoncés pour les ondes de choc, se propageant sur une ligne élastique à six paramètres, restent valables pour les ondes d'ordre supérieur au premier.*

DEUXIÈME PARTIE

LIGNE ÉLASTIQUE A QUATRE PARAMÈTRES

CHAPITRE PREMIER

ÉQUATIONS GÉNÉRALES

26. Préliminaires. — Dans la ligne à quatre paramètres, l'un des axes du trièdre mobile (M), Mu par exemple, est pris tangent en M à l'axe longitudinal, de sorte que l'orientation de ce trièdre ne dépend plus que d'un seul paramètre φ. Nous avons alors

$$d(x, y, z) = (\alpha, \beta, \gamma)\, ds,$$

de sorte que les égalités (7) deviennent, d'après les relations entre les cosinus et l'égalité (2),

$$\xi = \frac{ds}{d\omega} = \Delta, \qquad (\eta, \zeta) = 0;$$

d'où, dans l'état primitif,

$$\xi_0 = 1, \qquad (\eta_0, \zeta_0) = 0.$$

Nous avons donc en définitive les relations fondamentales

$$(125) \quad \left\{ \begin{aligned} &(1 + \partial)(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial\omega}, \\ &\xi = \Delta = 1 + \partial = \sqrt{\left|\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2\right|}, \qquad (\eta, \zeta) = 0, \\ &\xi - \xi_0 = \partial = \frac{ds - d\omega}{d\omega}, \qquad (\eta - \eta_0, \zeta - \zeta_0) = 0, \end{aligned} \right.$$

∂ représentant la dilatation de l'axe longitudinal comptée à partir de l'état primitif et, dans une modification virtuelle,

$$(126) \qquad \delta\xi = \delta\partial = \frac{\delta\, ds}{d\omega}, \qquad \delta(\eta, \zeta) = 0.$$

Il résulte de ces relations que les six composantes δx, δy, δz; $\delta\omega_x$, $\delta\omega_y$, $\delta\omega_z$ du déplacement virtuel du trièdre mobile (M) ne sont plus indépendantes, comme cela avait lieu pour la ligne à six paramètres; nous en déduisons, en effet,

$$d\delta(x, y, z) = (\alpha, \beta, \gamma)\,\delta ds + ds\,\delta(\alpha, \beta, \gamma).$$

Mais les variations $\delta(\alpha, \beta, \gamma)$ sont donnés par les formules bien connues

$$\begin{aligned} \delta\alpha &= \gamma\,\delta\omega_y - \beta\,\delta\omega_z, \\ \delta\beta &= \alpha\,\delta\omega_z - \gamma\,\delta\omega_x, \\ \delta\gamma &= \beta\,\delta\omega_x - \alpha\,\delta\omega_y \end{aligned}$$

analogues à (16); d'où

$$(127)\qquad \left\{\begin{aligned} d\delta x &= \alpha\,\delta ds + dz\,\delta\omega_y - dy\,\delta\omega_z, \\ d\delta y &= \beta\,\delta ds + dx\,\delta\omega_z - dz\,\delta\omega_x, \\ d\delta z &= \gamma\,\delta ds + dy\,\delta\omega_x - dx\,\delta\omega_y. \end{aligned}\right.$$

Telles sont les équations de liaisons entre δx, δy, ..., $\delta\omega_z$, δds. Pour obtenir les formules analogues relatives aux axes mobiles $Muvw$, il suffit de remplacer dans (14) ξ, η, ζ et $\delta(\xi, \eta, \zeta)$ par leurs valeurs (125) et (126); d'où

$$(128)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta\partial &= \frac{d\delta u}{d\omega} + q\,\delta w - r\,\delta v, \\ 0 &= \frac{d\delta v}{d\omega} + r\,\delta u - p\,\delta w - (1 + \partial)\,\delta\omega_w, \\ 0 &= \frac{d\delta w}{d\omega} + p\,\delta v - q\,\delta u + (1 + \partial)\,\delta\omega_v. \end{aligned}\right.$$

27. Équations du mouvement relatives aux axes fixes. — L'expression (21) du potentiel thermodynamique interne se réduit ici, d'après (125), à une fonction de la forme

$$\mathcal{F} = \int f(\partial, p - p_0, q - q_0, r - r_0, \mathrm{T}, \omega)\, d\omega,$$

de sorte que la variation isothermique de ce potentiel est

$$\delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F} = \int (f'_\partial\,\delta\partial + |f'_p\,\delta p|)\, d\omega.$$

Le travail virtuel des actions de viscosité devient de même, d'après (23),

$$\delta\mathcal{C}_v = -\int (\mathrm{F}\,\delta\partial + |\mathrm{P}\,\delta p|)\, d\omega,$$

d'où

$$(129)\qquad \delta\mathfrak{T}_r - \delta_T\mathfrak{F} = \int (\mathfrak{R}_u\,\delta\partial + |\mathfrak{C}_u\,\delta p|)\,d\omega,$$

en posant comme précédemment

$$(130)\quad \mathfrak{R}_u = -(f'_\partial + F),\quad \mathfrak{C}_u = -(f'_p + P),\quad \mathfrak{C}_v = -(f'_q + Q),\quad \mathfrak{C}_w = -(f'_r + R).$$

L'égalité (129) s'écrit encore, d'après (126) et (33),

$$\delta\mathfrak{T}_r - \delta_T\mathfrak{F} = \int (\mathfrak{R}_u\,\delta ds + |\mathfrak{C}_x\,d\delta\omega_x|).$$

Il résulte alors de l'équation fondamentale (35) de l'Énergétique qu'on doit avoir d'après (36)

$$\begin{aligned}&|X_1\,\delta x_1 + L_1\,\delta\omega_{x1}| + |X_2\,\delta x_2 + L_2\,\delta\omega_{x2}|\\
&+ \int |(X_e + X_i)\,\delta x + (L_e + L_i)\,\delta\omega_x|\,ds\\
&+ \int (\mathfrak{R}_u\,\delta ds + |\mathfrak{C}_x\,d\delta\omega_x|) = 0,\end{aligned}$$

non plus quels que soient $\delta x, \delta y, \ldots, \delta\omega_z$, mais pour toutes les valeurs de ces variations et de δds vérifiant les relations (127). Dès lors, d'après les principes du calcul des variations, il doit exister trois fonctions $\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{R}_y$, $\mathfrak{R}_z$, telles qu'on ait, quelles que soient ces sept variations,

$$\begin{aligned}&|X_1\,\delta x_1 + L_1\,\delta\omega_{x1}| + |X_2\,\delta x_2 + L_2\,\delta\omega_{x2}|\\
&+ \int |(X_e + X_i)\,\delta x + (L_e + L_i)\,\delta\omega_x|\,ds\\
&+ \int (\mathfrak{R}_u\,\delta ds + |\mathfrak{C}_x\,d\delta\omega_x|)\\
&+ \int |\mathfrak{R}_x(d\delta x + dy\,\delta\omega_z - dz\,\delta\omega_y - \alpha\,\delta ds)| = 0,\end{aligned}$$

égalité qui, par intégrations par parties, s'écrit encore

$$\begin{aligned}&|(X_1 - \mathfrak{R}_{x1})\,\delta x_1 + (L_1 - \mathfrak{C}_{x1})\,\delta\omega_{x1}|\\
&+ |(X_2 + \mathfrak{R}_{x2})\,\delta x_2 + (L_2 + \mathfrak{C}_{x2})\,\delta\omega_{x2}|\\
&+ \int |[(X_e + X_i)\,ds - d\mathfrak{R}_x]\,\delta x\\
&\qquad + [(L_e + L_i)\,ds - d\mathfrak{C}_x + \mathfrak{R}_y\,dz - \mathfrak{R}_z\,dy]\,\delta\omega_x|\\
&+ \int (\mathfrak{R}_u - |\alpha\mathfrak{R}_x|)\,\delta ds = 0.\end{aligned}$$

C'est exactement là l'équation (38) avec la dernière ligne en plus; nous retrouvons donc les mêmes équations (39), (40), (41) que pour la ligne à six paramètres, ce qui était du reste à prévoir, puisque nous avons reconnu que ces équations sont indépendantes de la considération du trièdre mobile (n° 8). Nous avons, en outre, les trois dernières lignes de (42) résultant de (130); quant aux trois premières, elles sont remplacées par la seule égalité

$$(131) \qquad \alpha\mathcal{R}_x + \beta\mathcal{R}_y + \gamma\mathcal{R}_z = -(f'\delta + \mathrm{F})$$

résultant de la première (130). Nous avons donc deux équations de moins que dans le cas général, mais aussi deux inconnues de moins, puisque la ligne est à quatre paramètres au lieu de six.

Il est d'ailleurs facile d'éliminer les trois inconnues auxiliaires $\mathcal{R}_x$, $\mathcal{R}_y$, $\mathcal{R}_z$; on déduit, en effet, des trois dernières (41) et de (131)

$$\mathcal{R}_x = \alpha\mathcal{R}_u - \beta\left(\mathrm{N}_e + \mathrm{N}_i - \frac{d\mathcal{C}_z}{ds}\right) + \gamma\left(\mathrm{M}_e + \mathrm{M}_i - \frac{d\mathcal{C}_y}{ds}\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

d'où, en substituant dans les trois premières (41),

$$(132)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\left[\alpha\mathcal{R}_u - \beta\left(\mathrm{N}_e + \mathrm{N}_i - \frac{d\mathcal{C}_z}{ds}\right) + \gamma\left(\mathrm{M}_e + \mathrm{M}_i - \frac{d\mathcal{C}_y}{ds}\right)\right] = \mathrm{X}_e + \mathrm{X}_i,\\
&\frac{d}{ds}\left[\beta\mathcal{R}_u - \gamma\left(\mathrm{L}_e + \mathrm{L}_i - \frac{d\mathcal{C}_x}{ds}\right) + \alpha\left(\mathrm{N}_e + \mathrm{N}_i - \frac{d\mathcal{C}_z}{ds}\right)\right] = \mathrm{Y}_e + \mathrm{Y}_i,\\
&\frac{d}{ds}\left[\gamma\mathcal{R}_u - \alpha\left(\mathrm{M}_e + \mathrm{M}_i - \frac{d\mathcal{C}_y}{ds}\right) + \beta\left(\mathrm{L}_e + \mathrm{L}_i - \frac{d\mathcal{C}_x}{ds}\right)\right] = \mathrm{Z}_e + \mathrm{Z}_i.
\end{aligned}\right.$$

Les trois dernières (41) multipliées respectivement par α, β, γ, puis ajoutées membre à membre, donnent en outre

$$(133)\quad \alpha\left(\mathrm{L}_e + \mathrm{L}_i - \frac{d\mathcal{C}_x}{ds}\right) + \beta\left(\mathrm{M}_e + \mathrm{M}_i - \frac{d\mathcal{C}_y}{ds}\right) + \gamma\left(\mathrm{N}_e + \mathrm{N}_i - \frac{d\mathcal{C}_z}{ds}\right) = 0.$$

Les fonctions $\mathcal{R}_u$, $\mathcal{C}_x$, $\mathcal{C}_y$, $\mathcal{C}_z$ étant supposées remplacées par leurs valeurs (130) et (42), les égalités (132) et (133) constituent quatre équations indéfinies entre les six fonctions inconnues principales x, y, z, φ, ρ, T. L'interprétation des fonctions $\mathcal{R}_x$, $\mathcal{R}_y$, ..., $\mathcal{C}_z$ demeure évidemment la même que précédemment (n° 7); les équations (132) et (133) correspondent à celles qui ont été données notamment par Thomson-Tait (¹) et MM. Cosserat (²).

28. Équations intrinsèques et relation supplémentaire. — L'expression (129) s'écrit encore, d'après (128) et (17),

$$\delta\mathcal{E}_r - \delta_T\mathcal{F} = \int\left[\mathcal{R}_u\left(\frac{d\delta u}{d\omega} + q\delta w - r\delta v\right) + \left|\mathcal{C}_u\left(\frac{d\delta\omega_u}{d\omega} + q\delta\omega_w - r\delta\omega_v\right)\right|\right]d\omega,$$

de sorte que l'équation fondamentale (35) devient, d'après (44),

$$\begin{aligned}&|\mathcal{X}_1\delta u_1 + \mathcal{L}_1\delta\omega_{u1}| + |\mathcal{X}_2\delta u_2 + \mathcal{L}_2\delta\omega_{u2}|\\ &+\int|(\mathcal{X}_e + \mathcal{X}_i)\delta u + (\mathcal{L}_e + \mathcal{L}_i)\delta\omega_u|\,d\omega\\ &+\int\left[\mathcal{R}_u\left(\frac{d\delta u}{d\omega} + q\delta w - r\delta v\right)\right.\\ &\qquad\left.+\left|\mathcal{C}_u\left(\frac{d\delta\omega_u}{d\omega} + q\delta\omega_w - r\delta\omega_v\right)\right|\right]d\omega = 0\end{aligned}$$

et doit être vérifiée pour toutes les variations δu, δv, ..., $\delta\omega_w$ vérifiant les deux dernières égalités (128); il doit donc, d'après les principes du calcul des variations, exister deux fonctions $\mathcal{R}_v$, $\mathcal{R}_w$, telles qu'on ait, quelles que soient ces six variations,

$$\begin{aligned}&|\mathcal{X}_1\delta u_1 + \mathcal{L}_1\delta\omega_{u1}| + |\mathcal{X}_2\delta u_2 + \mathcal{L}_2\delta\omega_{u2}|\\ &+\int|(\mathcal{X}_e + \mathcal{X}_i)\delta u + (\mathcal{L}_e + \mathcal{L}_i)\delta\omega_u|\,d\omega\\ &+\int\left\{\mathcal{R}_u\left(\frac{d\delta u}{d\omega} + q\delta w - r\delta v\right)\right.\\ &\qquad+\mathcal{R}_v\left[\frac{d\delta v}{d\omega} + r\delta u - p\delta w - (1+\partial)\delta\omega_w\right]\\ &\qquad+\mathcal{R}_w\left[\frac{d\delta w}{d\omega} + p\delta v - q\delta u + (1+\partial)\delta\omega_v\right]\\ &\qquad\left.+\left|\mathcal{C}_u\left(\frac{d\delta\omega_u}{d\omega} + q\delta\omega_w - r\delta\omega_v\right)\right|\right\}d\omega = 0.\end{aligned}$$

(¹) THOMSON et TAIT, *Treatise on natural philosophy*, vol. I, Part. II, § 614.
(²) E. et F. COSSERAT, *Théorie des corps déformables*, p. 42.

Cette égalité s'écrit encore, par intégrations par parties,

$$
\begin{aligned}
&|(\mathcal{X}_1 - \mathcal{R}_{u1})\,\delta u_1 + (\mathcal{L}_1 - \mathcal{C}_{u1})\,\delta\omega_{u1}| \\
&+ |(\mathcal{X}_2 + \mathcal{R}_{u2})\,\delta u_2 + (\mathcal{L}_2 + \mathcal{C}_{u2})\,\delta\omega_{u2}| \\
&+ \int \Bigg\{ \left| \left(\mathcal{X}_e + \mathcal{X}_i - \frac{\partial \mathcal{R}_u}{\partial \omega} - q\mathcal{R}_w + r\mathcal{R}_v \right) \delta u \right| \\
&\qquad + \left(\mathcal{L}_e + \mathcal{L}_i - \frac{\partial \mathcal{C}_u}{\partial \omega} - q\,\mathcal{C}_w + r\,\mathcal{C}_v \right) \delta\omega_u \\
&\qquad + \left[\mathcal{M}_e + \mathcal{M}_i - \frac{\partial \mathcal{C}_v}{\partial \omega} - r\,\mathcal{C}_u + p\,\mathcal{C}_w + (1+\delta)\,\mathcal{R}_w \right] \delta\omega_v \\
&\qquad + \left[\mathcal{N}_e + \mathcal{N}_i - \frac{\partial \mathcal{C}_w}{\partial \omega} - p\,\mathcal{C}_v + q\,\mathcal{C}_u - (1+\delta)\,\mathcal{R}_v \right] \delta\omega_w \Bigg\} d\omega = 0.
\end{aligned}
$$

De là, les équations intrinsèques : les conditions aux limites (45), (46) déjà obtenues et les six équations indéfinies

$$
(134)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{R}_u}{\partial \omega} + q\mathcal{R}_w - r\mathcal{R}_v = \mathcal{X}_e + \mathcal{X}_i, \\
&\frac{\partial \mathcal{R}_v}{\partial \omega} + r\mathcal{R}_u - p\mathcal{R}_w = \mathcal{Y}_e + \mathcal{Y}_i, \\
&\frac{\partial \mathcal{R}_w}{\partial \omega} + p\mathcal{R}_v - q\mathcal{R}_u = \mathcal{Z}_e + \mathcal{Z}_i; \\
&\frac{\partial \mathcal{C}_u}{\partial \omega} + q\,\mathcal{C}_w - r\,\mathcal{C}_v = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_i, \\
&\frac{\partial \mathcal{C}_v}{\partial \omega} + r\,\mathcal{C}_u - p\,\mathcal{C}_w - (1+\delta)\,\mathcal{R}_w = \mathcal{M}_e + \mathcal{M}_i, \\
&\frac{\partial \mathcal{C}_w}{\partial \omega} + p\,\mathcal{C}_v - q\,\mathcal{C}_u + (1+\delta)\,\mathcal{R}_v = \mathcal{N}_e + \mathcal{N}_i,
\end{aligned}
\right.
$$

auxquelles on doit adjoindre les équations (130) et où $\mathcal{R}_v$, $\mathcal{R}_w$ sont deux inconnues auxiliaires. On voit qu'elles coïncident avec les équations (47) où l'on fait $(\eta, \zeta) = 0$. Les expressions des forces d'inertie (n° 10) restent les mêmes, le tronçon de ligne étant ici le feuillet d'épaisseur ds compris entre les plans infiniment voisins Mvw, $M'v'w'$; les rayons de giration A, B, C, qui figurent dans les formules (49), sont ainsi relatifs à la section droite de la ligne, les axes Mv, Mw étant ses axes centraux d'inertie; on a donc ici $A^2 = B^2 + C^2$.

Enfin, la relation supplémentaire (53) devient

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{K}{1+\delta}\frac{\partial T}{\partial \omega}\right) - k(1+\delta)(T - T_e)$$
$$+ \frac{T}{\mathbf{E}}\left(f''_{T\delta}\frac{\partial \delta}{\partial t} + f''_{Tp}\frac{\partial p}{\partial t} + f''_{Tq}\frac{\partial q}{\partial t} + f''_{Tr}\frac{\partial r}{\partial t}\right) + \frac{2\mathfrak{D}}{\mathbf{E}},$$

la fonction dissipative $\mathfrak{D}$ se réduisant ici à une forme quadratique définie positive des quatre dérivées par rapport au temps $\dot{\delta}$, $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$.

29. Potentiel thermodynamique interne. — Tout d'abord, les équations (60) deviennent ici

$$\frac{\partial U}{\partial u} = \delta + (q - q_0)\,w - (r - r_0)\,v,$$
$$\frac{\partial V}{\partial u} = (r - r_0)\,u - (p - p_0)\,w,$$
$$\frac{\partial W}{\partial u} = (p - p_0)\,v - (q - q_0)\,u$$

et donnent, en intégrant,

$$U = \delta u + (q - q_0)\,wu - (r - r_0)\,uv + \mathfrak{U},$$
$$V = (r - r_0)\frac{u^2}{2} - (p - p_0)\,wu + \mathfrak{V},$$
$$W = (p - p_0)\,uv - (q - q_0)\frac{u^2}{2} + \mathfrak{W},$$

$\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ étant trois fonctions arbitraires de v, w. Il en résulte que les six déformations, limitées à leurs termes du premier ordre, ont pour expressions

$$(135)\qquad \begin{cases} \delta_1 = \delta + (q - q_0)\,w - (r - r_0)\,v, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ g_2 = (p - p_0)\,v + \dfrac{\partial \mathfrak{U}}{\partial w}, \\ g_3 = -(p - p_0)\,w + \dfrac{\partial \mathfrak{U}}{\partial v} \end{cases}$$

et l'on voit qu'elles sont indépendantes de u.

Nous avons, au n° 13 et à titre de simple indication, fait le calcul du potentiel thermodynamique interne linéaire f de la ligne à six paramètres, en faisant abstraction des fonctions $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$. Nous allons ici faire le calcul de f en tâchant d'en tenir compte, c'est-à-dire en suivant, faute de mieux, la méthode de Kirchhoff.

Supposons que chaque section droite mvw de la ligne soit un plan de symétrie de contexture; dans ces conditions, le potentiel thermodynamique interne par unité de volume est de la forme

$$\begin{aligned}\Phi = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1\delta_1 + \mathcal{A}_2\delta_2 + \mathcal{A}_3\delta_3 + \mathcal{A}_4 g_1 \\ + \psi_1(\delta_1, \delta_2, \delta_3, g_1) + \psi_2(g_2, g_3),\end{aligned} \tag{136}$$

ψ_1 et ψ_2 étant des formes quadratiques des déformations indiquées, soit

$$\left\{\begin{aligned}\psi_1 = \left(\frac{\mathcal{A}_{11}}{2}\delta_1 + \mathcal{A}_{12}\delta_2 + \mathcal{A}_{13}\delta_3 + \mathcal{A}_{14}g_1\right)\delta_1 \\ + \left(\frac{\mathcal{A}_{22}}{2}\delta_2 + \mathcal{A}_{23}\delta_3 + \mathcal{A}_{24}g_1\right)\delta_2 \\ + \left(\frac{\mathcal{A}_{33}}{2}\delta_3 + \mathcal{A}_{34}g_1\right)\delta_3 + \frac{\mathcal{A}_{44}}{2}g_1^2. \\ 2\psi_2 = \mathcal{A}_{55}g_2^2 + 2\mathcal{A}_{56}g_2 g_3 + \mathcal{A}_{66}g_3^2,\end{aligned}\right. \tag{137}$$

les coefficients d'élasticité $\mathcal{A}_{ii}$ du n° 13 étant ici désignés par $\dfrac{\mathcal{A}_{ii}}{2}$.

Soient, d'autre part, N_1, N_2, N_3; T_1, T_2, T_3 les composantes de la pression relatives aux axes $muvw$; on sait qu'on a

$$N_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial\delta_1} = \mathcal{A}_1 + \frac{\partial\psi_1}{\partial\delta_1}, \ldots, T_3 = \frac{\partial\Phi}{\partial g_3} = \frac{\partial\psi_2}{\partial g_3}, \tag{138}$$

ce qui permet d'écrire

$$2\Phi = N_1\delta_1 + N_2\delta_2 + \ldots + T_3 g_3 + 2\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1\delta_1 + \mathcal{A}_2\delta_2 + \mathcal{A}_3\delta_3 + \mathcal{A}_4 g_1.$$

Cela posé, le potentiel thermodynamique $fd\omega$ de l'élément de ligne MM' est donné par l'égalité

$$fd\omega = \int \Phi\, d\varpi,$$

l'intégrale étant étendue au volume $\varpi = S d\omega$ constitué par le tronçon de ligne dans son état primitif et les coefficients $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}_{ij}$, fonctions de ω, T, devant être traités dans l'intégration comme des constantes.

On a donc

$$(139)\quad 2f = \int (N_1\delta_1 + N_2\delta_2 + \ldots + T_3 g_3 + 2\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1\delta_1 + \mathcal{A}_2\delta_2 + \mathcal{A}_3\delta_3 + \mathcal{A}_4 g_4)\, dS$$

l'intégration étant étendue à la section droite primitive de la ligne dans le plan *mvw*. En convenant de nous limiter au cas d'une très petite variation de température θ par rapport à l'état primitif, nous savons que les coefficients $\mathcal{A}_i$ sont très petits de l'ordre de θ ; il nous suffit donc ici de limiter les déformations à leurs termes du premier ordre, c'est-à-dire d'employer les formules (135) même pour la partie linéaire de (139).

L'hypothèse faite par Kirchhoff et ses successeurs, que nous avons critiquée dans l'Introduction, consiste alors à calculer l'intégrale (139) en appliquant au tronçon de ligne les équations de l'équilibre élastique, *dans l'hypothèse de forces extérieures nulles*. Ce calcul ayant déjà été fait par d'autres auteurs, du moins dans le cas d'une température constante, nous nous bornerons à de brèves indications (¹).

Les déformations δ_i, g_i étant indépendantes de u, il en est de même, d'après (138), des six composantes de pression, de sorte que les équations d'équilibre s'écrivent

$$(140)\qquad \frac{\partial T_3}{\partial v} + \frac{\partial T_2}{\partial w} = 0, \qquad \frac{\partial N_2}{\partial v} + \frac{\partial T_1}{\partial w} = 0, \qquad \frac{\partial T_1}{\partial v} + \frac{\partial N_3}{\partial w} = 0,$$

avec, comme conditions aux limites sur le contour de S,

$$(141)\qquad \beta T_3 + \gamma T_2 = 0, \qquad \beta N_2 + \gamma T_1 = 0, \qquad \beta T_1 + \gamma N_3 = 0,$$

β, γ étant les cosinus directeurs d'une demi-normale au contour dans le plan *mvw* et par rapport aux axes *mv*, *mw*.

Tout d'abord, la première équation (140) s'écrit, d'après (135), (136), (137) et (138),

$$\mathcal{A}_{66}\frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial v^2} + 2\mathcal{A}_{56}\frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial v\,\partial w} + \mathcal{A}_{55}\frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial w^2} = 0,$$

avec comme condition au contour, d'après la première (141),

$$\begin{aligned}\beta\left\{\mathcal{A}_{56}\left[(p-p_0)v + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial w}\right] + \mathcal{A}_{66}\left[-(p-p_0)w + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial v}\right]\right\}&\\ + \gamma\left\{\mathcal{A}_{55}\left[(p-p_0)v + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial w}\right] + \mathcal{A}_{56}\left[-(p-p_0)w + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial v}\right]\right\} &= 0.\end{aligned}$$

Ces équations déterminent la fonction $\mathfrak{U}$, et l'on voit qu'elle est proportion-

(¹) A. LOVE, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 1re éd., vol. II, p. 96.

nelle à $p - p_0$. Il en est donc de même de g_2, g_3 d'après (135), de sorte qu'on peut écrire

$$(142)\qquad \int (T_2 g_2 + T_3 g_3)\, dS = S\mathcal{G}(p - p_0)^2,$$

la quantité $\mathcal{G}$, qui dépend de la forme de la section, étant homogène au produit d'un coefficient d'élasticité par le carré d'une longueur, c'est-à-dire à une force.

On démontre ensuite [1] que les équations restantes (140) et (141), jointes à l'expression (135) de ∂_1, entraînent les conditions de Saint-Venant

$$(143)\qquad (N_2, N_3, T_1) = 0,$$

de sorte que les quatre premières égalités (138) s'écrivent, d'après (136), (137) et (138),

$$(144)\qquad \begin{cases} \mathcal{A}_{11}\partial_1 + \mathcal{A}_{12}\partial_2 + \mathcal{A}_{13}\partial_3 + \mathcal{A}_{14}g_1 + \mathcal{A}_1 = N_1, \\ \mathcal{A}_{21}\partial_1 + \mathcal{A}_{22}\partial_2 + \mathcal{A}_{23}\partial_3 + \mathcal{A}_{24}g_1 + \mathcal{A}_2 = 0, \\ \mathcal{A}_{31}\partial_1 + \mathcal{A}_{32}\partial_2 + \mathcal{A}_{33}\partial_3 + \mathcal{A}_{34}g_1 + \mathcal{A}_3 = 0, \\ \mathcal{A}_{41}\partial_1 + \mathcal{A}_{42}\partial_2 + \mathcal{A}_{43}\partial_3 + \mathcal{A}_{44}g_1 + \mathcal{A}_4 = 0. \end{cases}$$

Elles déterminent les quatre déformations qui y figurent en fonction linéaire de N_1; on en déduit en particulier

$$(145)\qquad N_1 = \mathcal{E}\partial_1 + F,$$

$\mathcal{E}$ désignant le module de Young de la ligne suivant son axe longitudinal et F un autre coefficient d'élasticité. D'autre part, les trois dernières équations (144) déterminent ∂_2, ∂_3, g_1 en fonctions linéaires de ∂_1; si donc on remplace ces trois déformations par leurs valeurs ainsi obtenues dans la partie linéaire de (139), cette égalité s'écrit, d'après (142), (143) et (145),

$$2f = S\mathcal{G}(p - p_0)^2 + \int (\mathcal{E}\partial_1^2 + 2\mathcal{F}\partial_1 + \mathcal{H})\, dS,$$

$\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ désignant deux coefficients d'élasticité faciles à calculer en fonction des $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{A}_{ij}$. Remplaçons enfin ∂_1 par sa valeur (135); les axes *mvw* étant les axes centraux d'inertie de la section S, on a

$$\int (v, w, vw)\, dS = 0, \qquad \int (v^2, w^2)\, dS = (C^2, B^2)\, S,$$

---

[1] A. LOVE, *loc. cit.*, pp. 96 à 98.

B et C étant les rayons de giration de S par rapport à ses axes centraux d'inertie, de sorte qu'il vient finalement

$$(146) \qquad 2\frac{f}{S} = \mathcal{H} + 2\mathcal{F}\partial + \mathcal{E}[\partial^2 + B^2(q - q_0)^2 + C^2(r - r_0)^2] + \mathcal{G}(p - p_0)^2.$$

Si nous avions fait le calcul de f en procédant comme au n° 13, c'est-à-dire en faisant abstraction des fonctions $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$, nous aurions trouvé, dans le cas d'une contexture quelconque et sans supposer θ très petit,

$$(147) \qquad \begin{aligned} 2\frac{f}{S} = {} & 2\mathcal{A}_0 + 2\mathcal{A}_1\partial + (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_{11})[\partial^2 + B^2(q - q_0)^2 + C^2(r - r_0)^2] \\ & + [\mathcal{A}_1(B^2 + C^2) + \mathcal{A}_{66}B^2 + \mathcal{A}_{55}C^2](p - p_0)^2 \\ & - 2[\mathcal{A}_{16}B^2(q - q_0) + \mathcal{A}_{15}C^2(r - r_0)](p - p_0). \end{aligned}$$

On voit que ce résultat a la même forme que le précédent (146), puisque celui-ci suppose $(\mathcal{A}_{15}, \mathcal{A}_{16}) = 0$; la différence ne porte que sur la valeur des nouveaux coefficients d'élasticité $\mathcal{G}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ en fonction des anciens. Il est donc possible que l'expression douteuse (66) relative à la ligne à six paramètres fasse connaître la forme effective de la fonction f.

Dans le cas particulier d'un milieu isotrope, en a

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_3 = -\nu, && \mathcal{A}_{11} = \mathcal{A}_{22} = \mathcal{A}_{33} = \lambda + 2\mu, \\ &\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{23} = \mathcal{A}_{13} = \lambda, && \mathcal{A}_{44} = \mathcal{A}_{55} = \mathcal{A}_{66} = \mu, \end{aligned}$$

tous les autres coefficients $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{A}_{ij}$ étant nuls, sauf $\mathcal{A}_0$; de sorte que les équations (144) deviennent

$$\begin{aligned} \lambda\Theta + 2\mu\partial_1 - \nu &= N_1, \\ \lambda\Theta + 2\mu\partial_2 - \nu &= 0, \\ \lambda\Theta + 2\mu\partial_3 - \nu &= 0, \\ g_1 &= 0, \end{aligned}$$

$\Theta = \partial_1 + \partial_2 + \partial_3$ désignant la dilatation cubique. On en déduit

$$\begin{aligned} N_1 &= \mu\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\partial_1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu}\nu, \\ (\lambda + \mu)\Theta &= \mu\partial_1 + \nu \end{aligned}$$

et l'on trouve ainsi que les coefficients $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ ont pour valeurs

$$(148) \qquad \mathcal{E} = \mu\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \qquad \mathcal{F} = -\frac{\mu}{\lambda + \mu}\nu, \qquad \mathcal{H} = 2\mathcal{A}_0 - \frac{\nu^2}{\lambda + \mu}.$$

D'après la formule (147), on aurait

$$\begin{array}{lll} \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_{11} = \lambda + 2\mu - \nu & \text{à la place de} & \mathcal{E}, \\ \mathcal{A}_1 = -\nu & \quad » \quad » & \mathcal{F}, \\ 2\mathcal{A}_0 & \quad » \quad » & \mathcal{H}. \end{array}$$

On voit que $2\mathcal{A}_0$ coïncide sensiblement avec $\mathcal{H}$, car le second terme de $\mathcal{H}$ est négligeable vis-à-vis de $2\mathcal{A}_0$ comme étant de l'ordre de θ^2. La présence de ν dans $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_{11}$ tient à ce que la formule (147) ne suppose pas la température θ très petite; mais, si θ est très petit comme le suppose l'expression (146), ν est de l'ordre de θ, donc négligeable vis-à-vis de $\lambda + 2\mu$. Cette valeur $\lambda + 2\mu$ que donne ainsi la formule (147) pour le module de Young était d'ailleurs à prévoir, puisque les formules (135) débarrassées des fonctions $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ donnent $(\delta_2, \delta_3) = 0$ pour $u = 0$, c'est-à-dire dans la section droite de la ligne; elles ne tiennent donc pas compte de la contraction transversale corrélative de la dilatation longitudinale. Or, on a

$$\lambda + 2\mu - \mu\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda^2}{\lambda + \mu} = 2\lambda\sigma,$$

σ désignant le coefficient de Poisson; les deux modules coïncideraient donc pour $\sigma = 0$, c'est-à-dire si l'on faisait abstraction de la contraction transversale.

Remarquons enfin que, par suite de la petitesse de θ que suppose la formule (146), on a sensiblement

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}'\theta, \quad \text{avec} \quad \mathcal{F}' = \left(\frac{d\mathcal{F}}{dT}\right)_{T=T_0};$$

nous avons alors, d'après (146),

$$(149) \qquad \begin{cases} f''_{\delta^2} = \mathcal{E}S, \qquad f''_{p^2} = \mathcal{G}S, \qquad f''_{(q^2,\, r^2)} = \mathcal{E}(B^2, C^2)S, \\ f''_{T\delta} = \mathcal{F}'S, \end{cases}$$

toutes les autres dérivées secondes de f étant nulles. En particulier on a, pour une substance isotrope et d'après la deuxième (148),

$$\mathcal{F}' = -\frac{\mu}{\lambda + \mu}\nu', \quad \text{avec} \quad \nu = \left(\frac{d\nu}{dT}\right)_{T=T_0}.$$

30. Fonction dissipative. — On sait qu'on passe du potentiel thermodynamique interne à la fonction dissipative relative au même milieu en réduisant le potentiel à ses termes du second degré par rapport aux déformations et en remplaçant chaque déformation par sa dérivée par rapport au temps et chaque coefficient d'élasticité par le coefficient de viscosité correspondant. La fonction dissipative $\mathfrak{D}$ correspondant à l'expression (146) de f est ainsi

$$2\frac{\mathfrak{D}}{S} = e(\dot{\partial}^2 + B^2\dot{q}^2 + C^2\dot{r}^2) + g\dot{p}^2, \tag{150}$$

e et g étant les deux coefficients de viscosité de la ligne et le second dépendant, de la même manière que $\mathcal{C}_t$, de la forme de la section. En particulier, pour une substance isotrope, on a

$$e = M\frac{3\Lambda + 2M}{\Lambda + M},$$

formule analogue à la première (148), où Λ et M désignent les deux coefficients de viscosité de la substance.

L'égalité (150) nous donne

$$\mathfrak{D}''_{\dot{\partial}^2} = eS, \qquad \mathfrak{D}''_{\dot{p}^2} = gS, \qquad \mathfrak{D}''_{(\dot{q}^2, \dot{r}^2)} = e(B^2, C^2)\,S, \tag{151}$$

toutes les autres dérivées secondes de $\mathfrak{D}$ étant nulles.

31. Équations des petits mouvements. — En procédant comme au n° 16, les équations (68) des petits mouvements s'écrivent ici

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\delta\mathcal{R}_u}{\partial\omega} + q\delta\mathcal{R}_w - r\delta\mathcal{R}_v + \mathcal{R}_w\delta q - \mathcal{R}_v\delta r = \delta\mathcal{X}_e + \delta\mathcal{X}_i,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial\delta\mathcal{C}_u}{\partial\omega} + q\delta\mathcal{C}_w - r\delta\mathcal{C}_v + \mathcal{C}_w\delta q - \mathcal{C}_v\delta r = \delta\mathcal{L}_e + \delta\mathcal{L}_i,\\
&\frac{\partial\delta\mathcal{C}_v}{\partial\omega} + r\delta\mathcal{C}_u - p\delta\mathcal{C}_w + \mathcal{C}_u\delta r - \mathcal{C}_w\delta p - \delta\mathcal{R}_w - \mathcal{R}_w\delta\partial = \delta\mathcal{M}_e + \delta\mathcal{M}_i,\\
&\frac{\partial\delta\mathcal{C}_w}{\partial\omega} + p\delta\mathcal{C}_v - q\delta\mathcal{C}_u + \mathcal{C}_v\delta p - \mathcal{C}_u\delta q + \delta\mathcal{R}_v + \mathcal{R}_v\delta\partial = \delta\mathcal{N}_e + \delta\mathcal{N}_i,
\end{aligned}\right. \tag{152}$$

car, dans les deux dernières, nous pouvons, d'après (125), remplacer ξ par l'unité, puisque les termes $\partial\delta\mathcal{R}_w$ et $\partial\delta\mathcal{R}_v$ seraient du second ordre ; nous avons, en outre, les mêmes conditions aux limites (69), (70) que précédemment.

Cela posé, les égalités (77) deviennent, d'après (125), (126) et en remplaçant encore ξ par l'unité dans les deux dernières,

$$
(153) \qquad \left\{ \begin{aligned}
\delta\partial &= \frac{\partial u}{\partial \omega} + qw - rv, \\
0 &= \frac{\partial v}{\partial \omega} + ru - pw - n, \\
0 &= \frac{\partial w}{\partial \omega} + pv - qu + m.
\end{aligned} \right.
$$

Le déplacement infiniment petit de la ligne autour de sa position d'équilibre ne dépend donc plus ici que des quatre paramètres géométriques u, v, w, l, puisque m et n sont donnés par les deux dernières (153). Moyennant ces simplifications, le calcul s'achève comme précédemment, les variations $\delta(p, q, r;\ \mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, \mathcal{Z}_i;\ \mathcal{L}_i, \mathcal{M}_i, \mathcal{N}_i)$ restant données par (79), (80), (81). Nous avons d'autre part, d'après (130),

$$
(154) \qquad \left\{ \begin{aligned}
-\delta\mathcal{R}_u = {} & f''_{\partial^2}\delta\partial + f''_{\partial p}\delta p + f''_{\partial q}\delta q + f''_{\partial r}\delta r + f''_{\partial \mathrm{T}}\theta \\
& + \mathcal{D}''_{\dot{\partial}^2}\delta\dot{\partial} + \mathcal{D}''_{\dot{\partial}\dot{p}}\delta\dot{p} + \mathcal{D}''_{\dot{\partial}\dot{q}}\delta\dot{q} + \mathcal{D}''_{\dot{\partial}\dot{r}}\delta\dot{r}, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned} \right.
$$

les variations $\delta(\mathcal{R}_r, \mathcal{R}_w)$ étant ici des inconnues auxiliaires, et la relation supplémentaire (84) devient

$$
(155) \qquad c\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\mathrm{K}\frac{\partial \theta}{\partial \omega}\right) - k\theta + \frac{\mathrm{T}_0}{\mathbf{E}}\left(f''_{\mathrm{T}\partial}\delta\dot{\partial} + |f''_{\mathrm{T}p}\delta\dot{p}|\right).
$$

Enfin, la formule (88) qui fait connaître la variation de la densité se réduit à

$$
\delta\rho + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial \omega} + qw - rv\right) = 0.
$$

32. Cas d'une ligne homogène, prismatique droite à l'état naturel. — Si, dans son état naturel, la ligne est homogène prismatique droite, les équations précédentes comportent de très grandes simplifications. Tout d'abord, p_0, q_0, r_0 étant nuls, p, q, r sont très petits, puisqu'ils représentent trois des déformations dans l'état d'équilibre. On peut donc négliger dans (152) les termes en $q\delta\mathcal{R}_w$, $r\delta\mathcal{R}_r$, ..., qui sont du second ordre; il vient ainsi, en supposant pour simplifier $\delta(\mathcal{X}_e, \mathcal{Y}_e, \ldots, \mathcal{N}_e) = 0$,

$$(156)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\delta\mathcal{R}_u}{\partial\omega} + \mathcal{R}_w\delta q - \mathcal{R}_v\delta r = \delta\mathfrak{X}_i,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{\partial\delta\mathcal{C}_w}{\partial\omega} + \mathcal{C}_v\delta p - \mathcal{C}_u\delta q + \delta\mathcal{R}_v + \mathcal{R}_v\delta\vartheta = \delta\mathfrak{N}_i,\end{array}\right.$$

avec, d'après (153), (79), (81) et en ne conservant que les termes du premier ordre,

$$\delta\vartheta = \frac{\partial u}{\partial\omega},\qquad \delta p = \frac{\partial l}{\partial\omega},\qquad \delta q = \frac{\partial m}{\partial\omega} = -\frac{\partial^2 w}{\partial\omega^2},\qquad \delta r = \frac{\partial n}{\partial\omega} = \frac{\partial^2 v}{\partial\omega^2};$$

$$\delta\mathfrak{L}_i = -\rho_0 A^2\frac{\partial^2 l}{\partial t^2},\qquad \delta\mathfrak{M}_i = \rho_0 B^2\frac{\partial^3 w}{\partial\omega\,\partial t^2},\qquad \delta\mathfrak{N}_i = -\rho_0 C^2\frac{\partial^3 v}{\partial\omega\,\partial t^2}.$$

D'autre part, les égalités (154) deviennent, d'après (149) et (151), c'est-à-dire en admettant que chaque section droite de la ligne soit un plan de symétrie de contexture,

$$(157)\qquad \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\delta\mathcal{R}_u}{S} = \mathcal{E}\delta\vartheta + \mathcal{F}'\theta + e\delta\dot\vartheta = \mathcal{E}\dfrac{\partial u}{\partial\omega} + \mathcal{F}'\theta + e\dfrac{\partial^2 u}{\partial\omega\,\partial t},\\ -\dfrac{\delta\mathcal{C}_u}{S} = \mathcal{G}\delta p + g\delta\dot p = \mathcal{G}\dfrac{\partial l}{\partial\omega} + g\dfrac{\partial^2 l}{\partial\omega\,\partial t},\\ -\dfrac{\delta\mathcal{C}_v}{S} = B^2(\mathcal{E}\delta q + e\delta\dot q) = -B^2\left(\mathcal{E}\dfrac{\partial^2 w}{\partial\omega^2} + e\dfrac{\partial^3 w}{\partial\omega^2\partial t}\right),\\ -\dfrac{\delta\mathcal{C}_w}{S} = C^2(\mathcal{E}\delta r + e\delta\dot r) = C^2\left(\mathcal{E}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\omega^2} + e\dfrac{\partial^3 v}{\partial\omega^2\partial t}\right).\end{array}\right.$$

Les équations (156) des petits mouvements sont ainsi

$$(158)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial\omega}S\left(\mathcal{E}\dfrac{\partial u}{\partial\omega} + \mathcal{F}'\theta + e\dfrac{\partial^2 u}{\partial\omega\,\partial t}\right) + \mathcal{R}_v\dfrac{\partial^2 v}{\partial\omega^2} + \mathcal{R}_w\dfrac{\partial^2 w}{\partial\omega^2} = \rho_0\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\ \dfrac{\partial\delta\mathcal{R}_v}{\partial\omega} + \mathcal{R}_u\dfrac{\partial^2 v}{\partial\omega^2} - \mathcal{R}_w\dfrac{\partial l}{\partial\omega} = -\rho_0\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2},\\ \dfrac{\partial\delta\mathcal{R}_w}{\partial\omega} + \mathcal{R}_v\dfrac{\partial l}{\partial\omega} + \mathcal{R}_u\dfrac{\partial^2 w}{\partial\omega^2} = -\rho_0\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2};\\ \dfrac{\partial}{\partial\omega}S\left(\mathcal{G}\dfrac{\partial l}{\partial\omega} + g\dfrac{\partial^2 l}{\partial\omega\,\partial t}\right) + \mathcal{C}_v\dfrac{\partial^2 v}{\partial\omega^2} + \mathcal{C}_w\dfrac{\partial^2 w}{\partial\omega^2} = \rho_0 A^2\dfrac{\partial^2 l}{\partial t^2},\\ \dfrac{\partial}{\partial\omega}SB^2\left(\mathcal{E}\dfrac{\partial^2 w}{\partial\omega^2} + e\dfrac{\partial^3 w}{\partial\omega^2\partial t}\right) + \mathcal{C}_u\dfrac{\partial^2 v}{\partial\omega^2} - \mathcal{C}_w\dfrac{\partial l}{\partial\omega} - \delta\mathcal{R}_w - \mathcal{R}_w\dfrac{\partial u}{\partial\omega} = \rho_0 B^2\dfrac{\partial^3 w}{\partial\omega\,\partial t^2},\\ \dfrac{\partial}{\partial\omega}SC^2\left(\mathcal{E}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\omega^2} + e\dfrac{\partial^3 v}{\partial\omega^2\partial t}\right) - \mathcal{C}_v\dfrac{\partial l}{\partial\omega} - \mathcal{C}_u\dfrac{\partial^2 w}{\partial\omega^2} - \delta\mathcal{R}_v - \mathcal{R}_v\dfrac{\partial u}{\partial\omega} = \rho_0 C^2\dfrac{\partial^3 v}{\partial\omega\,\partial t^2}.\end{array}\right.$$

Ces équations ne supposent pas encore que la ligne soit homogène et de section constante; faisons maintenant cette hypothèse, afin de simplifier l'écriture. En éliminant les inconnues auxiliaires $\delta\mathcal{R}_v$, $\delta\mathcal{R}_w$, il vient en définitive

$$
(159)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathcal{E}\frac{\partial^2 u}{\partial\omega^2}+\mathcal{F}'\frac{\partial\theta}{\partial\omega}+e\frac{\partial^3 u}{\partial\omega^2\partial t}+\frac{1}{S}\left(\mathcal{R}_v\frac{\partial^2 v}{\partial\omega^2}+\mathcal{R}_w\frac{\partial^2 w}{\partial\omega^2}\right)=\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\
&\mathcal{G}\frac{\partial^2 l}{\partial\omega^2}+g\frac{\partial^3 l}{\partial\omega^2\partial t}+\frac{1}{A^2S}\left(\mathcal{C}_v\frac{\partial^2 v}{\partial\omega^2}+\mathcal{C}_w\frac{\partial^2 w}{\partial\omega^2}\right)=\rho_0\frac{\partial^2 l}{\partial t^2},\\
&\mathcal{E}\frac{\partial^4 v}{\partial\omega^4}+e\frac{\partial^5 v}{\partial\omega^4\partial t}-\frac{1}{C^2S}\left[\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\mathcal{R}_v\frac{\partial u}{\partial\omega}+\mathcal{C}_u\frac{\partial^2 w}{\partial\omega^2}+\mathcal{C}_v\frac{\partial l}{\partial\omega}\right)-\mathcal{R}_u\frac{\partial^2 v}{\partial\omega^2}+\mathcal{R}_w\frac{\partial l}{\partial\omega}\right]\\
&\qquad\qquad=\rho_0\left(\frac{\partial^4 v}{\partial\omega^2\partial t^2}-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right),\\
&\mathcal{E}\frac{\partial^4 w}{\partial\omega^4}+e\frac{\partial^5 w}{\partial\omega^4\partial t}-\frac{1}{B^2S}\left[\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\mathcal{R}_w\frac{\partial u}{\partial\omega}-\mathcal{C}_u\frac{\partial^2 v}{\partial\omega^2}+\mathcal{C}_w\frac{\partial l}{\partial\omega}\right)-\mathcal{R}_u\frac{\partial^2 w}{\partial\omega^2}-\mathcal{R}_v\frac{\partial l}{\partial\omega}\right]\\
&\qquad\qquad=\rho_0\left(\frac{\partial^4 w}{\partial\omega^2\partial t^2}-\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right),
\end{aligned}\right.
$$

ρ_0 désignant maintenant la densité cubique. Les conditions aux limites (69) et (70) sont, d'après (157) et les deux dernières (158), et en effaçant les indices :

pour $\omega=(0,\, l)$,

$$
(160)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\delta\mathcal{X}}{S}\pm\left(\mathcal{E}\frac{\partial u}{\partial\omega}+\mathcal{F}'\theta+e\frac{\partial^2 u}{\partial\omega\partial t}\right)=0,\\
&\frac{\delta\mathcal{Y}}{C^2S}\mp\left[\mathcal{E}\frac{\partial^3 v}{\partial\omega^3}+e\frac{\partial^4 v}{\partial\omega^3\partial t}-\frac{1}{C^2S}\left(\mathcal{R}_v\frac{\partial u}{\partial\omega}+\mathcal{C}_u\frac{\partial^2 w}{\partial\omega^2}+\mathcal{C}_v\frac{\partial l}{\partial\omega}\right)-\rho_0\frac{\partial^3 v}{\partial\omega\partial t^2}\right]=0,\\
&\frac{\delta\mathcal{Z}}{B^2S}\mp\left[\mathcal{E}\frac{\partial^3 w}{\partial\omega^3}+e\frac{\partial^4 w}{\partial\omega^3\partial t}-\frac{1}{B^2S}\left(\mathcal{R}_w\frac{\partial u}{\partial\omega}-\mathcal{C}_u\frac{\partial^2 v}{\partial\omega^2}+\mathcal{C}_w\frac{\partial l}{\partial\omega}\right)-\rho_0\frac{\partial^3 w}{\partial\omega\partial t^2}\right]=0;\\
&\frac{\delta\mathcal{L}}{S}\pm\left(\mathcal{G}\frac{\partial l}{\partial\omega}+g\frac{\partial^2 l}{\partial\omega\partial t}\right)=0,\\
&\frac{\delta\mathcal{M}}{B^2S}\mp\left(\mathcal{E}\frac{\partial^2 w}{\partial\omega^2}+e\frac{\partial^3 w}{\partial\omega^2\partial t}\right)=0,\\
&\frac{\delta\mathcal{N}}{C^2S}\pm\left(\mathcal{E}\frac{\partial^2 v}{\partial\omega^2}+e\frac{\partial^3 v}{\partial\omega^2\partial t}\right)=0,
\end{aligned}\right.
$$

ρ_0 désignant toujours la densité cubique. Ces conditions aux limites supposent des forces extérieures données appliquées sur les bases; mais le problème se pose souvent de façon différente, les extrémités M_1, M_2 de l'axe longitudinal étant maintenues fixes, ou les bases correspondantes encastrées. Si les extrémités M_1, M_2 de l'axe longitudinal sont maintenues fixes, sans autres forces appliquées sur les bases qu'en ces points de fixation, les six premières (160) doivent être remplacées par les suivantes :

$$(161) \qquad \text{pour } \omega = (0, l), \qquad (u, v, w) = 0$$

et l'on doit annuler $\delta(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N})$ dans les six autres. Les six premières (160) déterminent ensuite les variations $\delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ des réactions des points fixes M_1, M_2 sous l'influence des petits mouvements.

Si, au contraire, les bases sont maintenues fixes, c'est-à-dire si la ligne est encastrée à ses extrémités, on a les conditions (161) et, en outre, celles qui expriment la fixité du trièdre (M) à chaque extrémité, soit $(l, m, n) = 0$ d'après (71), c'est-à-dire finalement, d'après (153) :

$$\text{pour } \omega = (0, l), \qquad \left(l, \frac{\partial v}{\partial \omega}, \frac{\partial w}{\partial \omega}\right) = 0.$$

Les formules (160) font ensuite connaître les variations $\delta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \ldots, \mathcal{N})$ des réactions et couples d'encastrement sous l'influence des petits mouvements.

Enfin, la relation supplémentaire (155) devient, d'après (149),

$$(162) \qquad c\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \omega}\left(K\frac{\partial \theta}{\partial \omega}\right) - k\theta + \frac{T_0}{\mathbf{E}}\mathcal{F}'S\frac{\partial^2 u}{\partial \omega \partial t}.$$

Les équations indéfinies (159), (162), jointes aux diverses conditions aux limites que nous avons établies, constituent les équations générales des vibrations longitudinales, tournantes et transversales d'une ligne élastique homogène, prismatique droite dans son état naturel, mais dont l'axe longitudinal peut affecter une forme quelconque dans sa position d'équilibre autour de laquelle les vibrations considérées s'effectuent. On voit que les quatre fonctions inconnues u, l, v, w se trouvent séparées dans les équations (159) et (160) si l'on a

$$(\mathcal{R}_v, \mathcal{R}_w, \mathcal{C}_u, \mathcal{C}_v, \mathcal{C}_w) = 0,$$

c'est-à-dire si la ligne en équilibre est simplement tendue sans être fléchie ni tordue. Elle est alors nécessairement rectiligne dans cet état d'équilibre comme elle l'était à l'état naturel, et les équations (159) et (160) deviennent les équations connues du mouvement vibratoire des tiges droites, complétées toutefois par les termes relatifs à la température et à la viscosité. Remarquons enfin que, dans ce cas, la température n'influe que sur les vibrations longitudinales, et nous retrouvons ainsi un résultat que nous avons autrefois obtenu par la méthode des développements en séries, pour les tiges isotropes de section circulaire [1].

---

[1] L. Roy, *Sur les équations des tiges droites*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3e série, t. II, 1910.

CHAPITRE II

PROPAGATION DES ONDES

33. Préliminaires. — Nous allons examiner dans ce dernier chapitre les simplifications que les formules (125), (126) déterminent dans les formules générales du n° 18, et supposons, tout d'abord, la discontinuité du premier ordre en x, y, z; $\alpha, \beta, \ldots, \gamma_2$ (onde de choc). Nous avons encore les formules (90), (91), (92), (93), sauf que la deuxième ligne de (92) se trouve remplacée par

$$\delta'\partial = |\alpha\lambda|, \qquad |\alpha_1\lambda| = 0, \qquad |\alpha_2\lambda| = 0 \tag{163}$$

et la première ligne de (93) par

$$(\lambda, \mu, \nu) = (\alpha, \beta, \gamma)\,\delta'\partial. \tag{164}$$

Ces formules expriment que la discontinuité (λ, μ, ν) est dirigée suivant Mu, c'est-à-dire suivant l'axe longitudinal de la ligne; nous dirons que cette discontinuité est *longitudinale*.

Supposons maintenant la discontinuité d'ordre $n > 1$ par rapport à x, y, z; $\alpha, \beta, \ldots, \gamma_2$ (onde d'accélération ou d'ordre supérieur). Nous avons encore les formules (95), (96), (97), sauf que les deuxième et troisième ligne de (96) se trouvent remplacées par

$$\delta'\frac{\partial^{n-1}\partial}{\partial\omega^{n-p-1}\,\partial t^p} = |\alpha\lambda|\,(-\mathfrak{V}_0)^p, \qquad |\alpha_1\lambda| = 0, \qquad |\alpha_2\lambda| = 0$$

et les trois premières de (97) par

$$(\lambda, \mu, \nu) = (\alpha, \beta, \gamma)\,\delta'\frac{\partial^{n-1}\partial}{\partial\omega^{n-1}}. \tag{165}$$

La discontinuité (λ, μ, ν) est donc toujours longitudinale. Enfin, quel que soit l'ordre de la discontiuuité considérée, la discontinuité (a, b, c) est normale à l'axe longitudinal, d'après la première (91); nous dirons qu'elle est *transversale*.

34. Équations fondamentales des ondes de choc. — Les calculs développés au n° 19 restent valables, en tenant compte des particularités résultant des formules (125), (126), de sorte que l'équation (100) s'écrit ici

$$\begin{aligned}&(\delta'\partial\delta u + |A^2\delta' p\delta\omega_u|)\rho_0\mathfrak{V}_0^2\\&+\left[F_2\left(\frac{d\delta u}{d\omega}+q\delta w - r\delta v\right)+\left|P_2\left(\frac{d\delta\omega_u}{d\omega}+q\delta\omega_w - r\delta\omega_v\right)\right|\right]\mathfrak{V}_0\,dt\\&+|\delta'\mathcal{R}_u\delta u + \delta'\mathcal{C}_u\delta\omega_u| = 0.\end{aligned}$$

Comme cette équation doit être vérifiée pour toutes les valeurs des variations $\delta u, \delta v, \ldots, \delta\omega_w$ vérifiant les deux dernières (128), il doit exister deux fonctions G_2, H_2, telles qu'on ait, quelles que soient ces variations,

$$\begin{aligned}&(\delta'\partial\delta u + |A^2\delta' p\delta\omega_u|)\rho_0\mathfrak{V}_0^2\\&+\Bigg\{F_2\left(\frac{d\delta u}{d\omega}+q\delta w - r\delta v\right)\\&\quad+G_2\left[\frac{d\delta v}{d\omega}+r\delta u - p\delta w-(1+\partial)\delta\omega_w\right]\\&\quad+H_2\left[\frac{d\delta w}{d\omega}+p\delta v - q\delta u+(1+\partial)\delta\omega_v\right]\\&\quad+\left|P_2\left(\frac{d\delta\omega_u}{d\omega}+q\delta\omega_w - r\delta\omega_v\right)\right|\Bigg\}\mathfrak{V}_0\,dt\\&+|\delta'\mathcal{R}_u\delta u + \delta'\mathcal{C}_u\delta\omega_u| = 0.\end{aligned}\tag{166}$$

On en conclut qu'on doit avoir

$$(F_2, G_2, H_2, P_2, Q_2, R_2)\mathfrak{V}_0\,dt = 0,\tag{167}$$

$$\delta'(\mathcal{R}_v, \mathcal{R}_w) = 0,\tag{168}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\rho_0\mathfrak{V}_0^2\delta'\partial + \delta'\mathcal{R}_u = 0,\\&\rho_0\mathfrak{V}_0^2(A^2\delta' p, B^2\delta' q, C^2\delta' r) + \delta'(\mathcal{C}_u, \mathcal{C}_v, \mathcal{C}_w) = 0.\end{aligned}\right.\tag{169}$$

Ce sont les équations fondamentales des ondes de choc qui correspondent aux équations (101) et (102).

35. Ondes de choc avec viscosité. — Si $\mathfrak{V}_0$ n'est pas nul, les équations (167) exigent qu'on ait

$$(F_2, G_2, \ldots, R_2)\,dt = 0.$$

Comme la première et les trois dernières sont linéaires et homogènes par rapport à $\partial dt = -\delta'\partial$, $(p, q, r)dt = -\delta'(p, q, r)$ et que leur déterminant n'est pas nul, puisque la fonction dissipative est une forme quadratique définie positive, il faut que $\delta'(\partial, p, q, r)$ soient nuls, c'est-à-dire qu'on ait, d'après (164) et les trois dernières (93),

$$(\lambda, \mu, \nu;\ a, b, \ldots, c_2) = 0.$$

De là, le résultat suivant :

Une ligne élastique à quatre paramètres affectée de viscosité ne peut être le siège d'aucune onde de choc qui se propage.

36. Ondes de choc sans viscosité. — Nous avons alors seulement les six équations (168), (169) avec, d'après (130),

$$\mathcal{R}_u = -f'_\partial, \qquad (\mathcal{C}_u, \mathcal{C}_v, \mathcal{C}_w) = -f'_{(p, q, r)}$$

et, comme au n° 21,

$$(170) \qquad \begin{cases} \delta'\mathcal{R}_u = -(f''_{\partial^2}\delta'\partial + f''_{\partial p}\delta' p + f''_{\partial q}\delta' q + f''_{\partial r}\delta' r + f''_{\partial \mathrm{T}}\delta'\mathrm{T}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \delta'\mathcal{C}_w = -(f''_{r\partial}\delta'\partial + f''_{rp}\delta' p + f''_{rq}\delta' q + f''_{r^2}\delta' r + f''_{r\mathrm{T}}\delta'\mathrm{T}). \end{cases}$$

Cela posé, nous avons deux cas à distinguer.

I. *La ligne est bonne conductrice de la chaleur* ($\mathrm{K} \neq 0$). — Alors $\delta'\mathrm{T}$ est nul, de sorte que les équations (169) deviennent, d'après (170),

$$(171) \qquad \begin{cases} (f''_{\partial^2} - \rho_0\mathfrak{V}^2_0)\delta'\partial + f''_{\partial p}\delta' p + f''_{\partial q}\delta' q + f''_{\partial r}\delta' r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f''_{r\partial}\delta'\partial + f''_{rp}\delta' p + f''_{rq}\delta' q + (f''_{r^2} - \mathrm{C}^2\rho_0\mathfrak{V}^2_0)\delta' r = 0. \end{cases}$$

De là, l'équation aux vitesses de propagation

$$(172) \qquad \begin{vmatrix} f''_{\partial^2} - \rho_0\mathfrak{V}^2_0 & f''_{\partial p} & \ldots & f''_{\partial r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f''_{r\partial} & f''_{rp} & & f''_{r^2} - \mathrm{C}^2\rho_0\mathfrak{V}^2_0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui, dans le cas où chaque section droite de la ligne est un plan de symétrie de contexture et d'après (149), se réduit à

$$(\mathcal{E} - \rho_0\mathfrak{V}^2_0)^3(\mathcal{G} - \mathrm{A}^2\rho_0\mathfrak{V}^2_0) = 0,$$

ρ_0 désignant ici la densité cubique.

II. *La ligne est mauvaise conductrice de la chaleur* (K = o). — Nous avons alors, comme cas particulier de la formule (110),

$$\delta' T = \frac{T}{c\mathbf{E}} (f''_{T\vartheta} \delta'\vartheta + |f''_{Tp}\delta' p|), \tag{173}$$

de sorte que les équations (169) deviennent, d'après (170),

$$\left\{\begin{array}{l} \left(f''_{\vartheta^2} + \frac{T}{c\mathbf{E}} f''^2_{T\vartheta} - \rho_0 \mathfrak{V}^2_0\right)\delta'\vartheta + \ldots + \left(f''_{\vartheta r} + \frac{T}{c\mathbf{E}} f''_{T\vartheta} f''_{Tr}\right)\delta' r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \left(f''_{r\vartheta} + \frac{T}{c\mathbf{E}} f''_{Tr} f''_{T\vartheta}\right)\delta'\vartheta + \ldots + \left(f''_{r^2} + \frac{T}{c\mathbf{E}} f''^2_{Tr} - C^2\rho_0\mathfrak{V}^2_0\right)\delta' r = 0. \end{array}\right. \tag{174}$$

De là, l'équation aux vitesses de propagation

$$\begin{vmatrix} f''_{\vartheta^2} + \frac{T}{c\mathbf{E}} f''^2_{T\vartheta} - \rho_0 \mathfrak{V}^2_0 & \ldots & f''_{\vartheta r} + \frac{T}{c\mathbf{E}} f''_{T\vartheta} f''_{Tr} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f''_{r\vartheta} + \frac{T}{c\mathbf{E}} f''_{Tr} f''_{T\vartheta} & \ldots & f''_{r^2} + \frac{T}{c\mathbf{E}} f''^2_{Tr} - C^2\rho_0\mathfrak{V}^2_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans les deux cas qui viennent d'être étudiés, les égalités (168) expriment que l'effort tranchant reste continu à la traversée de l'onde. Il résulte enfin des formules (126) et (168) que les égalités (117) et (118), exprimant les deux formes de la loi adiabatique dynamique, deviennent ici

$$\begin{aligned} &2\rho_0\delta'\mathfrak{U} + (\mathfrak{R}_{u1} + \mathfrak{R}_{u2})\delta'\vartheta + |(\mathcal{C}_{u1} + \mathcal{C}_{u2})\delta' p| = 0, \\ &2\rho^2_0\mathfrak{V}^2_0\delta'\mathfrak{U} - \delta'\left[\mathfrak{R}^2_u + \left|\left(\frac{\mathcal{C}_u}{A}\right)^2\right|\right] = 0. \end{aligned} \tag{175}$$

Dans le cas où chaque section droite de la ligne est un plan de symétrie de contexture et où l'on se borne à considérer de petites variations de température, les équations (174) deviennent, d'après (149),

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\mathcal{E} + \frac{T\mathcal{F}'^2}{c\mathbf{E}} - \rho_0\mathfrak{V}^2_0\right)\delta'\vartheta = 0, \qquad (\mathcal{G} - A^2\rho_0\mathfrak{V}^2_0)\delta' p = 0, \\ \qquad\qquad (\mathcal{E} - \rho_0\mathfrak{V}^2_0)\delta'(q, r) = 0, \end{array}\right. \tag{176}$$

ρ_0 désignant ici la densité cubique et c la capacité calorifique par unité de volume.

La première vitesse de propagation résultant de l'annulation de la première parenthèse exige que $\delta'(p, q, r) = 0$, c'est-à-dire qu'on ait, d'après (93), $(a, b, \ldots, c_2) = 0$;

d'après (164), la discontinuité restante (λ, μ, ν) est longitudinale. En particulier, si la ligne est isotrope, la vitesse de propagation $\mathfrak{V}_0$ est donnée par la formule

$$\mathcal{E} + \frac{T}{c\mathbf{E}}\left(\frac{\mu\nu'}{\lambda+\mu}\right)^2 - \rho_0 \mathfrak{V}_0^2 = 0,$$

qui coïncide avec celle que nous avons obtenue autrefois pour les tiges droites par des considérations très différentes [1].

La deuxième vitesse de propagation résultant de l'annulation de la seconde parenthèse de (176) exige que $\delta'(\partial, q, r) = 0$, c'est-à-dire, d'après (164) et la deuxième (93), qu'on ait

$$(\lambda, \mu, \nu;\ a, b, c) = 0.$$

Les deux dernières (93) nous montrent alors que les deux discontinuités restantes (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) sont transversales, la première étant dirigée suivant Mw, la deuxième suivant Mv.

Enfin, la troisième vitesse (176) exige que $\delta'(\partial, p) = 0$, d'où $(\lambda, \mu, \nu) = 0$ d'après (164); les deux dernières (93) montrent que les discontinuités (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) sont alors toutes deux longitudinales. Quant à la troisième (a, b, c), nous savons qu'elle est toujours transversale (n° 33).

On déduirait immédiatement de (175) la forme particulière que prend la loi adiabatique dynamique dans chacun de ces cas de propagation.

Ainsi se trouvent étendues à des lignes élastiques de forme quelconque des formules de vitesses de propagation qui n'avaient encore été obtenues, sauf dans des cas particuliers, qu'à partir des équations des vibrations longitudinales, tournantes et transversales des tiges droites et dans l'hypothèse d'une température uniforme.

37. Impossibilité d'ondes du second ordre par rapport aux coordonnées qui seraient en même temps du premier ordre par rapport aux cosinus. — Il résulte des formules (125) que si la discontinuité est du premier ordre en α, β, γ, elle doit être en général du second ordre en x, y, z. Reprenons donc le problème de la propagation des ondes en partant des formules

$$(177)\qquad \begin{cases} \delta' \dfrac{\partial^2(x, y, z)}{\partial \omega^{2-p}\, \partial t^p} = (\lambda, \mu, \nu)(-\mathfrak{V}_0)^p, \\[2ex] \delta' \dfrac{\partial(\alpha, \beta, \ldots, \gamma_2)}{\partial(\omega, t)} = (a, b, \ldots, c_2)(1, -\mathfrak{V}_0). \end{cases}$$

[1] L. Roy, *Recherches sur les propriétés thermomécaniques des corps solides*, Journal de math. pures et appl., 6e série, t. VI, 1910, p. 251.

Rien n'est changé aux discontinuités en p, q, r; $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ qui restent d'ordre zéro, mais la discontinuité devient, d'après (125), du premier ordre par rapport à ∂ et, par suite, par rapport à ρ. On a en effet, en dérivant l'expression de ∂,

$$(1+\partial)\frac{\partial\partial}{\partial\omega} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\omega} & \dfrac{\partial^2 x}{\partial\omega^2} \end{vmatrix},$$

d'où, d'après (125) et (177),

$$\delta'\frac{\partial\partial}{\partial(\omega, t)} = |\alpha\lambda|(1, -\mathfrak{V}_0). \tag{178}$$

Comme d'ailleurs

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\omega^2} = (1+\partial)\frac{\partial\alpha}{\partial\omega} + \alpha\frac{\partial\partial}{\partial\omega},$$

on a, d'après (177) et (178), la première des formules

$$(1+\partial)(a, b, c) = (\lambda, \mu, \nu) - (\alpha, \beta, \gamma)\,|\alpha\lambda|. \tag{179}$$

Les égalités (178) et (179) remplacent maintenant les relations (163) et (164).

Cela posé, les raisonnements faits pour parvenir à l'équation (166) subsistent, sauf que $\delta'\partial$ est nul; nous avons donc encore les équations (167) et les trois dernières (169), les trois autres étant remplacées par

$$\delta'(\mathfrak{R}_u, \mathfrak{R}_v, \mathfrak{R}_w) = 0. \tag{180}$$

Or, s'il y a viscosité, $(F_2, P_2, Q_2, R_2)dt$ sont des fonctions linéaires et homogènes de $\delta'(p, q, r)$ à déterminants non nuls; si donc $\mathfrak{V}_0$ n'est pas nul, il faut qu'on ait $\delta'(p, q, r) = 0$; d'où, d'après les trois dernières (93),

$$(a, b, \ldots, c_2) = 0. \tag{181}$$

La discontinuité est par conséquent au moins du second ordre pour les cosinus; d'après (179), la discontinuité (λ, μ, ν) est longitudinale.

S'il n'y a pas viscosité, la première (180) et les trois dernières (169) deviennent, d'après (170) et en tenant compte de ce que $\delta'\partial$ est nul, un système de quatre équations linéaires et homogènes en $\delta'(p, q, r, T)$. Or, si K est différent de zéro, $\delta'T$ est nul; sinon, d'après (173), $\delta'T$ est une fonction linéaire et homogène de $\delta'(p, q, r)$. Dans les deux cas, nous arrivons donc à un système de quatre équations linéaires et homogènes en $\delta'(p, q, r)$, ce qui exige que ces trois variations soient nulles, et l'on retrouve ainsi les conditions (181). On reconnaît aisément que ces résultats sont généraux, ce qui nous permet d'énoncer la proposition suivante :

Une onde d'ordre $n \geqslant 2$ par rapport aux coordonnées, se propageant sur une ligne élastique à quatre paramètres, ne saurait être d'ordre $n-1$ par rapport aux cosinus.

38. Ondes d'ordre supérieur avec viscosité. — Nous sommes ainsi conduits à considérer maintenant le cas d'une onde du second ordre en x, y, z; $\alpha, \beta, \ldots, \gamma_2$, c'est-à-dire du premier ordre par rapport à ∂, p, q, r, T. Les considérations du n° 23 nous conduisent encore aux équations (119), d'où l'on déduit

$$\delta'(\mathrm{F}, \mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}) = 0.$$

Ce sont là des équations linéaires et homogènes en $\delta'(\dot{\partial}, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r})$ à déterminant non nul; si donc $\mathcal{V}_0$ est différent de zéro, on doit avoir

$$\delta' \frac{\partial(\partial, p, q, r)}{\partial \omega} = 0, \quad \text{d'où} \quad (\lambda, \mu, \nu; a, b, \ldots, c_2) = 0$$

d'après (165) et les trois dernières (97). Comme ces résultats s'étendent aisément aux ondes d'ordre supérieur, ainsi que nous l'avons vu au n° 25, et qu'ils ont déjà été obtenus pour la ligne à six paramètres, nous arrivons à la proposition générale suivante :

Une ligne élastique affectée de viscosité ne peut être le siège d'aucune onde qui se propage.

39. Ondes d'ordre supérieur sans viscosité. — La discontinuité étant encore supposée du second ordre, nous pouvons, comme au n° 24, appliquer les équations du mouvement (134), qui donnent, d'après (122),

$$(182)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta' \frac{\partial \mathcal{R}_u}{\partial \omega} + \rho_0 \mathcal{V}_0^2 \delta' \frac{\partial \partial}{\partial \omega} = 0, \qquad \delta' \frac{\partial(\mathcal{R}_v, \mathcal{R}_w)}{\partial \omega} = 0, \\ &\delta' \frac{\partial(\mathcal{C}_u, \mathcal{C}_v, \mathcal{C}_w)}{\partial \omega} + \rho_0 \mathcal{V}_0^2 \left(\mathrm{A}^2 \delta' \frac{\partial p}{\partial \omega}, \mathrm{B}^2 \delta' \frac{\partial q}{\partial \omega}, \mathrm{C}^2 \delta' \frac{\partial r}{\partial \omega} \right) = 0, \end{aligned}\right.$$

avec

$$(183)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta' \frac{\partial \mathcal{R}_u}{\partial \omega} = -\left(f''_{\partial^2} \delta' \frac{\partial \partial}{\partial \omega} + f''_{\partial p} \delta' \frac{\partial p}{\partial \omega} + f''_{\partial q} \delta' \frac{\partial q}{\partial \omega} + f''_{\partial r} \delta' \frac{\partial r}{\partial \omega} + f''_{\partial \mathrm{T}} \delta' \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \omega} \right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

et

$$\delta' \frac{\partial T}{\partial \omega} = \begin{cases} 0, \\ \dfrac{T}{c\mathbf{E}}\left(f''_{T\partial}\delta' \dfrac{\partial \partial}{\partial \omega} + \left| f''_{Tp}\delta' \dfrac{\partial p}{\partial \omega} \right| \right), \end{cases}$$

suivant que K est différent de zéro ou égal à zéro, la dernière expression supposant $\mathcal{V}_0 \neq 0$.

Si alors on remplace $\delta' \frac{\partial \mathcal{R}_u}{\partial \omega}$, ... par leurs valeurs (183) dans la première et les trois dernières équations (182), nous retrouvons les quatre équations (171) et (174), sauf que les discontinuités d'ordre zéro qui y figurent $\delta' \partial$, ... se trouvent remplacées par des discontinuités du premier ordre $\delta' \frac{\partial \partial}{\partial \omega}$, ... Tous les résultats obtenus au n° 35 pour les ondes de choc restent donc valables pour les ondes d'accélération, et il est facile de reconnaître qu'ils subsistent également pour des ondes d'un ordre quelconque supérieur au second. Comme cette conclusion était déjà celle à laquelle nous étions parvenu pour la ligne à six paramètres, nous pouvons énoncer la proposition générale suivante :

Les ondes d'accélération et d'ordre supérieur se propagent sur les lignes élastiques suivant les mêmes lois que les ondes de choc.

TABLE DU MÉMOIRE

PREMIÈRE PARTIE

Ligne élastique à six paramètres.

CHAPITRE I. — Équations générales.

CHAPITRE II. — Propagation des ondes.

DEUXIÈME PARTIE

Ligne élastique à quatre paramètres.

CHAPITRE I. — **Équations générales.**

CHAPITRE II. — **Propagation des ondes.**