Annales de la faculté des sciences de Toulouse

A. Buhl

# Sur les formules fondamentales de l'électromagnétisme et de la gravifique

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série*, tome 19 (1927), p. 201-215
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1927_3_19__201_0>

SUR LES FORMULES FONDAMENTALES

# DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME ET DE LA GRAVIFIQUE

PAR M. A. BUHL

## ADDITION AU SIXIÈME MÉMOIRE

J'ai indiqué, au début du Sixième Mémoire, par quelques lignes ajoutées sur les épreuves, qu'on pouvait relever quelques coïncidences fondamentales entre mon travail et celui, beaucoup plus étendu, de M. Élie Cartan sur *La Géométrie des Groupes de transformations*. Dans cette Addition, je précise ces coïncidences d'où il ressort, mieux que jamais, que la Géométrie est l'Électromagnétisme ou que l'Électromagnétisme est la Géométrie. Tout commentaire semble inutile devant l'éclat de ces merveilleuses synthèses.

[**1**] *Symétries fondamentales.* — Partons à nouveau du groupe *initial* correspondant aux trois systèmes

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; \quad a_1, a_2, \ldots, a_r), \tag{1}$$

$$x''_i = f_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n; \quad b_1, b_2, \ldots, b_r), \tag{2}$$

$$x''_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; \quad c_1, c_2, \ldots, c_r). \tag{3}$$

On sait que les équations

$$c_i = \varphi_i(a_1, \ldots, a_r; \quad b_1, \ldots, b_r) \tag{4}$$

définissent aussi un groupe, de variables $a_i$, de paramètres $b_i$; c'est le *premier groupe paramétrique*. Si, dans (1), (2), (3), (4) on permute les $x$ et les $x'$, les $a$ et les $b$, cette permutation, dans les $c$, permet de définir un *second groupe paramétrique*. Dès lors, *l'ensemble* du groupe initial et de ses deux groupes paramétriques ne subit plus de changement essentiel par les permutations indiquées, celles-ci conservant les $f_i$ et les $\varphi_i$.

Revenons maintenant brièvement sur le premier théorème de Lie. De

$$f_\nu(x', b) = f_\nu(x, c),$$

en traitant les $x$, les $a$ et les $c$ comme des variables indépendantes, on déduit

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial x'_i}\frac{\partial x'_i}{\partial a_l} + \frac{\partial f_\nu}{\partial b_i}\frac{\partial b_i}{\partial a_l} = 0.$$

De (4), on conclut

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial b_i}\frac{\partial b_i}{\partial a_l} + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a_l} = 0.$$

On peut tirer de là les dérivées des $b$ par rapport aux $a$ et les porter dans le système précédent d'où l'on pourra conclure

(5) $$\frac{\partial x'_i}{\partial a_l} = \alpha^{jl}\xi_{ji}(x').$$

Le calcul brut semble donner des $\alpha^{jl}$ fonctions des $a$ et des $b$, et des $\xi_{ji}$ fonctions des $x'$ et des $b$ mais (1) doit donner une vérification de (5) sans $b$ intervenant explicitement; aussi, finalement, les $\alpha^{jl}$ peuvent-ils s'exprimer rien qu'avec des $a$ et les $\xi_{ji}(x)$ rien qu'avec des $x'$.

On a maintenant

(6) $$\frac{\partial x'_i}{\partial b_m} = \frac{\partial x'_i}{\partial a_l}\frac{\partial a_l}{\partial b_m} = \alpha^{jl}\frac{\partial a_l}{\partial b_m}\xi_{ji}(x') = \beta^{jm}\xi_{ji}(x').$$

On peut encore démontrer que les $\beta^{jm}$ sont exprimables rien qu'avec des $b$; le contraire serait d'ailleurs incompatible avec la symétrie de formules subséquentes.

On voit que l'on a posé

$$\alpha^{jl}\frac{\partial a_l}{\partial b_m} = \beta^{jm}$$

d'où, en multipliant par $db_m$,

(7) $$\alpha^{jl}(a)\, da_l = \beta^{jl}(b)\, db_l.$$

C'est ce que nous écrirons

(8) $$\varpi^j(a) = \omega^j(b),$$

ceci par définition de ces deux nouveaux membres, la notation étant d'ailleurs celle qui est couramment employée pour les formes de Pfaff.

On sait que le premier théorème de Lie est exprimé par l'équation (5); ici, avec les notions de symétrie invoquées au début du paragraphe, nous le représenterons par les quatre systèmes

$$\text{(A)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x'_i}{\partial a_l} = \alpha^{jl}(a)\,\xi_{ji}(x'), & &\frac{\partial x'_i}{\partial b_l} = \beta^{jl}(b)\,\xi_{ji}(x'),\\ &\frac{\partial x_i}{\partial b_l} = \alpha^{jl}(b)\,\xi_{ji}(x), & &\frac{\partial x_i}{\partial a_l} = \beta^{jl}(a)\,\xi_{ji}(x). \end{aligned}\right.$$

Trois de ces systèmes, le premier de gauche et les deux de droite, sont formés dans le grand ouvrage de S. Lie et Fr. Engel (*Theorie der Transformationsgruppen*, 1888, Band I, Kap. 2). Il ne faut pas s'attendre évidemment à voir intervenir, dans la suite, le tableau (A) pris au complet; il faut seulement considérer que l'on peut partir de l'un *quelconque* des quatre systèmes rassemblés en (A) pour construire le groupe initial.

Observons que le tableau (A) se conserve, par permutation des deux lignes, quand on permute les $x$ et les $x'$ ainsi que les $a$ et les $b$, ce qui est précisément conforme à la symétrie initialement indiquée.

Nous avons vu que la première ligne de (A) donnait l'équation (8); de même, la seconde ligne donne

$$\varpi^j(b) = \omega^j(a).$$

Le système

$$\text{(B)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\varpi^j(a) = \omega^j(b)\\ &\varpi^j(b) = \omega^j(a) \end{aligned}\right.$$

est tout aussi fondamental que (A) avec le gros avantage d'être beaucoup plus réduit et maniable. Toujours d'après les symétries initiales, le système (B) doit définir une transformation réciproque des $a$ en les $b$ et des $b$ en les $a$, transformation unissant l'un des groupes paramétriques à l'autre. Et comme, de toute évidence, (B) transforme

$$\begin{matrix} \varpi^j(a), & & \omega^j(b),\\ & \text{en} & \\ \varpi^j(b), & & \omega^j(a), \end{matrix}$$

on peut déjà *pressentir* par là, en attendant plus de rigueur et de détail, que, des deux équations

$$\text{(C)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\varpi^j(a) = \varpi^j(b),\\ &\omega^j(b) = \omega^j(a), \end{aligned}\right.$$

la première est propre à *définir* l'un des groupes paramétriques, la seconde étant propre à définir l'autre de ces groupes. En fait, nous avons bien, en (C), les *équations de définition* des groupes paramétriques telles qu'elles sont données par M. Élie Cartan dans son Mémoire sur *La Géométrie des Groupes de transformations* (Journal de Mathématiques, publié par Henri Villat; 1927, fasc. I, pp. 47-48).

*Les systèmes des tableaux* (B) et (C) *sont tous complètement intégrables,* au moins pour des formes $\varpi$ et $\omega$ d'une nature à préciser. Ceci est une nouvelle affirmation qui n'est pas non plus justifiée en toute rigueur; elle est cependant obligatoire. Si les systèmes en litige n'étaient pas intégrables, rien de ce qui précède ne serait et la Théorie des groupes continus n'existerait pas, du moins sous la forme différentielle précédente.

Réciproquement on constate déjà, et d'une manière très générale, que l'existence de groupes entraîne l'intégrabilité de systèmes différentiels.

Il y a là une admirable dualité laquelle, on le voit, peut s'esquisser, quant à son principe, en quelques pages, sans faire de calculs et rien qu'en ayant recours à d'esthétiques et brèves considérations de symétrie analytique.

Enfin on voit que, les systèmes (B) et (C) s'imposant tout particulièrement à l'attention, les variables $x$ ou $x'$ du groupe initial ne jouent plus qu'un rôle de second plan; la plus grande importance est du côté des groupes paramétriques (Cf. E. CARTAN, *loc. cit.*, p. 3). Il faut d'abord déterminer des groupes de cette dernière nature, pour lesquels on a toujours $n = r$.

L'essentiel, en ce qui concerne le tableau (C), a été indiqué dans une Note des *Comptes rendus* du 13 juin 1927.

**[2]** *Intégrabilité des systèmes* (B) *ou* (C). — Raisonnons sur (B). Prenons la première équation

$$\varpi^s(a) = \omega^s(b), \tag{9}$$

en laquelle nous avons changé $j$ en $s$ pour être d'accord avec des notations plus fréquemment employées, notamment par M. Cartan. Pour qu'un système tel que (9) soit intégrable, il faut que le système obtenu par dérivation *extérieure*

$$[\varpi^s(a)]' = [\omega^s(b)]' \tag{10}$$

puisse être identiquement vérifié en profitant de (9). Or, on peut exprimer les deux membres de (10) sous les formes respectives

$$-c^s_{jk}(a)\,[\varpi^j(a)\,\varpi^k(a)] = -\gamma^s_{jk}(b)\,[\omega^j(b)\,\omega^k(b)] \tag{11}$$

ce qui aura lieu identiquement, d'après (9), si

$$c^s_{jk}(a) = \gamma^s_{jk}(b) = c^s_{jk},$$

les derniers $c^s_{jk}$ étant de simples constantes. Donc, en comparant à nouveau (10) et (11),

$$(12)\qquad \begin{cases} [\varpi^s(a)]' + c^s_{jk}[\varpi^j(a)\,\varpi^k(a)] = 0, \\ [\omega^s(b)]' + c^s_{jk}[\omega^j(b)\,\omega^k(b)] = 0. \end{cases}$$

En faisant le même raisonnement avec la seconde équation (B), on trouve

$$(13)\qquad \begin{cases} [\varpi^s(b)]' + c^s_{jk}[\varpi^j(b)\,\varpi^k(b)] = 0, \\ [\omega^s(a)]' + c^s_{jk}[\omega^j(a)\,\omega^k(a)] = 0, \end{cases}$$

les constantes $c$ à trois indices étant les mêmes qu'en (12) ce qui assure la conservation de l'ensemble (12), (13) quand on permute les $a$ et les $b$.

Toujours de même, à la première équation (C) on peut faire correspondre la première (12) et la première (13) et, à la seconde équation (C), la seconde (12) et la seconde (13).

Ceci précise ce qui avait été seulement *pressenti* en passant de (B) à (C) à savoir que ces deux systèmes reposent sur les mêmes conditions fondamentales d'existence. Ce que l'on peut d'ailleurs résumer en l'assertion suivante : *Les systèmes des tableaux* (B) *et* (C) *sont complètement intégrables quand les formes de Pfaff* $\varpi^s$ *et* $\omega^s$ *sont solutions du système*

$$(\mathrm{D})\qquad [\pi^s]' + c^s_{jk}[\pi^j\pi^k] = 0.$$

C'est là ce que l'on pourrait appeler le *système de Maurer-Cartan*; certes, on peut prétendre que (D) ne fait que condenser les équations de Maurer

$$(14)\qquad \frac{\partial \alpha^{s\nu}}{\partial a_\mu} - \frac{\partial \alpha^{s\mu}}{\partial a_\nu} = c^s_{jk}\,\alpha^{k\mu}\alpha^{j\nu},$$

comme nous l'avons vu (p. 7) dans le Mémoire précédant la présente *Addition*; mais, comme nous venons de le voir, la théorie présente un aspect extrêmement simplifié et particulièrement naturel quand on la pense en formes de Pfaff plutôt qu'en notations telles que celles de (14). Et c'est M. Élie Cartan qui a fait ressortir ce fait, tant d'ailleurs pour les groupes infinis que pour les groupes finis. Nous reverrons d'ailleurs, un peu plus loin, au paragraphe 4, combien les équations (D), prises précisément sous la forme (D), sont proches des principes mêmes de l'Analyse, des notions d'espace, de torsion (encore au sens de M. Cartan), de courbure et des théories électromagnétiques selon le mode de Maxwell-Einstein.

[**3**] *Quelques comparaisons.* — Reprenons la théorie des fonctions analytiques

$$f(x+iy) = X + iY.$$

Nous avons d'abord les relations de Cauchy

$$(15) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}$$

qui entraînent que X et Y sont solutions de l'équation de Laplace

$$(16) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Or, de même que les équations (15) entraînent (16), les tableaux (B) et (C) entraînent (D). Les deux faits ainsi rapprochés sont inégalement compliqués mais ils relèvent manifestement du même ordre d'idées.

Quant à la symétrie soigneusement observée dans ce qui précède elle nous a déjà été d'un secours puissant dans des questions analogues. Ainsi dans nos *Formules stokiennes* (Mémorial des Sciences mathématiques, dirigé par Henri Villat; fasc. XVI, p. 30), nous avons exposé une forme vectorielle de la Loi de Gravitation d'Einstein qui peut se traduire par un seul système d'équations mais est alors dissymétrique; l'adjonction d'un second système, compatible avec le premier, fait apparaître au contraire une symétrie remarquable analogue à celle des équations électromagnétiques.

Dans le même fascicule (p. 41) nous rappelons des Identités de Jacobi formant un tableau assez analogue à (A); une seule équation du tableau vaut tout le reste et cependant c'est surtout la symétrie de l'ensemble qui joue un rôle remarquable en Mécanique céleste.

[**4**] *Retour sur les formules stokiennes.* — Reprenons ces formules, en variables $x$, comme on le fait ordinairement. A l'identité

$$(17) \qquad \int_c X\,dY = \int\!\!\int_s dX\,dY,$$

on fait d'abord correspondre

$$(18) \qquad \int_C P_i\,dx_i = \int\!\!\int_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial}{\partial x_j} \\ P_i & P_j \end{vmatrix} dx_i dx_j.$$

De même, à

$$\int\int_s X\,dY\,dZ = \int\int\int_v dX\,dY\,dZ, \tag{19}$$

correspond aussi naturellement

$$\int\int_{S^*} P_i Q_j\, dx_i\, dx_j = \int\int\int_V \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial}{\partial x_j} & \dfrac{\partial}{\partial x_k} \\ P_i & P_j & P_k \\ Q_i & Q_j & Q_k \end{vmatrix} dx_i\, dx_j\, dx_k. \tag{20}$$

Mais, alors que (18) est une généralisation aussi étendue que possible de (17), il n'en est pas de même de (20) par rapport à (19). Et, en effet, $P_i dx_i$ est bien une forme *linéaire* aussi générale que possible mais $P_i Q_j dx_i dx_j$ n'est pas la forme *bilinéaire* générale. Et même, rien que pour rendre la formule (20) immédiatement maniable, il importe d'introduire sous l'intégrale double une forme bilinéaire $M_{ij} dx_i dx_j$ dont les coefficients $M_{ij}$ soient indépendants de considérations accessoires relatives à des $P_i$ et à des $Q_j$. Ce point a déjà été discuté dans notre Premier Mémoire (1920, p. 8) et repris dans nos *Formules stokiennes* (p. 16). Il est fondamental et l'on peut dire que *la formule* (20), prise précisément sous cette forme (20), *est une formule de bifurcation qui permet de marcher soit vers la Théorie des groupes, soit vers la Théorie des espaces affines ou à connexion affine de M. Cartan, soit vers l'Électromagnétisme.*

On voit que la bifurcation en question pourrait s'appeler plus justement une *trifurcation* mais peu importe cette question de pure terminologie. D'ailleurs ce ne serait certainement pas assez dire car la formule en litige peut encore conduire à d'autres choses, par exemple à la Géométrie de Cayley. Sur ce point on pourra se reporter à la Troisième édition de *La Géométrie non-euclidienne* de M. P. Barbarin augmentée de *Notes sur La Géométrie non-euclidienne dans ses rapports avec la Physique mathématique* par M. A. Buhl. Note II. (Collection *Scientia*, Gauthier-Villars et $C^{ie}$, Paris, 1927).

Le procédé qui s'est toujours offert le plus naturellement à l'esprit pour généraliser (20) consiste à ajouter les unes aux autres plusieurs formules (20) écrites avec des $P_i$ et des $Q_j$ différant d'une formule à l'autre. C'est cette idée que nous allons reprendre avec les notations pfaffiennes.

Rappelons auparavant que, dans (20), $S^*$ est une variété *fermée* et que

$$\int\int_{S^*} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial}{\partial x_j} \\ P_i & P_j \end{vmatrix} dx_i\, dx_j = \int\int\int_V \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial}{\partial x_j} & \dfrac{\partial}{\partial x_k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial}{\partial x_j} & \dfrac{\partial}{\partial x_k} \\ P_i & P_j & P_k \end{vmatrix} dx_i\, dx_j\, dx_k = 0. \tag{21}$$

La cloison S, de (18), est une partie, à frontière C, de $S^*$.

Soient des formes linéaires $\pi^j$ en nombre $r$. Au premier membre de (20) correspond l'expression symbolique

$$[\pi^j \pi^k] \tag{22}$$

qui donne l'extension linéaire

$$c^s_{jk}[\pi^j \pi^k]$$

et même

$$[\pi^s]' + c^s_{jk}[\pi^j \pi^k], \tag{23}$$

car le premier terme, qui n'est qu'un premier membre tel que celui de (21), est identiquement nul sur $S^*$. On peut maintenant considérer l'expression (23) sur S et l'une des hypothèses les plus simples que l'on puisse faire sur cette expression est évidemment d'imaginer qu'elle soit toujours nulle. On obtient alors l'équation fondamentale (D) de la Théorie des groupes continus.

On peut se demander si, par introduction d'une même constante $h$ dans toutes les expressions (23) on ne pourrait pas obtenir les équations

$$[\pi^s]' + h c^s_{jk}[\pi^j \pi^k] = 0 \tag{24}$$

un peu plus générales que (D). La réponse est négative car on passe de (D) à (24) en remplaçant toutes les formes $\pi$ par $h\pi$. Toutefois la remarque n'est pas sans intérêt; elle prouve précisément qu'on ne change rien à la structure d'un groupe en multipliant toutes les constantes $c^s_{jk}$ par un même facteur constant. Si notamment ces constantes satisfont à des relations où ne figurent qu'elles, lesdites relations sont *homogènes*. C'est bien ce qui a lieu.

Plutôt que de généraliser des produits extérieurs, tels que (22), au moyen de coefficients constants pourvus d'indices, on peut imaginer un autre procédé au fond fort analogue. Il suffit d'imaginer d'autres formes linéaires dépendant de plus d'un indice et de considérer, par exemple, le produit extérieur

$$[\pi^i_k \pi^k].$$

Cette expression, plus exactement, est naturellement une somme de produits, de par le rôle sommatoire de l'indice $k$ répété deux fois. Raisonnant comme précédemment à partir de (22) on construit maintenant les expressions

$$\Omega^i = [\pi^i]' + [\pi^i_k \pi^k] = [\pi^i]' - [\pi^k \pi^i_k] = A^i_{jk}[\pi^j \pi^k], \tag{E}$$

$$\Omega^i_j = [\pi^i_j]' + [\pi^i_k \pi^k_j] = [\pi^i_j]' - [\pi^k_j \pi^i_k] = A^i_{jkl}[\pi^k \pi^l]. \tag{F}$$

Or ce sont là, pour les variétés à connexion affine, les composantes de la *torsion* et de la *courbure*, ces notions géométriques étant celles que définit M. Cartan dans son grand Mémoire *Sur les variétés à connexion affine et la Théorie de la Relativité généralisée* (Annales de l'École Normale, t. XL, 1923; pp. 367-368).

Enfin, comme nous l'avons déjà dit, ce sont des combinaisons linéaires de formules (20) qui conduisent à la formule électromagnétique fondamentale de l'espace-temps.

Espace, groupes, torsion, courbure, électricité,... sont, au fond, choses équivalentes dont les théories se peuvent dérouler de manière immédiate derrière les premiers principes de l'Analyse représentés ici par les identités (17) et (19).

**[5]** *Espaces de groupes.* — Les espaces de groupes sont des espaces à $r$ dimensions où les variables sont les $r$ paramètres $a$ ou les $r$ paramètres $b$. Ils donnent des illustrations très simples des espaces à connexion affine; leurs premières propriétés vont apparaître ici immédiatement par la simple comparaison des formules (D), (E), (F).

En ne considérant d'abord que $r$ formes $\pi^i$, on définit une *première connexion affine* qui, faute de formes $\pi^i_j$, est à *courbure nulle*, la *torsion* se réduisant à

$$\Omega^i = [\pi^i]' = - c^i_{(jk)}[\pi^j \pi^k]. \tag{25}$$

On observera ici une légère complication dans la notation. Dans les équations de Maurer-Cartan, telles que (D), on ne somme, en $j$ et $k$, que pour $j < k$. Jusqu'ici cette précision n'avait pas d'importance essentielle mais il faut y prendre garde maintenant pour éviter des confusions. La notation $(jk)$ sur les indices inférieurs des $c$ indique la semi-sommation.

On peut maintenant considérer une *seconde connexion affine* avec $r$ formes $\pi^i$ et des formes

$$\pi^i_k = c^i_{jk}\pi^j \tag{26}$$

provenant de la comparaison immédiate de (D) et (E). Dans cette seconde connexion, la torsion est

$$\Omega^i = [\pi^i]' + [\pi^i_k \pi^k] = - c^i_{(jk)}[\pi^j \pi^k] + c^i_{jk}[\pi^j \pi^k] = c^i_{(jk)}[\pi^j \pi^k].$$

Observons l'emploi de

$$c_{jk} + c_{kj} = 0. \tag{27}$$

En comparant avec (25) on voit que *les deux connexions affines ont des torsions égales mais opposées.*

Comme la première, *la seconde connexion affine est sans courbure* et il est curieux de remarquer que, dans une connexion affine, l'existence de formes $\pi^i_k$ n'entraîne pas toujours celle d'une courbure non nulle. On a

$$\Omega^i_j = [\pi^i_j]' - [\pi^k_j \pi^i_k] = c^i_{kj}[\pi^k]' - [\pi^k_j \pi^i_k],$$

$$\Omega^i_j = -\, c^i_{kj} c^k_{(\alpha\beta)} [\pi^\alpha \pi^\beta] - c^k_{\alpha j} c^i_{\beta k} [\pi^\alpha \pi^\beta],$$

$$\Omega^i_j = -\, [c^i_{kj} c^k_{(\alpha\beta)} + c^i_{k(\beta)} c^k_{j(\alpha)} + c^i_{k(\alpha)} c^k_{(\beta)j}]\,[\pi^\alpha \pi^\beta].$$

Or le trinome entre crochets est toujours identiquement nul ; il y a là les relations structurales du second type à associer à celles du premier type, c'est-à-dire à (27).

On atteint ainsi, sans préliminaires géométriques proprement dits, les résultats fondamentaux donnés par M. E. Cartan dans *La Géométrie des groupes de transformations* (*loc. cit.*, p. 44).

A propos de la seconde relation structurale remarquons aussi qu'elle donne

$$c^i_{si} c^s_{jk} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad c^i_{si}[\pi^s]' = 0$$

pour des formes $\pi^s$ satisfaisant à (D). Alors $c^i_{si}\pi^s$ est une différentielle exacte.

Ce résultat, également indiqué par M. Cartan (p. 46) est d'une très grande importance. Il provient, au fond, d'une *contraction* de l'identité de Jacobi, de même que les équations générales d'Einstein proviennent d'une contraction de l'identité de Bianchi.

[**6**] *Première variante du tableau* (A). — Considérons maintenant les identités

$$\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial a_l} + \frac{\partial x'_\nu}{\partial a_l} = 0, \qquad \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial b_l} + \frac{\partial x'_\nu}{\partial b_l} = 0. \tag{28}$$

La première, en tenant compte des égalités de la diagonale principale du tableau (A) et en multipliant par $da_l$, donne, d'après (7) et (8),

$$\varpi^j(a)\,\xi_{j\nu}(x') + \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_i}\,\omega^j(a)\,\xi_{ji}(x) = 0.$$

Multipliant par $\dfrac{\partial f}{\partial x'_\nu}$, il vient

$$\varpi^j(a)\,\xi_{ji}(x')\,\frac{\partial f}{\partial x'_i} + \omega^j(a)\,\xi_{ji}(x)\,\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

ce qui peut enfin s'écrire, avec la notation bien connue des transformations infinitésimales,

$$\varpi^j(a)\,X'_j(f) + \omega^j(a)\,X_j(f) = 0. \tag{29}$$

On voit que, par $X'(f)$, il faut entendre $X(f)$ où l'on a remplacé les $x$ par les $x'$.

Reprenant le raisonnement avec la seconde équation (28) et la seconde diagonale du tableau (A), on a de même

$$\omega^j(b)\,X'_j(f) + \varpi^j(b)\,X_j(f) = 0. \tag{30}$$

Ces équations (29) et (30) sont d'accord avec le tableau (B) qui, en somme, a suffi, dans les paragraphes précédents, à mettre en évidence les deux connexions affines fondamentales.

Aussi, pour les symboles canoniques de ces connexions, peut-on prendre l'une ou l'autre ligne du tableau

$$\text{(G)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \varpi^j(a)\,X'_j, & -\,\omega^j(a)\,X_j, \\ \omega^j(b)\,X'_j, & -\,\varpi^j(b)\,X_j. \end{array} \right.$$

On peut aussi déduire du tableau (A) le tableau

$$\text{(A}'\text{)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} df(x') = \varpi^j(a)\,X'_j, & df(x') = \omega^j(b)\,X'_j, \\ df(x) = \varpi^j(b)\,X_j, & df(x) = \omega^j(a)\,X_j. \end{array} \right.$$

Il ne faut évidemment pas vouloir prendre ces relations conjointement avec (28), (29), (30); les contradictions seraient manifestes. Il faut seulement et précisément observer qu'il y a différentes manières, non obligatoirement compatibles, d'établir des correspondances entre les $x$, les $x'$, les $a$, les $b$, ces manières étant cependant propres, aussi bien l'une que l'autre, à mettre en évidence le tableau fondamental

$$\begin{array}{ll} \varpi^j(a), & \omega^j(b), \\ \varpi^j(b), & \omega^j(a), \end{array}$$

et à conduire aux symboles canoniques (G).

[**7**] *Seconde variante du tableau* (A). — Par le jeu de notations bien connues rappelées au début du Sixième Mémoire, le tableau (A) peut être remplacé par

$$\text{(H)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \xi_{ji}(x') = \alpha_{jk}(a)\dfrac{\partial x'_i}{\partial a_k}, & \xi_{ji}(x') = \beta_{jk}(b)\dfrac{\partial x'_i}{\partial b_k}, \\ \xi_{ji}(x) = \alpha_{jk}(b)\dfrac{\partial x_i}{\partial b_k}, & \xi_{ji}(x) = \beta_{jk}(a)\dfrac{\partial x_i}{\partial a_k}. \end{array} \right.$$

Nous n'avons rien d'original à tirer de (H) mais on peut remarquer que l'une ou l'autre des équations de ce tableau donne immédiatement des résultats que Sophus Lie considérait comme essentiels. Ainsi d'après

$$\frac{\partial F}{\partial a_k} + \frac{\partial F}{\partial x'_i}\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = 0,$$

la première équation de (H) donne

$$\xi_{ji}(x')\frac{\partial F}{\partial x'_i} = \alpha_{jk}(a)\frac{\partial F}{\partial x'_i}\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = -\alpha_{jk}(a)\frac{\partial F}{\partial a_k},$$

ce qui est (*loc. cit.*, p. 4)

$$Y_j(F) = A_j(F) + X'_j(F) = 0.$$

Cette relation unit très simplement les transformations infinitésimales du groupe initial à celles de l'un des groupes paramètriques; on la compléterait aisément par une relation analogue relative à l'autre groupe paramétrique.

On a aussi, avec des constantes $\lambda^j$,

$$\lambda^j \xi_{ji}(x') = \lambda^j \alpha_{jk}\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \frac{da_k}{dt}\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \frac{dx'_i}{dt}.$$

On voit que

$$\frac{da_k}{\lambda^j \alpha_{jk}} = dt, \qquad \frac{dx'_i}{\lambda^j \xi_{ji}(x')} = dt \tag{31}$$

sont des systèmes différentiels tels que le premier entraîne le second. On a aussi

$$\lambda^j X'_j(F) = \frac{dF}{dt}, \qquad [\lambda^j X'_j(F)]^{(2)} = \frac{d^2F}{dt^2}, \ldots$$

et, comme les seconds membres de ces relations peuvent servir à former un développement taylorien de $F(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, il en est de même des premiers, d'où, symboliquement,

$$F' = e^{\lambda^j X_j(F)}.$$

Les paramètres, dans le second membre, sont d'abord $\lambda^j t$; on peut évidemment prendre $t$ égal à 1 sans diminuer la généralité. On a ainsi la forme *canonique* d'une fonction transformée par le groupe initial. Sous la forme symbolique exponentielle, elle a surtout été maniée par Henri Poincaré.

Revenons enfin au système (C) et particulièrement à sa première équation qui peut être scindée en deux telles que

$$\omega^i(a) = \lambda^i dt \qquad \text{ou} \qquad \alpha^{ik} da_k = \lambda^i dt.$$

Ceci n'est autre chose que le premier système (31) et confirme la définition des groupes paramétriques par le tableau (C).

[**8**] *Le groupe adjoint.* — Reprenons l'équation (29) qui peut aisément donner

$$\lambda_l \beta^{jl}(a) X_j + \lambda_l \alpha^{jl}(a) X'_j = 0$$

avec, à la place des $da_l$, de nouveaux coefficients constants $\lambda_l$ qui peuvent être finis. Ceci peut s'écrire plus brièvement

$$e^j X_j - e'^j X'_j = 0,$$

en posant

$$e^j = \lambda_l \beta^{jl}(a), \qquad e'^j = -\lambda_l \alpha^{jl}(a).$$

Il n'y a là qu'un changement de notations qui, au fond, n'a rien d'indispensable mais qui nous met d'accord avec celles couramment employées par Lie et Engel.

Des deux dernières formules, on tire

$$e^j \beta_{jm}(a) + e'^j \alpha_{jm}(a) = 0.$$

Considérons maintenant le tableau

$$(32) \qquad \begin{cases} e^j \beta_{jm}(a) + e'^j \alpha_{jm}(a) = 0, \\ e'^j \beta_{jm}(b) + e''^j \alpha_{jm}(b) = 0, \\ e''^j \beta_{jm}(c) + e^j \alpha_{jm}(c) = 0. \end{cases}$$

La première équation (32) permet d'exprimer les $e'$ par les $e$ avec des coefficients en $a$. La seconde permet d'exprimer, *exactement de la même manière*, les $e''$ par les $e'$ avec des $b$ à la place des $a$. La troisième permet d'exprimer, toujours de manière linéaire et homogène, les $e''$ par les $e$ initiaux avec des coefficients en $c$.

C'est le même principe que celui de l'association de (1), (2), (3) et, si les $a$, $b$, $c$ sont justement ceux du groupe initial, les $c$ sont des fonctions des $a$ et des $b$.

On voit que l'expression des $e'$ en $e$ fait naître un groupe *linéaire* et *homogène* associé de la manière la plus intime et la plus immédiate au groupe initial et à ses groupes paramétriques; c'est le *groupe adjoint*.

Nous ne reviendrons pas, en détail, sur les transformations infinitésimales du groupe adjoint mais l'union que nous venons de signaler est si intime que, toutes les fois que l'étude du groupe initial ou de ses groupes paramétriques fait apparaître brièvement un système différentiel linéaire et homogène, ce système se rapporte au groupe adjoint.

Ainsi reprenons la connexion affine de $\pi^i_k$ définis en (26). Elle admet un parallélisme généralisé qui se traduit par le système différentiel

$$du^i + \pi^i_k u^k = 0.$$

Ce dernier, pour

$$\pi^i_k = \Gamma^i_{\lambda k} dx_\lambda,$$

donnerait le résultat bien connu

$$du^i + \Gamma^i_{\lambda k} u^k dx_\lambda = 0.$$

Ici, avec (26) dont le $\pi^j$ sera le $\varpi^j$ terminant le paragraphe précédent, on a

$$du^i + c^i_{jk} \lambda^j u^k dt = 0.$$

C'est bien l'équation

$$de'^s + c^s_{\nu k} \lambda^\nu e'^k dt = 0 \tag{33}$$

de Lie et Engel (*Transformationsgruppen*, t. I, p. 273).

*Le groupe adjoint correspond au parallélisme dans les espaces tordus mais non incurvés des groupes paramétriques.*

Le système (33) s'intègre sous la forme

$$e'^s = \psi^s_j(\lambda^1 t, \lambda^2 t, \ldots, \lambda^r t) e^j,$$

les $\lambda t$ pouvant s'exprimer en $a$. On a donc bien des équations finies telles que la première (32).

Observons aussi que l'équation (26) du Sixième Mémoire (Ch. I) est aussi une équation (33); encore une fois, on ne conçoit guère que de tels systèmes différentiels linéaires puissent apparaître dans les fondements de la Théorie des groupes continus sans indiquer l'existence du groupe adjoint. A propos de cette équation (26) on peut dire qu'elle révélait le groupe adjoint en assurant définitivement l'existence des groupes paramétriques. Ces groupes et le groupe initial sont manifestement inséparables.

[**9**] *Volumes et géodésiques dans les espaces de groupes.* — M. E. Cartan, toujours dans sa *Géométrie des groupes* (p. 45) a étudié des éléments de volume

$$d\tau_1 = \varpi^1(a)\,\varpi^2(a)\ldots\varpi^r(a) = \omega^1(b)\,\omega^2(b)\ldots\omega^r(b),$$
$$d\tau_2 = \omega^1(a)\,\omega^2(a)\ldots\omega^r(a) = \varpi^1(b)\,\varpi^2(b)\ldots\varpi^r(b).$$

Il n'a indiqué que les membres en $a$; nous adjoignons les membres en $b$ d'après le tableau (B). M. Cartan montre que les éléments $d\tau_1$ et $d\tau_2$ sont différents; il n'en est que plus intéressant d'ajouter qu'ils peuvent avoir, malgré cela, les mêmes expressions analytiques, $d\tau_1$ s'exprimant en $a$ comme $d\tau_2$ en $b$. Et réciproquement.

Il y a quelque chose d'analogue pour les géodésiques des espaces de groupes (*loc. cit.*, p. 42).

On peut les représenter très symétriquement par le tableau

$$\frac{\varpi^1(a)}{m^1} = \frac{\varpi^2(a)}{m^2} = \ldots = \frac{\varpi^r(a)}{m^r} \quad \text{ou} \quad \frac{\omega^1(b)}{m^1} = \frac{\omega^2(b)}{m^2} = \ldots = \frac{\omega^r(b)}{m^r};$$
$$\frac{\omega^1(a)}{n^1} = \frac{\omega^2(a)}{n^2} = \ldots = \frac{\omega^r(a)}{n^r} \quad \text{ou} \quad \frac{\varpi^1(b)}{n^1} = \frac{\varpi^2(b)}{n^2} = \ldots = \frac{\varpi^r(b)}{n^r}.$$

M. Cartan ne considère que les systèmes de gauche, en $a$, de ce tableau et il établit que ces systèmes ont la même intégrale générale. La chose devient évidente si l'on compare avec les formes possibles en $b$.