

FERNAND AIMOND

**Recherches d'hydrodynamique en vue de la détermination du mouvement de l'eau sur un barrage-déversoir**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3<sup>e</sup> série*, tome 21 (1929), p. 139-221

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1929\\_3\\_21\\_\\_139\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1929_3_21__139_0)

© Université Paul Sabatier, 1929, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# RECHERCHES D'HYDRODYNAMIQUE

EN VUE

## DE LA DÉTERMINATION DU MOUVEMENT DE L'EAU SUR UN BARRAGE-DÉVERSOIR

Par M. FERNAND AIMOND.



### INTRODUCTION

L'écoulement de l'eau par déversoir a fait depuis plus d'un siècle l'objet de nombreuses recherches, tant théoriques qu'expérimentales. Jusqu'à présent, aucune théorie satisfaisante n'a pu être donnée des phénomènes observés. La seule connaissance précise que nous en ayons résidie dans les expériences effectuées par Bazin et ses successeurs, qui concernent les cas les plus répandus dans la pratique et qui sont résumées dans les différentes formules de Bazin.

Ces formules ne sont valables que dans des limites assez étroites, celles des expériences mêmes d'où elles dérivent. Cependant la connaissance de l'écoulement par déversoir dans d'autres conditions a pris de nos jours une importance nouvelle. On construit en effet aujourd'hui pour des usines hydro-électriques des barrages fixes de grande hauteur sur des cours d'eau qui ont des crues dont l'importance exige, par raison d'économie, leur écoulement par-dessus le barrage lui-même et non pas par une dérivation spéciale trop coûteuse. Ce sont ce que l'on appelle des barrages-déversoirs. Les résultats de Bazin ne leur sont pas applicables. Ils ont en effet une hauteur de plusieurs dizaines de mètres, et la lame déversante peut présenter une hauteur d'une dizaine de mètres ou plus au-dessus de la crête. Dans les expériences de Bazin, la hauteur de la lame au-dessus du seuil ne dépassait pas 60 centimètres.

D'ailleurs, la connaissance exacte de l'écoulement présente à la fois un intérêt technique et financier de premier ordre. Il est en effet indispensable de connaître la surface libre du mouvement pour fixer à quelle hauteur il convient de pouvoir élever les vannes qui surmontent en général le barrage pour permettre l'écoule-

ment de la crue la plus importante. D'autre part, de la forme de la crête du barrage dépend, pour une hauteur donnée de la lame déversante, le débit écoulé par mètre linéaire de vanne. Il en résulte que la détermination du coefficient de débit du barrage-déversoir est indispensable pour fixer le nombre de vannes nécessaires. Comme celui-ci peut varier dans d'assez grandes proportions suivant la forme donnée au profil de crête, il peut y avoir une différence de prix importante dans la fourniture et la pose des vannes suivant la forme donnée à ce profil.

L'industriel qui doit faire exécuter un barrage-déversoir se préoccupe en conséquence de déterminer à priori les circonstances du mouvement en l'étudiant sur modèles réduits de laboratoire géométriquement semblables à l'ouvrage à construire. Quelle est la valeur de cette méthode, et peut-elle donner les résultats que l'on en attend? C'est la difficile question de la similitude en hydraulique.

On sait qu'il faut distinguer deux espèces de similitude, celle de Reech-Froude et celle d'Osborne Reynolds. Jusqu'à présent, on n'a jamais constaté l'exactitude de la similitude de Reynolds pour le cas de l'écoulement de l'eau en déversoir. Par contre, des expériences faites sur des modèles réduits, géométriquement semblables mais de dimensions différentes, vérifient assez bien la loi de similitude de Reech-Froude. Malheureusement, on ne sait pas dans quelles limites cette loi est applicable, ni si les mouvements étudiés sur modèles de laboratoire, de dimensions nécessairement restreintes, sont semblables au sens de Reech-Froude aux mouvements réels sur barrages-déversoirs de dimensions envisagées plus haut.

En général, la viscosité intervient dans les mouvements que l'on peut réaliser sur un barrage-déversoir de laboratoire. A ce point de vue, il est remarquable que la loi de similitude de Reech-Froude soit vérifiée. Mais d'autre part, sur un barrage-déversoir de plusieurs dizaines de mètres de hauteur avec une lame déversante d'une dizaine de mètres d'épaisseur, il semble bien à priori, et tout le monde est d'accord sur ce point, que la viscosité doit jouer un rôle négligeable et que l'eau s'y comporte comme un fluide parfait. Comment alors concevoir qu'il puisse y avoir similitude au sens de Reech-Froude entre ce mouvement sans viscosité et le mouvement avec viscosité qui se produit sur un modèle de laboratoire? C'est là, à notre sens, le point faible de la méthode.

D'un autre côté, les expériences sur barrages-déversoirs réduits présentent des difficultés particulières et sont peu précises. Comme les résultats sont multipliés par un coefficient très grand, on peut arriver à des erreurs absolues considérables. En outre, il est malaisé d'étudier ainsi l'influence du profil de crête du barrage sur la forme du mouvement.

Il serait donc intéressant de pouvoir se faire à priori une idée suffisamment exacte du mouvement à l'aide de considérations théoriques. Or, le mouvement étant parfait, les équations de l'hydrodynamique s'appliquent. Toutefois il convient de préciser dans quelle région il en est bien ainsi. Pour que la viscosité de l'eau soit

négligeable et que le mouvement soit dépourvu de turbulence, il faut que l'accélération des particules liquides ait une valeur notable. En amont du barrage, il y a en général toute une région où l'eau est presque au repos; l'hypothèse que le liquide est parfait n'est donc réalisée qu'à partir du moment où l'on est assez près de la crête pour que les filets liquides aient une accélération suffisante. D'un autre côté, sur la paroi aval du barrage, ou bien la vitesse des filets liquides tend à devenir constante et la turbulence apparaît, ou bien cette vitesse croît constamment, et il se produit un phénomène physique qui se superpose au phénomène principal et arrive à le masquer complètement, c'est l'entraînement de l'eau, lequel finit par transformer les filets liquides en gouttelettes de plus en plus fines. En définitive, ce n'est que dans une région suffisamment voisine de la crête du barrage que l'on peut appliquer les équations de l'hydrodynamique des fluides parfaits incompressibles.

Cependant, ainsi posé, le problème est encore trop général. Il s'introduit tout naturellement une restriction importante. Il faut que le mouvement parfait envisagé n'entraîne pas pour le fluide des déformations susceptibles d'introduire des forces de viscosité. Cette condition s'exprime mathématiquement sous la forme suivante : la valeur du tourbillon doit varier assez peu d'un point à l'autre du mouvement.

En effet, soient  $u$  et  $v$  les composantes de la vitesse au point  $(x, y)$  et  $t$  le tourbillon en ce point,

$$t = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Le fluide étant incompressible, on a d'autre part

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

De ces équations on déduit sans peine les deux suivantes :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial t}{\partial y},$$

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial t}{\partial x}.$$

Or  $\Delta u$  et  $\Delta v$  sont les facteurs du coefficient de viscosité  $\mu$  dans les équations de Navier qui s'écrivent d'une manière générale

$$u' = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \Delta u \right),$$

$$v' = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \Delta v \right),$$

$u'$  et  $v'$  étant les composantes de l'accélération de la molécule liquide,  $U$  la fonction des forces (dans le cas actuel la pesanteur),  $p$  la pression et  $\rho$  la masse spécifique. Pour que la viscosité n'intervienne pas, il faut que  $\Delta u$  et  $\Delta v$  soient suffisamment petits, ce qui justifie la proposition énoncée.

En particulier, en supposant  $t = 0$ , on aura toute une famille de mouvements compatibles avec toutes les conditions du problème. On est ainsi conduit à l'étude des mouvements irrotationnels comme étant ceux pour lesquels la viscosité n'intervient pas.

On est aussi amené à envisager les mêmes mouvements pour la raison suivante. Le plus souvent, le mouvement de déversement par-dessus un déversoir est déterminé par l'ouverture de vannes. Avant cette ouverture, le liquide est au repos. L'ouverture supposée progressive n'introduit aucune force extérieure. Le liquide n'est constamment soumis qu'au champ de pesanteur qui est conservatif. D'après le théorème de Lagrange, l'existence d'un potentiel des vitesses dans le liquide au repos persiste pendant tout le mouvement, le mouvement est irrotationnel. A la limite, on peut admettre que le mouvement permanent qui s'établit, qui est limite d'un mouvement irrotationnel, est lui-même irrotationnel. Il est à noter que cette manière de raisonner ne suppose pas essentiellement le mouvement parfait; le mouvement peut être visqueux, à condition seulement que les équations de Navier lui soient applicables. L'expérience semble confirmer ce résultat. M. Camichel a en effet pu constater que l'écoulement par-dessus un déversoir de laboratoire d'un même volume d'eau et d'huile très visqueuse s'effectuait dans le même temps.

Dans les pages qui suivent, nous nous proposons l'étude du mouvement plan permanent d'un fluide pesant incompressible admettant une surface libre, en vue de son application à la détermination du mouvement de l'eau sur un barrage déversoir.

Ce sujet a été traité par un grand nombre de mathématiciens et d'hydrauliciens dans l'hypothèse où le mouvement est irrotationnel. Citons tout d'abord les travaux de M. Sautreaux (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3<sup>e</sup> série, tome 10, année 1893, supplément page 95; *Annales de l'Enseignement supérieur de Grenoble*, tome 6, n<sup>o</sup> 1, année 1894, page 1; *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5<sup>e</sup> série, tome 7, année 1901, page 125). D'autre part, l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (tome 4, volume 5, fascicule 2, pages 121 et suivantes) donne le résumé d'un certain nombre de recherches dont nous ne retiendrons que la note de M. Villat sur l'écoulement des fluides pesants (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, année 1913, tome 156, pages 58 et suivantes), laquelle a été développée dans un Mémoire paru aux *Annales de l'École Normale supérieure* (année 1915, tome 32, pages 77 et suivantes). Enfin on trouvera dans la *Technische Hydrodynamik* du professeur Prasil, 2<sup>e</sup> édition (Berlin, Julius Springer, 1926) d'importantes constructions graphiques permettant de résoudre le problème ainsi que l'exposé de solutions analytiques, en particulier de celle de A. R. Richardson.

Dans une première partie, nous résumerons ces différents travaux, et nous rappellerons un certain nombre de propriétés des fonctions harmoniques et de la représentation conforme dont nous aurons à faire usage ensuite.

Dans une seconde partie, nous ferons l'étude du mouvement irrotationnel d'un fluide pesant incompressible avec surface libre, en nous plaçant au point de vue de son application au mouvement de l'eau sur un barrage-déversoir.

Dans une troisième partie, nous indiquerons comment on peut envisager l'extension des méthodes de la deuxième partie quand on ne fait plus l'hypothèse que le mouvement est irrotationnel.

Dans le cas du mouvement irrotationnel seul envisagé dans les deux premières parties, nous ferons les conventions suivantes : le plan du mouvement sera le plan  $xoy$ ,  $ox$  étant dirigé verticalement de haut en bas, et  $oy$  de gauche à droite ; nous appellerons  $\xi$  le potentiel des vitesses et  $\eta$  la fonction de courant, qui sont des fonctions harmoniques des variables  $x$  et  $y$ , de telle sorte que la quantité complexe  $z = \xi + i\eta$  est une fonction analytique de la quantité complexe  $\zeta = x + iy$  ; en outre, on supposera, sauf avis contraire, que l'axe  $oy$  coïncide avec le plan de charge, c'est-à-dire que l'équation de Bernoulli sur la surface libre est

$$V^2 = 2gx,$$

$V$  désignant la vitesse de la molécule fluide au point d'abscisse  $x$  de la surface libre.

---

PREMIÈRE PARTIE  
RAPPEL DE RÉSULTATS ANTÉRIEURS

---

§ 1. — Recherches de MM. Sautreaux, Villat, Prasil, Richardson.

La méthode de M. Sautreaux.

Il s'agit de déterminer le potentiel des vitesses  $\xi$  en fonction de  $x$  et  $y$ , de telle manière qu'on ait sur la surface libre la relation

$$V^2 = 2gx,$$

sachant que  $\xi$  vérifie l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0.$$

M. Sautreaux écrit l'intégrale de cette équation sous la forme

$$\xi = f_1(x + iy) + f_2(x - iy),$$

$f_1$  et  $f_2$  étant deux fonctions arbitraires d'une variable complexe  $u$ . Pour que la fonction  $\xi$  soit bien réelle, comme il est nécessaire, il suffit de prendre

$$f_1(u) = M(u) + iN(u),$$

$$f_2(u) = M(u) - iN(u).$$

On a alors en effet

$$f_1(x + iy) = M(x + iy) + iN(x + iy),$$

$$f_2(x - iy) = M(x - iy) - iN(x - iy).$$

On voit que l'on obtient  $f_2(x - iy)$  en changeant  $i$  en  $-i$  dans  $f_1(x + iy)$ . Il en résulte bien que  $f_1(x + iy)$  et  $f_2(x - iy)$  sont conjugués et que leur somme, qui est précisément  $\xi$ , est réelle.

Soient  $\gamma_1(f_1)$  et  $\gamma_2(f_2)$  les fonctions inverses de  $f_1(u)$  et  $f_2(u)$ , de telle sorte que l'on ait

$$\gamma_1[f_1(u)] = u, \quad \gamma_2[f_2(u)] = u.$$

On aura

$$f'_1(u) = \frac{1}{\gamma'_1[f_1(u)]}, \quad f'_2(u) = \frac{1}{\gamma'_2[f_2(u)]}.$$

La vitesse au point  $(x, y)$  a pour composantes

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial x} = f'_1(x + iy) + f'_2(x - iy),$$

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial y} = i[f'_1(x + iy) - f'_2(x - iy)],$$

et par suite

$$V^2 = u^2 + v^2 = 4f'_1(x + iy)f'_2(x - iy) = \frac{4}{\gamma'_1[f_1(x + iy)]\gamma'_2[f_2(x - iy)]}.$$

On a d'autre part

$$x + iy = \gamma_1[f_1(x + iy)],$$

$$x - iy = \gamma_2[f_2(x - iy)],$$

d'où

$$2x = \gamma_1[f_1(x + iy)] + \gamma_2[f_2(x - iy)]$$

par suite sur la surface libre on a

$$\frac{4}{\gamma'_1[f_1(x + iy)]\gamma'_2[f_2(x - iy)]} = g \left[ \gamma_1[f_1(x + iy)] + \gamma_2[f_2(x - iy)] \right].$$

D'autre part, sur la surface libre on a également

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v},$$

puisque c'est une trajectoire, et, par suite

$$\frac{dx}{f'_1(x + iy) + f'_2(x - iy)} = \frac{dy}{i[f'_1(x + iy) - f'_2(x - iy)]},$$

équation équivalente à la suivante

$$\frac{dx + idy}{f'_2(x - iy)} = \frac{dx - idy}{f'_1(x + iy)},$$

ou encore

$$f'_1(x + iy) d(x + iy) = f'_2(x - iy) d(x - iy),$$



ou en intégrant

$$f_1(x + iy) = f_2(x - iy) + C,$$

C désignant une constante que l'on peut toujours supposer nulle, puisque le potentiel des vitesses n'est défini qu'à une constante additive près. On a donc sur la surface libre

$$\frac{4}{\chi'_1[f_2(x - iy)]\chi'_2[f_2(x - iy)]} = g \left[ \chi_1[f_2(x - iy)] + \chi_2[f_2(x - iy)] \right],$$

et par suite les deux fonctions  $\chi_1$  et  $\chi_2$  doivent satisfaire à la relation

$$\frac{4}{\chi'_1(u)\chi'_2(u)} = g[\chi_1(u) + \chi_2(u)].$$

M. Sautreaux introduit la condition supplémentaire

$$\chi_1(u) + \chi_2(u) = S(u),$$

où  $S(u)$  est une fonction analytique de la variable complexe  $u$ ; on aura alors

$$\begin{aligned} \chi'_1(u) + \chi'_2(u) &= S'(u), \\ \chi'_1(u)\chi'_2(u) &= \frac{4}{gS(u)}. \end{aligned}$$

Il en résulte que  $\chi'_1(u)$  et  $\chi'_2(u)$  sont les racines de l'équation en  $X$

$$X^2 - S'(u)X + \frac{4}{gS(u)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \chi'_1(u) &= \frac{S'(u)}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{S'^2(u) - \frac{16}{gS(u)}}, \\ \chi'_2(u) &= \frac{S'(u)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{S'^2(u) - \frac{16}{gS(u)}}, \end{aligned}$$

d'où en intégrant

$$\begin{aligned} \chi_1(u) &= \frac{S(u)}{2} - \frac{1}{2} \int_{u_0}^u \sqrt{S'^2(u) - \frac{16}{gS(u)}} du + \alpha, \\ \chi_2(u) &= \frac{S(u)}{2} + \frac{1}{2} \int_{u_0}^u \sqrt{S'^2(u) - \frac{16}{gS(u)}} du + \beta, \end{aligned}$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant deux constantes que l'on déterminera par substitution dans l'équation

$$\frac{4}{\chi'_1(u)\chi'_2(u)} = g[\chi_1(u) + \chi_2(u)],$$

ce qui donne

$$gS(u) = gS(u) + g\alpha + g\beta,$$

d'où

$$\alpha + \beta = 0.$$

On a donc finalement

$$x + iy = \gamma_1(f_1) = \frac{S(f_1)}{2} - \frac{1}{2} \int_{u_0}^{f_1} \sqrt{S'^2(u) - \frac{16}{gS(u)}} du + \alpha,$$

$$x - iy = \gamma_2(f_2) = \frac{S(f_2)}{2} + \frac{1}{2} \int_{u_0}^{f_2} \sqrt{S'^2(u) - \frac{16}{gS(u)}} du - \alpha,$$

équations qui définissent les fonctions  $f_1(x + iy)$  et  $f_2(x - iy)$ . Sur la surface libre on aura  $f_1 = f_2$ , et, par suite,

$$\begin{aligned} 2x &= S(f_1), \\ 2y &= -\frac{1}{i} \int_{u_0}^{f_1} \sqrt{S'^2(u) - \frac{16}{gS(u)}} du + \alpha. \end{aligned}$$

Pour que les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  répondent bien aux conditions posées plus haut, il faut que  $f_1(x + iy)$  et  $f_2(x - iy)$  soient conjugués. A ce sujet M. Sautreaux se contente de dire que,  $\gamma'_1(u)$  et  $\gamma'_2(u)$  étant conjugués, il en est de même de  $\gamma_1(u)$  et  $\gamma_2(u)$ , donc aussi de  $f_1(x + iy)$  et  $f_2(x - iy)$ . Il est probable que M. Sautreaux admet là implicitement une hypothèse supplémentaire dont il ne parle pas mais qui est nécessaire pour aboutir à ses conclusions.

Il est facile de préciser quelle est cette hypothèse. Puisque l'on a sur la surface libre

$$2x = S(f_1),$$

$S(f_1)$  est réel sur la surface libre. D'autre part, on a

$$f_1(x + iy) = f_2(x - iy)$$

sur la surface libre. Pour que  $f_1$  et  $f_2$  soient conjugués, il est nécessaire que sur la surface libre  $f_1$  et  $f_2$  soient réels. Il résulte de là que la fonction  $S(u)$  doit être réelle pour  $u$  réel. Avec cette condition, les conclusions de M. Sautreaux sont exactes : les fonctions obtenues  $f_1(x + iy)$  et  $f_2(x - iy)$  sont bien conjuguées et le problème posé est effectivement résolu par la formule

$$\xi = f_1(x + iy) + f_2(x - iy).$$

M. Sautreaux montre qu'on peut déterminer la fonction  $S(u)$  de telle manière

que la surface libre ait une équation donnée  $y = f(x)$ . Il suffit d'éliminer  $x$  et  $y$  entre cette équation et les équations de la surface libre, ce qui donne

$$\sqrt{\frac{16}{gS(u)} - S^2(u)} = \frac{S'(u)}{2} f' \left( \frac{S(u)}{2} \right),$$

qui définit la fonction  $S(u)$ .

#### La méthode de M. Villat.

Nous nous limiterons pour l'exposé de la méthode de M. Villat au cas où la pression atmosphérique règne sur une ligne de courant toute entière, c'est-à-dire où la surface libre est infinie dans les deux sens, le mouvement étant limité par une seconde ligne de courant qui n'est assujettie à aucune condition relative à la pression.

M. Villat a recours à la transformation bien connue de Levi-Civita qui consiste à prendre pour fonction inconnue la fonction  $\Omega$  définie par

$$w = \frac{dz}{d\zeta} \quad \text{et} \quad w = e^{-i\Omega}.$$

Si  $u$  et  $v$  désignent les composantes de la vitesse suivant  $ox$  et  $oy$ , on a

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$u - iv = \frac{\partial \xi}{\partial x} + i \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{dz}{d\zeta} = w.$$

Soient  $\Theta$  et  $T$  la partie réelle et la partie imaginaire de  $\Omega$ , de telle sorte que

$$\Omega = \Theta + iT, \quad w = e^{T - i\Theta}.$$

On a, en désignant par  $V$  la vitesse

$$V = |w| = e^T,$$

$$\frac{u + iv}{V} = \frac{V}{u - iv} = \frac{V}{w} = e^{i\Theta}.$$

Ces deux équations donnent une interprétation géométrique de  $\Theta$  et  $T$  :  $\Theta$  représente l'angle avec  $ox$  de la vitesse et  $T$  le logarithme de cette vitesse. Différencions l'équation de Bernoulli sur la surface libre, il vient

$$V \left( \frac{\partial V}{\partial \xi} \right)_{\zeta=0} = g \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)_{\zeta=0}.$$

Comme  $\frac{\partial x}{\partial \xi}$  est la partie réelle de la fonction analytique  $\frac{1}{w}$ , on voit que

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = e^{-T} \cos \Theta.$$

D'autre part

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = e^T \frac{\partial T}{\partial \xi}.$$

Les fonctions  $\Theta$  et  $T$  sont donc assujetties à vérifier pour  $\eta = 0$  la condition

$$e^{2T} \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{\eta=0} = g e^{-T} \cos \Theta,$$

ce qui peut s'écrire encore

$$e^{3T} \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{\eta=0} = g \cos \Theta.$$

Cela posé, M. Villat montre que si l'on appelle  $F(\xi)$  la valeur que prend au point d'abscisse  $\xi$  et d'ordonnée  $\eta = Q$  la partie réelle  $\Theta$  de  $\Omega$  et  $G(\xi)$  celle que prend au point d'abscisse  $\xi$  et d'ordonnée  $\eta = 0$  la partie imaginaire  $T$  de  $\Omega$ , on peut écrire  $\Omega$  sous la forme

$$\Omega = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \frac{ch \frac{Z+x}{2}}{sh \frac{Z-x}{2}} \times \frac{dx}{ch x} + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\beta}{ch \frac{\beta-Z}{2}} \left[ G(\beta) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \frac{sh \frac{\beta+x}{2}}{ch \frac{\beta-x}{2}} \times \frac{dx}{ch x} \right],$$

dans laquelle  $Z$  désigne la quantité  $\pi \left( i - \frac{z}{Q} \right)$ . Pour  $\eta = 0$ , la partie réelle de  $\Omega$

peut s'écrire, après une série de transformations :

$$\Theta = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\beta) d\beta}{sh \frac{\beta-X}{2}} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x) dx}{ch \frac{X-x}{2}},$$

en posant  $X = -\frac{\pi}{Q} \xi$ . Quant à la partie imaginaire de  $\Omega$ , elle est, pour  $\eta = 0$ , égale à  $G(\xi)$ . Pour que la fonction  $\Omega$  soit une fonction du problème il faut donc que l'on ait

$$e^{3G(\xi)} G'(\xi) = g \cos \left( -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\beta) d\beta}{sh \frac{\beta-X}{2}} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x) dx}{ch \frac{X-x}{2}} \right),$$

que l'on peut encore écrire

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x) dx}{ch \frac{X-x}{2}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\beta) d\beta}{sh \frac{\beta-X}{2}} + \text{arc cos} \left( \frac{e^{3G(\xi)} G'(\xi)}{g} \right).$$

Cette équation peut se résoudre par rapport à la fonction  $F$  si l'on se donne la fonction  $G$ . Se donner la fonction  $G$  revient en effet à se donner la fonction

$$\Phi(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\beta) d\beta}{sh \frac{\beta-X}{2}} + \text{arc cos} \left( \frac{e^{3G(\xi)} G'(\xi)}{g} \right),$$

où  $\xi = -\frac{Q}{\pi} X$ . L'équation à résoudre devient

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x) dx}{ch \frac{X-x}{2}} = \Phi(X).$$

Pour la résoudre, M. Villat remarque que la fonction

$$U(Z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x) dx}{ch \frac{Z-x}{2}}$$

a pour  $Z$  réel et égal à  $X$  sa partie réelle nulle et sa partie imaginaire égale au premier membre de l'équation à résoudre, donc à  $\Phi(X)$ , et pour  $Z = X + i\pi$  sa partie imaginaire égale à  $F(X)$ . On a par conséquent

$$\Phi(X) = \frac{U(X)}{i},$$

ce qui exige que  $\Phi(X)$  soit la valeur prise pour  $Z$  réel par une fonction analytique  $\Phi(Z)$  dans la bande comprise entre les droites  $Z = i\pi$  et  $Z = -i\pi$ . Supposons cette condition vérifiée, on a

$$U(Z) = i\Phi(Z).$$

La fonction  $\frac{U(Z)}{i}$  réelle pour  $Z$  réel prend deux valeurs imaginaires conjuguées aux deux points  $X + i\pi$  et  $X - i\pi$ . La partie imaginaire de  $U(Z)$  pour  $Z = X + i\pi$ , qui est la partie réelle de  $\frac{U(Z)}{i}$ , est donc la demi-somme des parties réelles de cette fonction pour  $Z = X + i\pi$  et  $Z = X - i\pi$ . On a donc

$$F(X) = \frac{U(X + i\pi) + U(X - i\pi)}{2i}$$

d'où

$$F(X) = \frac{\Phi(X + i\pi) + \Phi(X - i\pi)}{2}.$$

Puisque la connaissance de  $G(\xi)$  permet de calculer  $F(\xi)$ , on voit que  $\Omega(Z)$  se trouve parfaitement déterminé. La fonction  $\zeta$  cherchée se trouve alors déterminée par l'équation

$$d\zeta = \frac{dz}{w} = e^{i\Omega} dz,$$

c'est-à-dire

$$\zeta = \int e^{i\Omega} dz.$$

Si l'on se rapporte à l'interprétation géométrique des quantités  $\Theta$  et  $T$  et par suite des fonctions  $F$  et  $G$ , on voit que la méthode précédente consiste à se donner sur la surface libre la vitesse au point correspondant à la valeur  $\xi$  du potentiel des vitesses, ce qui revient, d'après les termes mêmes de M. Villat, « à se donner en quelque sorte la surface libre au moins qualitativement et à en déduire la forme des parois solides ».

Nous allons compléter ce résultat en montrant que l'on peut se donner quantitativement la surface libre et en déduire la fonction  $G(\xi)$  et réciproquement.

Soit  $\chi(x, y) = 0$  l'équation de la surface libre; si l'on désigne par  $s$  l'abscisse curviligne le long de la surface libre, on a

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = u \frac{dx}{ds} + v \frac{dy}{ds}.$$

D'ailleurs on a

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{V}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{V},$$

et par suite

$$\frac{d\xi}{ds} = u \frac{u}{V} + v \frac{v}{V} = \frac{u^2 + v^2}{V} = V.$$

L'équation de Bernoulli donne  $V = \sqrt{2gx}$ , d'où

$$\frac{d\xi}{ds} = \sqrt{2gx}, \quad \text{d'où} \quad \xi = \int \sqrt{2gx} \cdot ds.$$

$\xi$  se trouve ainsi déterminé en tout point de la surface libre, puisque l'équation  $\gamma(x, y) = 0$  permet le calcul de  $s$  en fonction de  $x$ . On trouve

$$\xi = \int \sqrt{2gx \left( 1 + \frac{\gamma_x^2}{\gamma_y^2} \right)} dx.$$

La fonction  $G(\xi)$  se trouve déterminée par l'élimination de  $x$  entre cette équation et la suivante :

$$G = \log V = \frac{1}{2} \log(2gx).$$

Réciproquement, donnons-nous  $G(\xi)$ , on en déduit sur la surface libre

$$\begin{aligned} 2gx &= e^{2G(\xi)}, \\ dx &= \frac{G'(\xi)}{g} e^{2G(\xi)} d\xi, \\ ds &= \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} \frac{G'(\xi)}{g} e^{2G(\xi)} d\xi, \end{aligned}$$

et, en substituant dans  $\frac{d\xi}{ds} = \sqrt{2gx}$ , il vient

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} \frac{G'(\xi)}{g} e^{2G(\xi)}} = e^{G(\xi)},$$

d'où l'on tire

$$dy = \sqrt{g^2 \frac{e^{-6G(\xi)}}{G'^2(\xi)} - 1} \cdot \frac{G(\xi)}{g} e^{2G(\xi)} d\xi,$$

soit finalement

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2g} e^{2G(\xi)}, \\ y = \int \sqrt{1 - \frac{G'^2(\xi) e^{6G(\xi)}}{g^2}} \cdot e^{-G(\xi)} d\xi. \end{cases}$$

Telles sont les équations paramétriques de la surface libre en fonction de  $G(\xi)$ .

La méthode de M. Villat permet donc la détermination du mouvement quand on se donne la surface libre.

**La construction de Prasil.**

Les courbes  $\xi = c^e$  et  $\eta = c^e$  forment deux familles de courbes orthogonales. Extrayons de ces deux familles les deux familles spéciales

$$\xi = C_m, \quad \eta = D_n,$$

où  $C_m$  et  $D_n$  sont de la forme

$$C_m = a + \frac{m}{p} Q, \quad D_n = \frac{n}{p} Q,$$

$a$  étant une constante quelconque donnée,  $p$  un entier positif donné,  $m$  un entier variable allant de  $-\infty$  à  $+\infty$ , et  $n$  un entier variable prenant seulement les

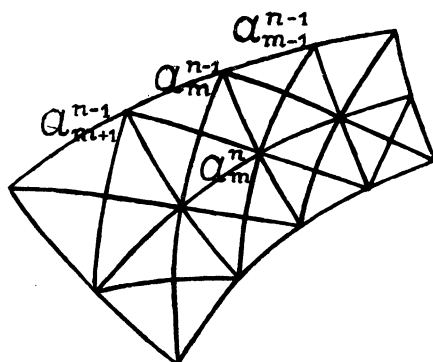


FIG. 1.

valeurs  $0, 1, 2, \dots, p$ . Les deux familles de courbes  $\xi = C_m$  et  $\eta = D_n$  dessinent dans le plan un quadrillage dont les éléments sont des quadrilatères curvilignes auxquels correspondent dans le plan  $z$  des carrés de côté  $\frac{Q}{p}$  (fig. 1). Les diagonales de ces carrés forment deux familles de droites que nous nommerons les droites diagonales. Celles dont le coefficient angulaire est positif formeront les diagonales positives, les autres seront les diagonales négatives. Aux droites diagonales du plan  $z$  correspondent les courbes diagonales du plan  $\zeta$  que l'on partagera également en positives et négatives. Si  $p$  est choisi assez grand, les quadrilatères curvilignes du plan  $\zeta$  sont assimilables à de petits carrés. Marquons les points de rencontre  $a_m^n$  des équipotentielles  $\xi = C_m$  avec les lignes de courant  $\eta = D_n$ . Si l'on remarque que le point  $a_m^n$  est à l'intersection de la diagonale positive passant par le point  $a_{m-1}^{n-1}$  et de la diagonale négative passant par le point  $a_{m+1}^{n-1}$ , on voit que les points  $a_m^n$  correspondant à une même valeur de  $n$  pourront s'obtenir à partir des points  $a_m^{n-1}$ , où  $n$  a la même valeur, de la manière suivante :

Par chaque point  $a_m^{n-1}$ , où  $n$  a une valeur fixe, on fera passer deux droites  $\Delta_m^{n-1}$



et  $\Delta'^{n-1}$ , la première obtenue en faisant tourner le segment  $a_m^{n-1} a_{m+1}^{n-1}$  autour de  $a_m^{n-1}$  de  $45^\circ$  et dans le sens positif, la seconde obtenue en faisant tourner le même segment autour du même point du même angle mais dans le sens négatif. Le point d'intersection des droites  $\Delta_{m-1}^{n-1}$  et  $\Delta'_{m+1}^{n-1}$  fournira le point  $a_m^n$ .

En supposant successivement  $n = 1, 2, \dots, p$ , on obtiendra successivement tous les points  $a_m^n$  où  $n \geq 1$  à partir des points  $a_m^0$ . L'ensemble des constructions nécessaires constitue la construction de Prasil. Cette construction exige la connaissance d'une ligne de courant et de la répartition des équipotentiellles sur cette ligne de courant.

Appliquons cette construction au cas de l'écoulement d'un fluide pesant avec surface libre, les autres hypothèses étant conservées. Pour cela, donnons-nous la surface libre, sur laquelle la répartition des équipotentiellles est connue en vertu de la formule

$$\xi = \int \sqrt{2gx} ds$$

précédemment démontrée. On peut donc exécuter la construction de Prasil à partir de la surface libre, ce qui revient à résoudre graphiquement le problème résolu analytiquement par MM. Sautreaux et Villat.

La construction de Prasil a été utilisée par M. Eydoux pour obtenir à priori le coefficient de débit d'un barrage-déversoir, notamment pour le barrage de Pinet sur le Tarn, où les résultats obtenus ont été confirmés par ceux de M. Camichel qui exécutait simultanément des expériences sur modèles réduits.

Les considérations qui conduisent à la construction de Prasil manquent de rigueur. Il y a lieu de se demander si, en faisant tendre vers zéro la dimension maxima des quadrilatères élémentaires considérés, la solution obtenue tend vers une limite. Nous laisserons pour l'instant ce point de côté, nous réservant d'y revenir ultérieurement.

#### La solution analytique de A.-R. Richardson.

Désignons par  $s$  l'abscisse curviligne et par  $\theta$  l'angle de la vitesse avec  $ox$  sur la surface libre. On a

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \theta.$$

Comme  $\frac{d\xi}{ds} = \sqrt{2gx}$ , on a

$$\sqrt{2gx} \frac{dx}{d\xi} = \cos \theta, \quad \sqrt{2gx} \frac{dy}{d\xi} = \sin \theta,$$

soit encore

$$dx = \frac{1}{\sqrt{2gx}} \cos \theta d\xi, \quad dy = \frac{1}{\sqrt{2gx}} \sin \theta d\xi.$$

La première de ces équations donne par intégration

$$\sqrt{2gx} = \left[ \int 3g \cos \theta d\xi \right]^{\frac{1}{3}}.$$

On a donc

$$dx = \left[ \int 3g \cos \theta d\xi \right]^{\frac{-1}{3}} \cos \theta d\xi, \quad dy = \left[ \int 3g \cos \theta d\xi \right]^{\frac{-1}{3}} \sin \theta d\xi,$$

ce qui s'écrit encore

$$d\zeta = \left[ \int 3g \cos \theta d\xi \right]^{\frac{-1}{3}} e^{i\theta} d\xi,$$

$d\zeta$  étant la différentielle de la variable complexe  $\zeta$  sur la surface libre.

Dans le cas évidemment très général où  $\theta$  est une fonction analytique de  $\xi$ , l'équation différentielle précédente entre la variable réelle  $\xi$  et la variable complexe  $\zeta$  entraîne l'équation différentielle suivante dans tout le plan  $z$

$$d\zeta = \left[ \int 3g \cos \theta dz \right]^{\frac{-1}{3}} e^{i\theta} dz,$$

où  $\zeta$  n'est plus assujéti à être sur la surface libre et où  $\theta$  désigne une fonction, holomorphe de  $z$  dans une certaine région du plan  $z$  comprenant l'axe réel, devenant réelle pour  $z$  réel. Par intégration on obtient

$$(A) \quad \zeta = \int \left[ \int 3g \cos \theta dz \right]^{\frac{-1}{3}} e^{i\theta} dz.$$

Cette équation est l'intégrale générale des mouvements avec surface libre.

Ce n'est pas cette intégrale, à laquelle arrive Richardson, mais celle obtenue en prenant pour fonction inconnue

$$f(z) = \cos \theta,$$

c'est-à-dire

$$\zeta = \int \left[ \int 3gf(z) dz \right]^{-\frac{1}{3}} (f(z) + i\sqrt{1 - (f(z))^2}) dz.$$

Reprenons maintenant la transformation de Levi-Civita, en choisissant pour nouvelles inconnues

$$w = \frac{dz}{d\zeta}, \quad \Omega = i \log w;$$

on obtient

$$w = \left[ \int 3gf(z) dz \right]^{\frac{1}{3}} (f(z) - i\sqrt{1 - (f(z))^2}),$$

$$\Omega = -\arccos f(z) + i \log \left( \int 3gf(z) dz \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Finalement en posant

$$F(z) = \left[ \int 3gf(z) dz \right]^{\frac{1}{3}},$$

on obtient les formules de Richardson

$$\zeta = \int e^{i \arccos \left( \frac{1}{3g} \frac{d(F(z))^3}{dz} \right)} \frac{dz}{F(z)},$$

$$w = F(z) e^{-i \arccos \left( \frac{1}{3g} \frac{d(F(z))^3}{dz} \right)},$$

$$\Omega = -\arccos \left( \frac{1}{3g} \frac{d(F(z))^3}{dz} \right) + i \log F(z).$$

Ces formules permettent de résoudre le problème de la détermination du mouvement quand on connaît la surface libre supposée analytique. En effet, quand on connaît celle-ci, on peut calculer  $x$  en fonction de  $\zeta$  sur la surface libre, d'où l'on déduit  $\theta$  en fonction de  $\zeta$  par l'équation

$$\sqrt{2gx} \frac{dx}{d\zeta} = \cos \theta.$$

De la connaissance de  $\theta$  on tire celle de  $f(z)$  et de  $F(z)$ .

## § 2. — Rappel de propriétés des fonctions harmoniques.

**Effet d'une représentation conforme.**

Soit  $U(x, y)$  une fonction harmonique des variables  $x$  et  $y$ . La représentation conforme

$$\xi = X(x, y), \quad \eta = Y(x, y)$$

transforme la fonction  $U$  en une fonction harmonique de  $\xi$  et  $\eta$ , et l'on a entre les longueurs des gradients de la fonction  $U$  par rapport aux anciennes et nouvelles variables la relation

$$|\text{grad}_{x,y} U| = |\text{grad}_{\xi,\eta} U| \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2}}$$

déduite facilement des propriétés des déterminants fonctionnels.

**Problème de Cauchy.**

Le problème de Cauchy relatif aux fonctions harmoniques est le suivant : déterminer une fonction harmonique prenant des valeurs données sur une courbe donnée et dont la dérivée normale sur cette courbe prend également des valeurs données. On peut toujours par une représentation conforme remplacer la courbe donnée par une droite, et le problème de Cauchy est ramené au suivant : déterminer une fonction harmonique  $U(x, y)$  satisfaisant aux deux équations suivantes

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0} = \psi(x).$$

Si  $\varphi(x)$  et  $\psi(x)$  sont deux fonctions analytiques réelles de  $x$ , il existe deux fonctions analytiques de la variable complexe  $z = x + iy$  holomorphes au voisinage de l'axe réel et se réduisant respectivement à  $\varphi(x)$  et à  $\psi(x)$  pour  $z$  réel et égal à  $x$ . Soient  $\varphi(z)$  et  $\psi(z)$  ces fonctions. La fonction harmonique  $U$  satisfaisant aux conditions ci-dessus est manifestement la partie réelle de la fonction

$$\chi(z) = \varphi(z) - i \int \psi(z) dz.$$

La fonction  $\chi(z)$  est définie dans toute région du plan  $z$  où  $\varphi(z)$  et  $\psi(z)$  sont eux-mêmes définis. Mais  $\chi(z)$  peut être défini dans des régions où  $\varphi(z)$  et  $\psi(z)$  cessent d'exister.

## § 3. — Rappel de propriétés de la représentation conforme.

**Représentation conforme définie par l'équation**  $\zeta = \int f(z) dz$ .

Soit  $a$  un domaine simplement connexe du plan  $z$ , à l'intérieur duquel  $f(z)$  est holomorphe et ne s'annule pas. Au contour du domaine  $a$  correspond dans le plan  $\zeta$  une ligne fermée que l'on peut toujours supposer tracée sur une surface de Riemann  $\Sigma$  sur laquelle elle sera la frontière d'un domaine  $A$  simplement connexe sur  $\Sigma$ , correspondant d'une manière univoque et réciproque au domaine  $a$  par la relation

$$\zeta = \int f(z) dz.$$

**Application d'un théorème de M. Fejer.**

Appelons domaine infini simple un domaine dont la frontière est constituée par une courbe sans points doubles décrite toujours dans le même sens et admettant deux branches infinies ayant chacune une asymptote. Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — Si  $\zeta = F(Z)$  est une fonction holomorphe dans le demi-plan supérieur  $\Pi$  du plan de la variable  $Z$  et réalise une représentation conforme de ce demi-plan sur un domaine infini simple  $\mathfrak{R}$  du plan  $\zeta$ , on peut former une suite de fonctions  $F_1(Z), F_2(Z) \dots$  holomorphes dans tout le plan  $Z$  sauf au point  $Z = -\frac{ik}{2}$ , telle que chacune des fonctions  $\zeta = F_1(Z), \zeta = F_2(Z), \dots$  réalise une représentation conforme du demi-plan  $\Pi$  sur un domaine infini simple du plan  $\zeta$ , et qu'à l'intérieur et sur le contour de tout domaine fini déduit du demi-plan  $\Pi$  les deux suites  $F_1(Z), F_2(Z), \dots$  et  $F'_1(Z), F'_2(Z), \dots$  convergent uniformément, la première vers  $F(Z)$ , la seconde vers  $F'(Z)$ .  $k$  est un nombre positif réel quelconque.

Pour démontrer ce théorème nous nous appuierons sur les trois lemmes suivants :

**LEMME I.** — Si  $u = f(z)$  désigne une fonction holomorphe dans un cercle  $c$  de rayon  $r$  de centre l'origine et réalise une représentation conforme de ce cercle sur un domaine fini du plan de la variable  $u$ , la fonction  $f(z)$  est développable dans le cercle  $c$  en une série de Mac-Laurin uniformément convergente à l'intérieur du cercle  $c$  et sur son contour.

Ce lemme a été démontré par M. Fejer dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome 156 (séance du 6 janvier 1913, page 49).

LEMME 2. — Si  $u = f(z)$  est une fonction holomorphe dans un cercle  $c$  de centre l'origine et de rayon  $r$  et réalise une représentation conforme de ce cercle sur un domaine fini  $U$  du plan  $u$ , on peut trouver une suite de polynômes  $\bar{P}_1(z)$ ,  $\bar{P}_2(z)$ , ... tendant uniformément vers  $f(z)$  pour  $|z| \leq r$  et telle que chacune des fonctions  $u = \bar{P}_1(z)$ ,  $u = \bar{P}_2(z)$ , ... réalise une représentation conforme sur un domaine fini du plan  $u$ , aucune des dérivées  $\bar{P}'_1(z)$ ,  $\bar{P}'_2(z)$ , ... ne s'annulant pour  $|z| = r$ .

Soit

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

le développement de Mac-Laurin de la fonction  $f(z)$ . Posons

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n.$$

La suite des polynômes  $P_1(z)$ ,  $P_2(z)$ , ... converge uniformément vers  $f(z)$  et la suite des dérivées  $P'_1(z)$ ,  $P'_2(z)$ , ... converge uniformément vers  $f'(z)$ , pour  $|z| \leq r$ .

Soit  $c'$  un cercle quelconque de rayon  $r'$  inférieur à  $r$  et concentrique au cercle  $c$ . Considérons deux autres cercles  $c''$  et  $c'''$  concentriques au cercle  $c$  et de rayons  $r''$  et  $r'''$  vérifiant les inégalités

$$r' < r'' < r''' < r.$$

La fonction  $u = f(z)$  fait correspondre aux circonférences des cercles  $c'$ ,  $c''$ ,  $c'''$ , des courbes fermées s'enveloppant l'une l'autre  $C'$ ,  $C''$ ,  $C'''$ . La fonction  $f'(z)$  ne s'annule pas à l'intérieur du cercle  $c$ ; il s'ensuit que son module admet un minimum  $m$  non nul à l'intérieur et sur le contour du cercle  $c'''$ . On pourra alors trouver un nombre  $n_1$  tel que pour  $n > n_1$ , on ait à l'intérieur du cercle  $c'''$  et sur son contour

$$|P'_n(z) - f'(z)| < m.$$

Il en résulte que la fonction  $P'_n(z)$  ne pourra s'annuler à l'intérieur du cercle  $c'''$  ni sur son contour. La fonction  $u = P_n(z)$  donnera donc une représentation conforme du cercle  $c'''$  sur un domaine  $U'_n$  simplement connexe sur une surface de Riemann  $R$  déduite du plan  $u$ , et limitée par une courbe  $C''_n$ .

La fonction  $u = P_n(z)$  fait correspondre au cercle  $c'$  un domaine  $U'_n$  limité par une courbe  $C''_n$ . Soit  $d$  un nombre inférieur à la distance minima des courbes  $C'$  et  $C''$  et à celle des courbes  $C''$  et  $C'''$ . On peut choisir un nombre  $n_2$  au moins égal à  $n_1$  tel que l'on ait

$$|P_n(z) - f(z)| < d$$

à l'intérieur du cercle  $c$ . Les points du domaine  $U'_n$ , considérés comme faisant partie du plan  $u$ , sont donc intérieurs à la courbe  $C''$ , laquelle sera elle-même

intérieure au domaine du plan  $u$  composé des points du domaine  $U_n'''$  considérés comme faisant partie de ce plan.

Nous nous proposons de démontrer que le domaine  $U_n'$  est simplement connexe dans le plan  $u$ . En effet, s'il en était autrement, il existerait un point  $M$  du plan  $u$  qui correspondrait sur la surface de Riemann  $R$  à deux points  $M_1$  et  $M_2$  du domaine  $U_n'$ , et on pourrait tracer sur cette surface une courbe joignant  $M_1$  et  $M_2$  et intérieure au domaine  $U_n'$ ; cette courbe considérée comme appartenant au plan  $u$  serait fermée et intérieure à la courbe  $C''$ , et contiendrait à son intérieur un point  $P$  extérieur au domaine  $U_n'$  qui, ou bien serait singulier pour la fonction  $u = P_n(z)$ , ou bien annulerait la dérivée de cette fonction. Le point  $P$  étant intérieur à la courbe  $C''$  sera intérieur au domaine du plan  $u$  composé des points du domaine  $U_n'''$  considérés comme faisant partie de ce plan. Il existerait donc un nombre  $z_p$  tel que  $P_n(z_p)$  soit précisément l'affixe du point  $P$ ; ce point ne serait pas singulier pour la fonction  $u = P_n(z)$ , et n'annulerait pas la dérivée de cette fonction, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il en résulte, qu'étant donné un cercle  $c'$  de rayon inférieur à  $r$  et de centre l'origine, il existe un nombre  $n_2$  tel que, pour  $n > n_2$ , la fonction  $u = P_n(z)$  définit une représentation conforme du cercle  $c'$  sur un domaine simplement connexe du plan  $u$ , la dérivée  $P_n'(z)$  ne s'annulant pas sur le contour de ce cercle.

Donnons-nous une suite décroissante de nombres positifs tendant vers zéro  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ . Au nombre  $\varepsilon_m$  on peut faire correspondre un nombre  $\sigma_m$  inférieur à l'unité tel que l'on ait

$$|f(\sigma_m z) - f(z)| < \frac{\varepsilon_m}{2}$$

pour  $|z| \leq r$ . Soit  $c_m$  le cercle de rayon  $\sigma_m r$ . Il lui correspond un nombre  $p$  tel que pour  $n > p$  la fonction  $u = P_n(z)$  réalise une représentation conforme du cercle  $c_m$  sur un domaine simplement connexe du plan  $u$ . D'autre part, on peut trouver un nombre  $q$  tel que pour  $n > q$  on ait

$$|P_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon_m}{2}$$

pour  $|z| \leq r$ .

Il suit de là que, si  $n_m$  est supérieur à la fois à  $p$  et à  $q$ , la fonction  $u = P_{n_m}(\sigma_m z)$  réalise une représentation conforme du cercle  $c$  sur un domaine simplement connexe du plan  $u$ , et l'on a

$$|P_{n_m}(\sigma_m z) - f(\sigma_m z)| < \frac{\varepsilon_m}{2},$$

et par conséquent, l'on a

$$|P_{n_m}(\sigma_m z) - f(z)| < \varepsilon_m.$$

En outre la dérivée  $P'_{n_m}(\sigma_m z)$  ne s'annule pas pour  $|z| = r$ . La suite des polynômes  $\overline{P}_m(z) = \overline{P}_{n_m}(\sigma_m z)$  satisfait donc à toutes les conditions du lemme 2 qui se trouve démontré.

LEMME 3. — Si  $u = f(z)$  est une fonction holomorphe dans un cercle  $c$  de centre l'origine et de rayon  $r$  et réalise une représentation conforme de ce cercle sur un domaine fini  $U$  du plan  $u$  et dont le contour passe par l'origine  $u = 0$  correspondant au point  $z = -ir$ , on peut former une suite de fonctions entières  $f_1(z), f_2(z), \dots$  admettant chacune pour seul zéro le zéro simple  $z = -ir$ , convergeant uniformément vers  $f(z)$  pour  $|z| \leq r$ , et telle que chacune des fonctions  $u = f_1(z), u = f_2(z), \dots$  réalise une représentation conforme du cercle  $c$  sur un domaine simplement connexe du plan  $u$ .

En effet la suite  $\overline{P}_1(-ir), \overline{P}_2(-ir), \dots$  tendra vers zéro, et si l'on pose

$$Q_m(z) = \overline{P}_m(z) - \overline{P}_m(-ir),$$

la nouvelle suite  $Q_1(z), Q_2(z), \dots$  tendra uniformément vers  $f(z)$  pour  $|z| \leq r$ , chacune des fonctions  $u = Q_1(z), u = Q_2(z), \dots$  réalisant une représentation conforme du cercle  $c$  sur un domaine simplement connexe du plan  $u$  passant par l'origine.

Le point  $z = -ir$  est un zéro simple de  $Q_m(z)$ , puisque  $Q'_m(z) = \overline{P}'_m(z)$  ne s'annule pas pour  $|z| = r$ . La fonction  $\frac{Q_m(z)}{z+ir}$  ne s'annule donc pas pour  $|z| \leq r$ , et on peut trouver un nombre  $r' > r$  tel que  $\left| \frac{Q_m(z)}{z+ir} \right|$  reste supérieur à un nombre positif fixe pour  $|z| < r'$ . La fonction  $\log \left( \frac{Q_m(z)}{z+ir} \right)$  est donc holomorphe pour  $|z| < r'$  et développable en une série de polynômes uniformément convergente pour  $|z| \leq r$ . On pourra former une suite de polynômes  $H_1^m(z), H_2^m(z), \dots$  tendant uniformément vers  $\log \left( \frac{Q_m(z)}{z+ir} \right)$  pour  $|z| \leq r$ . La suite des fonctions  $(z+ir) e^{H_1^m(z)}, (z+ir) e^{H_2^m(z)}, \dots$  tendra uniformément vers  $Q_m(z)$  pour  $|z| \leq r$ . La suite des fonctions  $\frac{d}{dz} \left( (z+ir) e^{H_1^m(z)} \right), \frac{d}{dz} \left( (z+ir) e^{H_2^m(z)} \right), \dots$  tendra uniformément vers  $Q'_m(z)$  pour  $|z| \leq r$ . On pourra donc choisir un nombre  $p_m$  tel que pour  $n > p_m$  la fonction  $\frac{d}{dz} \left( (z+ir) e^{H_n^m(z)} \right)$  ne s'annule pas pour  $|z| \leq r$ . Il en résulte que la fonction  $u = (z+ir) e^{H_n^m(z)}$  donne une représentation conforme du cercle  $c$  sur un domaine du plan  $u$  quand  $n > p_m$ . Si l'on pose

$$f_n(z) = (z+ir) e^{H_{p_m+m}^m(z)},$$



la suite des fonctions  $f_1(z), f_2(z), \dots$  tendra uniformément vers  $f(z)$  pour  $|z| \leq r$ , et chacune des fonctions  $u = f_1(z), u = f_2(z), \dots$  donnera une représentation conforme du cercle  $c$  sur un domaine du plan  $u$ . On démontrerait comme au lemme 2 que ce domaine est simplement connexe dans le plan  $u$ . Le lemme 3 se trouve démontré.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème énoncé. Soit  $\mathcal{R}$  un domaine infini simple donné dans le plan de la variable  $\zeta$ , ne contenant pas l'origine  $\zeta = 0$  à son intérieur ni sur son contour. La fonction  $u = \frac{1}{\zeta}$  donne une représentation conforme de ce domaine sur un domaine  $U$  du plan  $u$  dont le contour passe par l'origine auquel nous appliquerons le lemme 3. En conservant les notations de ce lemme, on voit que la fonction  $\zeta = \frac{1}{f(z)}$  donnera une représentation conforme du cercle  $c$  sur le domaine  $\mathcal{R}$ , le point  $z = -ir$  ayant pour correspondant le point à l'infini de  $\mathcal{R}$ . Chacune des fonctions  $\zeta = \frac{1}{f_1(z)}, \zeta = \frac{1}{f_2(z)}, \dots$  donnera une représentation conforme du cercle  $c$  sur un domaine infini simple du plan  $\zeta$ , et la suite des fonctions  $\frac{1}{f_1(z)}, \frac{1}{f_2(z)}, \dots$  convergera uniformément vers  $\frac{1}{f(z)}$  à l'intérieur et sur le contour de tout domaine déduit du cercle  $c$  qui ne contiendra pas le point  $z = -ir$  sur son contour.

Soit  $k$  un nombre positif quelconque donné, effectuons la représentation conforme  $Z = -\frac{ikz - ir}{2z + ir}$  qui fait correspondre le cercle  $c$  au demi-plan supérieur  $\Pi$  de la variable  $Z$ , le point  $z = -ir$  correspondant au point à l'infini de ce demi-plan. La relation qui donne  $z$  en fonction de  $Z$  est  $z = -ir \frac{2Z - ik}{2Z + ik}$ . Posons

$$F(Z) = \frac{1}{f\left(-ir \frac{2Z - ik}{2Z + ik}\right)}, \quad F_m(Z) = \frac{1}{f_m\left(-ir \frac{2Z - ik}{2Z + ik}\right)}.$$

La fonction  $\zeta = F(Z)$  donnera une représentation conforme au demi-plan  $\Pi$  sur le domaine  $\mathcal{R}$ , les points à l'infini se correspondant. Chacune des fonctions  $\zeta = F_1(Z), \zeta = F_2(Z), \dots$  donnera une représentation conforme du demi-plan  $\Pi$  sur un domaine infini simple du plan  $\zeta$ , et la suite des fonctions  $F_1(Z), F_2(Z), \dots$  convergera uniformément vers  $F(Z)$  dans tout domaine fini déduit du demi-plan  $\Pi$ , chacune de ces fonctions étant holomorphe dans tout le plan  $Z$  sauf au point  $Z = -\frac{ik}{2}$ . D'ailleurs la suite  $F'_1(Z), F'_2(Z), \dots$  convergera uniformément vers  $F'(Z)$  dans tout domaine fini déduit du demi-plan  $\Pi$ . Le théorème énoncé se trouve démontré.

## § 4. — Cas particuliers de représentation conforme.

Considérons dans le plan d'une variable  $Z = X + iY$  les deux domaines  $D$  et  $d$  définis respectivement par les inégalités  $-1 < Y < 1$  et  $0 < Y < 1$ . A chacun de ces domaines nous nous proposons de faire correspondre par représentation conforme un certain nombre de domaines particuliers du plan d'une variable  $\zeta = x + iy$ .

Domaines  $\Delta$  et  $\delta$ .

Nous appellerons domaine  $\Delta$  (fig. 2) un domaine du plan  $\zeta$  tel qu'on puisse trouver une représentation conforme entre ce domaine et le domaine  $D$ , dans

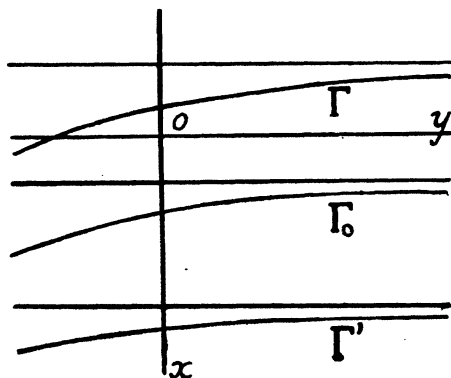


FIG. 2.

laquelle aux droites  $Y = C$  du domaine  $D$  correspondent des courbes  $\Gamma_c$  jouissant des propriétés suivantes :

- 1° Chaque courbe  $\Gamma_c$  est infinie dans les deux sens.
- 2° Chaque courbe  $\Gamma_c$  coupe en un point au plus toute parallèle à l'axe  $oy$ .
- 3° Chaque courbe  $\Gamma_c$  a une de ces branches infinies qui admet pour asymptote la demi-droite  $y > 0$ ,  $x = \alpha + \beta C$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  étant deux constantes positives dont la première peut être nulle.

- 4° Chaque courbe  $\Gamma_c$  est située toute entière dans le demi-plan  $x > \alpha + \beta C$ .

Soient  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$  les courbes  $\Gamma_c$  correspondant aux droites  $Y=0$ ,  $Y=1$ ,  $Y=-1$ .

Nous appellerons domaine  $\delta$  déduit du domaine  $\Delta$  le domaine compris entre les courbes  $\Gamma_0$  et  $\Gamma$ .

L'existence de domaines  $\Delta$  et  $\delta$  résulte du théorème suivant :

**THÉORÈME.** — Si  $S(Z)$  désigne une fonction, holomorphe dans le domaine  $D$  et

autour du point  $X = -\infty$  de ce domaine, dont la partie réelle est toujours positive, et qui prend pour  $X = -\infty$  la valeur  $-i\beta$ ,  $\beta$  étant une constante positive, on peut déterminer la constante d'intégration de l'intégrale  $\int S(Z) dZ$ , de façon qu'elle donne une représentation conforme du domaine D sur un domaine  $\Delta$ .

En effet, considérons la représentation conforme  $Z = \frac{2}{\pi} \log \frac{1+Z_1}{1-Z_1}$  du cercle de rayon un et de centre l'origine du plan de la variable  $Z_1$  sur le domaine D. Exprimons  $Z$  en fonction de  $Z_1$  dans l'intégrale  $\int S(Z) dZ$ ; elle devient, en posant  $S(Z) = S_1(Z_1)$

$$\frac{4}{\pi} \int \frac{S_1(Z_1) dZ_1}{1-Z_1^2}.$$

Quand  $Z$  tend vers le point  $-\infty$  du domaine D,  $Z_1$  tend vers  $-1$ ,  $S_1(Z_1)$  tend vers  $-i\beta$ , et, comme  $S_1(Z_1)$  est holomorphe par hypothèse autour du point  $Z_1 = -1$ , on a

$$S_1(Z_1) = -i\beta + \dots,$$

les termes non écrits contenant  $1+Z_1$  en facteur; l'intégrale considérée devient alors

$$-\frac{2i\beta}{\pi} \int \frac{dZ_1}{1+Z_1} + \dots,$$

les termes non écrits tendant vers une limite, quand  $Z_1$  tend vers  $-1$ . Comme l'intégrale  $\int \frac{dZ_1}{1+Z_1}$  est égale à  $\log(1+Z_1)$ , lorsque  $Z$  tend vers le point  $-\infty$  du domaine D,  $Y$  conservant une valeur constante  $C$ , l'intégrale  $\int S(Z) dZ$  a sa partie imaginaire qui tend vers  $+\infty$  et sa partie réelle qui tend vers une limite finie de la forme  $a + \beta C$ ,  $a$  étant une constante indépendante de  $C$ . En choisissant convenablement la constante d'intégration on aura  $a = \alpha$ . L'intégrale  $\int S(Z) dZ$  fera alors correspondre à la droite  $Y = C$  une courbe  $\Gamma_c$  asymptote à la demi-droite  $y > 0$ ,  $x = \alpha + \beta C$ . D'ailleurs, puisque la dérivée de l'intégrale  $\int S(Z) dZ$  a sa partie réelle positive, la courbe  $\Gamma_c$  coupe en un point au plus toute parallèle à l'axe  $oy$  et se trouve toute entière dans le demi-plan  $x > \alpha + \beta C$ . Il en résulte que l'intégrale  $\int S(Z) dZ$  donne une représentation conforme du domaine D sur un domaine  $\Delta$ .

DÉTERMINATION DE LA FONCTION  $S(Z)$  PAR UNE REPRÉSENTATION CONFORME. — On

pourra prendre pour la fonction  $S(Z)$  qui figure au théorème précédent la fonction qui donne la représentation conforme du domaine  $D$  sur un domaine  $W$  (fig. 3) simplement connexe du demi-plan  $u > 0$  d'une variable  $w = u + iv$ , dont le contour est tangent au point  $w = -i\beta$  à l'axe imaginaire  $u = 0$  et est analytique au voisinage de ce point, lequel correspondra au point  $X = -\infty$  du domaine  $D$ .

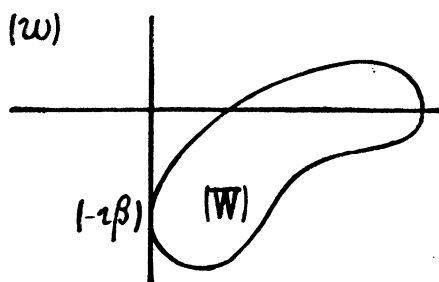


FIG. 3.

DÉTERMINATION DU DOMAINE  $\Delta$  AYANT DES COURBES  $\Gamma$  ET  $\Gamma'$  DONNÉES. — Il résulte des propriétés générales de la représentation conforme qu'un domaine  $\Delta$  est déterminé par la connaissance des courbes  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ , sous la seule condition qu'elles satisfassent respectivement aux conditions imposées aux courbes  $\Gamma_c$  pour  $C = 1$  et  $C = -1$ .

ANGLE  $\Theta$ . — Deux courbes  $\Gamma_c$  et  $\Gamma_{c'}$  d'un domaine  $\Delta$  seront dites homologues si  $C + C' = 0$ . Deux points  $M$  et  $M'$  seront dits homologues s'ils se trouvent respectivement sur deux courbes  $\Gamma_c$  et  $\Gamma_{c'}$  homologues et correspondent à une même valeur de  $X$ . Les tangentes  $MT$  et  $M'T'$  à deux courbes homologues  $\Gamma_c$  et  $\Gamma_{c'}$  en des points homologues  $M$  et  $M'$  et dirigées chacune dans le sens des  $X$  croissants seront dites homologues. Nous appellerons  $\Theta$  la mesure algébrique de l'angle  $(MT, M'T')$ . Si  $\zeta = F(Z)$  est l'équation de la représentation conforme du domaine  $D$  sur le domaine  $\Delta$  considéré, on a

$$\Theta = \arg F'(Z) - \arg F'(Z'),$$

$Z$  et  $Z'$  étant les affixes des points du domaine  $D$  correspondant aux points  $M$  et  $M'$ . L'angle  $\Theta$  est toujours compris entre  $-\pi$  et  $\pi$ .

DOMAINES  $\bar{\Delta}$ ,  $\underline{\Delta}$ ,  $\bar{\delta}$ ,  $\underline{\delta}$ . — Nous appellerons domaine  $\bar{\Delta}$  un domaine  $\Delta$  où l'angle  $\Theta$  est partout positif et domaine  $\underline{\Delta}$  un domaine  $\Delta$  où l'angle  $\Theta$  est toujours négatif.

Un domaine  $\bar{\delta}$  est un domaine  $\delta$  déduit d'un domaine  $\bar{\Delta}$ ; un domaine  $\underline{\delta}$  est un domaine  $\delta$  déduit d'un domaine  $\underline{\Delta}$ .



rapport à  $O_w O'_w$ , passant par les points  $O_w$  et  $O'_w$ , et dont le contour est analytique au voisinage du point  $O_w$ .

La représentation conforme du domaine  $\bar{\omega}$  sur le domaine  $\bar{w}$  fait correspondre au domaine  $\Omega$  un domaine  $W$ , les points  $W_0$  et  $W_1$  correspondant respectivement aux points  $O_w$  et  $O'_w$ , l'arc de cercle  $W_0 W_1$  correspondant au segment de droite  $O_w O'_w$ . A deux points  $\mu$  et  $\mu'$  du domaine  $\Omega$  symétriques par rapport à  $O_w O'_w$  correspondent deux points  $m$  et  $m'$  alignés sur  $O'_w$ , et quand  $\mu$  et  $\mu'$  se déplacent sur une parallèle à la droite  $\omega'' = 0$ ,  $m$  et  $m'$  se déplacent sur une demi-droite issue de  $O'_w$ .

Soit  $\omega = \Omega(Z)$  la représentation conforme du domaine  $D$  sur le domaine  $\Omega$ , l'axe réel du domaine  $D$  et le segment  $O_w O'_w$  se correspondant, de telle manière que  $O_w$  corresponde au point  $X = -\infty$ . Le domaine  $\Omega$  correspondant d'une manière univoque et réciproque à chacun des domaines  $D$  et  $W$ , ces deux derniers domaines se correspondent d'une manière univoque et réciproque par une équation de la forme  $w = W(Z)$ .

Nous dirons que le domaine  $\Delta$  qui correspond d'une manière univoque et réciproque au domaine  $D$  par l'équation  $\zeta = \int W(Z) dZ$  est un domaine  $\Delta'$ . Un domaine  $\delta'$  sera un domaine  $\delta$  déduit d'un domaine  $\Delta'$ .

A deux points homologues  $M$  et  $M'$  d'un domaine  $\Delta'$  correspondent deux points  $m$  et  $m'$  du domaine  $W$  qui seront dits homologues et qui sont alignés sur  $O'_w$ . L'angle  $(O_w m', O_w m)$  est égal à l'angle  $\Theta$  relatif aux points  $M$  et  $M'$ , et l'on voit que  $\Theta$  est partout positif ou partout négatif suivant que  $k$  est extérieur ou intérieur à l'intervalle  $(\alpha, \beta)$ . Un domaine  $\Delta'$  sera donc un domaine  $\bar{\Delta}$  ou un domaine  $\underline{\Delta}$  suivant que  $k$  est extérieur ou intérieur à l'intervalle  $(\alpha, \beta)$ .

DOMAINES  $\Delta_1, \bar{\Delta}_1, \underline{\Delta}_1, \Delta'_1, \delta_1, \bar{\delta}_1, \underline{\delta}_1, \delta'_1$ . — Nous appellerons domaine  $\Delta_1$  un domaine  $\Delta$  dont les courbes  $\Gamma_c$  ne rencontrent qu'en un point au plus toute parallèle à l'axe  $ox$ . Si  $\zeta = F(Z)$  donne la représentation conforme du domaine  $D$  sur un domaine  $\Delta_1$ , la fonction  $F'(Z)$  a sa partie réelle positive et sa partie imaginaire négative dans tout le domaine  $D$ . L'angle  $\Theta$  est alors compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ .

Nous appellerons domaines  $\bar{\Delta}_1, \underline{\Delta}_1, \Delta'_1, \delta_1, \bar{\delta}_1, \underline{\delta}_1, \delta'_1$  des domaines  $\bar{\Delta}, \underline{\Delta}, \Delta', \delta, \bar{\delta}, \underline{\delta}, \delta'$  où le domaine  $\Delta$  correspondant est un domaine  $\Delta_1$ .

PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DES DOMAINES  $\delta$ . — La propriété fondamentale des domaines  $\delta$  est donnée par le théorème suivant :

*Théorème.* — Si  $F(Z) = P(X, Y) + iQ(X, Y)$  désigne la fonction qui donne la représentation conforme du domaine  $d$  sur un domaine  $\delta$ , on a en tout point de  $d$  les inégalités  $P(X, Y) + P(X, -Y) > 0$ ,  $Q(X, Y) - Q(X, -Y) > 0$ .

En effet,  $P(X, Y)$  et  $P(X, -Y)$  vont chacun en croissant quand  $X$  croît,  $Y$  restant constant. Il en résulte que leur somme est supérieure à

$$P(-\infty, Y) + P(-\infty, -Y),$$

c'est-à-dire à

$$(x + \beta Y) + (x - \beta Y) = 2x.$$

$x$  étant positif ou nul, la première inégalité est démontrée. D'autre part

$$Q(X, Y) - Q(X, -Y) = \int_{-Y}^Y \frac{\partial Q}{\partial Y}(X, Y) dY.$$

Comme  $\frac{\partial Q}{\partial Y}(X, Y)$  est la partie réelle de  $F'(Z)$  qui est partout positive, le second membre de l'égalité précédente est positif, la seconde inégalité est démontrée.

#### Domaines $\Lambda$ et $\lambda$ .

Considérons dans un plan auxiliaire  $\zeta_i = x_i + iy_i$ , un domaine  $\Delta$  dont les courbes  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  admettent chacune deux asymptotes, les demi-droites  $y_i > 0$ ,  $x_i = \beta$  et  $y_i > 0$ ,  $x_i = \alpha' - \beta'$  pour la première, les demi-droites  $y_i > 0$ ,  $x_i = -\beta$  et  $y_i > 0$ ,  $x_i = \alpha' + \beta'$  pour la seconde,  $\alpha$  et  $\beta$  étant les constantes habituelles du domaine  $\Delta$ , et  $\alpha'$  et  $\beta'$  étant deux nouvelles constantes positives vérifiant l'inégalité  $\alpha' - \beta' > \beta$ . Nous appellerons  $\Delta_s$  un domaine  $\Delta$  ainsi défini et  $\delta_s$  le domaine  $\delta$  correspondant. Le domaine  $\Delta_s$  sera situé tout entier à l'intérieur du domaine  $S$  compris entre les droites  $x_i = -\beta$  et  $x_i = \alpha' + \beta'$  (*fig. 7*).

Soit  $\varphi$  un nombre positif compris entre zéro et  $\pi$ . Marquons dans le plan  $\zeta$  habituel (*fig. 8*) le point  $o'$  de l'axe des  $x$  d'abscisse  $a$  positive ou nulle et traçons les demi-droites  $o'\Xi'_1$ ,  $o'\Xi'$ ,  $o'\Xi_1$ ,  $o'\Xi_s$ ,  $o'\Xi$ ,  $o'\Xi'_0$ , dont les angles avec  $o'x$  ont respectivement pour valeurs

$$\begin{aligned} \text{pour } o'\Xi'_1, & \quad \frac{\pi}{2} - \varphi - \frac{\beta'\varphi}{\alpha'}, \\ \text{pour } o'\Xi, & \quad \frac{\pi}{2} - \varphi, \\ \text{pour } o'\Xi_1, & \quad \frac{\pi}{2} - \varphi + \frac{\beta'\varphi}{\alpha'}, \\ \text{pour } o'\Xi_s, & \quad \frac{\pi}{2} - \frac{\beta\varphi}{\alpha'}, \\ \text{pour } o'\Xi, & \quad \frac{\pi}{2}, \\ \text{pour } o'\Xi'_0, & \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\beta\varphi}{\alpha'}. \end{aligned}$$

Nous désignerons par  $\Sigma$  le domaine décrit par une demi-droite tournant autour du point  $o'$  dans le sens positif de la position  $o'\Xi'_1$  à la position  $o'\Xi'_0$ . Ce domaine est simplement connexe parce que

$$(o'\Xi'_1, o'\Xi'_0) = \frac{\beta'\varphi}{\alpha'} + \varphi + \frac{\beta\varphi}{\alpha'} = \varphi \left( 1 + \frac{\beta + \beta'}{\alpha'} \right) < 2\varphi < 2\pi.$$

L'équation

$$\zeta = a + ie^{-\frac{i\varphi\zeta_1}{\alpha'}} = a + e^{\frac{\varphi y_1}{\alpha'}} \left( \sin \frac{\varphi x_1}{\alpha'} + i \cos \frac{\varphi x_1}{\alpha'} \right)$$

donne la représentation conforme du domaine S du plan  $\zeta_1$  sur le domaine  $\Sigma$  du plan  $\zeta$ . Aux courbes  $\Gamma_c$  du domaine  $\Delta_s$  correspondent des courbes  $G_c$ , et en parti-

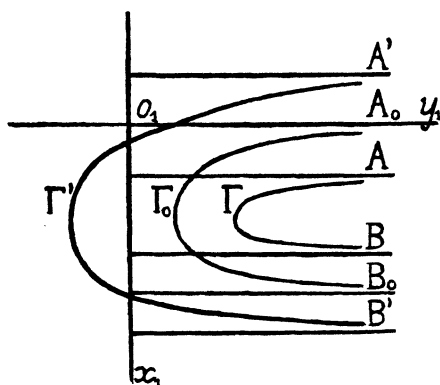


FIG. 7.

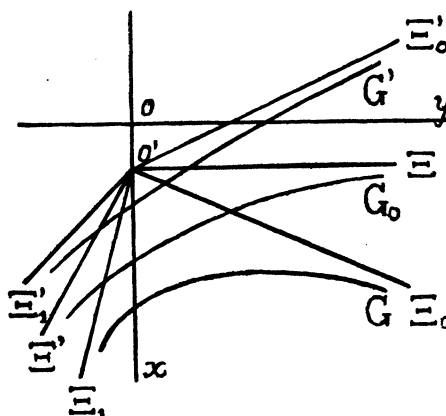


FIG. 8.

culier aux courbes  $\Gamma, \Gamma', \Gamma_0$  les courbes  $G, G', G_0$ . Le domaine qui correspond au domaine  $\Delta_s$  et qui est engendré par les courbes  $G_c$  est ce que nous appellerons un domaine  $\Lambda$ . Le domaine qui correspond au domaine  $\delta_s$  sera dit un domaine  $\lambda$ .

Les courbes  $G_c$  qui engendrent le domaine  $\Lambda$  jouissent manifestement des propriétés suivantes :

- 1° Chaque courbe  $G_c$  est infinie dans les deux sens.
- 2° Chaque courbe  $G_c$  coupe en un point au plus toute demi-droite issue du point  $o'$ .
- 3° Chaque courbe  $G_c$  admet deux directions asymptotiques, les demi-droites issues du point  $o'$  faisant avec  $o'\Xi$  les angles  $\frac{\beta\varphi}{\alpha'}C$  et  $\varphi - \frac{\beta'\varphi}{\alpha'}C$ , et est située à l'intérieur de l'angle formé par ces demi-droites.

Réciproquement, la connaissance de deux courbes  $G$  et  $G'$  ne se coupant pas et satisfaisant respectivement aux conditions précédentes où  $C = 1$  et  $C = -1$  définit un domaine  $\Lambda$ .



PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DES DOMAINES  $\lambda$ . — La propriété fondamentale des domaines  $\lambda$  est donnée par le théorème suivant :

*Théorème.* — Si  $F(Z) = P(X, Y) + iQ(X, Y)$  désigne la fonction qui donne la représentation conforme du domaine  $d$  sur un domaine  $\lambda$ , on a en tout point du domaine  $d$  l'inégalité  $P(X, Y) + P(X, -Y) > 0$ .

En effet, soient  $L_1$  et  $L$  les courbes des plans  $\zeta_1$  et  $\zeta$  correspondant au segment

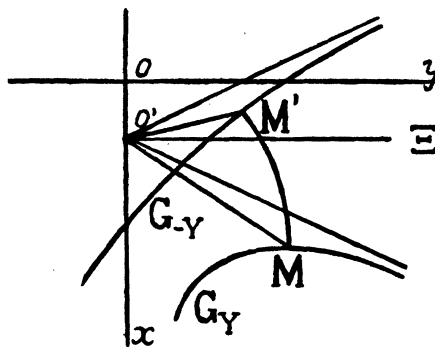


FIG. 9.

de droite du domaine  $D$  joignant les points  $(X, Y)$  et  $(X, -Y)$ . Quand on décrit ce segment dans le sens des  $Y$  croissants, l'ordonnée  $y$ , du point correspondant de  $L$ , va en décroissant, et par suite la distance du point correspondant de  $L$  au point  $o$  va en diminuant. Si donc on appelle  $M$  et  $M'$  les points de  $L$  correspondant aux points  $(X, Y)$ ,  $(X, -Y)$  du domaine  $d$  (fig. 9), on a  $o'M' < o'M$ . D'autre part, comme  $\frac{\beta\varphi}{\alpha'}Y$  est l'angle avec  $o'\Xi$  des directions asymptotiques des courbes  $G_Y$  et  $G_{-Y}$ , on a :

$$(o'\Xi, o'M') < \frac{\beta\varphi}{\alpha'}Y, \quad (o'M, o'\Xi) > \frac{\beta\varphi}{\alpha'}Y,$$

et par suite

$$\sin(o'M, o'\Xi) > \sin(o'\Xi, o'M').$$

Or

$$\begin{aligned} P(X, Y) &= a + o'M \sin(o'M, o'\Xi), \\ P(X, -Y) &= a - o'M' \sin(o'\Xi, o'M'); \end{aligned}$$

on a donc manifestement

$$P(X, Y) + P(X, -Y) > 2a,$$

$a$  étant positif ou nul, le théorème est démontré.

Domaines  $\bar{\Lambda}$  et  $\bar{\lambda}$ .

Nous appellerons domaine  $\bar{\Lambda}$  un domaine du plan  $\zeta$  obtenu en faisant tourner un domaine  $\Lambda$  autour du point  $o'$  dans le sens négatif d'un angle  $\varphi'$  inférieur à  $\pi - \varphi$ . Aux courbes  $G_c$  du domaine  $\Lambda$  correspondent des courbes  $\bar{G}_c$  du domaine  $\bar{\Lambda}$  qui jouissent des propriétés suivantes :

- 1° Chaque courbe  $\bar{G}_c$  est infinie dans les deux sens;
- 2° Chaque courbe  $\bar{G}_c$  coupe en un point au plus toute demi-droite issue du point  $o'$ ;
- 3° Chaque courbe  $\bar{G}_c$  admet deux directions asymptotiques, les demi-droites issues du point  $o'$  faisant avec  $o'\Xi$  les angles  $\frac{\beta\varphi}{\alpha'}C - \varphi'$  et  $\varphi - \frac{\beta'\varphi}{\alpha'}C - \varphi'$ , et est située à l'intérieur de l'angle formé par ces demi-droites.

La connaissance des courbes  $\bar{G}_+$  et  $\bar{G}_-$ , satisfaisant aux conditions précédentes détermine le domaine  $\bar{\Lambda}$ .

Nous appellerons domaine  $\bar{\lambda}$  le domaine compris entre les courbes  $\bar{G}_+$  et  $\bar{G}_-$  d'un domaine  $\bar{\Lambda}$ .

PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DES DOMAINES  $\bar{\lambda}$ . — Cette propriété est la même que pour les domaines  $\lambda$  et est donnée par le théorème suivant :

*Théorème.* — Si  $F(Z) = P(X, Y) + iQ(X, Y)$  désigne la fonction qui donne la représentation conforme du domaine  $d$  sur un domaine  $\bar{\lambda}$ , on a en tout point du domaine  $d$  l'inégalité  $P(X, Y) + P(X, -Y) > 0$ .

### § 5. — Sur une famille particulière de fonctions analytiques.

Nous nous proposons d'indiquer comment on peut choisir la fonction analytique  $\theta(z)$  réelle pour  $z$  réel de manière que l'intégrale  $\int \cos \theta(z) dz$  ne s'annule pas dans un domaine  $a$  donné du demi-plan supérieur de la variable  $z$  ayant sur son contour tout ou partie de l'axe réel, la fonction  $\theta(z)$  étant supposée holomorphe dans tout le domaine  $a$ .

Nous distinguerons deux cas suivant que  $a$  est fini ou infini.

**Le domaine  $a$  est fini.**

Donnons-nous une fonction  $s(z)$  holomorphe et bornée dans le domaine  $a$ , réelle sur le segment de l'axe réel faisant partie du contour de  $a$ , et ne prenant ni

la valeur  $-1$  ni la valeur  $+1$  dans le domaine  $a$ . Choisissons pour fonction  $\theta(z)$  la fonction  $\text{arc cos } s(z)$ , qui est évidemment holomorphe dans le domaine  $a$ . On aura :

$$\int \cos \theta(z) dz = \int s(z) dz.$$

L'intégrale qui figure au second membre de cette équation reste finie dans le domaine  $a$  et on pourra choisir la constante d'intégration de manière qu'elle ne s'annule pas dans le domaine  $a$ . La fonction  $\theta(z)$  satisfera donc aux conditions qui lui sont imposées.

**Le domaine  $a$  est infini.**

Nous le supposons toutefois intérieur à la bande  $b$  définie par les inégalités  $0 < \eta < q$ , où l'on pose  $z = \xi + i\eta$ . Effectuons la représentation conforme de la bande  $b$  sur le demi-cercle de diamètre  $(-1, +1)$  du demi-plan supérieur du plan d'une variable auxiliaire  $\bar{z}$  par les formules

$$z = \frac{2q}{\pi} \log \frac{1 + \bar{z}}{1 - \bar{z}} \quad \text{et} \quad \bar{z} = \frac{e^{\frac{\pi z}{2q}} - 1}{e^{\frac{\pi z}{2q}} + 1},$$

et donnons-nous une fonction  $\bar{s}(\bar{z})$  holomorphe et bornée dans ce demi-cercle, réelle sur le diamètre  $(-1, +1)$  ne prenant ni la valeur  $-1$  ni la valeur  $+1$  dans ce demi-cercle, et satisfaisant en outre à l'une quelconque des trois conditions suivantes :

1° Les parties réelles de  $\bar{s}(\bar{z})$  sont de signes contraires au voisinage des points  $-1$  et  $+1$ .

2°  $\bar{s}(\bar{z})$  tend vers zéro comme  $(1 + \bar{z})^m$ , quand  $\bar{z}$  tend vers  $-1$ ,  $m$  étant un nombre positif quelconque, et sa partie réelle conserve un signe constant quand  $\bar{z}$  tend vers  $+1$ .

3°  $\bar{s}(\bar{z})$  tend vers zéro comme  $(1 - \bar{z})^m$ , quand  $\bar{z}$  tend vers  $+1$ ,  $m$  étant un nombre positif quelconque, et sa partie réelle conserve un signe constant quand  $\bar{z}$  tend vers  $-1$ .

Si  $s(z)$  est ce que devient  $\bar{s}(\bar{z})$  quand on y remplace  $\bar{z}$  par sa valeur en fonction de  $z$ , nous choisirons pour  $\theta(z)$  la fonction  $\text{arc cos } s(z)$ , qui sera évidemment holomorphe dans le domaine  $a$ . On aura d'ailleurs

$$\int \cos \theta(z) dz = \frac{4q}{\pi} \int \frac{\bar{s}(\bar{z})}{1 - \bar{z}^2} d\bar{z}.$$

Nous allons démontrer que l'on peut choisir la constante d'intégration de manière que l'intégrale qui figure au second membre de l'équation précédente ne puisse pas s'annuler dans le demi-cercle de diamètre  $(-1, +1)$ .

Nous examinerons successivement trois cas suivant celle des trois dernières conditions à laquelle satisfait la fonction  $\bar{s}(\bar{z})$  :

1° Les parties réelles de  $\bar{s}(\bar{z})$  sont de signes contraires au voisinage des points  $-1$  et  $+1$ . Partageons le demi-cercle en trois régions, la première  $R_{-1}$  au voisinage du point  $-1$  où la partie réelle de  $\bar{s}(\bar{z})$  conserve un signe constant, la seconde  $R_1$  au voisinage du point  $+1$ , où cette partie réelle conserve un signe constant opposé, la troisième étant constituée par le reste du demi-cercle. Dans cette dernière région l'intégrale  $\int \frac{\bar{s}(\bar{z})}{1-\bar{z}^2} d\bar{z}$  restera finie; dans la région  $R_{-1}$  elle deviendra infinie pour  $\bar{z} = -1$ , mais sa partie réelle ne deviendra infinie qu'avec le signe de la partie réelle de  $\bar{s}(\bar{z}) \log(1+\bar{z})$ , c'est-à-dire avec le signe contraire de  $\bar{s}(\bar{z})$ ; dans la région  $R_1$  elle deviendra infinie pour  $\bar{z} = 1$ , mais sa partie réelle ne deviendra infinie qu'avec le signe de  $-\bar{s}(\bar{z}) \log(1-\bar{z})$ , c'est-à-dire avec le signe de  $\bar{s}(\bar{z})$ . Il résulte de là qu'en vertu des hypothèses faites la partie réelle de l'intégrale  $\int \cos \theta(z) dz$  ne peut devenir infinie dans le domaine  $a$  qu'avec un signe constant. Il est alors évident qu'on peut choisir la constante d'intégration pour qu'elle ne s'annule pas dans le domaine  $a$ .

2°  $\bar{s}(\bar{z})$  tend vers zéro comme  $(1+\bar{z})^m$  quand  $\bar{z}$  tend vers  $-1$ ,  $m$  étant positif, et sa partie réelle conserve un signe constant quand  $\bar{z}$  tend vers  $+1$ . L'intégrale  $\int \frac{\bar{s}(\bar{z})}{1-\bar{z}^2} d\bar{z}$  reste finie quand  $\bar{z}$  tend vers  $-1$ , puisque le coefficient de  $d\bar{z}$  devient infini comme  $\frac{1}{(1+\bar{z})^{1-m}}$ . D'autre part, quand  $\bar{z}$  tend vers  $+1$ , la partie réelle de l'intégrale ne peut devenir infinie qu'avec le signe de la partie réelle de  $-\bar{s}(\bar{z}) \log(1-\bar{z})$ , c'est-à-dire avec un signe constant. Il en résulte que l'intégrale  $\int \cos \theta(z) dz$  ne peut devenir infinie qu'avec un signe constant et on peut par suite choisir la constante d'intégration pour qu'elle ne s'annule pas dans le domaine  $a$ .

3°  $\bar{s}(\bar{z})$  tend vers zéro comme  $(1-\bar{z})^m$  quand  $\bar{z}$  tend vers  $+1$ ,  $m$  étant positif et sa partie réelle conserve un signe constant quand  $\bar{z}$  tend vers  $-1$ . La démonstration est analogue à celle du deuxième cas.

#### Application de la représentation conforme à la détermination de la fonction $\theta(z)$ .

Nous avons vu que la fonction  $\theta(z)$  pouvait dans tous les cas, que le domaine  $a$  soit fini ou infini, être prise égale à  $\text{arc cos } s(z)$ , où  $s(z)$  est une fonction assujettie

à certaines conditions que nous avons énumérées. Nous nous proposons maintenant de donner des exemples de la fonction  $s(z)$  où cette fonction sera déterminée par la représentation conforme d'un domaine  $\sigma$  du plan d'une variable  $s$  sur le domaine  $a$ .

Soient  $A_0, A_1, \dots, A_n$ , des points intérieurs à l'intervalle  $(-1, +1)$  du plan  $s$ , et tels que les vecteurs  $\overline{A_0 A_1}, \overline{A_1 A_2}, \dots, \overline{A_{n-1} A_n}$  soient alternativement positifs et négatifs. Considérons la surface de Riemann  $R_n$  composée des demi-plans  $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-1}$  couvrant alternativement le demi-plan inférieur et le demi-plan supérieur du plan  $s$ , et raccordés entre eux de la manière suivante : le demi-plan  $\Pi_1$  se raccorde au demi-plan  $\Pi_0$  par le segment  $(-\infty, A_0)$ , le demi-plan  $\Pi_2$  se raccorde au demi-plan  $\Pi_1$  par le segment  $(A_1, +\infty)$ , le demi-plan  $\Pi_3$  se raccorde au demi-plan  $\Pi_2$  par le segment  $(-\infty, A_2)$  et ainsi de suite. Nous appellerons domaine  $\sigma_n$  du plan  $s$  un domaine simplement connexe sur la surface de Riemann  $R_n$  ne contenant à son intérieur ni le point  $-1$  ni le point  $+1$ , et dont le contour comprend la suite des segments  $A_0 A_1, A_1 A_2, \dots, A_{n-1} A_n$ , le segment  $A_{p-1} A_p$  étant considéré comme appartenant au demi-plan  $\Pi_p$ . Nous appellerons domaine  $\sigma'_n$  un domaine  $\sigma_n$  dont les points  $A_0$  et  $A_n$  sont situés de part et d'autre de l'origine. Enfin nous appellerons domaine  $\sigma''_n$  un domaine  $\sigma_n$  dont l'un des points  $A_0$  ou  $A_n$  coïncident avec l'origine.

Lorsque le domaine  $a$  est fini, on pourra manifestement prendre pour fonction  $s(z)$  la fonction  $s_n(z)$  qui donne la représentation conforme d'un domaine  $\sigma_n$  sur le domaine  $a$ .

Lorsque le domaine  $a$  est infini, on pourra prendre pour fonction  $s(z)$ , soit la fonction  $s'_n(z)$  qui donne la représentation conforme d'un domaine  $\sigma'_n$  sur le domaine  $a$ , soit la fonction  $s''_n(z)$  qui donne la représentation conforme d'un domaine  $\sigma''_n$  sur le domaine  $a$ . Il résulte en effet des propriétés de la représentation conforme, et sous des conditions très générales que nous jugeons inutile de préciser, que les fonctions  $s'_n(z)$  et  $s''_n(z)$  satisfont aux conditions imposées à la fonction  $s(z)$ .

## DEUXIÈME PARTIE

### MOUVEMENT IRRIGATIONNEL AVEC SURFACE LIBRE

---

#### I

##### GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DE MOUVEMENT IRRIGATIONNEL

On a l'habitude d'entendre par mouvement plan irrotationnel l'écoulement compris entre deux lignes de courant, qui est défini par une représentation conforme entre la région où a lieu l'écoulement dans le plan  $\zeta$  et une bande du plan  $z$  comprise entre deux droites parallèles à l'axe réel et infini dans les deux sens.

Il importe de ne pas perdre de vue ce que cette conception du mouvement a d'artificiel. En fait, si la notion de mouvement permanent correspond effectivement à une réalité, celle de mouvement infini n'est qu'une fiction mathématique. Un mouvement physiquement réalisé est toujours fini, même s'il est permanent. En pratique, tout mouvement permanent d'un liquide, ou bien est cyclique, ou bien est limité à l'amont et à l'aval. Dans ce dernier cas, il y a une véritable naissance du mouvement à l'amont, et une véritable disparition du mouvement à l'aval.

A ce point de vue, il n'y aurait lieu de considérer que des mouvements limités. Cependant, il n'y a aucun inconvénient au point de vue physique à étudier analytiquement des mouvements infinis parce que l'on peut toujours, dans l'application à la réalité de l'étude analytique, négliger les branches infinies.

D'un autre côté, si la notion de mouvement illimité s'introduit naturellement dans l'étude analytique, les singularités des équations conduisent à généraliser la notion de mouvement dans une direction très éloignée de la conception mathématique, jusqu'ici envisagée, d'écoulement infini dans les deux sens. Au contraire, cette généralisation donne des résultats applicables pratiquement, quand on envisage des mouvements limités où il y a une région où naît le mouvement, et une région où il disparaît.

Nous ne méconnaissons pas ce que la notion de mouvement limité, avec naissance du mouvement à l'amont et disparition du mouvement à l'aval, a de choquant au premier abord. Elle heurte notre esprit habitué à concevoir facilement l'infini et difficilement le changement d'état. C'est ainsi qu'un mouvement infini dans les

deux sens le satisfera beaucoup plus qu'un mouvement ayant un commencement et une fin. Et cependant, c'est ce dernier mouvement que l'on rencontre seul dans la nature.

Dans le cas du mouvement irrotationnel, la notion de mouvement limité s'interprète de la manière suivante : à l'amont, il fait suite à un mouvement de fluide non parfait, et à l'aval lui fait suite un autre mouvement de fluide non parfait. Cette conception est conforme à l'expérience. Nous avons vu en effet dans l'introduction que, dans l'écoulement par déversoir, le mouvement de l'eau n'est irrotationnel que dans une région limitée au voisinage de la crête du déversoir, à l'amont de laquelle le mouvement de l'eau est visqueux, et à l'aval de laquelle on a affaire au mouvement d'une émulsion d'eau et d'air. L'on voit que, si l'on se bornait à l'étude des mouvements irrotationnels illimités, à l'amont et à l'aval, on laisserait de côté des mouvements irrotationnels limités pouvant physiquement se produire.

Les considérations précédentes nous ont amené à introduire les notions suivantes :

**NOTION DE BANDE.** — Appelons bande bi-infinie du plan  $z$  tout domaine de ce plan défini par les inégalités  $a \leq \tau_1 \leq b$ ,  $a$  et  $b$  étant deux nombres réels satisfaisant à l'inégalité  $a < b$ .

Appelons bande uni-infinie du plan  $z$  tout domaine de ce plan défini par l'un ou l'autre des deux groupes d'inégalités

$$\begin{aligned} a \leq \tau_1 \leq b, & \quad f_1(\tau_1) \leq \frac{z}{\tau_1}, \\ a \leq \tau_1 \leq b, & \quad \frac{z}{\tau_1} \leq f_2(\tau_1), \end{aligned}$$

$a$  et  $b$  étant deux nombres réels satisfaisant à l'inégalité  $a < b$ ,  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  étant deux fonctions continues dans l'intervalle fermé  $(a, b)$ .

Appelons bande finie du plan  $z$  tout domaine de ce plan comprenant l'ensemble des points satisfaisant aux inégalités

$$a \leq \tau_1 \leq b, \quad f_1(\tau_1) \leq \frac{z}{\tau_1} \leq f_2(\tau_1),$$

$a$  et  $b$  étant deux nombres réels satisfaisant à l'inégalité  $a < b$ ,  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  étant deux fonctions continues dans l'intervalle fermé  $(a, b)$  et satisfaisant à l'inégalité  $f_1(x) < f_2(x)$  dans cet intervalle.

Dorénavant, nous utiliserons le mot bande pour désigner l'un quelconque des trois domaines que nous venons de définir : bande bi-infinie, bande uni-infinie, bande finie.

**NOTION D'ÉCOULEMENT SIMPLE SANS RECOUVREMENT.** — Nous appellerons écoulement simple sans recouvrement, la représentation conforme d'un domaine simple-

ment connexe du plan  $\zeta$  sur une bande du plan  $z$ . Suivant que la bande du plan  $z$  sera bi-infinie, uni-infinie ou finie, l'écoulement simple sans recouvrement sera dit bi-infini, uni-infini ou fini.

NOTION DE MOUVEMENT SANS RECOUVREMENT. — Nous appellerons mouvement sans recouvrement, la représentation conforme d'un domaine simplement connexe du plan  $\zeta$  sur un domaine simplement connexe dans le plan  $z$  ou sur une surface de Riemann déduite de ce plan.

Comme tout domaine simplement connexe dans le plan  $z$  ou sur une surface de Riemann déduite de ce plan peut être envisagé comme constitué par la juxtaposition de bandes du plan  $z$ , on voit qu'un mouvement sans recouvrement pourra être regardé comme formé par la juxtaposition d'écoulements simples sans recouvrement.

NOTION GÉNÉRALE D'ÉCOULEMENT SIMPLE. — Nous appellerons d'une manière générale écoulement simple la représentation conforme entre un domaine simplement connexe sur une surface de Riemann déduite du plan  $\zeta$  et une bande du plan  $z$ . Suivant que la bande du plan  $z$  sera bi-infinie, uni-infinie ou finie, l'écoulement sera dit bi-infini, uni-infini ou fini.

NOTION GÉNÉRALE DE MOUVEMENT. — Nous appellerons d'une manière générale mouvement, la représentation conforme entre un domaine simplement connexe sur une surface de Riemann déduite du plan  $\zeta$  et un domaine simplement connexe sur une surface de Riemann déduite du plan  $z$ .

En utilisant une remarque déjà faite, on voit que tout mouvement est constitué par la juxtaposition d'écoulements simples.

## II

### MOUVEMENT IRROTATIONNEL AVEC PRESSION CONSTANTE SUR LA SURFACE LIBRE

#### § 1. — Intégrale générale. — Détermination du mouvement par la surface libre.

Nous allons tout d'abord former l'intégrale générale du mouvement, en résolvant en même temps le problème de sa détermination par la connaissance de la surface libre.

Le mouvement sera déterminé si l'on connaît l'une ou l'autre des fonctions har-



moniques  $\xi$  ou  $\eta$  en fonction de  $x$  et  $y$ . Or  $\eta$  prend une valeur constante que l'on peut supposer nulle sur la surface libre  $L$ . D'autre part, en un point quelconque de  $L$  la vitesse  $V$  est égale à  $\sqrt{2gx}$ ; d'ailleurs on a partout  $V = |\text{grad } \xi| = |\text{grad } \eta|$ ; on a donc, sur  $L$ ,  $|\text{grad } \eta| = \sqrt{2gx}$ . Or sur  $L$  on a manifestement  $|\text{grad } \eta| = \left| \frac{d\eta}{dn} \right|$ ,  $\frac{d\eta}{dn}$  désignant la dérivée normale de la fonction  $\eta$  le long de  $L$ . On a donc finalement :

$$\left| \frac{d\eta}{dn} \right| = \sqrt{2gx}.$$

La fonction harmonique  $\eta$  prend donc la valeur zéro sur  $L$ , et sa dérivée normale prend sur  $L$  la valeur précédente. La fonction  $\eta$  se trouve donc déterminée par les conditions de Cauchy. Nous allons résoudre le problème de Cauchy correspondant.

Soit  $\mathcal{R}$  le domaine infini simple défini par  $L$  à l'intérieur duquel a lieu le mouvement. Dans la représentation conforme

$$\zeta = F(Z) = P(X, Y) + iQ(X, Y)$$

du domaine  $\mathcal{R}$  sur le demi-plan supérieur  $Y > 0$  de la variable  $Z = X + iY$ , la fonction harmonique  $\eta$  se transforme en une fonction harmonique de  $X$  et  $Y$ , et l'on a la relation

$$|\text{grad}_{x,y} \eta| = |\text{grad}_{x,y} \eta| \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)^2}}.$$

Il résulte de là que la dérivée normale  $\frac{d\eta}{dn}$  sur  $L$  vérifie l'équation

$$\left| \frac{d\eta}{dn} \right| = |\text{grad}_{x,y} \eta|_{y=0} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)^2_{y=0} + \left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)^2_{y=0}}} = \frac{\left| \frac{\partial \eta}{\partial Y} \right|_{y=0}}{\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)^2_{y=0} + \left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)^2_{y=0}}}.$$

D'ailleurs on a, sur  $L$ ,  $\sqrt{2gx} = \sqrt{2gP(X, 0)}$ . On a donc

$$\sqrt{2gP(X, 0)} = \frac{\left| \frac{\partial \eta}{\partial Y} \right|_{y=0}}{\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)^2_{y=0} + \left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)^2_{y=0}}}.$$

Posons

$$\psi(X) = \sqrt{2gP(X, 0) \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial X} \right)_{Y=0}^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)_{Y=0}^2 \right]},$$

il vient

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial Y} \right|_{Y=0} = \psi(X).$$

La fonction harmonique  $\eta$  devant prendre pour  $Y = 0$  la valeur zéro, et sa dérivée  $\frac{\partial \eta}{\partial Y}$  devant prendre pour  $Y = 0$  la valeur  $\psi(X)$ , il est nécessaire, d'après le théorème de Schwartz, que  $\psi(X)$  soit une fonction analytique de  $X$ . Si  $\psi(Z)$  désigne la fonction analytique de  $Z$ , qui pour  $Z$  réel et égal à  $X$ , se réduit à  $\psi(X)$ , la fonction  $\eta$  est la partie réelle de la fonction de variable complexe  $-i \int \psi(Z) dZ$ , c'est-à-dire la partie imaginaire de la fonction  $\int \psi(Z) dZ$ ; l'on a par conséquent

$$z = \xi + i\eta = \int \psi(Z) dZ,$$

d'où le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *Tout mouvement irrotationnel avec pression constante sur la surface libre est déterminé par la représentation conforme  $\zeta = F(Z) = P(X, Y) + iQ(X, Y)$  du demi-plan  $Y > 0$  de la variable  $Z = X + iY$  sur le domaine infini simple limité par la surface libre dans lequel a lieu le mouvement, sous la condition nécessaire et suffisante que la fonction*

$$\psi(X) = \sqrt{2gP(X, 0) \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial X} \right)_{Y=0}^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)_{Y=0}^2 \right]}$$

soit une fonction analytique de  $X$ . Les équations du mouvement sont alors

$$(B) \quad \begin{cases} \zeta = F(Z), \\ z = \int \psi(Z) dZ, \end{cases}$$

$\psi(Z)$  désignant la fonction de la variable complexe  $Z$ , qui pour  $Z$  réel et égal à  $X$ , se réduit à  $\psi(X)$ .

Dans le cas où la surface libre est analytique, les fonctions  $P(X, Y)$  et  $Q(X, Y)$  sont prolongeables au delà de la droite  $Y = 0$  dans le demi-plan  $Y < 0$ . En effet, si  $Z = p(x, y) + iq(x, y)$  désigne la fonction inverse de  $\zeta = F(Z)$ , la fonction harmonique  $q(x, y)$  prend sur la surface libre analytique la valeur zéro et est par suite prolongeable au delà de cette surface libre d'après le théorème de Schwartz. Il en est

de même de  $p(x, y)$ , ce qui prouve que  $F(Z)$  est prolongeable au delà de la droite  $Y = 0$  ainsi que les fonctions harmoniques  $P(X, Y)$  et  $Q(X, Y)$ . Il résulte de là que les fonctions  $P(X, 0)$ ,  $\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_{Y=0}$ , et  $\left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)_{Y=0}$  sont des fonctions analytiques de  $X$ , et par suite que la fonction  $\psi(X)$  est une fonction analytique de  $X$ . Nous pouvons donc énoncer ce théorème.

**THÉORÈME.** — *Une surface libre analytique détermine un mouvement et un seul.*

Dans le cas où la surface libre n'est pas analytique, les fonctions  $P(X, 0)$  et  $Q(X, 0)$  ne sont pas analytiques tout du long de la droite  $Y = 0$ . Par suite les fonctions  $\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_{Y=0}$  et  $\left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)_{Y=0} = -\left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_{Y=0}$  ne sont pas non plus analytiques tout du long de la droite  $Y = 0$ . Il n'en résulte pas nécessairement que  $\psi(X)$  n'est pas analytique tout du long de la droite  $Y = 0$ . Cependant, c'est ce qui aura lieu en général, comme cela résulte du théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *Si  $\psi(X)$  est analytique quand la surface libre est une courbe non analytique particulière  $L$ , cette fonction sera non analytique quand la surface libre sera toute autre courbe déduite de  $L$  par une translation verticale.*

En effet si à la courbe  $L$  correspond la fonction

$$\psi(X) = \sqrt{2gP(X, 0) \left[ \left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_{Y=0}^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)_{Y=0}^2 \right]},$$

à toute courbe  $L_1$  déduite de  $L$  par une translation verticale correspondra la fonction

$$\psi_1(X) = \sqrt{2g(P(X, 0) + A) \left[ \left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_{Y=0}^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)_{Y=0}^2 \right]},$$

où  $A$  est une constante non nulle. Par hypothèse la fonction

$$2gP(X, 0) \left[ \left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_{Y=0}^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)_{Y=0}^2 \right]$$

est analytique, sans qu'aucune des fonctions  $P(X, 0)$  et  $\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_{Y=0}^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)_{Y=0}^2$  ne le soit. Par suite la fonction  $2gA \left[ \left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_{Y=0}^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)_{Y=0}^2 \right]$  n'est pas analytique et il en est de même de la fonction obtenue en lui ajoutant  $[\psi(X)]^2$  qui est

$$2g(P(X, 0) + A) \left[ \left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_{Y=0}^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)_{Y=0}^2 \right].$$

La fonction  $\psi_1(X)$  n'est donc pas analytique, c. q. f. d.

Il résulte de là qu'à une surface libre non analytique ne correspond en général aucun mouvement.

§ 2. — Formes diverses de l'intégrale générale quand la surface libre est analytique.

Première forme de l'intégrale générale.

Quand la surface libre est analytique, les fonctions  $P(X, Y)$  et  $Q(X, Y)$  sont définies dans une région  $R_2$  située dans le demi-plan  $Y < 0$  et limitée d'une part par la droite  $Y = 0$ , d'autre part par une courbe  $C_2$ . Soit  $C_1$  la symétrique de  $C_2$  par rapport à la droite  $Y = 0$ . Désignons par  $R_1$  la région comprise entre la courbe  $C_1$  et la droite  $Y = 0$ , et par  $R$  l'ensemble des régions  $R_1$  et  $R_2$ .

Si  $U(X, Y) + iV(X, Y)$  est une fonction holomorphe de  $Z$  dans la région  $R$ , chacune des fonctions  $U(X, 0)$  et  $V(X, 0)$  est une fonction analytique de la variable  $X$ , et par suite la fonction

$$U(X + iY, 0) + iV(X + iY, 0)$$

est une fonction analytique de  $Z$  qui prend pour  $Y = 0$  la valeur

$$U(X, 0) + iV(X, 0);$$

cette fonction est donc égale à  $U(X, Y) + iV(X, Y)$ , ce que nous écrirons

$$U(X + iY, 0) + iV(X + iY, 0) = U(X, Y) + iV(X, Y).$$

Changeons dans cette équation  $i$  en  $-i$ , il vient

$$U(X - iY, 0) - iV(X - iY, 0) = U(X, Y) - iV(X, Y).$$

Changeons dans cette dernière équation  $Y$  en  $-Y$ , il vient

$$U(X + iY, 0) - iV(X + iY, 0) = U(X, -Y) - iV(X, -Y).$$

Ajoutons cette dernière équation à la première, il vient

$$U(X + iY, 0) = \frac{U(X, Y) + U(X, -Y)}{2} + i \frac{V(X, Y) - V(X, -Y)}{2}.$$

Finalement, considérons les trois équations

$$U(X + iY, 0) = \frac{U(X, Y) + U(X, -Y)}{2} + i \frac{V(X, Y) - V(X, -Y)}{2},$$

$$U(X + iY, 0) + iV(X + iY, 0) = U(X, Y) + iV(X, Y),$$

$$U(X + iY, 0) - iV(X + iY, 0) = U(X, -Y) - iV(X, -Y),$$

et remplaçons dans la première U par P et V par Q, et dans les deux autres U par  $\frac{\partial P}{\partial X}(X, Y)$  et V par  $\frac{\partial Q}{\partial X}(X, Y)$ , il vient :

$$\begin{aligned} P(X + iY, 0) &= \frac{P(X, Y) + P(X, -Y)}{2} + i \frac{Q(X, Y) - Q(X, -Y)}{2}, \\ \frac{\partial P}{\partial X}(X + iY, 0) + i \frac{\partial Q}{\partial X}(X + iY, 0) &= \frac{\partial P}{\partial X}(X, Y) + i \frac{\partial Q}{\partial X}(X, Y), \\ \frac{\partial P}{\partial X}(X + iY, 0) - i \frac{\partial Q}{\partial X}(X + iY, 0) &= \frac{\partial P}{\partial X}(X, -Y) - i \frac{\partial Q}{\partial X}(X, -Y). \end{aligned}$$

Multiplions membre à membre ces trois équations, il vient

$$\begin{aligned} &2gP(X + iY, 0) \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial X}(X + iY, 0) \right)^2 + \left( \frac{\partial Q}{\partial X}(X + iY, 0) \right)^2 \right] \\ &= 2g \left[ \frac{P(X, Y) + P(X, -Y)}{2} + i \frac{Q(X, Y) - Q(X, -Y)}{2} \right] \left[ \frac{\partial P}{\partial X}(X, Y) + i \frac{\partial Q}{\partial X}(X, Y) \right] \left[ \frac{\partial P}{\partial X}(X, -Y) - i \frac{\partial Q}{\partial X}(X, -Y) \right] \end{aligned}$$

Le premier membre de cette équation est une fonction analytique de Z qui se réduit pour  $Y = 0$  à l'expression sous le radical dans l'équation qui donne  $\psi(X)$ ; il en résulte que l'on peut écrire  $\psi(Z)$  sous la forme

$$\psi(Z) = \sqrt{2g \left[ \frac{P(X, Y) + P(X, -Y)}{2} + i \frac{Q(X, Y) - Q(X, -Y)}{2} \right] \left[ \frac{\partial P}{\partial X}(X, Y) + i \frac{\partial Q}{\partial X}(X, Y) \right] \left[ \frac{\partial P}{\partial X}(X, -Y) - i \frac{\partial Q}{\partial X}(X, -Y) \right]}$$

Cette expression s'écrit plus simplement

$$(B') \quad \psi(Z) = \sqrt{g(F(Z) + \Phi(Z)) F'(Z) \Phi'(Z)}$$

où l'on a désigné par  $\Phi(Z)$  la fonction analytique  $P(X, -Y) - iQ(X, -Y)$ . Les deux fonctions  $F(Z)$  et  $\Phi(Z)$  sont holomorphes dans la région R, et par suite  $\psi(Z)$  est analytique dans cette même région.

La première forme de l'intégrale générale du mouvement à laquelle nous voulions parvenir est constituée par les équations (B) où  $\psi(Z)$  à la forme (B').

#### Deuxième forme de l'intégrale générale.

Soient  $x = f(\xi)$  et  $y = \varphi(\xi)$  les fonctions donnant  $x$  et  $y$  en fonction de  $\xi$  sur la surface libre et  $\gamma = \Phi(x)$  l'équation de la surface libre. Cherchons à déterminer

$f$  et  $\varphi$  en fonction de  $\Phi$ . De l'équation de Bernouilli sur la surface libre on déduit facilement

$$\xi = \int \sqrt{2gx(1 + \Phi'^2(x))} dx.$$

Cette équation définit  $x$  en fonction de  $\xi$  et fait connaître  $f(\xi)$ .  $\varphi(\xi)$  peut être ensuite déterminé par l'équation

$$\varphi(\xi) = \Phi(f(\xi)).$$

En convenant de remplacer  $x$  par  $f$  et  $y$  par  $\varphi$  sur la surface libre, les équations qui définissent  $f(\xi)$  et  $\varphi(\xi)$  peuvent s'écrire

$$(C') \quad \begin{cases} \xi = \int \sqrt{2gf \left( 1 + \left( \frac{d\varphi}{df} \right)^2 \right)} df, \\ \varphi = \Phi(f). \end{cases}$$

Cherchons maintenant à calculer la fonction  $\Phi$  quand on connaît  $f(\xi)$ . Pour cela dérivons la première équation (C'), il vient :

$$\frac{d\xi}{df} = 2gf \left( 1 + \left( \frac{d\varphi}{df} \right)^2 \right),$$

d'où l'on tire

$$(C'') \quad \varphi = \int \sqrt{\frac{\left( \frac{d\xi}{df} \right)^2}{2gf} - 1} df,$$

équation qui fait connaître la fonction  $\Phi$ .

De (C') et (C'') on déduit l'importante propriété que, pour que chacune des fonctions  $f$ ,  $\varphi$ ,  $\Phi$  soit analytique, il faut et il suffit que l'une d'elles le soit, d'où en particulier cette proposition : la condition nécessaire et suffisante pour que  $f(\xi)$  soit analytique est que la surface libre le soit.

Cela posé, on a sur la surface libre  $|\text{grad}_{x,y} \xi| = \sqrt{2gx}$ . Or

$$|\text{grad}_{x,y} \xi| = \sqrt{\left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2}}.$$

On a donc

$$\frac{1}{\sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)_{\tau=0}^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)_{\tau=0}^2}} = \sqrt{2gx},$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \tau_1}\right)_{\tau_1=0} = \sqrt{\frac{1}{(2gx)_{\tau_1=0}} - \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_{\tau_1=0}^2}.$$

Comme  $(2gx)_{\tau_1=0} = 2gf(\xi)$  et  $\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)_{\tau_1=0} = f'(\xi)$ , on a

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \tau_1}\right)_{\tau_1=0} = \sqrt{\frac{1}{2gf(\xi)} - f'^2(\xi)}.$$

$x$  est par suite une fonction harmonique de  $\xi$  et  $\tau_1$  dont on connaît pour  $\tau_1 = 0$  la valeur ainsi que celle de la dérivée  $\frac{\partial x}{\partial \tau_1}$ . Quand  $f(z)$  est analytique,  $x$  est donc la partie réelle de la fonction de la variable complexe

$$f(z) - i \int \sqrt{\frac{1}{2gf(z)} - f'^2(z)} dz,$$

où  $f(z)$  est la fonction de la variable complexe  $z$  qui se réduit à  $f(\xi)$  pour  $z$  réel et égal à  $\xi$ . Il résulte de là que l'intégrale générale du mouvement à surface libre analytique peut se mettre sous la seconde forme

$$(C) \quad \zeta = f(z) - i \int \sqrt{\frac{1}{2gf(z)} - f'^2(z)} dz,$$

où  $f(z)$  est une fonction analytique de  $z$ , réelle pour  $z$  réel, et assujettie en outre à vérifier pour  $z$  réel l'inégalité

$$\frac{1}{2gf(z)} - f'^2(z) > 0.$$

REMARQUE. — Posons dans (C)

$$z = 2f_1, \quad S(f_1) = 2f(2f_1),$$

d'où l'on tire

$$S'(f_1) = 4f'(2f_1),$$

et par suite

$$f(z) = \frac{S(f_1)}{2}, \quad f'(z) = \frac{S'(f_1)}{4}, \quad dz = 2df_1.$$

(C) s'écrit

$$\zeta = \frac{S(f_1)}{2} - i \int \sqrt{\frac{1}{gS(f_1)} - \frac{S'^2(f_1)}{16}} \times 2df_1,$$

ou encore comme  $-i = \sqrt{-1}$ , et  $\zeta = x + iy$ ,

$$x + iy = \frac{S(f_1)}{2} + \frac{1}{2} \int \sqrt{S^2(f_1) - \frac{16}{gS(f_1)}} df_1.$$

C'est la première équation obtenue par M. Sautreaux. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

La fonction de M. Sautreaux  $f_1(x + iy)$  est égale à la moitié de la fonction analytique dont la partie réelle est le potentiel des vitesses et la partie imaginaire la fonction de courant.

De même, la fonction  $f_2(x - iy)$  a pour partie réelle la moitié du potentiel des vitesses et pour partie imaginaire la moitié de la fonction de courant changée de signe.

Ce résultat permet de compléter la méthode de M. Sautreaux de la manière suivante : une fois déterminée la fonction  $f_1$  par la première équation de M. Sautreaux, il suffit de doubler la partie réelle de cette fonction pour obtenir le potentiel des vitesses, tandis que dans la méthode de M. Sautreaux le potentiel des vitesses s'obtient en faisant la somme des deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  obtenues à l'aide de deux équations différentes de M. Sautreaux.

#### Troisième forme de l'intégrale générale.

Appelons  $\varphi(z)$  la fonction analytique de  $z$  qui se réduit pour  $z$  réel et égal à  $\xi$  à  $\varphi(\xi)$ . Il est évident que l'on a

$$(C''') \quad \varphi(z) = - \int \sqrt{\frac{1}{2gf(z)} - f''(z)} dz,$$

et par suite on a  $\zeta = f + i\varphi$ ,  $f$  et  $\varphi$  étant deux variables vérifiant pour  $z$  réel et égal à  $\xi$  les équations (C). On déduit de là que l'intégrale générale du mouvement peut se mettre sous la troisième forme

$$(D) \quad \begin{cases} \zeta = f + i\varphi, \\ z = \int \sqrt{2gf \left( 1 + \left( \frac{d\varphi}{df} \right)^2 \right)} df, \end{cases}$$

où  $f$  et  $\varphi$  sont deux variables liées par une relation analytique arbitraire réelle donnant l'équation de la surface libre quand on y considère  $f$  et  $\varphi$  comme les coordonnées d'un point de cette surface.

#### Quatrième forme de l'intégrale générale.

Supposons que nous nous donnions  $z$  en fonction de  $f$ ,  $z = K(f)$ , au lieu de la fonction  $f(z)$ . La fonction  $\varphi(z)$  est alors une fonction de  $f$  qui pour  $f$  réel prend



la forme (C'') où  $\frac{d\xi}{df}$  est remplacé par  $K'(f)$ . On peut donc mettre l'intégrale générale du mouvement sous la quatrième forme

$$(E) \quad \begin{cases} z = K(f), \\ \zeta = f + i \int \sqrt{\frac{K'^2(f)}{2gf} - 1} df, \end{cases}$$

où  $K(f)$  est une fonction analytique réelle pour  $f$  réel.

**Cinquième forme de l'intégrale générale.**

De (C''') on déduit :

$$f'^2(z) + \varphi'^2(z) = \frac{1}{2gf(z)},$$

ou encore

$$2g \int f'(z) dz = \frac{1}{f'^2(z) + \varphi'^2(z)}.$$

Prenons comme variables  $f'$  et  $\varphi'$ . L'équation précédente différenciée donne

$$2gf' dz = d\left(\frac{1}{f'^2 + \varphi'^2}\right),$$

d'où l'on tire

$$dz = \frac{1}{2gf'} d\left(\frac{1}{f'^2 + \varphi'^2}\right),$$

et

$$z = \int \frac{1}{2gf'} d\left(\frac{1}{f'^2 + \varphi'^2}\right).$$

D'autre part on a

$$d\xi = (f' + i\varphi') dz = \frac{f' + i\varphi'}{2gf'} d\left(\frac{1}{f'^2 + \varphi'^2}\right)$$

et

$$\xi = \int \frac{f' + i\varphi'}{2gf'} d\left(\frac{1}{f'^2 + \varphi'^2}\right).$$

L'intégrale générale du mouvement peut alors être mise sous la cinquième forme

$$(F) \quad \begin{cases} z = \int \frac{1}{2gf'} d\left(\frac{1}{f'^2 + \varphi'^2}\right), \\ \zeta = \int \frac{f' + i\varphi'}{2gf'} d\left(\frac{1}{f'^2 + \varphi'^2}\right), \end{cases}$$

où  $f'$  et  $\varphi'$  sont liés par une relation analytique réelle arbitraire, ou bien sont des fonctions analytiques réelles d'une variable auxiliaire. En particulier si ces dernières fonctions sont des fractions rationnelles, les intégrales qui figurent dans les équations (F) pourront se calculer élémentairement.

**Sixième forme de l'intégrale générale.**

Si dans les équations (F) nous faisons le changement de variable

$$f' = \frac{\cos \theta}{r}, \quad \varphi' = \frac{\sin \theta}{r},$$

elles s'écrivent

$$\begin{aligned} z &= \int \frac{r}{2g \cos \theta} d(r^2), \\ \zeta &= \int \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{2g \cos \theta} d(r^2). \end{aligned}$$

L'intégrale générale du mouvement peut donc se mettre sous la sixième forme

$$(G) \quad \begin{cases} z = \frac{1}{g} \int \frac{r^2 dr}{\cos \theta}, \\ \zeta = \frac{1}{g} \int r(1 + i \operatorname{tg} \theta) dr, \end{cases}$$

où  $r$  et  $\theta$  sont liés par une relation analytique réelle arbitraire.

Les variables  $r$  et  $\theta$  ont une signification géométrique remarquable. On a en effet

$$\frac{1}{2gf} = f'^2 + \varphi'^2 = \frac{1}{r^2},$$

d'où

$$r = \sqrt{2gf},$$

et

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\varphi'}{f'} = \frac{d\varphi}{df}.$$

Sur la surface libre où  $r$  et  $\theta$  sont réels,  $r$  est proportionnel à la racine carrée de l'abscisse du point correspondant de la surface libre, et  $\theta$  est l'angle avec  $ox$  de la vitesse en ce point.

Les équations (G) peuvent également être déduites des équations (D), en posant

$$r = \sqrt{2gf}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{d\varphi}{df}.$$

La première peut s'écrire en effet

$$\zeta = \int \left( 1 + i \frac{d\varphi}{df} \right) df,$$

et si nous y remplaçons  $f$  par  $\frac{r^2}{2g}$ , et  $\frac{d\varphi}{df}$  par  $\operatorname{tg} \theta$ , elle devient

$$\zeta = \int (1 + i \operatorname{tg} \theta) \frac{d(r^2)}{2g},$$

équation identique à la seconde équation (G). Remplaçons de même dans la deuxième équation (D)  $f$  par  $\frac{r^2}{2g}$  et  $\frac{d\varphi}{df}$  par  $\operatorname{tg} \theta$ , elle devient

$$z = \int r \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} \frac{d(r^2)}{2g},$$

ce qui se ramène immédiatement à la première équation (G).

#### Septième forme de l'intégrale générale.

En faisant dans les équations (G) le changement de variable  $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = t$ , on obtient une septième forme de l'intégrale générale du mouvement

$$(H) \quad \begin{cases} z = \frac{1}{g} \int \frac{1+t^2}{1-t^2} r^2 dr, \\ \zeta = \frac{1}{g} \int \frac{(1+it)^2}{1-t^2} r dr, \end{cases}$$

où  $r$  et  $t$  sont liés par une relation analytique réelle arbitraire, ou bien sont des fonctions analytiques réelles d'une variable auxiliaire. En particulier si ces fonctions sont des fractions rationnelles, les intégrales qui figurent dans les équations (H) peuvent se calculer élémentairement.

La signification géométrique de la variable  $t$  est évidente : c'est, quand  $t$  est réel, la tangente de la moitié de l'angle  $\theta$  de la vitesse avec la verticale descendante.

#### Huitième forme de l'intégrale générale.

Par analogie avec la manière dont nous avons déduit les équations (G) des équations (D), posons dans les équations (D)

$$r = \sqrt{2gf}, \quad sh\lambda(f) = \frac{d\varphi}{df},$$

elles deviennent

$$\begin{aligned} \zeta &= \int \left( 1 + i \left( \frac{d\varphi}{df} \right) \right) df = \int (1 + ish\lambda(f)) df = \int \left( 1 + ish\lambda \left( \frac{r^2}{2g} \right) \right) \frac{r dr}{g}, \\ z &= \int \sqrt{2gf} ch\lambda(f) df = \int ch\lambda \left( \frac{r^2}{2g} \right) \frac{r^2 dr}{g}. \end{aligned}$$

Prenons maintenant comme nouvelle variable

$$u = e^{\lambda \left( \frac{r^2}{2g} \right)},$$

et remplaçons dans les équations précédentes les fonctions hyperboliques par leurs valeurs en fonction de  $u$ , elles donnent une huitième forme de l'intégrale générale du mouvement

$$(I) \quad \begin{cases} \zeta = \frac{1}{2g} \int \left( 1 + i \left( u - \frac{1}{u} \right) \right) r dr, \\ z = \frac{1}{2g} \int \left( u + \frac{1}{u} \right) r^2 dr, \end{cases}$$

où  $u$  et  $r$  sont liés par une relation analytique réelle arbitraire, ou bien sont des fonctions analytiques réelles d'une variable auxiliaire. En particulier si ces fonctions sont des fractions rationnelles, les intégrales qui figurent dans les équations (I) peuvent se calculer élémentairement.

Les équations (I) peuvent également se déduire des équations (G) par le changement de variable

$$u = \cotg \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right).$$

En effet

$$\cos \theta = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{2 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)} = \frac{\frac{2}{u}}{1 + \frac{1}{u^2}} = \frac{2u}{u^2 + 1},$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right)} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)}{2 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)} = \frac{1 - \frac{1}{u^2}}{\frac{2}{u}} = \frac{u^2 - 1}{2u}$$

d'où l'on tire

$$\cos \theta = \frac{2u}{1 + u^2} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left( u + \frac{1}{u} \right)},$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2} \left( u - \frac{1}{u} \right).$$

En remplaçant, dans les équations (G),  $\cos \theta$  et  $\operatorname{tg} \theta$  par ces valeurs on retombe sur les équations (I).

### § 3. — Étude des singularités des équations du mouvement.

Il ne suffit pas de connaître l'équation d'un mouvement pour définir entièrement ce mouvement. Il faut encore déterminer les domaines des plans  $\zeta$  et  $z$  où il est défini, et préciser, si l'on peut, l'espèce de mouvement ainsi défini, c'est-à-dire le classer dans une des catégories définies précédemment (voir Deuxième partie, I). Cette recherche revient à l'étude des points singuliers des équations du mouvement, à laquelle nous allons procéder, en nous limitant au cas de la surface libre analytique.

#### Points singuliers des équations (B).

La première équation (B) établit une correspondance univoque et réciproque entre la région  $\mathcal{R}$  du plan  $\zeta$  et le demi-plan supérieur de la variable  $Z$ . La seconde équation (B) établit une correspondance univoque et réciproque entre un domaine simplement connexe du plan  $Z$ , à l'intérieur duquel  $\psi(Z)$  est holomorphe et non nul, et un domaine du plan  $z$  simplement connexe sur une surface de Riemann déduite de ce plan. Nous sommes ainsi conduits à chercher les domaines simplement connexes du plan  $Z$ , où  $\psi(Z)$  est holomorphe et non nul.

Cherchons tout d'abord le domaine d'existence de la fonction analytique  $\psi(Z)$ , et à cet effet démontrons le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *Le domaine d'existence de la fonction  $\psi(Z)$  est intérieur au domaine d'existence de la fonction  $F(Z)$ .*

Le domaine d'existence de la fonction  $F(Z)$  se compose du demi-plan  $Y > 0$  et d'un domaine  $R_2$  du demi-plan  $Y < 0$  ayant pour frontière la droite  $Y = 0$  et une courbe  $C_2$  qui est une coupure pour la fonction analytique  $F(Z)$ . Soient  $R_1$  et  $C_1$  le domaine et la courbe symétriques de  $R_2$  et  $C_2$  par rapport à la droite  $Y = 0$ . Appelons  $R$  le domaine formé par la réunion des domaines  $R_1$  et  $R_2$ . La formule (B') montre immédiatement que le domaine d'existence de la fonction  $\psi(Z)$  contient le domaine  $R$ . Nous allons démontrer que les courbes  $C_1$  et  $C_2$  sont des coupures pour la fonction  $\psi(Z)$ , qui ne pourra donc exister en dehors du domaine  $R$ . Comme le domaine d'existence de la fonction  $\psi(Z)$  est symétrique par rapport à la droite  $Y = 0$ , il suffit de démontrer que la courbe  $C_1$  est une coupure pour cette fonction.

Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi : la fonction

$$H(Z) = (F(Z) + \Phi(Z)) F'(Z) \Phi'(Z)$$

sera holomorphe sur un arc  $s$  de la courbe  $C_1$  et de part et d'autre de cet arc. L'équation qui donne  $H(Z)$  peut s'écrire

$$\frac{d\Phi}{dZ} = \frac{H(Z)}{F'(Z)(F(Z) + \Phi)},$$

ce qui définit  $\Phi(Z)$  comme une fonction holomorphe, en tout point  $Z$  où la fonction  $\Phi$  existe, dans le voisinage de l'arc  $s$  où les fonctions  $F(Z)$  et  $H(Z)$  sont holomorphes. Considérons alors un chemin  $l$  traversant au point  $A$  l'arc  $s$ . Sur la partie de ce chemin située dans le domaine  $R_1$ ,  $\Phi$  existe et est holomorphe. D'après un théorème de M. Painlevé sur les équations différentielles, quand le point  $Z$  tend vers le point  $A$ ,  $\Phi$  tend nécessairement vers une limite finie ou infinie. Pour que le point  $A$  soit singulier pour la fonction  $\Phi$ , il faut que cette limite rende  $\frac{d\Phi}{dZ}$  infini, ce qui exige que l'on ait au point  $A$

$$\Phi(Z) = -F(Z).$$

Cette égalité est impossible tout le long de l'arc  $s$ , car dans le cas contraire elle aurait lieu également dans tout le demi-plan supérieur, ce qui entraînerait l'existence de  $F(Z)$  dans tout le demi-plan inférieur, et par suite la courbe  $C_2$  ne serait

pas une coupure pour  $F(Z)$ . Il en résulte que le point  $A$  peut être choisi de manière à n'être pas singulier pour la fonction  $\Phi$ ; la courbe  $C_1$  ne serait pas alors une coupure pour la fonction  $\Phi$  et par suite la courbe  $C_1$  ne serait pas une coupure pour la fonction  $F$ , ce qui est contraire à l'hypothèse, c. q. f. d.

Marquons maintenant dans le domaine  $R$  les zéros et les points singuliers isolés des trois fonctions  $F'$ ,  $\Phi'$  et  $F + \Phi$ . Nous appellerons  $\bar{R}$  tout domaine simplement connexe intérieur au domaine  $R$ , ne contenant à son intérieur aucun des points précédents et admettant la droite  $Y = 0$  pour axe de symétrie. Il est évident que la seconde équation (B) définira une correspondance univoque et réciproque entre le domaine  $\bar{R}$  et un domaine  $r$  du plan  $z$  simplement connexe sur une surface de Riemann  $\sigma$  déduite de ce plan. Il en résulte que, si  $\mathcal{R}_1$  désigne le domaine du plan  $\zeta$  qui correspond par la première équation (B) à la partie  $\bar{R}_1$  du domaine  $\bar{R}$  située dans le demi-plan  $Y > 0$ , les équations (B) définissent une représentation conforme entre le domaine  $\mathcal{R}_1$  du plan  $\zeta$  et la partie  $r_1$  du domaine  $r$  du plan  $z$  située dans le demi-plan  $\eta > 0$ . La correspondance ainsi définie entre  $\mathcal{R}_1$  et  $r_1$  constitue ce que nous avons appelé un mouvement sans recouvrement. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *Les équations (B) définissent un mouvement sans recouvrement dans un domaine déduit du domaine  $\mathcal{R}$  par la seule considération des zéros et des points singuliers isolés des fonctions  $F'(Z)$ ,  $\Phi'(Z)$  et  $F(Z) + \Phi(Z)$ .*

#### Points singuliers de l'équation (C).

L'équation (C) établit une correspondance univoque et réciproque entre un domaine simplement connexe du plan  $z$ , à l'intérieur duquel la fonction

$$\mathcal{F}(z) = f'(z) - i \sqrt{\frac{1}{2gf(z)} - f''(z)}$$

est holomorphe et non nulle, et un domaine du plan  $\zeta$  simplement connexe sur une surface de Riemann déduite de ce plan. Nous sommes ainsi conduits à chercher les domaines simplement connexes du plan  $z$ , où  $\mathcal{F}(z)$  est holomorphe et non nul.

Cherchons tout d'abord le domaine d'existence de la fonction analytique  $\mathcal{F}(z)$ , et à cet effet démontrons le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *Les fonctions  $\mathcal{F}(z)$  et  $f(z)$  ont même domaine d'existence.*

Le domaine d'existence  $r$  de la fonction  $f(z)$  est évidemment symétrique par rapport à l'axe réel. Choisissons sur la frontière du domaine  $r$ , laquelle est une coupure pour la fonction  $f(z)$ , un arc  $s$  tel que lorsque  $z$  tend vers un point de cet

arc aucune des fonctions  $f(z)$  et  $\frac{1}{f(z)}$  ne tende vers zéro. Il est facile de voir que l'existence d'un tel arc résulte immédiatement de l'hypothèse qu'il est une coupure pour la fonction  $f(z)$ . Mettons l'équation qui définit  $\mathcal{F}(z)$  sous la forme

$$\frac{df}{dz} = \frac{\mathcal{F}(z)}{2} + \frac{1}{4g\mathcal{F}(z)f}$$

obtenue en la résolvant par rapport à  $f'(z)$ . Nous voyons que  $f$  est une fonction holomorphe de  $z$  en tout point où la fonction  $f$  existe et où la fonction  $\mathcal{F}(z)$  est holomorphe et non nulle. Si l'arc  $s$  n'était pas une coupure pour la fonction  $\mathcal{F}(z)$ , on pourrait choisir un chemin  $l$  traversant l'arc  $s$  en un point  $A$  où  $\mathcal{F}(z)$  serait holomorphe et non nul. Quand le point  $z$  tendrait vers le point  $A$  sur  $l$  en restant à l'intérieur du domaine  $r$ ,  $f$  tendrait vers une limite finie ou infinie déterminée en vertu du théorème de M. Painlevé, et comme cette limite ne peut être ni nulle ni infinie à cause du choix de  $s$ , l'on voit que la fonction  $f(z)$  serait holomorphe au point  $A$  et par suite l'arc  $s$  ne serait pas une coupure pour la fonction  $f(z)$ , ce qui est contraire à l'hypothèse. On voit donc que la fonction  $\mathcal{F}(z)$  admet pour coupure tout arc de la frontière de  $r$  sur lequel ni  $f$  ni  $\frac{1}{f}$  ne tendent vers zéro. Le théorème énoncé se trouve alors démontré.

Marquons maintenant dans le domaine  $r$  les zéros et les points singuliers isolés de la fonction  $f(z)$  ainsi que les zéros impairs de la fonction  $\frac{1}{2gf(z)} - f'^2(z)$ . Nous appellerons  $\bar{r}$  tout domaine simplement connexe intérieur au domaine  $r$ , ne contenant à son intérieur aucun des points précédents et admettant l'axe réel pour axe de symétrie. La fonction  $\mathcal{F}(z)$  ne s'annulera pas dans  $\bar{r}$ , l'hypothèse contraire entraînant, en un point au moins de  $\bar{r}$ , les équations

$$\begin{aligned} f'(z) - i\sqrt{\frac{1}{2gf(z)}f'^2(z)} &= 0, \\ f'(z) &= i\sqrt{\frac{1}{2gf(z)}f'^2(z)}, \\ f'^2(z) &= f'^2(z) - \frac{1}{2gf(z)}, \\ \frac{1}{2gf(z)} &= 0, \end{aligned}$$

dont la dernière est incompatible avec la définition de  $\bar{r}$ . Il résulte de là que l'équation (C) définira une correspondance univoque et réciproque entre le domaine  $\bar{r}$  et un domaine  $\mathcal{R}$  du plan  $\zeta$  simplement connexe sur une surface de Riemann  $\Sigma$



déduite de ce plan. Cette correspondance définit un mouvement qui ne sera pas nécessairement sans recouvrement. Pour obtenir un mouvement sans recouvrement, il faudra choisir à l'intérieur du domaine  $\mathfrak{R}$  un domaine  $\mathfrak{R}'$  simplement connexe dans son plan auquel correspondra dans le plan  $z$  un domaine  $r'$ . Le mouvement défini par l'équation (C) sera sans recouvrement à l'intérieur du domaine  $r'$ . On peut donc énoncer le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *L'équation (C) définit un mouvement dans un domaine déduit du domaine  $r$  par la seule considération des zéros et des points singuliers isolés de la fonction  $f(z)$  ainsi que des zéros impairs de la fonction  $\frac{1}{2gf(z)} - f'^2(z)$ , mais ce mouvement ne sera pas en général sans recouvrement, et la détermination d'un domaine  $r$  du plan  $z$ , à l'intérieur duquel le mouvement précédent sera sans recouvrement, exige l'inversion de l'équation (C).*

Il y a lieu de remarquer que le mouvement défini par l'équation (C) se compose en réalité de deux mouvements se raccordant suivant une même surface libre de part et d'autre de cette surface, et se correspondant point par point et ligne de courant par ligne de courant de telle manière qu'entre deux lignes de courant de l'un coule le même débit qu'entre les lignes de courant correspondantes de l'autre.

#### Points singuliers des équations (D), (E), (F), (G), (H), (I).

Dans ces équations  $\zeta$  et  $z$  sont exprimés en fonction d'une variable auxiliaire que nous désignerons par  $\lambda$  par des équations de la forme

$$\begin{cases} \zeta = F(\lambda), \\ z = \Phi(\lambda). \end{cases}$$

Supposons les fonctions  $F(\lambda)$  et  $\Phi(\lambda)$  holomorphes dans un même domaine  $\delta$  du plan  $\lambda$  simplement connexe sur une surface de Riemann déduite de ce plan, à l'intérieur duquel les fonctions  $F(\lambda)$  et  $\Phi(\lambda)$  ne s'annulent pas. Il est évident que les équations précédentes font correspondre au domaine  $\delta$  des domaines  $\mathfrak{R}$  et  $r$  dans les plans  $\zeta$  et  $z$ , chacun étant simplement connexe sur une surface de Riemann déduite de son plan, et que la correspondance bi-univoque et réciproque entre  $\mathfrak{R}$  et  $r$  qui en résulte définit un mouvement qui ne sera pas en général sans recouvrement. La détermination d'un domaine  $\delta$  n'exigera que la connaissance des points singuliers isolés de  $F(\lambda)$  et de  $\Phi(\lambda)$  et celle des zéros de  $F'(\lambda)$  et  $\Phi'(\lambda)$ . Ces points constituent ce que nous appellerons les points singuliers du mouvement.

Nous allons passer en revue successivement les équations (D), (E), (F), (G), (H), (I), pour indiquer dans chaque cas les points singuliers qui s'introduisent.

ÉQUATIONS (D). — Si l'on prend  $f$  comme variable et  $\varphi$  comme fonction, les singularités à considérer sont, en plus des points singuliers de la fonction  $\varphi = \Phi(f)$ , le point  $f = 0$  et les points où  $\Phi'(f)$  prend l'une des valeurs  $+i$  ou  $-i$ .

ÉQUATIONS (E). — Les singularités à considérer sont en plus des points singuliers de la fonction de  $z = K(f)$ , les zéros de  $K'(f)$  et de  $K'^2(f) - 2gf$  et le point  $f = 0$ .

ÉQUATIONS (F). — Si  $f'$  et  $\varphi'$  sont définis par des fonctions d'une variable  $\lambda$ , les singularités à considérer sont, en plus des points singuliers des fonctions  $f'$  et  $\varphi'$ , les zéros des fonctions  $f', f'^2 + \varphi'^2$  et  $f' \frac{df'}{d\lambda} + \varphi' \frac{d\varphi'}{d\lambda}$ .

ÉQUATIONS (G). — Si l'on prend  $\theta$  pour variable et  $r$  pour fonction, les singularités à considérer sont, en plus des points singuliers de la fonction  $r$ , les zéros des fonctions  $r$  et  $\frac{dr}{d\theta}$  et les points  $(2k + 1) \frac{\pi}{2}$  où  $k$  est un entier quelconque. Si l'on prend  $r$  pour variable et  $\theta$  pour fonction, les singularités à considérer sont, en plus des points singuliers de la fonction  $\theta$ , les zéros de la fonction  $\cos \theta$ .

ÉQUATIONS (H). — Si l'on prend  $t$  pour variable et  $r$  pour fonction, les singularités à considérer sont, en plus des points singuliers de la fonction  $r$ , les points  $t = 1, t = -1, t = i$  et  $t = -i$ , et les zéros des fonctions  $r$  et  $\frac{dr}{dt}$ . Si l'on prend  $r$  pour variable et  $t$  pour fonction, les singularités à considérer sont, en plus des points singuliers de la fonction  $t$ , les points où  $t$  prend une des valeurs  $1, -1, i, -i$  et le point  $r = 0$ .

ÉQUATIONS (I). — Si l'on prend  $u$  pour variable et  $r$  pour fonction, les singularités à considérer sont, en plus des points singuliers de la fonction  $r$ , les points  $u = 0, u = -1$ , et les zéros des fonctions  $r, \frac{dr}{du}$  et  $1 + i \left( u - \frac{1}{u} \right)$ . Si l'on prend  $r$  pour variable et  $u$  pour fonction, les singularités à considérer sont, en plus des points singuliers de la fonction  $u$ , le point  $r = 0$  et les zéros des fonctions  $u, u + 1$ , et  $1 + i \left( u - \frac{1}{u} \right)$ .

**Remarque sur la position des points singuliers du mouvement.**

Si dans l'une quelconque des formes que peut prendre l'intégrale générale du mouvement avec surface libre analytique, on se donne la ou les fonctions arbitraires qui y figurent, ce qui revient à se donner la surface libre, la grandeur et la forme

des domaines des plans  $\zeta$  et  $z$ , dont la correspondance univoque et réciproque constitue le mouvement, dépend de la position de certains points que nous avons appelé points singuliers du mouvement, qui dépendent eux-mêmes de la position des zéros et des points singuliers de certaines fonctions construites à partir des fonctions que l'on s'est données. Peut-on, et dans quelle mesure, disposer de l'arbitraire laissé dans le choix de ces fonctions pour se fixer d'avance la position des points singuliers du mouvement? C'est le problème dont nous allons maintenant nous occuper. Nous ne chercherons pas à le résoudre dans toute sa généralité, nous nous limiterons aux deux problèmes suivants qui en sont deux cas particuliers.

1° Déterminer le mouvement quand on se donne le domaine du plan  $\zeta$  où il a lieu.

2° Déterminer le mouvement quand on connaît le domaine du plan  $z$  où il est défini.

#### § 4. — Détermination du mouvement par la connaissance du domaine du plan $\zeta$ où il a lieu.

##### Théorie générale.

Supposons que nous nous donnions le domaine  $\mathcal{R}$  du plan  $\zeta$  où a lieu le mouvement, la surface libre étant un arc  $s$  d'un seul tenant du contour de ce domaine pouvant être fini ou infini. Effectuons la représentation conforme du domaine  $\mathcal{R}$  sur le domaine  $d$  du plan de la variable  $Z = X + iY$  défini par les inégalités  $0 < Y < 1$ , de telle manière que l'axe réel  $Y = 0$  du domaine  $d$  corresponde à l'arc  $s$  du domaine  $\mathcal{R}$ . Si nous désignons par

$$\zeta = F(Z) = P(X, Y) + iQ(X, Y)$$

l'équation de cette représentation conforme, nous sommes conduits, en reprenant des raisonnements déjà faits, à écrire les équations du mouvement sous la forme (B) où  $\psi(Z)$  a l'expression (B'). Si nous désignons par  $D$  le domaine du plan  $Z$  défini par les inégalités  $-1 < Y < 1$ , il résulte de raisonnements déjà faits que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un mouvement et un seul ayant lieu dans le domaine  $\mathcal{R}$  est que la fonction  $\psi(Z)$  soit holomorphe et non nul à l'intérieur du domaine  $D$ , ce qui équivaut aux trois conditions suivantes :

- 1° La fonction  $F(Z)$  doit être holomorphe dans le domaine  $D$ .
- 2° Sa dérivée  $F'(Z)$  ne doit pas s'annuler dans le domaine  $D$ .
- 3° La fonction  $F(Z) + \Phi(Z)$  ne doit pas s'annuler dans le domaine  $D$ .

En général l'ensemble de ces conditions ne sera réalisé que par un choix convenable du domaine  $\mathcal{R}$ .

Parmi les domaines  $\mathcal{R}$  qui satisfont aux conditions précédentes, les plus simples sont les domaines  $\delta, \lambda, \bar{\lambda}$  étudiés au § 4 de la première partie.

En effet si  $\zeta = F(Z) = P(X, Y) + iQ(X, Y)$  désigne la fonction qui donne la représentation conforme d'un de ces domaines sur le domaine  $d$ , nous savons que cette même fonction donne la représentation conforme du domaine  $D$  sur un domaine du plan  $\zeta$ ; les deux premières conditions imposées à  $\mathcal{R}$  se trouvent donc par là même vérifiées; quant à la troisième, elle résulte de la propriété fondamentale commune aux domaines  $\delta, \lambda, \bar{\lambda}$ , que l'inégalité

$$P(X, Y) + P(X, -Y) > 0$$

est vérifiée en tout point intérieur à l'un de ces domaines, ce qui a pour conséquence que la fonction  $F(Z) + \Phi(Z)$ , dont la partie réelle est précisément  $P(X, Y) + P(X, -Y)$ , ne peut pas s'annuler à l'intérieur de l'un quelconque de ces domaines.

#### Étude du mouvement ayant lieu dans un domaine $\delta$ du plan $\zeta$ .

Les domaines  $\delta$  permettent une étude intéressante des mouvements ayant lieu dans ces domaines. On peut en particulier se rendre compte sans aucun calcul de la forme et de la disposition des lignes de courant et des équipotentiels.

Soit  $\gamma_y$  la courbe du plan  $z$  correspondant à la courbe  $\Gamma_y$  du plan  $\zeta$ . L'abscisse  $\xi$  et l'ordonnée  $\eta$  d'un point  $m$  de cette courbe sont respectivement le potentiel des vitesses et la fonction de courant au point  $M$  correspondant de la courbe  $\Gamma_y$ . L'équation de la courbe  $\gamma_y$  s'écrit sous forme différentielle

$$d\xi + id\eta = \sqrt{\bar{\psi}(X + iY)} dX,$$

où

$$\bar{\psi}(X + iY) = g(F(X + iY) + \Phi(X + iY)) F'(X + iY) \Phi'(X + iY).$$

Le point  $F(X + iY) + \Phi(X + iY)$  se trouve dans le quart de plan correspondant aux parties réelles positives et aux parties imaginaires positives, en vertu des inégalités qui constitue la propriété fondamentale des domaines  $\delta$  et par suite ce point a son argument compris entre zéro et  $\frac{\pi}{2}$ . D'autre part, il est facile de voir que l'argument du produit  $F'(X + iY) \Phi'(X + iY)$  est égal à l'angle  $\Theta$  relatif aux deux points conjugués  $X + iY$  et  $X - iY$ , qui est compris entre  $-\pi$  et  $\pi$ . L'argument du radical  $\sqrt{\bar{\psi}(X + iY)}$  est donc compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{3\pi}{4}$ . Il en résulte que l'angle

que fait avec l'axe des  $\xi$  la tangente à la courbe  $\gamma_Y$  dans le sens des  $X$  croissants est compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{3\pi}{4}$ . La courbe  $\gamma_Y$  est donc composée d'arcs des trois espèces suivantes :

- 1° Arcs où  $\xi$  et  $\eta$  vont en croissant quand  $X$  est croissant;
- 2° Arcs où  $\xi$  va en décroissant et  $\eta$  en croissant quand  $X$  est croissant, la décroissance de  $\xi$  étant plus faible que la croissance correspondante de  $\eta$ ;
- 3° Arcs où  $\xi$  va en croissant et  $\eta$  en décroissant quand  $X$  est croissant.

Il résulte de là que, lorsque l'on se déplace sur la courbe  $\Gamma_Y$  dans le sens des  $X$  croissants, ou bien le potentiel des vitesses et la fonction de courant vont chacun en croissant, ou bien le potentiel des vitesses va en décroissant et la fonction de courant en croissant, la décroissance du potentiel des vitesses étant plus faible que la croissance correspondante de la fonction de courant, ou bien le potentiel des vitesses va en croissant et la fonction de courant en décroissant, chacune de ces alternatives pouvant avoir lieu successivement.

CAS OU LE DOMAINE  $\delta$  EST UN DOMAINE  $\bar{\delta}$ . — Lorsque le domaine  $\delta$  est un domaine  $\bar{\delta}$ , l'angle  $\Theta$  est compris entre zéro et  $\pi$ , l'argument du radical  $\sqrt{\psi(X+iY)}$  est compris entre zéro et  $\frac{3\pi}{4}$ , et il en est de même de l'angle que fait avec l'axe des  $\xi$  la tangente à la courbe  $\gamma_Y$  dirigée dans le sens des  $X$  croissants. La courbe  $\gamma_Y$  n'est alors composée que d'arcs de première et deuxième espèces.

Il résulte de là que, lorsque l'on se déplace sur la courbe  $\Gamma_Y$  dans le sens des  $X$  croissants, ou bien le potentiel des vitesses et la fonction de courant vont chacun en croissant, ou bien le potentiel des vitesses va en décroissant et la fonction de courant en croissant, la décroissance du potentiel des vitesses étant plus faible que la croissance correspondante de la fonction de courant, chacune de ces alternatives pouvant avoir lieu successivement.

La propriété remarquable des domaines  $\bar{\delta}$  est que la fonction de courant va constamment en croissant le long d'une courbe  $\Gamma_Y$ .

CAS OU LE DOMAINE  $\delta$  EST UN DOMAINE  $\bar{\delta}$ . — Lorsque le domaine  $\delta$  est un domaine  $\bar{\delta}$ , l'angle  $\Theta$  est compris entre  $-\pi$  et zéro, l'argument du radical  $\sqrt{\psi(X+iY)}$  est compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{4}$ , et il en est de même de l'angle que fait avec l'axe des  $\xi$  la tangente à la courbe  $\gamma_Y$  dirigée dans le sens des  $X$  croissants. La courbe  $\gamma_Y$  n'est alors composée que d'arcs de première et troisième espèces.

Il résulte de là que, lorsque l'on se déplace sur la courbe  $\Gamma_Y$  dans le sens des  $X$  croissants, ou bien le potentiel des vitesses et la fonction de courant vont chacun en croissant, la croissance de la fonction de courant étant plus faible que la crois-

sance correspondante du potentiel des vitesses, ou bien le potentiel des vitesses va en croissant et la fonction de courant en décroissant, chacune de ces alternatives pouvant avoir lieu successivement.

La propriété remarquable des domaines  $\delta$  est que le potentiel des vitesses va constamment en croissant le long d'une courbe  $\Gamma_Y$ .

CAS OU LE DOMAINE  $\delta$  EST UN DOMAINE  $\delta_1$ . — Lorsque le domaine  $\delta$  est un domaine  $\delta_1$ , l'angle  $\Theta$  est compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ , l'argument du radical  $\sqrt{\psi(X+iY)}$  est compris entre  $-\frac{\pi}{4}$  et  $\frac{\pi}{4}$ , et il en est de même de l'angle que fait avec l'axe des  $\xi$  la tangente à la courbe  $\gamma_Y$  dirigée dans le sens des X croissants. La courbe  $\gamma_Y$  n'est alors composée que d'arcs de première ou troisième espèce.

Il résulte de là que, lorsque l'on se déplace sur la courbe  $\Gamma_Y$  dans le sens des X croissants, ou bien le potentiel des vitesses et la fonction de courant vont chacun en croissant, ou bien le potentiel des vitesses va en croissant et la fonction de courant en décroissant, la décroissance de la fonction de courant étant plus faible que la croissance correspondante du potentiel des vitesses, chacune de ces alternatives pouvant avoir lieu successivement.

CAS OU LE DOMAINE  $\delta$  EST UN DOMAINE  $\bar{\delta}_1$ . — Lorsque le domaine  $\delta$  est un domaine  $\bar{\delta}_1$ , l'angle  $\Theta$  est compris entre zéro et  $\frac{\pi}{2}$ , l'argument du radical  $\sqrt{\psi(X+iY)}$  est compris entre zéro et  $\frac{\pi}{2}$ , et il en est de même de l'angle que fait avec l'axe des  $\xi$  la tangente à la courbe  $\gamma_Y$  dirigée dans le sens des X croissants. La courbe  $\gamma_Y$  n'est alors composée que d'arcs de première espèce.

Il résulte de là que, lorsque l'on se déplace sur la courbe  $\Gamma_Y$  dans le sens des X croissants, le potentiel des vitesses et la fonction de courant vont chacun en croissant constamment. C'est une propriété remarquable des domaines  $\bar{\delta}_1$ .

CAS OU LE DOMAINE  $\delta$  EST UN DOMAINE  $\delta_2$ . — Lorsque le domaine  $\delta$  est un domaine  $\delta_2$ , l'angle  $\Theta$  est compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et zéro, l'argument du radical  $\sqrt{\psi(X+iY)}$  est compris entre  $-\frac{\pi}{4}$  et  $\frac{\pi}{4}$ , et il en est de même de l'angle que fait avec l'axe des  $\xi$  la tangente à la courbe  $\gamma_Y$  dirigée dans le sens des X croissants. La courbe  $\gamma_Y$  n'est alors composée que d'arcs de première ou troisième espèce.

Il résulte de là que, lorsque l'on se déplace sur la courbe  $\Gamma_Y$  dans le sens des X croissants, le potentiel des vitesses va constamment en croissant et la fonction de courant va soit en croissant, soit en décroissant, mais sa variation est toujours plus faible que celle correspondante du potentiel des vitesses.

ASYMPTOTE DE LA COURBE  $\gamma_Y$ . — Il est intéressant de connaître, dans le cas d'un domaine  $\delta$  quelconque, la valeur de la fonction de courant à l'infini sur une courbe  $\Gamma_Y$ , au point correspondant à  $X = -\infty$ . C'est la limite pour  $X = -\infty$  de la partie réelle de l'intégrale  $\int_0^Y \sqrt{\psi(X+iY)} dY$ . Cette limite est manifestement  $\beta \sqrt{2g\alpha} Y$ . Lorsque l'on se déplace sur la courbe  $\Gamma_Y$  dans le sens des  $X$  croissant, la fonction de courant part donc de la valeur  $\beta \sqrt{2g\alpha} Y$ . Il en résulte que la courbe  $\gamma_Y$  admet la droite  $\eta = \beta \sqrt{2g\alpha} Y$  pour asymptote dans le sens des  $\xi$  négatifs.

Dans le cas où le domaine  $\delta$  est un domaine  $\bar{\delta}$ , et où  $\alpha$  est positif, la fonction de courant part de la valeur  $\beta \sqrt{2g\alpha}$  et est constamment croissante, donc supérieure à  $\beta \sqrt{2g\alpha}$ , tout le long de la courbe  $\Gamma$  frontière inférieure du domaine  $\bar{\delta}$ , d'où l'intéressante propriété suivante des domaines  $\bar{\delta}$  où  $\alpha$  est positif :

*Le mouvement sans recouvrement ayant lieu dans un domaine  $\bar{\delta}$  où  $\alpha$  est positif comprend un écoulement simple bi-infini sans recouvrement de débit  $\beta \sqrt{2g\alpha}$  en bordure de la surface libre.*

#### § 5. — Détermination du mouvement par la connaissance du domaine du plan $z$ où il est défini.

Soit  $a$  un domaine simplement connexe du demi-plan  $\eta > 0$  du plan  $z$  dont le contour comprend un segment  $s$  fini ou infini de l'axe réel. Nous allons tout d'abord démontrer le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (C) représente un mouvement défini dans le domaine  $a$  dont la surface libre corresponde au segment  $s$ , est que la fonction  $f(z)$  soit holomorphe et non nulle et que la fonction  $\frac{1}{2gf(z)} - f''(z)$  n'ait aucun zéro impair à l'intérieur du domaine  $a$  et sur le segment  $s$ .*

La condition est suffisante d'après les résultats du § 3. Nous allons démontrer qu'elle est nécessaire. Posons

$$\mathfrak{F}(z) = f'(z) - i \sqrt{\frac{1}{2gf(z)} - f''(z)}.$$

Nous savons que la fonction  $f(z)$  est solution de l'équation différentielle

$$\frac{df}{dz} = \frac{\mathfrak{F}(z)}{2} + \frac{1}{4g\mathfrak{F}(z)f}.$$

$f(z)$  ne peut donc cesser d'être holomorphe qu'en devenant nul ou infini. Cette dernière éventualité ne peut pas se présenter, parce que l'équation différentielle précédente peut s'écrire

$$\frac{d\left(\frac{1}{f}\right)}{dz} = -\left(\frac{1}{f}\right)^2 \left( \frac{\mathcal{F}(z)}{2} + \frac{1}{4g\mathcal{F}(z)} \right),$$

équation qui ne peut admettre une solution non identiquement nulle en  $\frac{1}{f}$  tendant vers zéro pour une valeur particulière de  $z$ , parce qu'elle admet la solution  $\frac{1}{f} = 0$ .  $f(z)$  ne peut pas non plus s'annuler.

En effet, soit  $z_0$  un zéro de  $f(z)$ . Formons l'équation différentielle donnant  $z$  en fonction de  $f$  autour du point  $f = 0$ , il vient

$$\frac{dz}{df} = \frac{f}{\frac{1}{4g\mathcal{F}(z)} + \frac{\mathcal{F}(z)}{2}f}.$$

Soient  $\bar{z}_0, \bar{z}, \bar{f}$  les conjugués de  $z_0, z, f$ . Quand  $z$  tend vers  $z_0$ ,  $\bar{z}$  tend vers  $\bar{z}_0$ ,  $f(\bar{z})$  qui est égal à  $\bar{f}(z)$  tend vers  $\bar{f}(z_0)$ , c'est-à-dire vers zéro. Les quantités conjuguées  $\frac{1}{f} \frac{dz}{df}$  et  $\frac{1}{\bar{f}} \frac{d\bar{z}}{d\bar{f}}$  ont d'après l'équation différentielle précédente pour limite respective  $\mathcal{F}(z_0)$  et  $\mathcal{F}(\bar{z}_0)$  quand  $z$  tend vers  $z_0$ .  $\mathcal{F}(z_0)$  et  $\mathcal{F}(\bar{z}_0)$  sont donc conjugués. Désignons alors par P et M les parties réelles de  $f'(z_0)$  et  $\sqrt{\frac{1}{2gf(z_0)} - f''(z_0)}$  et par Q et N les parties imaginaires des mêmes quantités, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z_0) &= P + iQ - i(M + iN) = P + N - i(M - Q), \\ \mathcal{F}(\bar{z}_0) &= P - iQ - i(M - iN) = P - N - i(M + Q). \end{aligned}$$

$\mathcal{F}(z_0)$  et  $\mathcal{F}(\bar{z}_0)$  étant conjugués, on a

$$P + N = P - N, \quad \text{et} \quad M - Q = -M - Q,$$

c'est-à-dire

$$M = 0 \quad \text{et} \quad N = 0.$$

On en déduit

$$\mathcal{F}(z_0) = f'(z_0).$$

Or  $f'(z_0)$  est infini d'après l'équation différentielle qui définit  $\frac{df}{dz}$  en fonction



de  $f$  et de  $\mathcal{F}(z)$ . L'égalité précédente est donc impossible à l'intérieur du domaine  $a$  et sur le segment  $s$ .

De là résulte que  $f(z)$  est une fonction holomorphe et non nulle à l'intérieur du domaine  $a$  et sur l'arc  $s$ . D'ailleurs la fonction  $\frac{1}{2gf(z)} - f'^2(z)$  ne peut admettre de zéro impair, car au voisinage d'un zéro impair de cette fonction  $\mathcal{F}(z)$  ne serait pas holomorphe. Le théorème proposé est démontré.

La détermination d'un mouvement ayant lieu dans le domaine  $a$  revient donc à la recherche d'une fonction  $f(z)$  satisfaisant aux conditions précédentes. Les fonctions de cette espèce sont fournies par le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *La condition nécessaire et suffisante, pour que la fonction  $f(z)$  soit holomorphe et non nulle dans le domaine  $a$  et sur le segment  $s$  et que la fonction  $\frac{1}{2gf(z)} - f'^2(z)$  n'y ait que des zéros d'ordre pair, est que la fonction  $f(z)$  soit de la forme*

$$\left(\frac{3}{2\sqrt{2g}}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\int \cos \lambda(z) dz\right)^{\frac{2}{3}},$$

$\lambda(z)$  étant holomorphe dans le domaine  $a$  et l'intégrale  $\int \cos \lambda(z) dz$  ne s'y annulant pas.

En effet, la condition nécessaire et suffisante pour que  $f(z)$  soit holomorphe et non nul dans le domaine  $a$  est que l'on ait

$$f(z) = e^{\mathbb{H}(z)},$$

$\mathbb{H}(z)$  étant holomorphe dans le domaine  $a$ . Pour que la fonction  $\frac{1}{2gf(z)} - f'^2(z)$  n'ait que des zéros d'ordre pair, il faut et il suffit que la fonction  $\sqrt{\frac{1}{2gf(z)} - f'^2(z)}$  soit uniforme. Or on a

$$\sqrt{\frac{1}{2gf(z)} - f'^2(z)} = \frac{1}{\sqrt{2g}} e^{-\frac{\mathbb{H}(z)}{2}} \sqrt{1 - 2g\mathbb{H}'^2(z) e^{3\mathbb{H}(z)}}.$$

Posons

$$\lambda(z) = \arccos \left( \sqrt{2g}\mathbb{H}'(z) e^{\frac{3\mathbb{H}(z)}{2}} \right),$$

il vient

$$\sqrt{\frac{1}{2gf(z)} - f'^2(z)} = \frac{1}{\sqrt{2g}} e^{-\frac{\mathbb{H}(z)}{2}} \sin \lambda(z).$$

Pour que la fonction qui figure au premier membre de cette équation soit uniforme, il faut et il suffit que  $\lambda(z)$  le soit. Or, d'après la définition de  $\lambda(z)$ , on a

$$\begin{aligned}\sqrt{2g} H'(z) e^{\frac{3H(z)}{2}} &= \cos \lambda(z), \\ \frac{2\sqrt{2g}}{3} e^{\frac{3H(z)}{2}} &= \int \cos \lambda(z) dz,\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$H(z) = \frac{2}{3} \log \frac{3}{2\sqrt{2g}} + \frac{2}{3} \log \left( \int \cos \lambda(z) dz \right),$$

ce qui exige que l'intégrale  $\int \cos \lambda(z) dz$  ne puisse s'annuler. On a alors

$$f(z) = e^{H(z)} = \left( \frac{3}{2\sqrt{2g}} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \int \cos \lambda(z) dz \right)^{\frac{2}{3}},$$

le théorème est démontré.

Cherchons ce que devient l'équation (C) quand  $f(z)$  a la forme précédente. On a

$$f'(z) = \frac{2}{3} \left( \frac{3}{2\sqrt{2g}} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \int \cos \lambda(z) dz \right)^{\frac{1}{3}} \cos \lambda(z),$$

et

$$\sqrt{\frac{1}{2gf(z)}} - f'^2(z) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left( \frac{3}{2\sqrt{2g}} \right)^{-\frac{1}{3}} \left( \int \cos \lambda(z) dz \right)^{-\frac{1}{3}} \sin \lambda(z),$$

et par conséquent, comme

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \left( \frac{3}{2\sqrt{2g}} \right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left( \frac{3}{2\sqrt{2g}} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{2\sqrt{2g}}{3} = \frac{2}{3} \left( \frac{3}{2\sqrt{2g}} \right)^{\frac{2}{3}},$$

et

$$\frac{2}{3} \left( \frac{3}{2\sqrt{2g}} \right)^{\frac{2}{3}} = \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt[3]{2g}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3g}},$$

l'équation (C) s'écrit

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt[3]{3g}} \int e^{-i\lambda(z)} \left( \int \cos \lambda(z) dz \right)^{\frac{1}{3}} dz.$$

Cette équation est identique à l'équation (A) que nous avons obtenue au § 1 de la première partie par la méthode de A. R. Richardson, si l'on y fait  $\lambda(z) = -\theta(z)$ . L'interprétation géométrique de la fonction  $\lambda(z)$  est alors évidente : c'est, quand  $z$  est réel, l'angle changé de signe de la vitesse avec la verticale descendante sur la surface libre.

Nous avons indiqué dans la première partie § 5 comment on pouvait déterminer des fonctions  $\theta(z)$  satisfaisant à la condition que l'intégrale  $\int \cos \theta(z) dz$  ne s'annule pas dans le domaine  $a$ . Nous sommes donc en mesure de résoudre complètement le problème de la détermination des mouvements définis dans un domaine  $a$  donné du plan  $z$ .

Lorsque le domaine  $a$  est une bande du plan  $z$ , le problème précédent revient à déterminer les écoulements simples de débit donné, problème qui se pose dans la pratique pour la détermination du profil de crête d'un barrage-déversoir devant écouler un débit de crue donné.

### III

#### MOUVEMENT IRROTATIONNEL AVEC PRESSION VARIABLE SUR LA SURFACE LIBRE

Expliquons tout d'abord ce que nous entendons par mouvement avec pression variable sur la surface libre. Au premier abord cette expression semble illogique, puisque une surface libre est par définition la partie du liquide qui se trouve en contact avec un gaz où la pression est la même partout. En fait, la notion de surface libre doit être distinguée de celle de ligne de courant où la pression est constante. On sait depuis longtemps que dans certains mouvements par déversoir où la nappe déversante admet une surface libre inférieure, celle-ci supporte une pression variable inférieure à la pression atmosphérique. Mais même sur la surface libre supérieure d'un écoulement par déversoir quelconque, la pression n'est pas rigoureusement constante, comme l'a constaté M. Camichel dans des expériences sur des barrages de laboratoire, où il a mis en évidence que la pression allait graduellement en diminuant quand on se déplaçait dans le sens du mouvement. M. Camichel a pu se rendre compte que cette circonstance était due à l'écoulement de l'air qui se produit au contact de la lame déversante et qui entraîne une chute de pression.

Nous voyons donc que l'étude des mouvements avec surface libre où celle-ci supporte une pression faiblement variable découle de l'expérience. Elle complète d'ailleurs d'une manière remarquable comme nous le verrons la théorie du mouvement avec pression constante sur la surface libre.

§ 1. — Intégrale générale. — Détermination du mouvement par la surface libre.

La différence qu'il y a, entre le cas actuel de la pression variable sur la surface libre, et le cas précédemment traité de la pression constante, réside dans le fait que la vitesse en un point de la surface libre n'est plus égale à  $2gx$ , mais à  $2g(x+h)$ ,  $h$  désignant la variation de pression par rapport à une pression moyenne donnée au point correspondant de la surface libre.  $h$  sera petit si la pression varie peu.

Nous pouvons, moyennant le changement de  $x$  en  $x+h$  dans l'expression de la vitesse sur la surface libre, reprendre mot pour mot la méthode exposée précédemment (deuxième partie, II, § 1). On obtient ainsi l'intégrale générale du mouvement sous la forme

$$(B_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta = F(Z), \\ z = \int \psi_1(Z) dZ, \end{array} \right.$$

où  $\psi_1(Z)$  est la fonction de  $Z$  qui prend pour  $Z$  réel et égal à  $X$  la valeur

$$\psi_1(X) = \sqrt{2g(P(X, 0) + h(X)) \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial X} \right)_{Y=0}^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)_{Y=0}^2 \right]},$$

$h(X)$  désignant la valeur de la variation de pression au point correspondant à  $X$  sur la surface libre, les autres quantités ayant toujours la même signification.

A une surface libre donnée quelconque correspond toujours une infinité de mouvements, car on peut toujours disposer de la fonction  $h(X)$  pour rendre  $\psi_1(X)$  analytique. Quand la surface libre est analytique,  $h(X)$  doit être analytique; quand la surface libre n'est pas analytique,  $h(X)$  peut être analytique ou non analytique.

Le dernier théorème démontré (deuxième partie, II, § 1) peut être généralisé comme il suit.:

*Théorème.* — Si  $\psi_1(X)$  est analytique quand la surface libre est une courbe non analytique particulière  $L$ , cette fonction sera non analytique quand la surface libre sera toute autre courbe déduite de  $L$  par une translation verticale, la fonction  $h(X)$  restant inchangée.

§ 2. — Formes diverses de l'intégrale générale quand la surface libre est analytique.

Première forme de l'intégrale générale.

La première forme de l'intégrale générale du mouvement avec surface libre analytique est constituée par les équations (B<sub>1</sub>), où  $\psi_1(Z)$  a la forme

$$(B'_1) \quad \psi_1(Z) = \sqrt{g(F(Z) + \Phi(Z) + h(Z)) F'(Z) \Phi'(Z)},$$

où  $\Phi(Z)$  a la signification habituelle. Il y a lieu de noter à propos de l'équation (B'<sub>1</sub>) que le domaine d'existence de la fonction  $\psi_1(Z)$  ne dépend plus seulement de celui de la fonction  $F(Z)$  mais encore de celui de la fonction  $h(Z)$ .

Deuxième forme de l'intégrale générale.

En suivant la même méthode que dans le cas de la pression constante sur la surface libre et en conservant les mêmes notations, on parvient d'abord aux équations

$$(C'_1) \quad \begin{cases} \xi = \int \sqrt{2g(f + \mathfrak{h}) \left(1 + \left(\frac{d\varphi}{df}\right)^2\right)} df, \\ \varphi = \Phi(f), \end{cases}$$

$\mathfrak{h}$  désignant la variation de pression au point d'abscisse  $f$  de la surface libre, puis à l'équation

$$(C''_1) \quad \varphi = \int \sqrt{\frac{\left(\frac{d\xi}{df}\right)^2}{2g(f + \mathfrak{h})} - 1} df,$$

enfin à la seconde forme de l'intégrale générale

$$(C_1) \quad \xi = f(z) - i \int \sqrt{\frac{1}{2g(f(z) + \mathfrak{h}(z))} - f''(z)} dz,$$

où  $\mathfrak{h}(z)$  désigne la variation de pression au point correspondant à  $z$  sur la surface libre.

**Troisième forme de l'intégrale générale.**

On a

$$(C_1) \quad \varphi(z) = - \int \sqrt{\frac{1}{2g(f(z) + h(z))} - f'^2(z)} dz.$$

On en déduit la troisième forme de l'intégrale générale

$$(D) \quad \begin{cases} \zeta = f + i\varphi, \\ z = \int \sqrt{2g(f + h) \left(1 + \left(\frac{d\varphi}{df}\right)^2\right)} df. \end{cases}$$

**Quatrième forme de l'intégrale générale.**

C'est

$$(E) \quad \begin{cases} z = K(f), \\ \zeta = f + i \int \sqrt{\frac{K'^2(f)}{2g(f + h)} - 1} df. \end{cases}$$

**Cinquième forme de l'intégrale générale.**

C'est

$$(F) \quad \begin{cases} z = \int \frac{1}{2g(f' + h')} d\left(\frac{1}{f'^2 + \varphi'^2}\right), \\ \zeta = \int \frac{f' + i\varphi'}{2g(f' + h')} d\left(\frac{1}{f'^2 + \varphi'^2}\right), \end{cases}$$

$f'$ ,  $\varphi'$ ,  $h'$ , étant des fonctions analytiques réelles d'une variable auxiliaire, la dernière se rapportant à la variation de pression sur la surface libre.

**Sixième forme de l'intégrale générale.**

C'est

$$\begin{cases} z = \frac{1}{g} \int \frac{r^2 dr}{\cos \theta + \varepsilon'}, \\ \zeta = \frac{1}{g} \int \frac{r e^{i\theta} dr}{\cos \theta + \varepsilon'}, \end{cases}$$

où  $\varepsilon' = \theta' r$  se rapporte à la variation de pression sur la surface libre, ce que l'on peut encore écrire

$$(G_1) \quad \begin{cases} z = \frac{1}{g} \int \frac{(1 - \varepsilon) r^2 dr}{\cos \theta}, \\ \zeta = \frac{1}{g} \int (1 - \varepsilon)(1 + i \operatorname{tg} \theta) r dr \end{cases}$$

où  $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{\cos \theta + \varepsilon'}$  se rapporte à la variation de pression sur la surface libre.

#### Septième forme de l'intégrale générale.

C'est

$$(H_1) \quad \begin{cases} z = \frac{1}{g} \int \frac{1 + t^2}{(1 - t^2) + \varepsilon(1 + t^2)} r^2 dr, \\ \zeta = \frac{1}{g} \int \frac{(1 + it)^2}{(1 - t^2) + \varepsilon(1 + t^2)} r dr. \end{cases}$$

#### Huitième forme de l'intégrale générale.

Cette forme se déduit des équations (G<sub>1</sub>) en posant

$$u = \operatorname{cotg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right),$$

c'est

$$(I_1) \quad \begin{cases} z = \frac{1}{2g} \int (1 - \varepsilon) \left( u + \frac{1}{u} \right) r^2 dr, \\ \zeta = \frac{1}{2g} \int (1 - \varepsilon) \left( 1 + i \left( u + \frac{1}{u} \right) \right) r dr. \end{cases}$$

### § 3. — Étude des singularités des équations du mouvement.

Dans le cas où la surface libre est analytique, les circonstances qui interviennent dans cette étude sont toutes différentes de celles qui correspondent au cas de la pression constante sur la surface libre. La présence de la fonction qui indique la variation de pression sur la surface libre a, sur la position des points singuliers du mouvement, une influence qui peut masquer complètement celle de la fonction qui dépend de la forme de la surface libre.

En particulier, en ce qui concerne les équations  $(C_1)$ , les fonctions  $f(z)$  et  $\mathfrak{h}(z)$  peuvent cesser d'exister dans une région quelconque du domaine  $a$  où le mouvement se trouve cependant défini. A cette circonstance se rattache la notion de mouvement régulier.

Nous dirons qu'un mouvement est régulier dans un domaine  $a$  du plan  $z$  où il est défini, si les fonctions  $f(z)$  et  $\mathfrak{h}(z)$  qui lui correspondent sont méromorphes dans ce domaine. Les fonctions qui figurent dans l'une quelconque des différentes formes de l'intégrale générale du mouvement à surface libre analytique sont méromorphes en tout point où le mouvement est régulier. L'importance des mouvements réguliers qui découle de cette propriété va apparaître dans toute sa généralité au § suivant.

#### § 4. — Approximation d'un mouvement quelconque par un mouvement régulier.

**DISTANCE DE DEUX MOUVEMENTS.** — Étant donnés deux mouvements définis dans un même domaine du plan  $z$ , nous appellerons points homologues deux points appartenant aux plans  $\zeta$  de chacun de ces deux mouvements et correspondant au même point  $z$  du domaine  $a$ . Cela posé, la distance de deux mouvements définis dans un même domaine du plan  $z$  sera, par définition, égale au maximum de la distance de deux points homologues.

**MOUVEMENT LIMITE D'UNE SUITE DE MOUVEMENTS.** — Nous dirons qu'un mouvement  $M$  défini dans un domaine  $a$  du plan  $z$  est limite d'une suite de mouvements  $M_1, M_2, \dots, M_m, \dots$ , définis dans le même domaine, si la distance des mouvements  $M$  et  $M_m$  tend vers zéro quand  $m$  augmente indéfiniment.

Il est facile de voir que la vitesse et la pression, en un point du mouvement  $M$  correspondant au point  $z$  du domaine  $a$ , sont les limites pour  $m$  infini de la vitesse et de la pression au point  $z$  du mouvement  $M_m$ .

Cela posé, démontrons tout d'abord le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *Un mouvement défini par les équations  $(B_1)$  est régulier dans un domaine  $a$  du plan  $z$ , si pour toute valeur de  $Z$  correspondant à un point du domaine  $a$ , les fonctions  $F(Z)$ ,  $\Phi(Z)$  et  $h(Z)$  sont méromorphes.*

En effet, soit  $A$  le domaine du plan  $Z$  correspondant au domaine  $a$  du plan  $z$  où le mouvement est défini. Désignons par  $Z = \chi(z)$  l'équation de la correspondance entre  $a$  et  $A$ . Les fonctions  $F(Z)$  et  $\Phi(Z)$  étant méromorphes dans le domaine  $A$ , la fonction  $F(\chi(z)) + \Phi(\chi(z))$  est méromorphe dans le domaine  $a$ . Comme elle se réduit manifestement pour  $z$  réel et égal à  $\xi$ , à  $P(\chi(\xi), 0)$  qui n'est autre que  $f(\xi)$ , on a identiquement

$$f(z) = F(\chi(z)) + \Phi(\chi(z)).$$



La fonction  $f(z)$  est donc méromorphe dans le domaine  $a$ . D'autre part il est clair que la fonction  $\mathfrak{h}(z)$  est égale à la fonction  $h(\gamma(z))$  qui est par hypothèse méromorphe dans le domaine  $a$ . Les deux fonctions  $f(z)$  et  $\mathfrak{h}(z)$  étant méromorphes dans le domaine  $a$ , le mouvement considéré est régulier dans le domaine  $a$ , le théorème est démontré.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'important théorème que voici :

**THÉORÈME.** — *Étant donné un mouvement  $M$  quelconque avec surface libre, et un domaine  $\overline{R}$  fini en bordure de la surface libre et intérieur au domaine d'existence du mouvement  $M$  dans le plan  $\zeta$ , on peut former une suite de mouvements  $M_1, M_2, \dots, M_m, \dots$  définis et réguliers dans le domaine  $a$  du plan  $z$  correspondant au domaine  $\overline{R}$  dans le mouvement  $M$ , qui ait pour limite le mouvement  $M$  dans ce domaine.*

En effet, soit  $A$  le domaine nécessairement fini du demi-plan supérieur de la variable  $Z$  qui correspond aux domaines  $\overline{R}$  et  $a$  dans le mouvement  $M$ . Désignons par  $A'$  le domaine symétrique du domaine  $A$  par rapport à la droite  $Y = 0$ , et par  $R$  le domaine constitué par la réunion des domaines  $A$  et  $A'$ . La fonction  $\psi_1(Z)$  qui figure dans les équations  $(B_1)$  qui définissent le mouvement, est holomorphe dans le domaine  $R$ .

Choisissons un nombre positif  $k$  de telle manière que le point  $Z = -\frac{ik}{2}$  soit extérieur au domaine  $R$ . Nous savons, d'après un théorème démontré dans la première partie § 3, qu'on peut former une suite de fonctions  $F_1(Z), F_2(Z), \dots, F_m(Z), \dots$ , holomorphes dans tout le plan  $Z$ , sauf au point  $Z = -\frac{ik}{2}$ , telle que chaque fonction  $\zeta = F_m(Z)$  définisse une représentation conforme du demi-plan  $Y > 0$  de la variable  $Z$  sur un domaine infini simple du plan  $\zeta$ , et qu'à l'intérieur et sur le contour du domaine fini  $A$ , déduit du demi-plan  $Y > 0$ , la suite des fonctions  $F_1(Z), F_2(Z), \dots, F_m(Z), \dots$  converge uniformément vers  $F(Z)$ .

Posons  $F_m(Z) = P_m(X, Y) + iQ_m(X, Y)$  et  $\Phi_m(Z) = P_m(X, -Y) - iQ_m(X, -Y)$ . Les deux fonctions  $F_m(Z)$  et  $\Phi_m(Z)$  seront, vu la position du point  $Z = -\frac{ik}{2}$  extérieur au domaine  $R$ , holomorphes dans ce domaine, et par suite la fonction  $h_m(Z)$  définie par l'équation

$$\psi_1(Z) = \sqrt{g(F_m(Z) + \Phi_m(Z) + h_m(Z)) F'_m(Z) \Phi'_m(Z)}$$

est méromorphe dans le domaine  $R$ , et le mouvement  $M_m$  défini par les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta = F_m(Z), \\ z = \int \psi_1(Z) dZ \end{array} \right.$$

est, d'après le théorème précédent, régulier dans le domaine  $a$ . D'ailleurs la distance des mouvements  $M$  et  $M_m$ , qui est le maximum du module de  $F(Z) - F_m(Z)$ , tend vers zéro pour  $m$  infini, puisque la suite  $F_1(Z), F_2(Z), \dots, F_m(Z), \dots$  converge uniformément vers  $F(Z)$  à l'intérieur et sur le contour du domaine  $A$ . La suite des mouvements  $M_1, M_2, \dots$ , qui sont réguliers dans le domaine  $a$ , tend donc vers le mouvement  $M$  dans ce domaine, c. q. f. d.

Ce théorème permet l'approximation d'un mouvement quelconque par un mouvement régulier dans un domaine fini quelconque.

APPROXIMATION D'UN MOUVEMENT QUELCONQUE PAR DES FAMILLES PARTICULIÈRES DE MOUVEMENTS RÉGULIERS. — Considérons un mouvement régulier  $M$  défini par l'un quelconque des groupes d'équations  $(C_i), (D_i), (E_i), (F_i), (G_i), (H_i), (I)$ . Les fonctions qui figurent sous les intégrales de ces équations sont développables dans la région d'existence du mouvement en séries uniformément convergentes de polynômes. Comme les intégrales qui figurent dans ces équations sont des fonctionnelles uniformément continues des fonctions précédentes, il est clair que le mouvement  $M$  sera limite d'une suite de mouvements pour lesquels ces fonctions seront des polynômes.

Il résulte de là qu'on pourra toujours approcher, avec une erreur fixée d'avance, d'un mouvement quelconque avec surface libre, dans une région finie quelconque de ce mouvement en bordure de la surface libre, par un mouvement régulier défini par l'un quelconque des systèmes  $(C_i), (D_i), (E_i), (F_i), (G_i), (H_i), (I)$ , où les fonctions figurant sous les intégrales sont des polynômes.

##### § 5. — Continuité dans un domaine $a$ du plan $z$ de la détermination du mouvement défini sur un segment de droite $\gamma_1 = \gamma_0$ .

Considérons un mouvement  $M$  défini dans un domaine  $a$  du plan  $z$ , et le segment de la droite  $\gamma_1 = \gamma_0$  intérieur à ce domaine ou sur son contour. Nous dirons que la détermination du mouvement  $M$  est continue sur le segment de droite  $\gamma_1 = \gamma_0$ , si toute suite de mouvements, ayant pour limite le mouvement  $M$  sur ce segment, a pour limite le mouvement  $M$  dans tout le domaine  $a$ . On peut limiter les mouvements figurant dans les suites considérées à ceux d'une famille particulière, ce qui correspond à la définition de la continuité par rapport à cette famille particulière. Il peut alors y avoir pour un même mouvement  $M$  continuité par rapport à une famille de mouvements et non continuité par rapport à une autre famille.

**Continuité par rapport à la famille des mouvements avec surface libre à pression constante ou peu variable.**

*Théorème.* — *Étant donné un mouvement quelconque M avec surface libre défini dans une bande b du plan z comprise entre les lignes de courant  $\eta = 0$  et  $\eta = q$ , si l'on décompose la bande b en deux domaines quelconques b' et b'' dont le premier b' soit simplement connexe et ait sur sa frontière les segments des droites  $\eta = 0$  et  $\eta = q$  appartenant au contour de b, on peut former une suite de mouvements  $M_1, M_2, \dots, M_m, \dots$  définis dans la bande b et n'ayant pour limite le mouvement M que dans le domaine b' à l'exclusion du domaine b'', où la suite considérée n'aura pas de mouvement limite ou en aura un différent du mouvement M.*

En effet, supposons le mouvement M défini par le système (B<sub>1</sub>). Aux domaines b, b', b'' du plan z la seconde équation (B<sub>1</sub>) fait correspondre dans le plan Z des domaines B, B', B''. Soit  $\lambda(Z)$  une fonction holomorphe dans le domaine B'', par ailleurs arbitraire mais non identiquement nulle. Formons une suite de polynômes  $\lambda_1(Z), \lambda_2(Z), \dots, \lambda_m(Z), \dots$  convergeant vers zéro dans le domaine B' et vers  $\lambda(Z)$  dans le domaine B'', et considérons la famille de fonctions définie par

$$F_m(Z) = F(Z_0) + \int_{Z_0}^Z e^{\log F'(Z) + \lambda_m(Z)} dZ,$$

où  $Z_0$  est un point de la droite  $Y = 0$ . L'équation  $\zeta = F_m(Z)$  donne une représentation conforme du demi-plan  $Y > 0$  de la variable Z sur un domaine  $\mathfrak{R}_m$  du plan  $\zeta$  simplement connexe sur une surface de Riemann  $\Sigma_m$  déduite de ce plan. Par conséquent le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta = F_m(Z), \\ z = \int \psi(Z) dZ \end{array} \right.$$

définit une correspondance univoque et réciproque entre un domaine  $\overline{\mathfrak{R}_m}$  déduit du domaine  $\mathfrak{R}_m$  et la bande b du plan z, c'est-à-dire un mouvement  $M_m$ . Ce mouvement admet pour surface libre la courbe correspondante à  $Y = 0$  dans la représentation conforme  $\zeta = F_m(Z)$ , et la variation de pression sur cette surface libre est donnée par la fonction  $h_m(X)$  définie par l'équation

$$\psi(X) = \sqrt{2g(P_m(X, 0) + h_m(X)) \left( \left( \frac{\partial P_m}{\partial X} \right)_{Y=0}^2 + \left( \frac{\partial Q_m}{\partial X} \right)_{Y=0}^2 \right)},$$

où  $P_m(X, Y)$  et  $Q_m(X, Y)$  sont la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction  $F_m(Z)$ . Formons la différence  $F(Z) - F_m(Z)$ .

$$F(Z) - F_m(Z) = \int_{Z_0}^Z e^{\log F'(Z)} (1 - e^{\lambda_m(Z)}) dZ;$$

quand  $m$  augmente indéfiniment, la fonction  $1 - e^{\lambda_m(z)}$  tend vers zéro dans le domaine  $B'$  et vers  $1 - e^{\lambda(z)}$  dans le domaine  $B''$ . Il en résulte que la distance des mouvements  $M$  et  $M_m$  tend vers zéro à l'intérieur du domaine  $b'$ , tandis qu'à l'intérieur du domaine  $b''$  la distance des mouvements  $M$  et  $M_m$  ne tend pas vers zéro. Le théorème énoncé se trouve démontré.

Il résulte de là qu'il n'y a pas continuité par rapport à la famille des mouvements avec surface libre à pression constante ou peu variable, pour un mouvement  $M$  quelconque avec surface libre, car les mouvements  $M_1, M_2, \dots$  qui figurent au théorème précédent ont une surface libre sur laquelle la pression finit par différer aussi peu que l'on veut de celle qui règne sur la surface libre du mouvement  $M$ , puisque la suite de ces mouvements a pour limite le mouvement  $M$  sur le segment de la droite  $\eta = 0$  du contour du domaine  $b$ .

En particulier, étant donné un mouvement  $M$  quelconque dont la surface libre est  $L$ , on peut former une suite de mouvements avec surface libre, n'ayant pour limite le mouvement  $M$  que sur l'axe réel du plan  $z$  correspondant à  $L$  dans le mouvement  $M$ . En d'autres termes, on peut former une suite de mouvements aussi différents que l'on veut du mouvement  $M$  et admettant des surfaces libres dont la suite a pour limite la surface libre du mouvement  $M$ .

Comme conséquence de cette dernière propriété, il est impossible que la connaissance graphique de la courbe formant la surface libre d'un mouvement permette, par une suite quelconque de constructions géométriques, la détermination de ce mouvement. C'est le cas en particulier pour la construction de Prasil.

**Continuité par rapport à une famille particulière de mouvements avec surface libre à pression constante ou peu variable.**

Il faut extraire de la famille générale des mouvements avec surface libre à pression constante ou peu variable des familles particulières pour qu'apparaisse la continuité qui n'existe pas dans le cas général.

Considérons par exemple la famille des mouvements pour lesquels la vitesse n'est en aucun point dirigée parallèlement à une demi-droite donnée  $oj$  et dans le même sens. Désignons par  $\alpha$  l'angle  $(ox, oj)$ . Soit

$$\zeta = F(z)$$

l'équation d'un mouvement quelconque de la famille. En un point  $z$  quelconque du mouvement l'argument de la dérivée  $F'(z)$  est égal à l'angle de la vitesse avec  $ox$ . Comme cet angle ne peut être égal à  $\alpha$  par hypothèse, le point représentatif de la fonction  $F'(z)$  ne pourra jamais se trouver sur la demi-droite du plan complexe issue de l'origine et faisant l'angle  $\alpha$  avec l'axe réel. Nous désignerons par  $J$  cette demi-droite.

Considérons une suite quelconque de mouvements de la famille,  $M_1, M_2, \dots, M_m, \dots$  ayant respectivement pour équations  $\zeta = F_1(z), \zeta = F_2(z), \dots, \zeta = F_m(z), \dots$ , et supposons-les définis dans un même domaine  $a$  du plan  $z$ . La suite des fonctions  $F'_1(z), F'_2(z), \dots, F'_m(z), \dots$  forme une famille normale de fonctions holomorphes dans le domaine  $a$ , puisque ces fonctions ne peuvent pas prendre les valeurs situées sur la demi-droite  $J$ . Il en résulte que la suite des fonctions  $F_1(z), F_2(z), \dots, F_m(z), \dots$  forme également une famille normale de fonctions holomorphes dans le domaine  $a$ .

Considérons maintenant un mouvement  $M$  de la famille défini dans un domaine  $a$  du plan  $z$ , et une suite de mouvements de la famille  $M_1, M_2, \dots, M_m, \dots$  définis dans le même domaine. Si cette suite a pour limite le mouvement  $M$  sur le segment de droite  $\gamma_1 = \gamma_0$  intérieur au domaine  $a$  ou sur son contour, elle a pour limite le mouvement  $M$  dans tout le domaine  $a$ . En effet, la suite des fonctions  $F_1(z), F_2(z), \dots, F_m(z), \dots$  qui définissent les mouvements  $M_1, M_2, \dots, M_m, \dots$  étant normale dans le domaine  $a$  et ayant pour limite sur le segment  $\gamma_1 = \gamma_0$  de ce domaine la fonction  $F(z)$  qui définit le mouvement  $M$  dans le domaine  $a$ , converge uniformément vers  $F(z)$  dans tout le domaine  $a$ .

Il résulte de là qu'il y a continuité par rapport à la famille de mouvements envisagée pour un mouvement quelconque  $M$ .

Si l'on remarque que la plupart des mouvements qu'on réalise pratiquement satisfont à la condition qui définit la famille particulière de mouvements que nous venons de considérer, on voit qu'il y aura toujours continuité pour un mouvement quelconque par rapport aux mouvements pouvant physiquement se produire.

---

### TROISIÈME PARTIE

#### MOUVEMENT ROTATIONNEL AVEC SURFACE LIBRE

---

Nous nous proposons d'indiquer sommairement comment on peut étendre la méthode utilisée dans le cas du mouvement irrotationnel à celui des mouvements rotationnels les plus généraux.

Les considérations qui suivent s'appliquent à tous les mouvements possibles de fluides incompressibles pesants admettant une surface libre, quelles que soient les forces de viscosité, à condition seulement que les mouvements considérés soient plans et permanents.

Reprenons les notations et les équations données dans l'introduction.  $u$  et  $v$  étant les composantes de la vitesse, le tourbillon  $t$  est

$$(t_1) \quad t = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

La condition d'incompressibilité est d'autre part

$$(t_2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Enfin, les fonctions  $u$  et  $v$  vérifient les équations de Poisson

$$(t_3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial t}{\partial y},$$

$$(t_4) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial t}{\partial x}.$$

**Détermination du mouvement par la connaissance de la surface libre et du tourbillon en chaque point du mouvement.**

Nous nous proposons de démontrer que le mouvement d'un fluide pesant incompressible avec surface libre est déterminé par la connaissance analytique de la surface libre et par celle du tourbillon en chaque point du plan du mouvement. Pour simplifier, la pression est supposée constante sur la surface libre.

Soient  $L$  la surface libre, et  $\mathcal{R}$  le domaine infini simple limité par  $L$  à l'intérieur duquel a lieu le mouvement. Effectuons la représentation conforme du do-

maine  $\mathcal{R}$  sur le demi-plan  $Y > 0$  du plan de la variable  $Z = X + iY$ , au moyen d'une équation de la forme

$$\zeta = F(Z) = P(X, Y) + iQ(X, Y).$$

Calculons ce que deviennent les équations écrites plus haut, en prenant pour inconnues  $X$  et  $Y$  au lieu de  $x$  et  $y$ . On a :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial X} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial X}, \\ \frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial Y}; \\ \\ \frac{\partial v}{\partial X} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial X}, \\ \frac{\partial v}{\partial Y} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial Y}; \end{cases}$$

ou, en remplaçant  $\frac{\partial Q}{\partial X}$  par  $-\frac{\partial P}{\partial Y}$  et  $\frac{\partial Q}{\partial Y}$  par  $\frac{\partial P}{\partial X}$ ,

$$(u) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial X} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial Y}, \\ \frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial X}; \end{cases}$$

$$(v) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial X} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial X} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial Y}, \\ \frac{\partial v}{\partial Y} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial X}. \end{cases}$$

De ces quatre équations on déduit les deux suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial P}{\partial X} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial P}{\partial Y}, \\ \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial Y} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial P}{\partial X} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial P}{\partial Y}. \end{cases}$$

Ces équations s'écrivent en vertu des équations  $(t_1)$  et  $(t_2)$ ,

$$(T_1) \quad \frac{\partial v}{\partial X} - \frac{\partial u}{\partial Y} = t \frac{\partial P}{\partial X},$$

$$(T_2) \quad \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial Y} = t \frac{\partial P}{\partial Y}.$$

Dérivons maintenant les équations (u) et (v), il vient

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial P}{\partial X} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial Q}{\partial X} \right) - \frac{\partial P}{\partial Y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial Q}{\partial X} \right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial P}{\partial Y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial Q}{\partial Y} \right) + \frac{\partial P}{\partial X} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial Q}{\partial Y} \right); \\ \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial P}{\partial X} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial Q}{\partial X} \right) - \frac{\partial P}{\partial Y} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial Q}{\partial X} \right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial P}{\partial Y} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial Q}{\partial Y} \right) + \frac{\partial P}{\partial X} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial Q}{\partial Y} \right) \end{aligned} \right.$$

ou en remplaçant  $\frac{\partial Q}{\partial X}$  par  $-\frac{\partial P}{\partial Y}$  et  $\frac{\partial Q}{\partial Y}$  par  $\frac{\partial P}{\partial X}$ ,

$$\begin{aligned} (u_1) \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial P}{\partial X} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial P}{\partial X} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - \frac{\partial P}{\partial Y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial P}{\partial X} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial P}{\partial Y} \right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial P}{\partial Y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial P}{\partial X} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial P}{\partial X} \right); \end{aligned} \right. \\ (v_1) \quad & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial P}{\partial X} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial P}{\partial X} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - \frac{\partial P}{\partial Y} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial P}{\partial X} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial P}{\partial Y} \right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial P}{\partial Y} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \frac{\partial P}{\partial X} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial P}{\partial X} \right). \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Additionnons membre à membre, d'une part les équations (u<sub>1</sub>), d'autre part les équations (v<sub>1</sub>); en remarquant que P est une fonction harmonique, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} &= \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)^2 \right] \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} &\equiv \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)^2 \right] \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

ou, en tenant compte des équations (t<sub>1</sub> et t<sub>2</sub>),

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} &= -\frac{\partial t}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} &= \frac{\partial t}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Si l'on remarque que

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial X} &= \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial X}, \\ \frac{\partial t}{\partial Y} &= \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial Y} \end{aligned}$$



ou, en remplaçant  $\frac{\partial Q}{\partial X}$  par  $-\frac{\partial P}{\partial Y}$  et  $\frac{\partial Q}{\partial Y}$  par  $\frac{\partial P}{\partial X}$ ,

$$\frac{\mathcal{M}}{\partial X} = \frac{\mathcal{M}}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial X} - \frac{\mathcal{M}}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial Y},$$

$$\frac{\mathcal{M}}{\partial Y} = \frac{\mathcal{M}}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\mathcal{M}}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial X},$$

et par suite, en tirant  $\frac{\mathcal{M}}{\partial x}$  et  $\frac{\mathcal{M}}{\partial y}$ ,

$$\frac{\mathcal{M}}{\partial x} = \frac{\frac{\partial P}{\partial X} \frac{\mathcal{M}}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial Y} \frac{\mathcal{M}}{\partial Y}}{\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)^2},$$

$$\frac{\mathcal{M}}{\partial y} = \frac{\frac{\partial P}{\partial X} \frac{\mathcal{M}}{\partial Y} - \frac{\partial P}{\partial Y} \frac{\mathcal{M}}{\partial X}}{\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)^2}$$

les équations qui précèdent peuvent s'écrire

$$(T_3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = - \left( \frac{\partial P}{\partial X} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial Y} - \frac{\partial P}{\partial Y} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X} \right),$$

$$(T_4) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} = \left( \frac{\partial P}{\partial X} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial Y} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial Y} \right).$$

Convenons maintenant d'affecter de l'indice zéro toutes les fonctions de X et de Y où l'on fera  $Y = 0$ . Sur la surface libre L, on a :

$$x = P_0,$$

$$y = Q_0,$$

$$\frac{u_0}{\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_0} = \frac{v_0}{\left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0} = \frac{\sqrt{u_0^2 + v_0^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0^2}} = \frac{\sqrt{2gx}}{\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0^2}} = \sqrt{\frac{2gP_0}{\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0^2}}$$

d'où l'on déduit

$$(U) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_0 = \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_0 \sqrt{2gP_0}}{\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0^2}}, \\ v_0 = \frac{\left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0 \sqrt{2gP_0}}{\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0^2}}. \end{array} \right.$$

En définitive les fonctions  $u$  et  $v$  de  $X$  et de  $Y$  sont assujetties à vérifier les équations indéfinies  $(T_1)$ ,  $(T_2)$ ,  $(T_3)$  et  $(T_4)$ , et à prendre pour  $Y = 0$  les valeurs données par les formules (U).

Des formules (U) on déduit immédiatement, par dérivation, les valeurs des dérivées  $\frac{\partial u}{\partial X}$  et  $\frac{\partial v}{\partial X}$  pour  $Y = 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)_{Y=0} &= \frac{du_0}{dX}, \\ \left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)_{Y=0} &= \frac{dv_0}{dX}. \end{aligned}$$

Des équations  $(T_1)$  et  $(T_2)$  on déduit alors les valeurs des dérivées  $\frac{\partial u}{\partial Y}$  et  $\frac{\partial v}{\partial Y}$  pour  $Y = 0$ ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)_{Y=0} &= \frac{dv_0}{dX} - t_0 \left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_0, \\ \left(\frac{\partial v}{\partial Y}\right)_{Y=0} &= t_0 \left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)_0 - \frac{du_0}{dX}. \end{aligned}$$

On peut déterminer par la méthode de Cauchy relative aux équations aux dérivées partielles du second ordre, une fonction  $u$  des variables  $X$  et  $Y$  et une seule, vérifiant l'équation indéfinie  $(T_3)$ , prenant pour  $Y = 0$  la valeur  $u_0$ , et dont la dérivée partielle  $\frac{\partial u}{\partial Y}$  prend pour  $Y = 0$  la valeur

$$\frac{dv_0}{dX} - t_0 \left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_0.$$

On peut de même déterminer une fonction  $v$  des variables  $X$  et  $Y$  et une seule, vérifiant l'équation indéfinie  $(T_4)$ , prenant pour  $Y = 0$  la valeur  $v_0$ , et dont la dérivée partielle  $\frac{\partial v}{\partial Y}$  prend pour  $Y = 0$  la valeur

$$t_0 \left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)_0 - \frac{du_0}{dX}.$$

Il est facile de voir que les fonctions  $u$  et  $v$  ainsi déterminées vérifient aussi les équations  $(T_1)$  et  $(T_2)$ . En effet, il existe, d'après le théorème de Cauchy relatif aux équations aux dérivées partielles du premier ordre, une fonction  $u$  et une seule, et une fonction  $v$  et une seule, qui vérifient les équations indéfinies  $(T_1)$  et  $(T_2)$ , et qui pour  $Y = 0$  satisfont aux équations

$$\begin{aligned} u &= u_0, \\ v &= v_0. \end{aligned}$$

Ces fonctions vérifient manifestement les équations

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)_{Y=0} &= \frac{dv_0}{dX} - t_0 \left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_0, \\ \left(\frac{\partial v}{\partial Y}\right)_{Y=0} &= t_0 \left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)_0 - \frac{du_0}{dX}. \end{aligned}$$

Comme elles vérifient identiquement  $(T_1)$  et  $(T_2)$ , elles doivent vérifier identiquement  $(T_3)$  et  $(T_4)$ . Elles ne peuvent par suite qu'être identiques aux fonctions  $u$  et  $v$  précédemment trouvées.

Nous avons ainsi résolu la question posée. Nous ne pousserons pas plus avant le calcul que nécessite la résolution du problème de Cauchy pour les équations de Poisson  $(T_3)$  et  $(T_4)$ . Comme on connaît une intégrale particulière de l'équation de Poisson donnée par la théorie du potentiel, l'intégrale générale n'en diffère que par une fonction harmonique, et le problème de Cauchy relatif à l'équation de Poisson se ramène à celui relatif aux fonctions harmoniques, problème traité précédemment.

---

## CONCLUSIONS

---

Dans l'étude que nous avons faite du mouvement permanent d'un fluide pesant incompressible admettant une surface libre, nous avons surtout cherché à mettre en lumière les propriétés fondamentales du mouvement et à fournir en même temps les procédés de calcul les plus simples. Nous avons donc laissé de côté de nombreux points importants, notamment la recherche de la détermination du mouvement quand on se donne le plan de charge, une ligne de courant autre que la surface libre et un point de la surface libre à distance finie ou infinie. La solution de ce problème permettrait de résoudre la question si importante du mouvement ayant lieu sur un barrage-déversoir de crête donnée, pour une charge donnée et des conditions à l'infini-amont données. Nous y consacrerons un travail ultérieur. Pour l'instant disons seulement que cette solution ne paraît pas pouvoir être amenée à un degré de simplicité suffisant pour permettre une application pratique, et nous nous contenterons de résumer succinctement les conclusions de la précédente étude.

D'une part, nous avons reconnu que le mouvement de l'eau sur un barrage-déversoir n'est pas quelque chose d'aussi simple qu'on peut se l'imaginer a priori. Dans ce mouvement la surface libre joue un rôle de premier plan. Non seulement toutes les fonctions qui entrent dans la détermination du mouvement sont étroitement liées à l'équation de la surface libre, mais encore les points critiques du mouvement, c'est-à-dire les points où il cesse d'être un mouvement naturel au sens ordinaire, dépendent directement des propriétés analytiques de ces fonctions et par là de la nature même de la surface libre.

D'autre part, nous avons indiqué diverses méthodes simples de calcul qui permettent la détermination du mouvement dans des conditions satisfaisantes au point de vue pratique et la possibilité de se passer de l'emploi de modèles réduits de laboratoire dans un projet de barrage-déversoir. En effet, non seulement il n'est nécessaire de connaître que le mouvement correspondant au débit maximum qu'aura à écouler le barrage, mais encore on n'a pas besoin de se fixer a priori le profil de crête. Il suffit que le mouvement dont il vient d'être question satisfasse à certaines conditions d'ailleurs très générales résultant immédiatement du but à atteindre dans chaque cas particulier. Ces conditions laissent encore à la fonction choisie pour déterminer le mouvement une grande indétermination relative que l'on emploiera à la simplification des calculs.