Annales de la faculté des sciences de Toulouse

G. Pfeiffer

Sur les intégrales complètes des équations linéaires et des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 22 (1930), p. 147-169

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1930_3_22__147_0>

SUR LES INTÉGRALES COMPLÈTES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

ET DES

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

D'UNE FONCTION INCONNUE

PAR M. G. PFEIFFER (Kiew).

INTRODUCTION

Dans les encyclopédies mathématiques(1) on ne trouve pas d'indications sur les recherches faites dans le domaine des intégrales complètes des équations linéaires et des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue. La plupart des auteurs des meilleurs cours d'intégration d'équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue ne font aucune mention sur les intégrales complètes des équations linéaires et des systèmes d'équations linéaires. Seulement dans des exemples, chez quelques-uns des auteurs, par exemple : M. Goursat(2), M. Forsyth(3), on peut rencontrer les intégrales complètes des équations linéaires.

Dans « Une méthode spéciale d'intégration... »(4), indiquée par nous, les inté-

(1) « Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften... », « Encyclopédie des Sciences mathématiques... ».

(2) E. GOURSAT. « Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre ». Paris, 1891, p. 229.

(3) A. FORSYTH. « Theory of differential equations ». Vol. V, Cambridge, 1906, pp. 174-175.

(4) G. PFEIFFER. « Une méthode spéciale d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre ». Compt. rend., T. 176, 1923, p. 62.

« Sur une méthode spéciale d'intégration des équations et des systèmes d'équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre ». Bull. de l'Académie des Sciences de l'Ukraïne, T. I, F. I, pp. 41-59, 1923.

« Méthode spéciale d'intégration des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre ». Bull. de l'Acad. des Sciences de l'Ukraïne, T. II, F. I, pp. 56-76, 1926.

« La méthode spéciale d'intégration des systèmes Jacobiens généralisés d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre de plusieurs fonctions inconnues ». Bull. de l'Acad. des Sciences de l'Ukraïne, T. III, F. I, pp. 7-20, 1928.

grales complètes des équations linéaires et des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre jouent un rôle tout à fait capital. Il est clair de là, qu'il était nécessaire d'effectuer dans ce domaine une série de recherches. Dans le mémoire actuel nous voulons exposer quelques résultats de nos investigations, en annotant les renseignements historiques suivants.

Lagrange [5] parle de l'intégrale complète :

$$z = a + b(x + my)$$

de l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre :

$$m\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Natani [6] finit par conclure, que les équations linéaires n'ont pas d'intégrales complètes [7].

Graindorge [8], à ce qu'il paraît, s'en tient au même jugement. Des mots ci-après [9] découle, que Lagrange a donné la définition de l'intégrale complète seulement pour l'équation non linéaire.

§ 1. — *Sur les intégrales complètes des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre.*

Dans nos recherches [10] nous affirmons, que l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre :

$$X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n = Z, \qquad (1)$$

---

(5) Lagrange. « Sur les intégrales particulières des équations différentielles ». Nouv. Mém. de l'Acad. royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, 1774. *Œuvres*, Paris, 1869, T. IV, p. 63.

(6) Natani. « Die höhere Analysis ». Berlin, 1866, pp. 330-341.

(7) *Ibid.*, p. 338 : so muss man sagen : « dass die linearen Differenzialgleichungen *kein* vollständiges, wohl aber ein allgemeines Integral haben ».

(8) Graindorge. « Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres ». Mém. de la Soc. roy. des Sciences de Liège, 1873, S. 2, T. V.

(9) *Ibid.*, § 6, p. 3 : « Lagrange a nommé intégrale complète d'une équation primordiale non linéaire à n variables indépendantes, une équation entre les variables indépendantes, la fonction z de ces variables, qui satisfait à l'équation proposée et renferme n constantes distinctes »...

(10) Les travaux, cités sous l'indice (4), et le travail, non encore publié :

G. Pfeiffer. « Sur les équations et les systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, possédant les intégrales de S. Lie ».

dont l'intégrale générale est :

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0, \tag{2}$$
$$\varphi_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z),$$
$$\Phi = \text{fonction arbitraire des arguments},$$

possède l'intégrale complète la plus simple

$$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots a_{n-1}\varphi_{n-1} + \varphi_n + a_n = 0, \tag{3}$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sont des constantes arbitraires, et, généralement, l'intégrale complète :

$$\Omega(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0, \tag{4}$$

où Ω est une fonction, construite de telle manière, que l'intégrale (4) soit précisément complète,

Dans quelles circonstances la relation (4) est-elle une intégrale complète de l'équation (1)?

La relation :

$$V(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \tag{5}$$

dont la différentiation par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ donne :

$$V_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial z}p_1 = 0, \ldots V_j = \frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial z}p_j = 0, \ldots V_n = \frac{\partial V}{\partial x_n} + \frac{\partial V}{\partial z}p_n = 0, \tag{6}$$

est une intégrale complète, quand un des déterminants d'ordre n de la matrice :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial a_1}, & \frac{\partial V}{\partial a_2}, & \ldots & \frac{\partial V}{\partial a_n} \\ \frac{\partial V_1}{\partial a_1}, & \frac{\partial V_1}{\partial a_2}, & \ldots & \frac{\partial V_1}{\partial a_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial V_j}{\partial a_1}, & \frac{\partial V_j}{\partial a_2}, & \ldots & \frac{\partial V_j}{\partial a_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial V_n}{\partial a_1}, & \frac{\partial V_n}{\partial a_2}, & \ldots & \frac{\partial V_n}{\partial a_n} \end{vmatrix} \tag{7}$$

n'est pas nul en tenant compte des égalités (5), (6)[11].

---

[11] A. Forsyth. « Theory of differential equations ». Vol. V, Cambridge, 1906, pp. 165, 178-179.

En différentiant l'intégrale (4) par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nous aurons les équations (8) :

$$\Omega_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dx_1} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dx_1} + \ldots + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_{n-1}} \frac{d\varphi_{n-1}}{dx_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_n} \frac{d\varphi_n}{dx_1} = 0,$$

$$\Omega_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dx_2} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dx_2} + \ldots + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_{n-1}} \frac{d\varphi_{n-1}}{dx_2} + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_n} \frac{d\varphi_n}{dx_2} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Omega_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dx_{n-1}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dx_{n-1}} + \ldots + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_{n-1}} \frac{d\varphi_{n-1}}{dx_{n-1}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_n} \frac{d\varphi_n}{dx_{n-1}} = 0,$$

$$\Omega_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dx_n} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dx_n} + \ldots + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_{n-1}} \frac{d\varphi_{n-1}}{dx_n} + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_n} \frac{d\varphi_n}{dx_n} = 0,$$

$$\frac{d\varphi_i}{dx_k} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} p_k,$$
$$i, k = 1, 2, \ldots n.$$

Puisque les dérivées

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_1}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_{n-1}}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_n}$$

ne sont pas nulles, leur élimination entre les équations (8) amène à l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre (1) :

$$\begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1}, & \frac{d\varphi_2}{dx_1}, & \ldots & \frac{d\varphi_{n-1}}{dx_1}, & \frac{d\varphi_n}{dx_1} \\ \frac{d\varphi_1}{dx_2}, & \frac{d\varphi_2}{dx_2}, & \ldots & \frac{d\varphi_{n-1}}{dx_2}, & \frac{d\varphi_n}{dx_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi_1}{dx_{n-1}}, & \frac{d\varphi_2}{dx_{n-1}}, & \ldots & \frac{d\varphi_{n-1}}{dx_{n-1}}, & \frac{d\varphi_n}{dx_{n-1}} \\ \frac{d\varphi_1}{dx_n}, & \frac{d\varphi_2}{dx_n}, & \ldots & \frac{d\varphi_{n-1}}{dx_n}, & \frac{d\varphi_n}{dx_n} \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

La relation (9) a lieu d'après (8) : elle est la suite des relations (8).

Pour résoudre la question, si l'intégrale (4) est complète, il est nécessaire d'évaluer les déterminants d'ordre n de la matrice :

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial\Omega}{\partial a_1}, & \dots & \dfrac{\partial\Omega}{\partial a_{n-1}}, & \dfrac{\partial\Omega}{\partial a_n} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_i\partial a_1}\dfrac{d\varphi_i}{dx_1}, & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_i\partial a_{n-1}}\dfrac{d\varphi_i}{dx_1}, & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_i\partial a_n}\dfrac{d\varphi_i}{dx_1} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_i\partial a_1}\dfrac{d\varphi_i}{dx_2}, & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_i\partial a_{n-1}}\dfrac{d\varphi_i}{dx_2}, & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_i\partial a_n}\dfrac{d\varphi_i}{dx_2} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_i\partial a_1}\dfrac{d\varphi_i}{dx_n}, & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_i\partial a_{n-1}}\dfrac{d\varphi_i}{dx_n}, & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_i\partial a_n}\dfrac{d\varphi_i}{dx_n} \end{matrix}\right| \qquad (10)$$

et d'éclaircir les conditions, sous lesquelles un au moins d'eux n'est pas nul d'après les égalités (4), (8), qu'il concerne.

Soit le déterminant :

$$A_0 = \frac{D(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n)}{D(a_1, a_2, \dots, a_n)}. \qquad (11)$$

On calcule facilement que :

$$A_0 = \left|\begin{matrix} \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_1\partial a_1}, & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_2\partial a_1}, & \dots & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_n\partial a_1} \\ \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_1\partial a_2}, & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_2\partial a_2}, & \dots & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_n\partial a_2} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_1\partial a_n}, & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_2\partial a_n}, & \dots & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_n\partial a_n} \end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix} \dfrac{d\varphi_1}{dx_1}, & \dfrac{d\varphi_2}{dx_1}, & \dots & \dfrac{d\varphi_n}{dx_1} \\ \dfrac{d\varphi_1}{dx_2}, & \dfrac{d\varphi_2}{dx_2}, & \dots & \dfrac{d\varphi_n}{dx_2} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dfrac{d\varphi_1}{dx_n}, & \dfrac{d\varphi_2}{dx_n}, & \dots & \dfrac{d\varphi_n}{dx_n} \end{matrix}\right|. \qquad (12)$$

Ainsi A_0 est nul d'après les égalités (8).

Les déterminants :

$$A_j = \frac{D(\Omega, \Omega_1, \dots, \Omega_{j-1}, \Omega_{j+1}, \dots, \Omega_n)}{D(a_1, a_2, \dots, a_n)}, \qquad (13)$$

sont tels que :

$$
A_j = \begin{vmatrix}
\dfrac{\partial \Omega}{\partial a_1}, & \dots & \dfrac{\partial \Omega}{\partial a_{n-1}}, & \dfrac{\partial \Omega}{\partial a_n} \\
\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_i \partial a_1} \dfrac{d\varphi_i}{dx_1}, & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_i \partial a_{n-1}} \dfrac{d\varphi_i}{dx_1}, & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_i \partial a_n} \dfrac{d\varphi_i}{dx_1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_i \partial a_1} \dfrac{d\varphi_i}{dx_{j-1}}, & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_i \partial a_{n-1}} \dfrac{d\varphi_i}{dx_{j-1}}, & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_i \partial a_n} \dfrac{d\varphi_i}{dx_{j-1}} \\
\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_i \partial a_1} \dfrac{d\varphi_i}{dx_{j+1}}, & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_i \partial a_{n-1}} \dfrac{d\varphi_i}{dx_{j+1}}, & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_i \partial a_n} \dfrac{d\varphi_i}{dx_{j+1}} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_i \partial a_1} \dfrac{d\varphi_i}{dx_n}, & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_i \partial a_{n-1}} \dfrac{d\varphi_i}{dx_n}, & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_i \partial a_n} \dfrac{d\varphi_i}{dx_n}
\end{vmatrix} \tag{14}
$$

d'où

$$
A_j = (-1)^n \begin{vmatrix}
-1, & 0, & \dots & 0, & 0, & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_1 \partial a_1}, & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_1 \partial a_2}, & \dots & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_1 \partial a_n} \\
0, & -1, & \dots & 0, & 0, & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_2 \partial a_1}, & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_2 \partial a_2}, & \dots & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_2 \partial a_n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0, & 0, & \dots & -1, & 0, & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_{n-1} \partial a_1}, & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_{n-1} \partial a_2}, & \dots & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_{n-1} \partial a_n} \\
0, & \dots & \dots & 0, & -1, & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_n \partial a_1}, & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_n \partial a_2}, & \dots & \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi_n \partial a_n} \\
0, & \dots & \dots & 0, & 0, & \dfrac{\partial \Omega}{\partial a_1}, & \dfrac{\partial \Omega}{\partial a_2}, & \dots & \dfrac{\partial \Omega}{\partial a_n} \\
\dfrac{d\varphi_1}{dx_1}, & \dots & \dots & \dfrac{d\varphi_{n-1}}{dx_1}, & \dfrac{d\varphi_n}{dx_1}, & 0, & \dots & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dfrac{d\varphi_1}{dx_{j-1}}, & \dots & \dots & \dfrac{d\varphi_{n-1}}{dx_{j-1}}, & \dfrac{d\varphi_n}{dx_{j-1}}, & 0, & \dots & \dots & 0 \\
\dfrac{d\varphi_1}{dx_{j+1}}, & \dots & \dots & \dfrac{d\varphi_{n-1}}{dx_{j+1}}, & \dfrac{d\varphi_n}{dx_{j+1}}, & 0, & \dots & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dfrac{d\varphi_1}{dx_n}, & \dots & \dots & \dfrac{d\varphi_{n-1}}{dx_n}, & \dfrac{d\varphi_n}{dx_n}, & 0, & \dots & \dots & 0
\end{vmatrix} . \tag{15}
$$

$$(j = 1, 2, \dots n).$$

Multiplions la $k^{\text{ième}}$ colonne du déterminant (15) par $\dfrac{\partial\Omega}{\partial\varphi_k}$ et ajoutons à elle les éléments d'autres $(n-1)$ des n premières colonnes, multipliées par :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi_1}, \ \ldots \ \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi_{k-1}}, \ \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi_{k+1}}, \ \ldots \ \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi_n}. \tag{16}$$

En utilisant les relations :

$$\Omega_1 = 0, \ \ldots \ \Omega_{j-1} = 0, \ \Omega_{j+1} = 0, \ \ldots \ \Omega_n = 0, \tag{17}$$

concernant le déterminant (15), nous trouverons :

$$A_j = \frac{(-1)^{n-k}}{\dfrac{\partial\Omega}{\partial\varphi_k}} \begin{vmatrix} \dfrac{d\varphi_1}{dx_1}, & \ldots & \dfrac{d\varphi_{k-1}}{dx_1}, & \dfrac{d\varphi_{k+1}}{dx_1}, & \ldots & \dfrac{d\varphi_n}{dx_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{d\varphi_1}{dx_{j-1}}, & \ldots & \dfrac{d\varphi_{k-1}}{dx_{j-1}}, & \dfrac{d\varphi_{k+1}}{dx_{j-1}}, & \ldots & \dfrac{d\varphi_n}{dx_{j-1}} \\ \dfrac{d\varphi_1}{dx_{j+1}}, & \ldots & \dfrac{d\varphi_{k-1}}{dx_{j+1}}, & \dfrac{d\varphi_{k+1}}{dx_{j+1}}, & \ldots & \dfrac{d\varphi_n}{dx_{j+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{d\varphi_1}{dx_n}, & \ldots & \dfrac{d\varphi_{k-1}}{dx_n}, & \dfrac{d\varphi_{k+1}}{dx_n}, & \ldots & \dfrac{d\varphi_n}{dx_n} \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\Omega}{\partial\varphi_1}, & \dfrac{\partial\Omega}{\partial\varphi_2}, & \ldots & \dfrac{\partial\Omega}{\partial\varphi_n}, & 0 \\ \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_1\partial a_1}, & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_2\partial a_1}, & \ldots & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_n\partial a_1}, & \dfrac{\partial\Omega}{\partial a_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_1\partial a_{n-1}}, & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_2\partial a_{n-1}}, & \ldots & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_n\partial a_{n-1}}, & \dfrac{\partial\Omega}{\partial a_{n-1}} \\ \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_1\partial a_n}, & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_2\partial a_n}, & \ldots & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_n\partial a_n}, & \dfrac{\partial\Omega}{\partial a_n} \end{vmatrix}, \tag{18}$$

$$k = 1, 2, \ldots n,$$
$$j = 1, 2, \ldots n.$$

Les premiers déterminants de l'expression (18) n'étant pas nuls, il est clair, que le résultat de nos investigations conduit à la conclusion :

A) « *La relation :*

$$\Omega(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0 \tag{19}$$

constitue une intégrale complète de l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre :

$$X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n = Z, \tag{20}$$

dont l'intégrale générale est :

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0, \tag{21}$$

quand le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi_1}, & \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi_2}, & \ldots & \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi_n}, & 0 \\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_1\partial a_1}, & \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_2\partial a_1}, & \ldots & \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_n\partial a_1}, & \frac{\partial\Omega}{\partial a_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_1\partial a_{n-1}}, & \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_2\partial a_{n-1}}, & \ldots & \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_n\partial a_{n-1}}, & \frac{\partial\Omega}{\partial a_{n-1}} \\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_1\partial a_n}, & \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_2\partial a_n}, & \ldots & \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_n\partial a_n}, & \frac{\partial\Omega}{\partial a_n} \end{vmatrix} \tag{22}$$

n'est pas nul d'après la relation (19).

Puisque le déterminant (22) est symétrique par rapport aux quantités :

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \quad \text{et} \quad a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

on peut les transposer dans la relation (19) ».

Nous croyons qu'il n'est pas superflu d'indiquer la liaison qui existe entre les intégrales complètes des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue et les transformations de contact avec une seule relation entre les variables. La liaison est renfermée dans ce que la relation, entre les variables, qui définit une transformation de contact, satisfait à la même condition A), que l'intégrale complète d'une équation linéaire [12].

De là plusieurs thèses.

---

(12) S. LIE. « Geometrie der Berührungstransformationen ». B. I, Leipzig, 1896, pp. 51-55. « Theorie der Transformationsgruppen ». Absch. II, Leipzig, 1890, pp. 6-10, 146-151, 153-156, 166-171.

Première thèse.

« Si la relation (19) est une intégrale complète de l'équation (20), c'est-à-dire, satisfait à la condition A), les relations :

$$\Omega(y_1, y_2, \dots y_n, y'_1, y'_2, \dots y'_n) = 0, \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} -q_i + \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} &= 0, \\ q'_i + \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial y'_i} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$i = 1, 2, \dots n,$$

après élimination du paramètre λ, donnent la transformation de contact :

$$\left.\begin{aligned} y'_k &= Y_k(y_1, y_2, \dots y_n, q_1, \dots q_n), \\ q'_k &= Q_k(y_1, y_2, \dots y_n, q_1, \dots q_n), \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$k = 1, 2, \dots n. »$$

Deuxième thèse.

« Si la relation (19) est une intégrale complète de l'équation (20), c'est-à-dire satisfait à la condition A), les relations :

$$\Omega(x_1, x_2, \dots x_{n-1}, z, x'_1, \dots x'_{n-1}, z') = 0, \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned} p_i &= -\frac{\dfrac{\partial \Omega}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial \Omega}{\partial z}}, \\ p'_i &= -\frac{\dfrac{\partial \Omega}{\partial x'_i}}{\dfrac{\partial \Omega}{\partial z'}}, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$i = 1, 2, \dots (n-1),$$

représentent une transformation générale de contact :

$$\left.\begin{aligned} z' &= Z(z, x_1, \dots, x_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}), \\ x'_i &= X_i(z, x_1, \dots, x_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}), \\ p'_i &= P_i(z, x_1, \dots, x_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}), \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$i = 1, 2, \dots (n-1).$$

Les fonctions Z, X_i, P_i sont liées avec les fonctions Y_k, Q_k par les identités :

$$\begin{aligned}
Z(z, x_1, \dots x_{n-1}, p_1, \dots p_{n-1}) &\equiv Y_n(x_1, \dots x_{n-1}, z, -p_1, \dots -p_{n-1}, 1), \\
X_i(z, x_1, \dots x_{n-1}, p_1, \dots p_{n-1}) &\equiv Y_i(x_1, \dots x_{n-1}, z, -p_1, \dots -p_{n-1}, 1), \\
P_i(z, x_1, \dots x_{n-1}, p_1, \dots p_{n-1}) &\equiv -\frac{Q_i(x_1, \dots x_{n-1}, z, -p_1, \dots -p_{n-1}, 1)}{Q_n(x_1, \dots x_{n-1}, z, -p_1, \dots -p_{n-1}, 1)}, \\
i = 1, 2, \dots (n-1). \text{»}
\end{aligned} \tag{29}$$

Troisième thèse.

« Si les relations (23), (26) sont les équations directrices[13] des transformations de contact avec une relation entre les variables, autrement dit, si ces relations satisfont à la condition A), les connexions :

$$\Omega(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n, a_1, a_2, \dots a_n) = 0 \tag{30}$$

et

$$\Omega(a_1, a_2, \dots a_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n) = 0 \tag{31}$$

sont les intégrales complètes de l'équation linéaire (20) ».

Exemple premier. — La plus simple intégrale complète de l'équation (20) :

$$\Omega = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \dots + a_{n-1}\varphi_{n-1} + \varphi_n + a_n = 0, \tag{32}$$

pour laquelle le déterminant (22) est $(-1)^{n+1}$, donne la transformation *homogène* de contact :

$$\begin{aligned}
y'_i = \frac{q_i}{q_n}, \qquad & y'_n = -y_n - \frac{1}{q_n}\sum_{i=1}^{n-1} q_i y_i, \\
q'_i = -q_n y_i, \quad & q'_n = -q_n, \\
i = 1, 2, & \dots (n-1)
\end{aligned} \tag{33}$$

et la transformation *générale* de contact :

$$\begin{aligned}
z' &= -z + \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i, \\
x'_i &= -p_i, \\
p'_i &= -x_i, \\
i &= 1, 2, \dots (n-1).
\end{aligned} \tag{34}$$

---

[13] D'après Plücker.

Exemple deuxième. — Vu que l'équation :

$$\Omega = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 - R^2 = 0 \tag{35}$$

conduit à la transformation de contact :

$$z' = z \pm \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad x' = x \pm \frac{Rp}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad y' = y \pm \frac{Rq}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \,(^{14}), \tag{36}$$

avec une relation entre les variables : $x', y', z', x, y, z,$ l'égalité :

$$(\varphi_1 - a_1)^2 + (\varphi_2 - a_2)^2 + (\varphi_3 - a_3)^2 = R^2, \tag{37}$$

qui se comporte comme les égalités (30), (31), donne l'intégrale complète de l'équation linéaire :

$$\begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1}, & \frac{d\varphi_2}{dx_1}, & \frac{d\varphi_3}{dx_1} \\ \frac{d\varphi_1}{dx_2}, & \frac{d\varphi_2}{dx_2}, & \frac{d\varphi_3}{dx_2} \\ \frac{d\varphi_1}{dx_3}, & \frac{d\varphi_2}{dx_3}, & \frac{d\varphi_3}{dx_3} \end{vmatrix} = 0. \tag{38}$$

En effet, en résolvant, dans le système d'équations :

$$\begin{gathered} (\varphi_1 - a_1)^2 + (\varphi_2 - a_2)^2 + (\varphi_3 - a_3)^2 = R^2, \\ (\varphi_1 - a_1)\frac{d\varphi_1}{dx_1} + (\varphi_2 - a_2)\frac{d\varphi_2}{dx_1} + (\varphi_3 - a_3)\frac{d\varphi_3}{dx_1} = 0, \\ (\varphi_1 - a_1)\frac{d\varphi_1}{dx_2} + (\varphi_2 - a_2)\frac{d\varphi_2}{dx_2} + (\varphi_3 - a_3)\frac{d\varphi_3}{dx_2} = 0, \\ (\varphi_1 - a_1)\frac{d\varphi_1}{dx_3} + (\varphi_2 - a_2)\frac{d\varphi_2}{dx_3} + (\varphi_3 - a_3)\frac{d\varphi_3}{dx_3} = 0, \end{gathered} \tag{39}$$

les trois premières par rapport à : $\varphi_1 - a_1, \varphi_2 - a_2, \varphi_3 - a_3,$ on a

$$\frac{\varphi_1 - a_1}{\Delta_1} = \frac{\varphi_2 - a_2}{\Delta_2} = \frac{\varphi_3 - a_3}{\Delta_3} = \frac{R}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}}, \tag{40}$$

---

(14) E. Goursat. « Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre ». Paris, 1891, p. 263.

où

$$\Delta_1 = \frac{d\varphi_2}{dx_1}\frac{d\varphi_3}{dx_2} - \frac{d\varphi_2}{dx_2}\frac{d\varphi_3}{dx_1},$$
$$\Delta_2 = \frac{d\varphi_3}{dx_1}\frac{d\varphi_1}{dx_2} - \frac{d\varphi_3}{dx_2}\frac{d\varphi_1}{dx_1}, \tag{41}$$
$$\Delta_3 = \frac{d\varphi_1}{dx_1}\frac{d\varphi_2}{dx_2} - \frac{d\varphi_1}{dx_2}\frac{d\varphi_2}{dx_1};$$

substituons leurs expressions à la quatrième, nous obtiendrons l'équation (38).

D'après la deuxième thèse, on voit facilement que la condition A) amène encore à la thèse suivante.

Quatrième thèse.

« Si la relation (19) :

$$\Omega(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0 \tag{42}$$

est une intégrale complète de l'équation linéaire (20), c'est que, de même, l'égalité (26) :

$$\Omega(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, z, x'_1, \ldots x'_{n-1}, z') = 0 \tag{43}$$

est l'équation directrice de la transformation générale de contact (27).

Les relations :

$$\Omega(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, z, a'_1, a'_2, \ldots a'_{n-1}, c') = 0 \tag{44}$$

et

$$\Omega(a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, c, x'_1, x'_2, \ldots x'_{n-1}, z') = 0, \tag{45}$$

où :

$$a'_1, a'_2, \ldots a'_{n-1}, c' \tag{46}$$

et

$$a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, c \tag{47}$$

sont des constantes arbitraires, ne peuvent pas être des intégrales d'équations aux dérivées partielles du premier ordre([15]) ».

On peut aussi construire la thèse réciproque.

([15]) S. Lie. « Theorie der Transformationsgruppen ». Absch. II, Leipzig, 1890, pp. 166-171. E. Goursat. « Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre ». Paris, 1891, p. 260.

Aux formes particulières de l'équation (4) :

$$\theta(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}, a_1, a_2, \ldots a_n) - \varphi_n = 0, \tag{48}$$

$$\delta(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \quad a_1, a_2, \ldots a_{n-1}) - a_n = 0 \tag{49}$$

la condition A) dégénère en les conditions suivantes B), C).

B) « La relation :

$$\theta(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}, a_1, a_2, \ldots a_n) - \varphi_n = 0 \tag{50}$$

représente une intégrale complète de l'équation (20), si le déterminant :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial a_1}, & \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_1 \partial a_1}, & \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_2 \partial a_1}, & \ldots & \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_{n-1} \partial a_1} \\ \frac{\partial \theta}{\partial a_2}, & \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_1 \partial a_2}, & \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_2 \partial a_2}, & \ldots & \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_{n-1} \partial a_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \theta}{\partial a_n}, & \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_1 \partial a_n}, & \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_2 \partial a_n}, & \ldots & \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi_{n-1} \partial a_n} \end{vmatrix} \tag{51}$$

n'est pas nul. Donc

$$\Delta_1 = \frac{D\left(\theta, \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_2}, \ldots \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_{n-1}}\right)}{D(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n)} \mathrel{\equiv\!\!\!|} 0 \,. \text{»} \tag{52}$$

C) « La relation :

$$\delta(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}) - a_n = 0 \tag{53}$$

représente une intégrale complète de l'équation (20), si le déterminant :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \delta}{\partial \varphi_1}, & \frac{\partial \delta}{\partial \varphi_2}, & \ldots & \frac{\partial \delta}{\partial \varphi_n} \\ \frac{\partial^2 \delta}{\partial \varphi_1 \partial a_1}, & \frac{\partial^2 \delta}{\partial \varphi_2 \partial a_1}, & \ldots & \frac{\partial^2 \delta}{\partial \varphi_n \partial a_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 \delta}{\partial \varphi_1 \partial a_{n-1}}, & \frac{\partial^2 \delta}{\partial \varphi_2 \partial a_{n-1}}, & \ldots & \frac{\partial^2 \delta}{\partial \varphi_n \partial a_{n-1}} \end{vmatrix} \tag{54}$$

n'est pas nul. Donc

$$\Delta_2 = \frac{D\left(\delta, \frac{\partial \delta}{\partial a_1}, \frac{\partial \delta}{\partial a_2}, \ldots \frac{\partial \delta}{\partial a_{n-1}}\right)}{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n)} \mathrel{\equiv\!\!\!|} 0 \,. \text{»} \tag{55}$$

Cinquième thèse.

« Étant donnée l'intégrale complète :

$$z = \Phi(x_1, \ldots x_k, \ldots x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n), \tag{56}$$

$$\frac{D(\Phi, \Phi_1, \ldots \Phi_{k-1}, \Phi_{k+1}, \ldots \Phi_n)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)} \mathrel{\not\equiv} 0 \tag{57}$$

d'une équation non linéaire aux dérivées partielles du premier ordre contenant la fonction z :

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, \ldots p_n) = 0, \tag{58}$$

quand :

$$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_n)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)} \mathrel{\not\equiv} 0, \tag{59}$$

et ne contenant pas la fonction z :

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n) = 0, \tag{60}$$

quand :

$$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_n)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)} \equiv 0, \tag{61}$$

si l'on substitue dans la relation (56) à la place de :

$$x_1, \ldots x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots x_n, z, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \tag{62}$$

les expressions :

$$\varphi_1, \ldots \varphi_{k-1}, d, \varphi_k, \ldots \varphi_{n-1}, \varphi_n, a_1, a_2, \ldots a_n\text{[16]} \tag{63}$$

ou les expressions :

$$a_1, \ldots a_{k-1}, d, a_k, \ldots a_{n-1}, a_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n\text{[16]}, \tag{64}$$

on obtient les intégrales complètes :

$$\Phi(\varphi_1, \ldots \varphi_{k-1}, d, \varphi_k, \ldots \varphi_{n-1}, a_1, \ldots a_n) - \varphi_n = 0, \tag{65}$$

$$\Phi(a_1, \ldots a_{k-1}, d, a_k, \ldots a_{n-1}, \varphi_1, \ldots \varphi_n) - a_n = 0 \tag{66}$$

de l'équation linéaire (20).

---

(16) d est une constante fixe, en général, arbitraire.

Exemple troisième. — La relation :

$$z = (x + \alpha)(x + \beta), \tag{67}$$

$$\frac{D(\Phi, \Phi_1)}{D(\alpha, \beta)} \not\equiv 0, \quad \frac{D(\Phi, \Phi_2)}{D(\alpha, \beta)} \not\equiv 0$$

est une intégrale complète de l'équation non linéaire aux dérivées partielles du premier ordre :

$$pq = z, \tag{68}$$

contenant la fonction z :

$$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2)}{D(\alpha, \beta)} \not\equiv 0;$$

de ce fait les relations

$$\begin{matrix} \varphi_2 = m(\varphi_1 + a) \\ m = d + b \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \varphi_2 = n(\varphi_1 + b) \\ n = d + a \end{matrix} \tag{69}$$

et les relations :

$$b = (a + \varphi_1)(d + \varphi_2), \qquad b = (d + \varphi_1)(a + \varphi_2) \tag{70}$$

sont les intégrales complètes de l'équation linéaire :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d\varphi_1}{dx}, & \dfrac{d\varphi_2}{dx} \\ \dfrac{d\varphi_1}{dy}, & \dfrac{d\varphi_2}{dy} \end{vmatrix} = 0. \tag{71}$$

Exemple quatrième, — La relation :

$$z = 2\sqrt{(x^2 + \alpha)(y^2 + \beta)} \tag{72}$$

$$\frac{D(\Phi, \Phi_1)}{D(\alpha, \beta)} \not\equiv 0, \quad \frac{D(\Phi, \Phi_2)}{D(\alpha, \beta)} \not\equiv 0$$

est une intégrale complète de l'équation non linéaire aux dérivées partielles du premier ordre :

$$pq = 4xy, \tag{73}$$

ne contenant pas la fonction z :

$$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2)}{D(\alpha, \beta)} \equiv 0;$$

de ce fait les relations :

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= m\sqrt{\varphi_1^2 + a}, & \varphi_2 &= n\sqrt{\varphi_1^2 + b} \\ m &= 2\sqrt{d^2 + b}, & n &= 2\sqrt{d^2 + a} \end{aligned} \tag{74}$$

et les relations :

$$\begin{aligned} r &= (a^2 + \varphi_1)(d^2 + \varphi_2), & r &= (d^2 + \varphi_1)(a^2 + \varphi_2) \\ r &= \frac{b^2}{4} & r &= \frac{b^2}{4} \end{aligned} \tag{75}$$

sont les intégrales complètes de l'équation (71).

Pour la forme particulière de l'équation (4) :

$$\omega(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}) - \varphi_n - a_n = 0 \tag{76}$$

la condition A) est analogue.

D) « La relation :

$$\omega(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}) - \varphi_n - a_n = 0 \tag{77}$$

représente une intégrale complète de l'équation (20), si le déterminant :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi_1 \partial a_1}, & \ldots & \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi_{n-1} \partial a_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi_1 \partial a_{n-1}}, & \ldots & \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi_{n-1} \partial a_{n-1}} \end{vmatrix} \tag{78}$$

n'est pas nul :

$$\Delta_3 = \frac{D\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial \varphi_1}, \ldots \dfrac{\partial \omega}{\partial \varphi_{n-1}}\right)}{D(a_1, \ldots a_{n-1})} = \frac{D\left(\dfrac{\partial \omega}{\partial a_1}, \ldots \dfrac{\partial \omega}{\partial a_{n-1}}\right)}{D(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1})} \mathrel{\equiv\!\!\!|\!\!\!\equiv} 0. \text{ »} \tag{79}$$

De là découlent la sixième et la septième thèses. La sixième est la conséquence de la cinquième.

Sixième thèse.

« Étant donnée l'intégrale complète (56) de l'équation (60) sous la forme :

$$z = \theta(x_1, x_2, \ldots x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}) + \alpha_n, \tag{80}$$

$$\frac{D(\theta_1, \ldots \theta_{k-1}, \theta_{k+1}, \ldots \theta_n)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1})} \mathrel{\equiv\!\!\!|\!\!\!\equiv} 0, \tag{81}$$

alors, en substituant dans la relation (80) à la place de :

$$x_1, \ldots x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots x_n, z, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}, \alpha_n \tag{82}$$

les expressions :

$$\varphi_1, \ldots \varphi_{k-1}, d, \varphi_k, \ldots \varphi_{n-1}, \varphi_n, a_1, \ldots a_{n-1}, -a_n \tag{83}$$

ou les expressions :

$$a_1, \ldots a_{k-1}, d, a_k, \ldots a_{n-1}, a_n, \varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}, -\varphi_n, \tag{84}$$

nous obtiendrons les intégrales complètes :

$$\theta(\varphi_1, \ldots \varphi_{k-1}, d, \varphi_k, \ldots \varphi_{n-1}, a_1, \ldots a_{n-1}) - \varphi_n - a_n = 0, \tag{85}$$

$$\theta(a_1, \ldots a_{k-1}, d, a_k, \ldots a_{n-1}, \varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}) - \varphi_n - a_n = 0 \tag{86}$$

de l'équation linéaire (20) ».

Septième thèse.

« Étant donnée une intégrale complète :

$$z = \Phi(x_1, \ldots x_{n-1}, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}) \tag{87}$$

$$\frac{D(\Phi_1, \ldots \Phi_{n-1})}{D(\alpha_1, \ldots \alpha_{n-1})} \equiv\!\!\!\!/\;\; 0 \tag{88}$$

d'une équation non linéaire aux dérivées partielles du premier ordre :

$$f(x_1, \ldots x_{n-1}, z, p_1, p_{n-1}) = 0, \tag{89}$$

les relations :

$$\Phi(\varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}, a_1, \ldots a_{n-1}) - \varphi_n - a_n = 0, \tag{90}$$

$$\Phi(a_1, \ldots a_{n-1}, \varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}) - \varphi_n - a_n = 0 \tag{91}$$

sont les intégrales complètes de l'équation linéaire (20) ».

Exemple cinquième. — La relation :

$$z = -\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{x_1} + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3, \tag{92}$$

$$\frac{D(\theta_1, \theta_2)}{D(\alpha_1, \alpha_2)} \equiv\!\!\!\!/\;\; 0, \quad \frac{D(\theta_2, \theta_3)}{D(\alpha_1, \alpha_2)} \equiv\!\!\!\!/\;\; 0, \quad \frac{D(\theta_3, \theta_1)}{D(\alpha_1, \alpha_2)} \equiv\!\!\!\!/\;\; 0$$

est une intégrale (80) de l'équation non linéaire aux dérivées partielles du premier ordre :

$$p_1 x_1^2 = p_2^2 + p_3^2. \tag{93}$$

Les relations :

$$\varphi_3 = -\frac{a_1^2 + a_2^2}{\varphi_1} + a_1\varphi_2 + l \,, \quad a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 - \varphi_3 = m \,, \quad \varphi_3 = -\frac{a_1^2 + a_2^2}{\varphi_1} + a_2\varphi_2 + n \tag{94}$$
$$l = a_2 d - a_3 \qquad m = a_3 + \frac{a_1^2 + a_2^2}{d} \qquad n = a_1 d - a_3$$

et les relations :

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{a_1} + a_2\varphi_1 + d\varphi_2 - \varphi_3, \\ a_3 &= -\frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{d} + a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 - \varphi_3, \\ a_3 &= -\frac{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}{a_1} + d\varphi_1 + a_2\varphi_2 - \varphi_3 \end{aligned} \tag{95}$$

sont les intégrales complètes de l'équation (38).

Exemple sixième. — En disposant de l'intégrale complète :

$$z = (x + \alpha)(y + \beta) \tag{96}$$
$$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2)}{D(\alpha, \beta)} \equiv\not\equiv 0$$

de l'équation non linéaire :

$$pq = z \tag{97}$$

à deux variables indépendantes, il est facile de construire l'intégrale complète :

$$(\varphi_1 + a_1)(\varphi_2 + a_2) - \varphi_3 - a_3 = 0 \tag{98}$$

de l'équation linéaire (38) à trois variables indépendantes.

§ 2. — *Sur les intégrales complètes des systèmes complets d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre.*

Posons, que le système :

$$\begin{aligned} X_1^1 p_1 + X_2^1 p_2 + \dots + X_n^1 p_n &= Z_1, \\ X_1^2 p_1 + X_2^2 p_2 + \dots + X_n^2 p_n &= Z_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_1^s p_1 + X_2^s p_2 + \dots + X_n^s p_n &= Z_s \end{aligned} \tag{99}$$

est un système complet d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, l'intégrale générale de celui-ci étant

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_m) = 0, \tag{100}$$

$$\varphi_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots x_n, z),$$

$$\Phi = \text{une fonction arbitraire des arguments},$$

$$m = n - s + 1.$$

Nous affirmons qu'il admet l'intégrale complète la plus simple :

$$a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \dots a_{m-1}\varphi_{m-1} + \varphi_m + a_m = 0, \tag{101}$$

où $a_1, a_2, \dots a_m$ sont des constantes arbitraires, et, généralement parlant, l'intégrale complète :

$$\Omega(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_m, a_1, a_2, \dots a_m) = 0. \tag{102}$$

Dans quelles circonstances la relation (102) représente-t-elle une intégrale complète du système (99)?

La relation :

$$V(z, x_1, x_2, \dots x_n, a_1, a_2, \dots a_m) = 0, \tag{103}$$

dont la différentiation par rapport aux variables $x_1, x_2, \dots x_n$ donne les égalités :

$$V_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial z} p_1 = 0, \dots V_n = \frac{\partial V}{\partial x_n} + \frac{\partial V}{\partial z} p_n = 0, \tag{104}$$

est une intégrale complète, quand un des déterminants d'ordre m de la matrice :

$$\left| \begin{array}{llll} \frac{\partial V}{\partial a_1}, & \frac{\partial V}{\partial a_2}, & \dots & \frac{\partial V}{\partial a_m} \\ \frac{\partial V_1}{\partial a_1}, & \frac{\partial V_1}{\partial a_2}, & \dots & \frac{\partial V_1}{\partial a_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial V_j}{\partial a_1}, & \frac{\partial V_j}{\partial a_2}, & \dots & \frac{\partial V_j}{\partial a_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial V_n}{\partial a_1}, & \frac{\partial V_n}{\partial a_2}, & \dots & \frac{\partial V_n}{\partial a_m} \end{array} \right| \tag{105}$$

n'est pas nul d'après ces égalités (103), (104).

En différentiant l'intégrale (102) par rapport à $x_1, x_2, \dots x_n$, nous aurons les équations :

$$\Omega_1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dx_1} = 0, \dots \Omega_n = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi_i} \frac{d\varphi_i}{dx_n} = 0. \tag{106}$$

Puisque les dérivées

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi_1}, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi_{m-1}}, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi_m}$$

ne sont pas nulles, alors, en les éliminant de m des égalités (106), par exemple, des égalités :

$$\Omega_{g_1} = 0, \quad \Omega_{g_2} = 0, \quad \ldots \quad \Omega_{g_m} = 0, \tag{107}$$

nous arriverons à une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_{g_1}}, & \frac{d\varphi_2}{dx_{g_1}}, & \ldots & \frac{d\varphi_{m-1}}{dx_{g_1}}, & \frac{d\varphi_m}{dx_{g_1}} \\ \frac{d\varphi_1}{dx_{g_2}}, & \frac{d\varphi_2}{dx_{g_2}}, & \ldots & \frac{d\varphi_{m-1}}{dx_{g_2}}, & \frac{d\varphi_m}{dx_{g_2}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d\varphi_1}{dx_{g_{m-1}}}, & \frac{d\varphi_2}{dx_{g_{m-1}}}, & \ldots & \frac{d\varphi_{m-1}}{dx_{g_{m-1}}}, & \frac{d\varphi_m}{dx_{g_{m-1}}} \\ \frac{d\varphi_1}{dx_{g_m}}, & \frac{d\varphi_2}{dx_{g_m}}, & \ldots & \frac{d\varphi_{m-1}}{dx_{g_m}}, & \frac{d\varphi_m}{dx_{g_m}} \end{vmatrix} = 0. \tag{108}$$

La relation (108) a lieu vu les égalités (107) : elle est la suite des relations (107).

Pour résoudre la question, si l'intégrale (102) est complète, il est nécessaire d'évaluer les déterminants d'ordre m de la matrice :

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial\Omega}{\partial a_1}, & \ldots & \frac{\partial\Omega}{\partial a_m} \\ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_i \partial a_1} \frac{d\varphi_i}{dx_1}, & \ldots & \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_i \partial a_m} \frac{d\varphi_i}{dx_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_i \partial a_1} \frac{d\varphi_i}{dx_n}, & \ldots & \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_i \partial a_m} \frac{d\varphi_i}{dx_n} \end{Vmatrix}. \tag{109}$$

Les déterminants :

$$\frac{D(\Omega_{g_1}, \Omega_{g_2}, \ldots \Omega_{g_m})}{D(a_1, a_2, \ldots a_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_1\partial a_1}, & \ldots & \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_m\partial a_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_1\partial a_m}, & \ldots & \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_m\partial a_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_{g_1}}, & \ldots & \frac{d\varphi_m}{dx_{g_1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d\varphi_1}{dx_{g_m}}, & \ldots & \frac{d\varphi_m}{dx_{g_m}} \end{vmatrix} \tag{110}$$

sont nuls d'après les égalités (107).

Les déterminants :

$$\frac{D\left(\Omega, \Omega_{g_1}, \ldots \Omega_{g_{j-1}}, \Omega_{g_{j+1}}, \ldots \Omega_{g_m}\right)}{D(a_1, a_2, \ldots a_m)} \tag{111}$$
$$j = 1, 2, \ldots m,$$

de par les relations :

$$\Omega_{g_1} = 0, \ldots \Omega_{g_{j-1}} = 0, \Omega_{g_{j+1}}, \ldots \Omega_{g_m} = 0, \tag{112}$$

sont tels que

$$\frac{D\left(\Omega, \Omega_{g_1}, \ldots \Omega_{g_{j-1}}, \Omega_{g_{j+1}}, \ldots \Omega_{g_m}\right)}{D(a_1, a_2, \ldots a_m)}$$

soit égal à

$$\frac{(-1)^{m-k}}{\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi_k}} \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_{g_1}}, & \ldots & \frac{d\varphi_{k-1}}{dx_{g_1}}, & \frac{d\varphi_{k+1}}{dx_{g_1}}, & \ldots & \frac{d\varphi_m}{dx_{g_1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi_1}{dx_{g_{j-1}}}, & \ldots & \frac{d\varphi_{k-1}}{dx_{g_{j-1}}}, & \frac{d\varphi_{k+1}}{dx_{g_{j-1}}}, & \ldots & \frac{d\varphi_m}{dx_{g_{j-1}}} \\ \frac{d\varphi_1}{dx_{g_{j+1}}}, & \ldots & \frac{d\varphi_{k-1}}{dx_{g_{j+1}}}, & \frac{d\varphi_{k+1}}{dx_{g_{j+1}}}, & \ldots & \frac{d\varphi_m}{dx_{g_{j+1}}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi_1}{dx_{g_m}}, & \ldots & \frac{d\varphi_{k-1}}{dx_{g_m}}, & \frac{d\varphi_{k-1}}{dx_{g_m}}, & \ldots & \frac{d\varphi_m}{dx_{g_m}} \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi_1}, & \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi_2}, & \ldots & \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi_m}, & 0 \\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_1\partial a_1}, & \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_2\partial a_1}, & \ldots & \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_m\partial a_1}, & \frac{\partial\Omega}{\partial a_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_1\partial a_{m-1}}, & \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_2\partial a_{m-1}}, & \ldots & \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_m\partial a_{m-1}}, & \frac{\partial\Omega}{\partial a_{m-1}} \\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_1\partial a_m}, & \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_2\partial a_m}, & \ldots & \frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_m\partial a_m}, & \frac{\partial\Omega}{\partial a_m} \end{vmatrix} \tag{113}$$
$$k = 1, 2, \ldots m.$$

De là la conclusion.

E) « La relation :

$$\Omega(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_m, a_1, a_2, \dots a_m) = 0 \tag{114}$$

est une intégrale complète d'un système complet d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\begin{array}{c} X_1^1 p_1 + X_2^1 p_2 + \dots X_n^1 p_n = Z_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_1^s p_1 + X_2^s p_2 + \dots X_n^s p_n = Z_s, \\ s = n - m + 1, \end{array} \tag{115}$$

dont l'intégrale générale est :

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n) = 0, \tag{116}$$

au cas où le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\Omega}{\partial\varphi_1}, & \dfrac{\partial\Omega}{\partial\varphi_2}, & \dots & \dfrac{\partial\Omega}{\partial\varphi_n}, & 0 \\ \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_1\partial a_1}, & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_2\partial a_1}, & \dots & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_n\partial a_1}, & \dfrac{\partial\Omega}{\partial a_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_1\partial a_{m-1}}, & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_2\partial\varphi_{m-1}}, & \dots & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_m\partial a_{m-1}}, & \dfrac{\partial\Omega}{\partial a_{m-1}} \\ \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_1\partial a_m}, & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_2\partial a_m}, & \dots & \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi_m\partial a_m}, & \dfrac{\partial\Omega}{\partial a_m} \end{vmatrix} \tag{117}$$

n'est pas nul d'après la relation (114).

Puisque le déterminant (117) est symétrique par rapport aux

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_m \quad \text{et aux} \quad a_1, a_2, \dots a_m,$$

on peut les transposer dans la relation (114) ».

Exemple septième. — L'égalité (37) :

$$(\varphi_1 - a_1)^2 + (\varphi_2 - a_2)^2 + (\varphi_3 - a_3)^2 = R^2 \tag{118}$$

satisfait aux conditions A), E).

Si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont des fonctions indépendantes des arguments x_1, x_2, x_3, z :

$$\varphi_i = \varphi_i(x_1, x_2, x_3, z), \tag{119}$$

l'égalité (118) est une intégrale complète de l'équation linéaire (38).

Si l'on regarde $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ comme fonctions d'un plus grand nombre d'arguments, par exemple : x_1, x_2, x_3, x_4, z :

$$\varphi_i = \varphi_i(x_1, x_2, x_3, x_4, z), \tag{120}$$

alors l'égalité (118) est une intégrale complète d'un système complet des équations linéaires :

$$\begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1}, & \frac{d\varphi_2}{dx_1}, & \frac{d\varphi_3}{dx_1} \\ \frac{d\varphi_1}{dx_2}, & \frac{d\varphi_2}{dx_2}, & \frac{d\varphi_3}{dx_2} \\ \frac{d\varphi_1}{dx_3}, & \frac{d\varphi_2}{dx_3}, & \frac{d\varphi_3}{dx_3} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1}, & \frac{d\varphi_2}{dx_1}, & \frac{d\varphi_3}{dx_1} \\ \frac{d\varphi_1}{dx_2}, & \frac{d\varphi_2}{dx_2}, & \frac{d\varphi_3}{dx_2} \\ \frac{d\varphi_1}{dx_4}, & \frac{d\varphi_2}{dx_4}, & \frac{d\varphi_3}{dx_4} \end{vmatrix} = 0. \tag{121}$$

Réellement, en résolvant dans le système d'équations :

$$\begin{gathered} (\varphi_1 - a_1)^2 + (\varphi_2 - a_2)^2 + (\varphi_3 - a_3)^2 = \mathrm{R}^2, \\ (\varphi_1 - a_1)\frac{d\varphi_1}{dx_1} + (\varphi_2 - a_2)\frac{d\varphi_2}{dx_1} + (\varphi_3 - a_3)\frac{d\varphi_3}{dx_1} = 0, \\ (\varphi_1 - a_1)\frac{d\varphi_1}{dx_2} + (\varphi_2 - a_2)\frac{d\varphi_2}{dx_2} + (\varphi_3 - a_3)\frac{d\varphi_3}{dx_2} = 0, \\ (\varphi_1 - a_1)\frac{d\varphi_1}{dx_3} + (\varphi_2 - a_2)\frac{d\varphi_2}{dx_3} + (\varphi_3 - a_3)\frac{d\varphi_3}{dx_3} = 0, \\ (\varphi_1 - a_1)\frac{d\varphi_1}{dx_4} + (\varphi_2 - a_2)\frac{d\varphi_2}{dx_4} + (\varphi_3 - a_3)\frac{d\varphi_3}{dx_4} = 0, \end{gathered} \tag{122}$$

les trois premières équations par rapport aux : $\varphi_1 - a_1, \varphi_2 - a_2, \varphi_3 - a_3$:

$$\frac{\varphi_1 - a_1}{\Delta_1} = \frac{\varphi_2 - a_2}{\Delta_2} = \frac{\varphi_3 - a_3}{\Delta_3} = \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}} \tag{123}$$

et en substituant leurs expressions dans la quatrième et la cinquième, nous aurons les équations (121).
